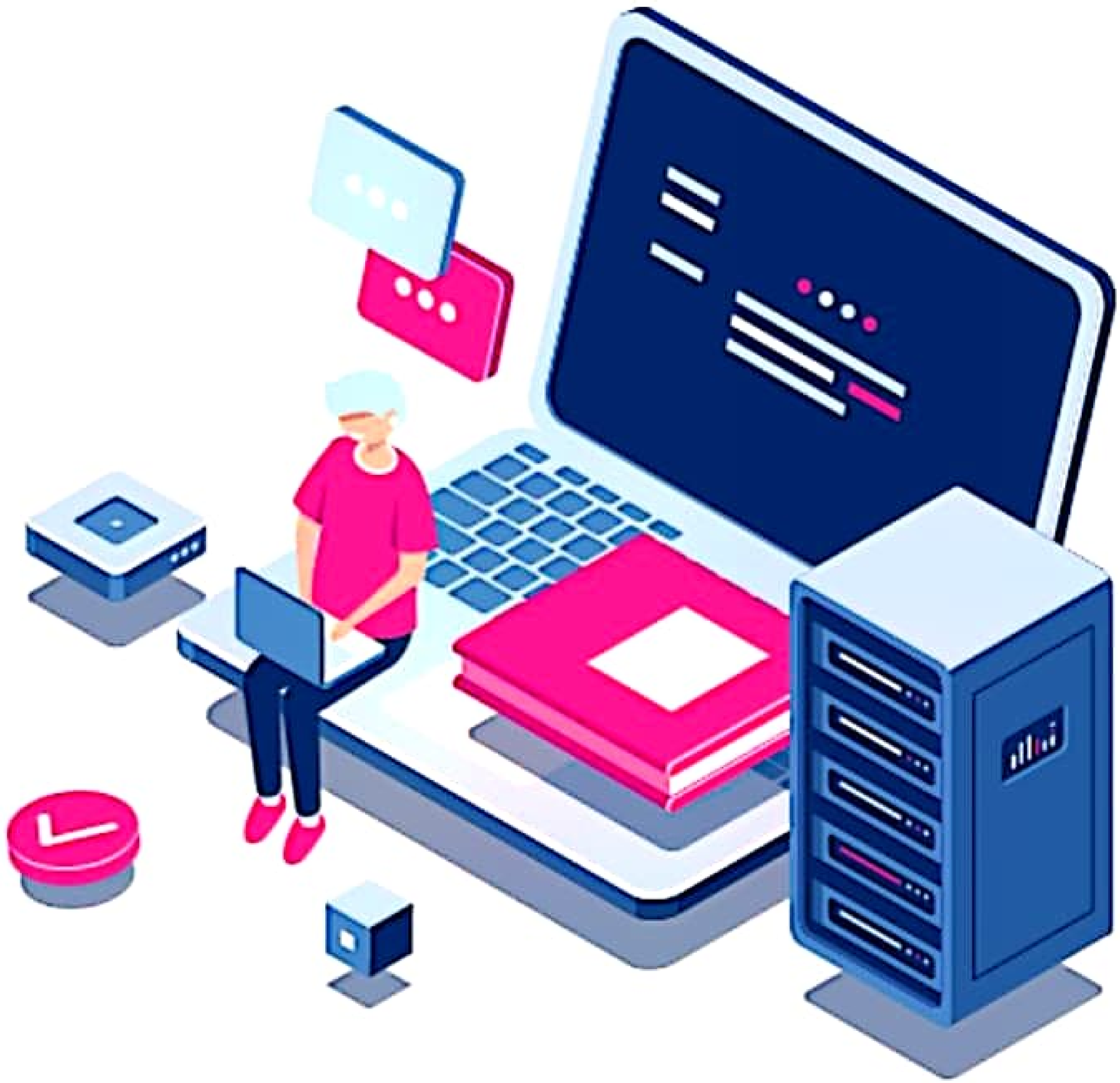
سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي



القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: @BAK1117_bot

أهم أنماط الأفكار

① $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$

$D = [1, +\infty[$

• التابع f معرف ومستمر على المجال $]1, +\infty[$ $[1, +\infty[$

• سندرس فيما إذا كان التابع قابل للاشتقاق عندما $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

عدد ← قابل للاشتقاق

∞ ← غير قابل للاشتقاق

$f(1) = 2\sqrt{1-1} - 1 = -1$

$f(1) = -1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x-1} - x - (-1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x-1} - x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1} + \frac{-x+1}{x-1}$$

$$\lim \frac{2\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})} + \frac{-(x-1)}{(x-1)}$$

نخرج - عامل مشترك

$(x-1) = (\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{x-1}} + (-1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{x-1}} - 1 = \infty$$

$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

ومنه التابع غير قابل للاشتقاق عندما $x = 1$

$$f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$$

• التابع مستمر على المجال $[1,+\infty[$

• واشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$

• نكتب نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف

$$f(1) = 2\sqrt{1-1} - 1$$
$$= 2(0) - 1$$
$$= -1$$

$f(1) = -1 \longrightarrow$ حسبنا صورة لأن المجال مغلق عند الواحد

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

• لإزالة حالة عدم التعيين نخرج x^2 من تحت الجذر عامل مشترك

$$\lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - x$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2|x|\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x$$

عندما نأخذ النهاية عند $+\infty$ فإن $|x| = +x$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x$$

نخرج x عامل مشترك

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

$$= +\infty\left(2\sqrt{0-0} - 1\right)$$

$$= +\infty(-1)$$

$$= -\infty$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

• نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x-1}} - 1$$

نختصر

نعدم المشتق:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(\sqrt{x-1})} = 0$$

نوحد المقامات

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0$$

ينعدم الكسر عندما ينعدم البسط

$1 - \sqrt{x-1} = 0$

$1 = \sqrt{x-1}$

$\sqrt{x-1} = 1$

نربع الطرفين

$x - 1 = 1$

$x = 2$

عن

$f(2) = 2\sqrt{2-1} - 2$
$= 2\sqrt{1} - 2$
$= 2 - 2 = 0$

$f(2) = 0$

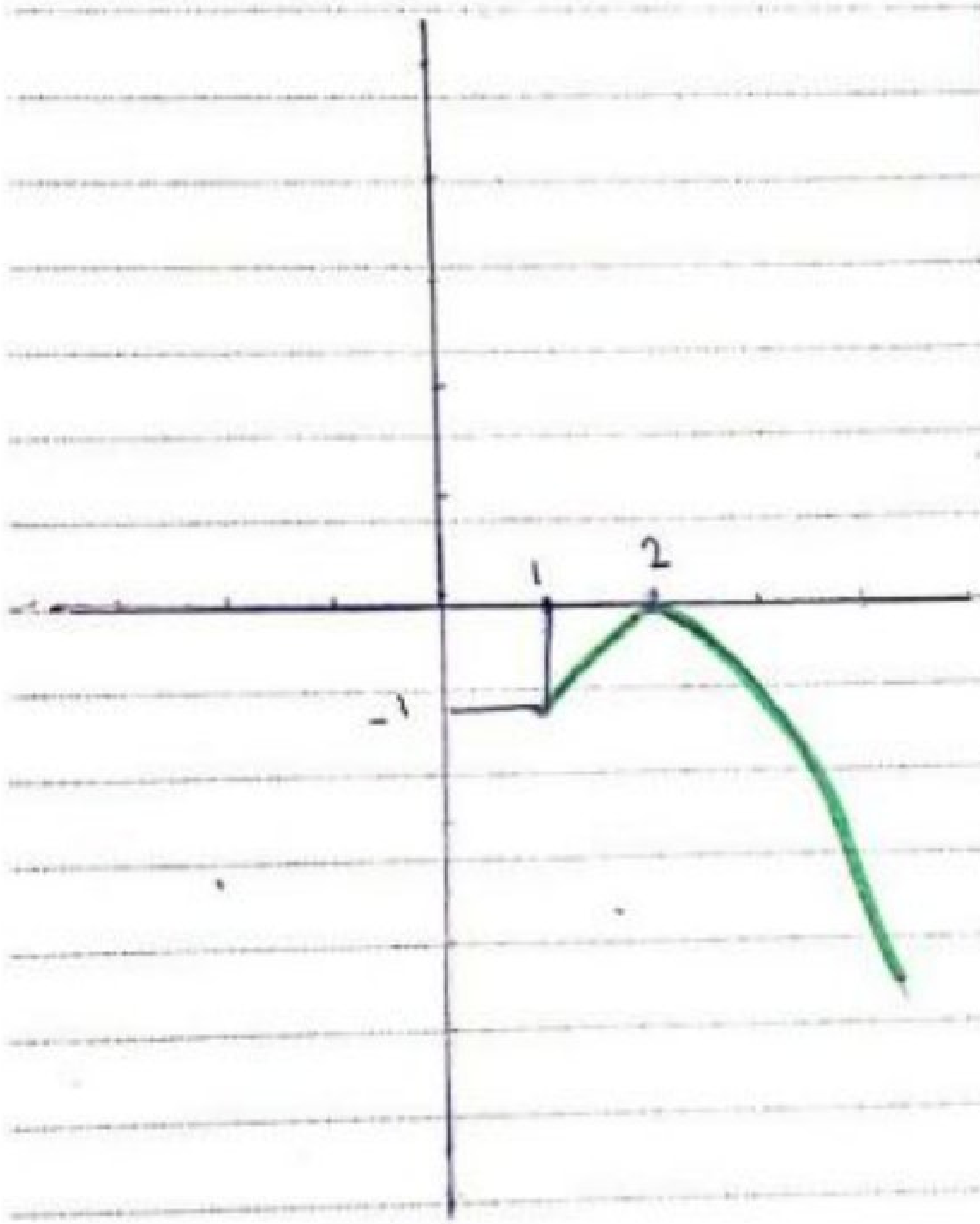
نرسم جدول تغيرات التابع

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

رسم الخط البياني للتابع:

$(2,0)$ نقطة مساعدة

$(1,-1)$ نقطة مساعدة



② $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x+1}$

التابع f مستمر واشتقاقي على.

$\mathbb{R} :]-\infty , +\infty[$

• نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \frac{0}{0+1}$

$= -\infty + 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

لأن

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{+\infty}{+\infty}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لأن

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

• نشتق ونعدم المشتق:

$f'(x) = 1 + \frac{(e^x)(e^x+1) - (e^x)(e^x)}{(e^x+1)^2}$

$= 1 + \frac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}}}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

ومنه التابع متزايد تماماً

• نرسم جدول تغيرات التابع.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

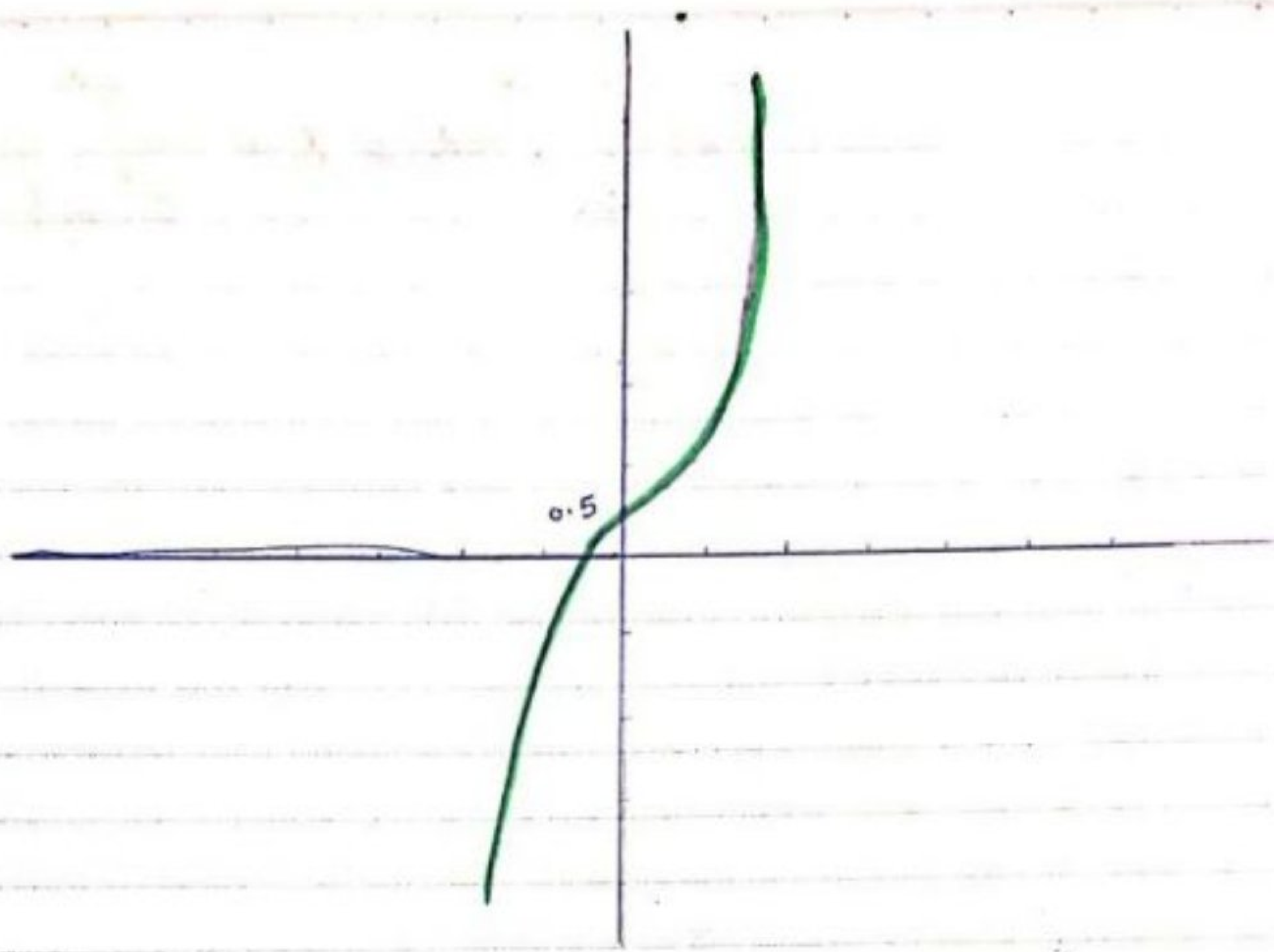
• نرسم الخط البياني للتابع

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + \frac{e^0}{e^0+1}$

$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$e^0 = 1$

نقطة مساعدة $(0, \frac{1}{2})$


0.5

③ $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{2+x}\right)$

• التابع مستمر واشتقاقي على

$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

• نحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

حيث.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{2+x} = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \ln\left(\frac{-2-2}{2-2}\right) = \ln\left(\frac{-4}{0}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \ln\left(\frac{2-2}{2+2}\right) = \ln\left(\frac{0}{4}\right) = \ln(0)$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

• نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{2+x}\right)'}{\left(\frac{x-2}{2+x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{(1)(2+x)-(1)(x-2)}{(2+x)^2}}{\frac{x-2}{2+x}}$$

$$= \frac{\frac{2+x-x+2}{(2+x)^2}}{\left(\frac{x-2}{2+x}\right)}$$

$$= \frac{4}{(2+x)^2} \times \frac{x+2}{x-2}$$ نختصر

$$= \frac{4}{2+x} \times \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{4}{(x+2)(x-2)} > 0$$

متطابقة

• نرسم جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖ ‖	‖ ‖	+
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖ ‖	‖ ‖	$-\infty \nearrow 0$

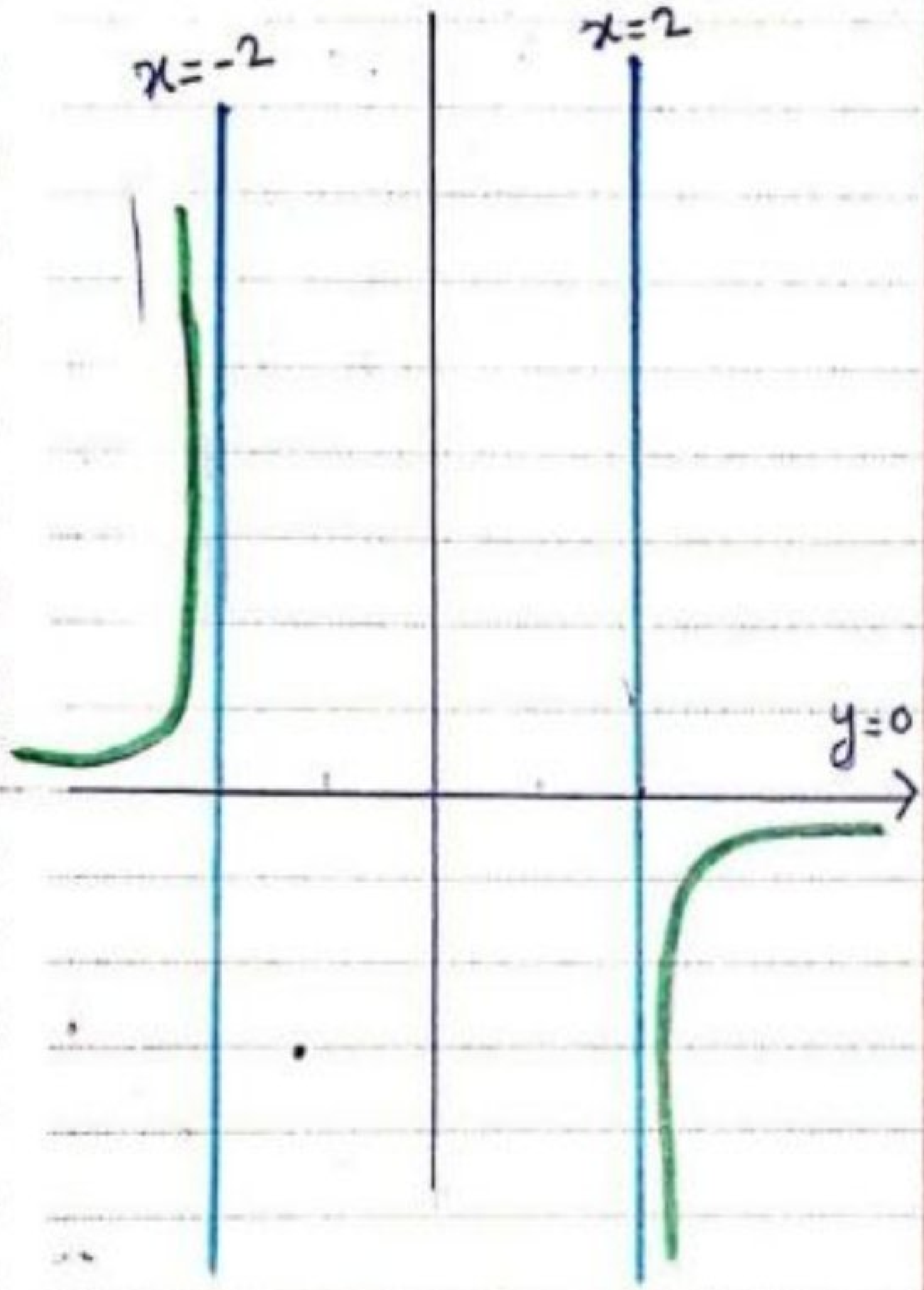
• نلاحظ أن:

$x=-2$ مقارب شاقولي

$x=2$ مقارب شاقولي

$y=0$ مقارب أفقي

• رسم الخط البياني للتابع.



④ $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$

• التابع مستمر واشتقاقي على

$\mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{1+x}$

$= +\infty + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}$

$= +\infty - 1$

$= +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

لأنّ:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = e^{-(-1)} + \frac{1+1}{1-1}$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = e^1 + \frac{2}{0^-} = e - \infty$

$= -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty}$$

• $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = e^1 + \frac{1+1}{1-1}$

$= e + \frac{2}{0^+}$

$= e + \infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty}$$

• $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\infty} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x}$

$= 0 - 1$

$= -1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$$

$y=-1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

لأنّ:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

- نشتق ونعدم المشتق:

$$f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$$

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{(-1)(1+x)-(1)(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= -e^{-x} + \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}$$

$$= -e^{-x} + \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$e^{-x} > 0$

مضروب بسالب

$-e^{-x} < 0$ (أصغر من الصفر)

$$\frac{-2}{(1+x)^2} < 0$$

ومنه المقدار:

$$-e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^2} < 0$$

- نرسم جدول تغيرات التابع:

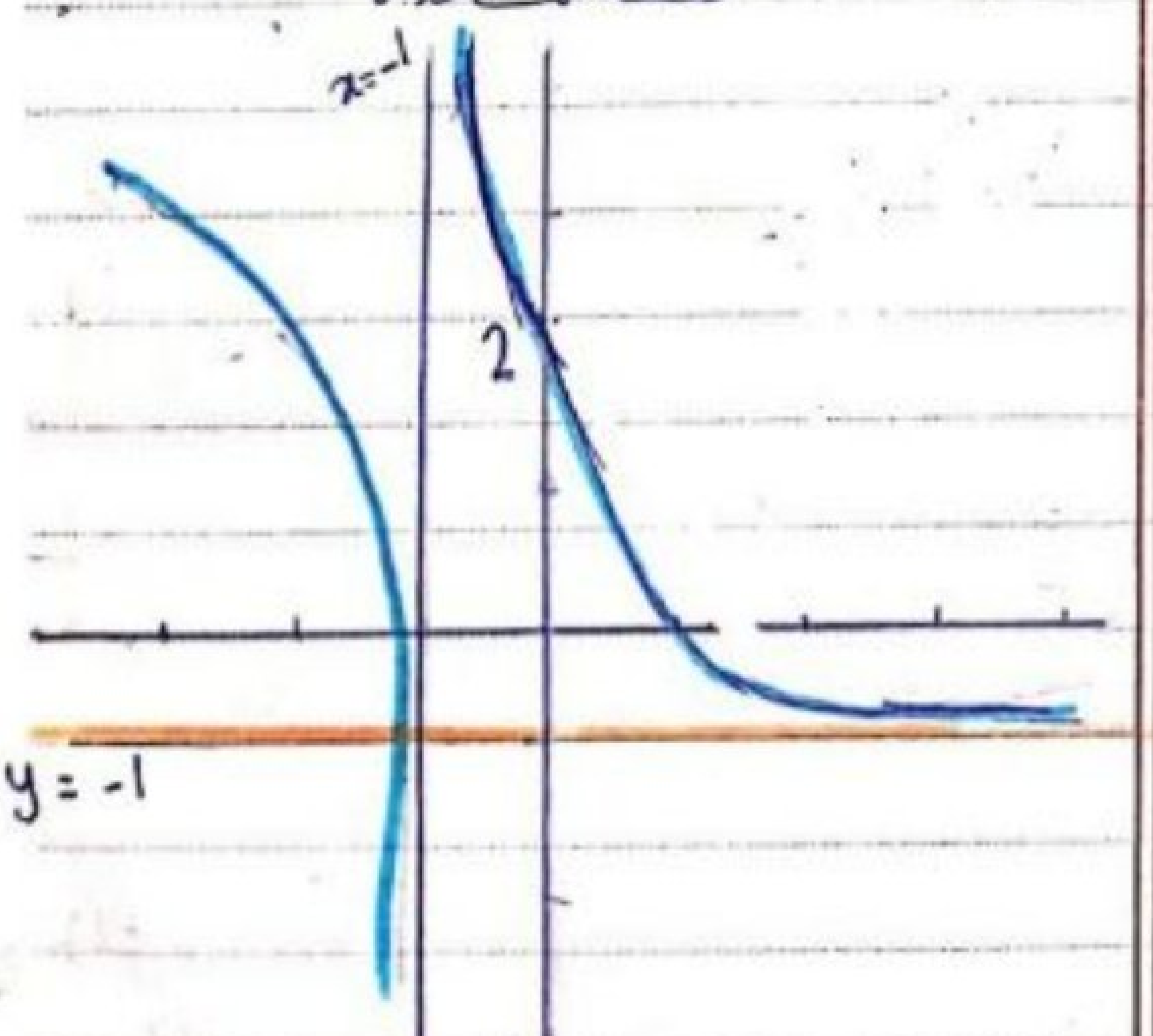
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	-1

رسم الخط البياني

$x = -1$
مقارب شاقولي

$x = 0$
$f(0) = 2$
$(0,2)$
نقطة مساعدة

$y = -1$
مقارب أفقي



5) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

• التابع مستمر واشتقاقي على

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0 - (+\infty)) = -\infty$

• $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

لأنّ

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(+\infty - 0) = +\infty$

• $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

لأنّ

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

• نشتق ونعدم المشتق:

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

بنزله عالمقام نعكس إشارة الأس

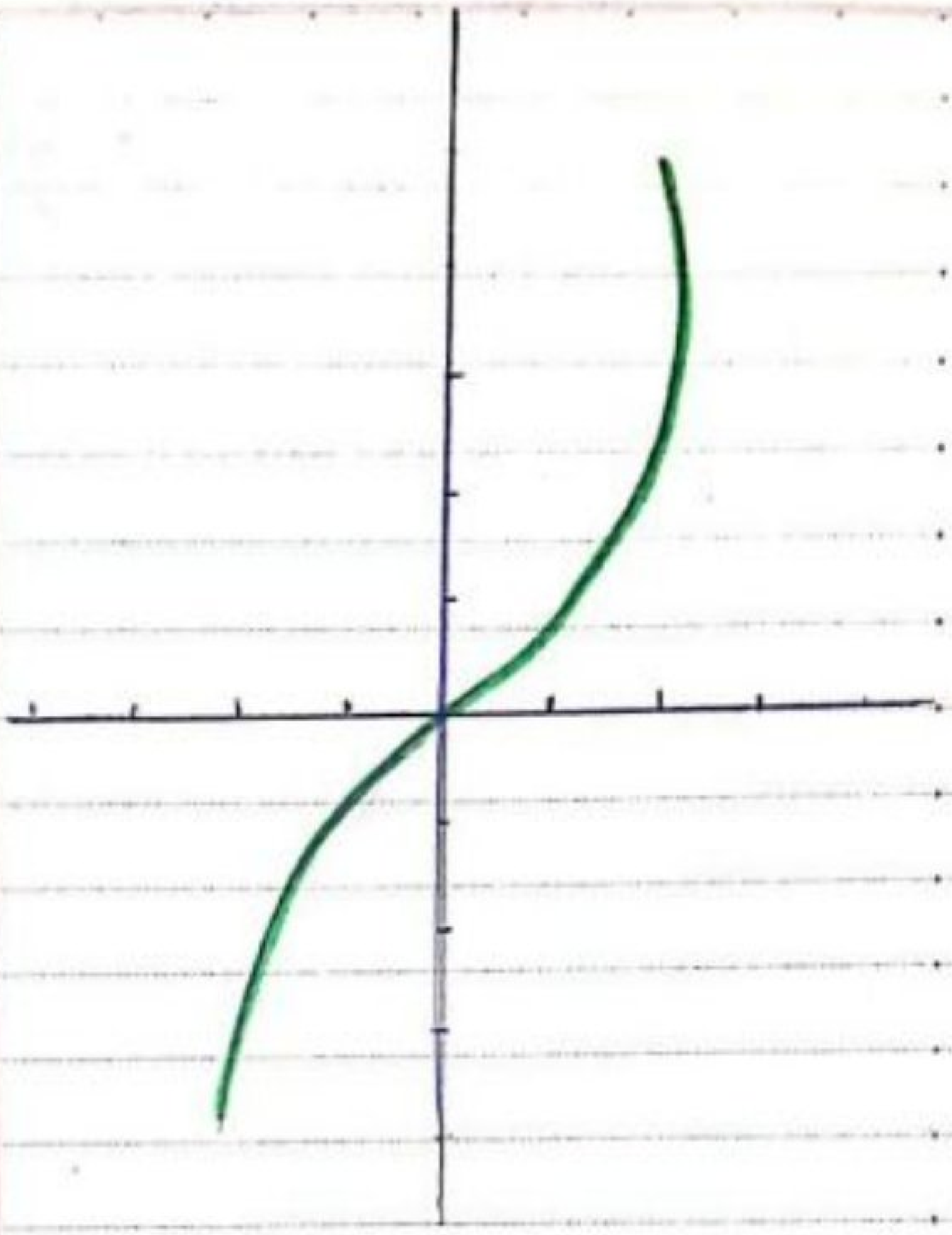
$= \frac{1}{2}(e^{x} + \frac{1}{e^{x}})$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + \frac{1}{e^{x}}) > 0$

$f'(x) > 0$

ومنه التابع متزايد تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



$f(0)=0$

نقطة مساعدة $(0,0)$

5) $f(x) = (x-1)e^x$

- التابع مستمر واشتقاقي على

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)(0)$

حالة عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - e^x$

$= 0$

لأنّ:

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

لأنّ

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- نشتق ونعدم المشتق:

$f(x) = (x-1)\, e^x$

مشتق جداء

$f'(x) = (1)(e^x) + e^x(x-1)$

$= e^x + e^x(x-1)$

$f'(x) = e^x(1 + x - 1)$ نخرج e^x عامل مشترك

$f'(x) = e^x(x)$

$f'(x) = xe^x$

- نعدم المشتق

$xe^x = 0$

$e^x > 0$

ومنه

$x = 0$

- نعوض

$f(0) = (0-1)\, e^0$

$= (-1)(1) = -1$

$e^0 = -1$

• نرسم جدول تغيرات التابع:

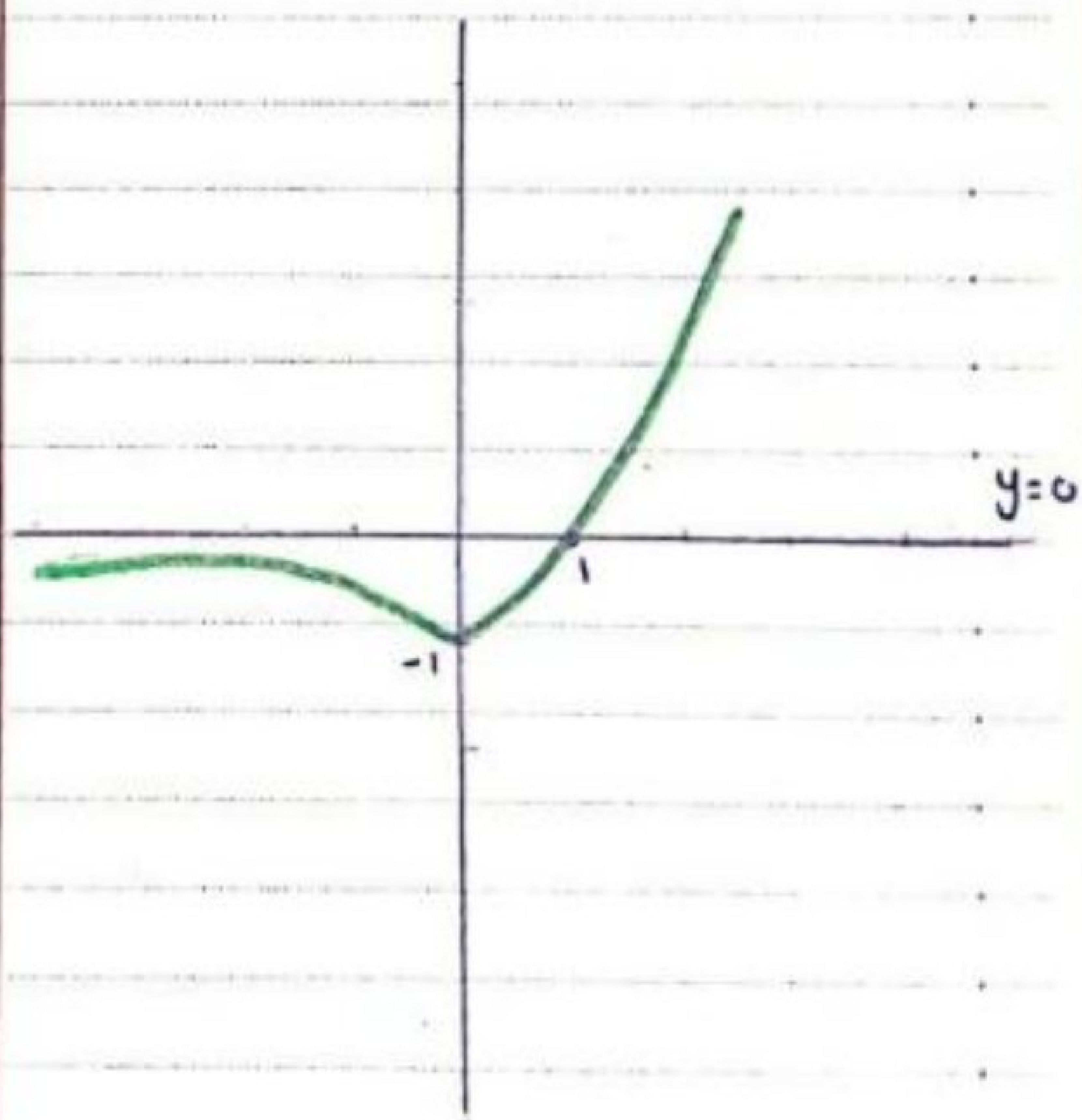
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

رسم الخط البياني

$y=0$ مقارب أفقي

$(0,-1)$ نقطة مساعدة

$(1,0)$ نقطة مساعدة



لايجاد نقطة مساعدة لرسم الخط

$f(x)=0$

$(x-1)e^x=0$

$e^x>0$ دوماً

$x-1=0$

$\Rightarrow x=1$

دوماً $(1,0)$ نقطة مساعدة

7) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

لأنّ

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

لأنّ

$\ln 1 = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

لأنّ

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$

• نشتق وندرس المشتق:

$$f'(x) = \frac{-[(1)(\ln x) + \frac{1}{x}x]}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2}$$

نعدم المشتق:

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2} = 0$$

$-\ln x - 1 = 0$

$\ln x = -1$

$e^{\ln x} = e^{-1}$

$x = e^{-1}$

$e^{\ln x} = x$

نحسب

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e}(-1)}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{e}}$$

$$= (1)\times(-e)$$

$$= -e \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

نرسم جدول تغيرات التابع:

x	0	$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ +	0	− −	$\Vert$	−	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$ ↗	$-e$	↘ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	0

$$\frac{1}{e} \simeq 0.3$$

$$-e \simeq -2.7$$

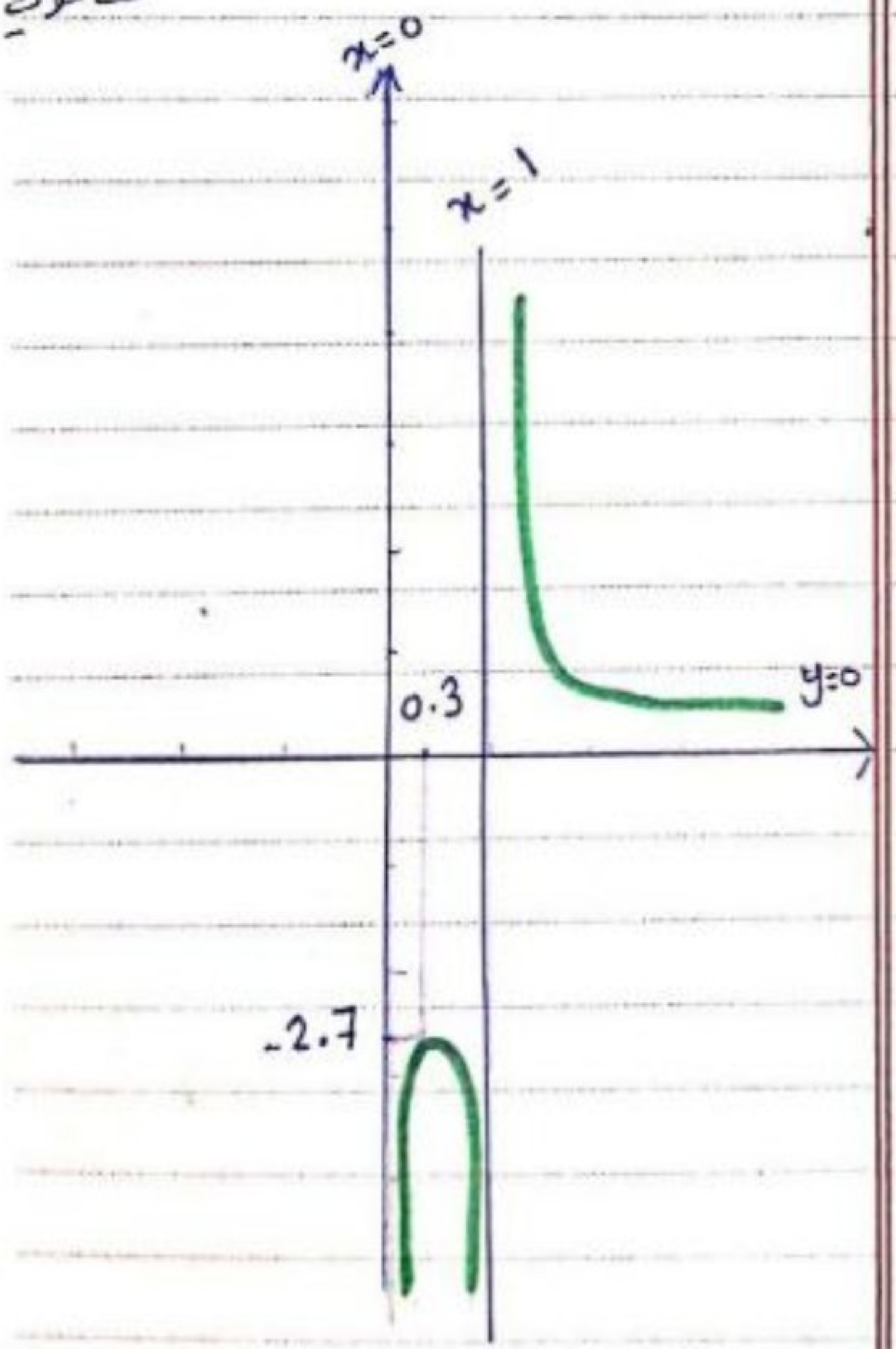
رسم الخط البياني

$x=0$ مقارب شاقولي

$y=0$ مقارب أفقي

$\left(\frac{1}{e}, -e\right)$ نقطة مساعدة

$x=1$ مقارب شاقولي



③ $f(x) = \ln(e^{-x}+1)$

• التابع مستمر و اشتقاقي على

$\mathbb{R} :]-\infty , +\infty[$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

لأنّ

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

• $\ln(0+1) = \ln 1$

• $\ln 1 = 0$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

لأنّ

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

• $\ln(+\infty) = +\infty$

• نشتق ونقدم المشتق:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(e^{-x}+1)}$$

$e^{-x} > 0$

لكن

$-e^{-x} < 0$

ومنه

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$$

ومنه التابع متناقص تماماً.

• نرسم جدول تغيرات التابع

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

رسم الخط البياني

$y = 0$

مقارب أفقي

$x = 0 \Rightarrow f(0) =$

$f(0) = \ln(e^0+1)$

$f(0) = \ln(1+1)$

$= \ln(2)$

$\boxed{(0, \ln 2)}$

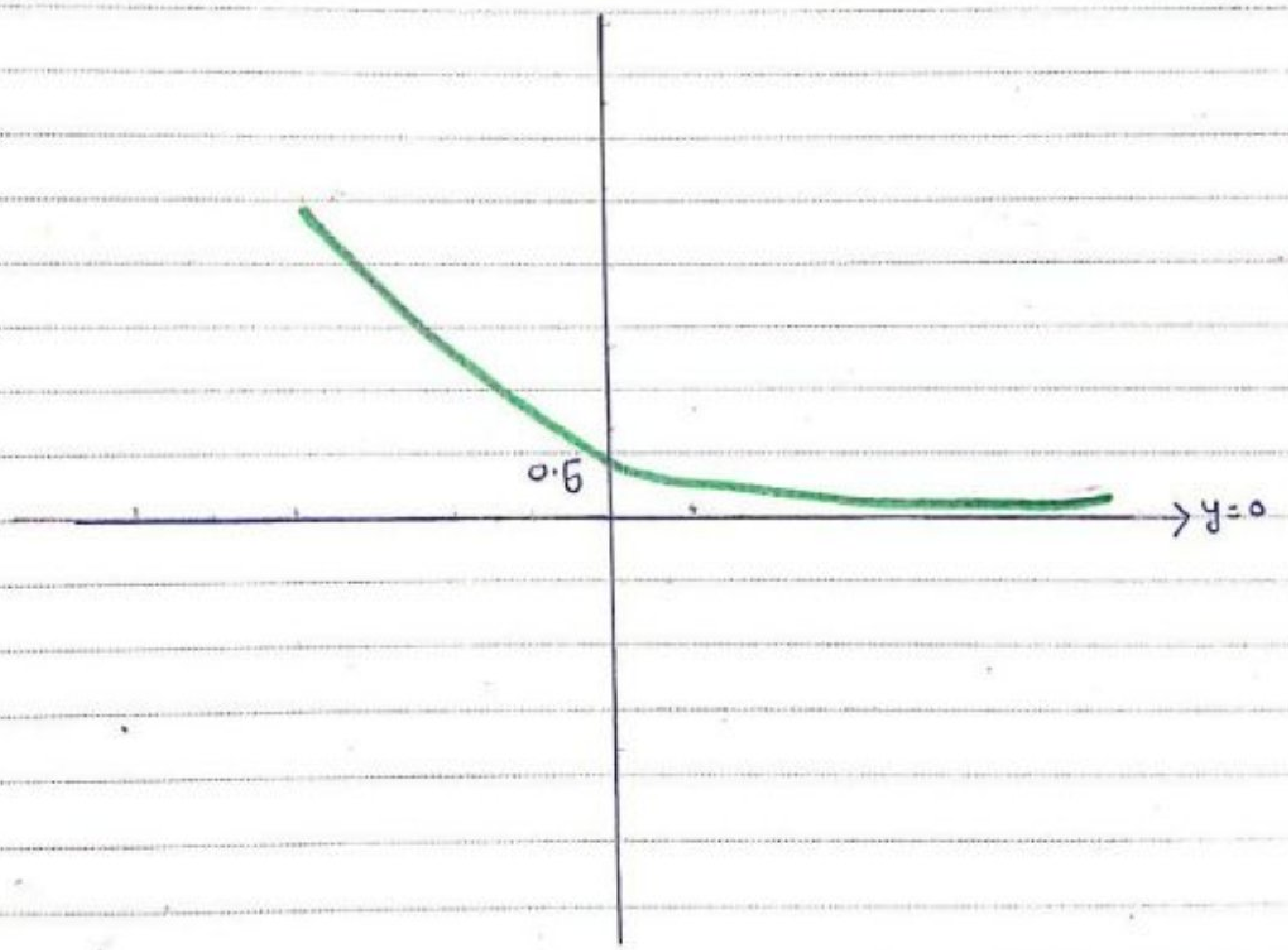
نقطة مساعدة

رسم الخط البياني

$y = 0$
مقارب أفقي

$(0, \ln 2)$
نقطة مساعدة

$\ln 2 \simeq 0.6$



9) $f(x) = exp\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

أي نكتب التابع بالشكل :

$$f(x) = e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

• التابع مستمر واشتقاقي على

$IR =]-\infty , +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

لأن

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

• $e^0 = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

• نشتق ونعدم المشتق :

$$f(x) = e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{(1)(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

نعدم المشتق.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} = 0$$

لكن $e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} > 0$

ومنه $\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$f(1) = e^{\left(\frac{1}{1+1}\right)} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$f(1) = \sqrt{e}$$

$$f(-1) = e^{\left(\frac{-1}{1+1}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

• نرسم جدول تغيرات للتابع

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	$+\sqrt{e}$	↘	1

• رسم الخط البياني

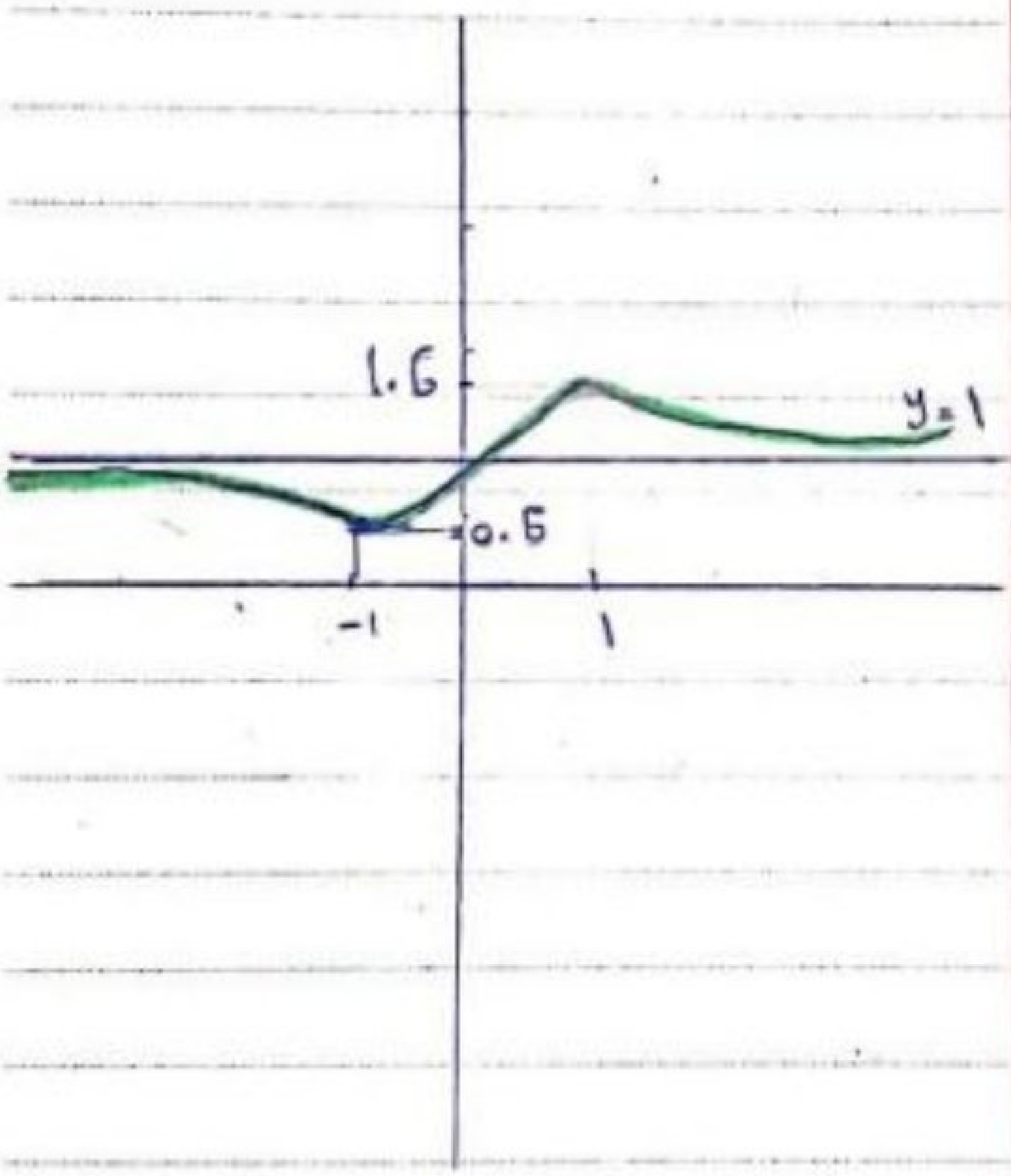
$(1, \sqrt{e})$ نقطة مساعدة

$(-1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ نقطة مساعدة

$y = 1$ مقارب أفقي.

$$\sqrt{e} \simeq 1.6$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$$



(10)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + x - 2}$$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]\ ,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

ومنه $y = 1$ مقارب أفقي.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$$

• $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \frac{(-2)^2 - 2}{(-2)^2 + (-2) - 2}$

$= \frac{4 - 2}{4 - 2 - 2}$

$= \frac{2}{0^+} = +\infty$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty}$$

• $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty}$$

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{(+1)^2 - 2}{(1)^2 + 1 - 2}$

$= \frac{1 - 2}{1 + 1 - 2} = \frac{-1}{0^-}$

$= +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$$

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$$

• نشتق ونعدم المشتق:

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2-2)}{(x^2+x-2)^2}$$

بنحل الناقص

$$f'(x) = \frac{2x^3+2x^2-4x-(2x^3-4x+x^2-2)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2-4x-2x^3+4x-x^2+2}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-x^2+2}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2+2}{(x^2+x-2)^2} > 0$$

$f'(x) > 0$ موجبة

③ نرسم جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	1

رسم الخط البياني

$y=1$ مقارب أفقي

$x=-2$ مقارب شاقولي

$x=1$ مقارب شاقولي

$(0,1)$ نقطة مساعدة

$(\sqrt{2},0)$

$(-\sqrt{2},0)$

نقط مساعدة

• $x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0-2}{0+0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

ومنه $(0,1)$ نقطة مساعدة:

$f(x)=0$

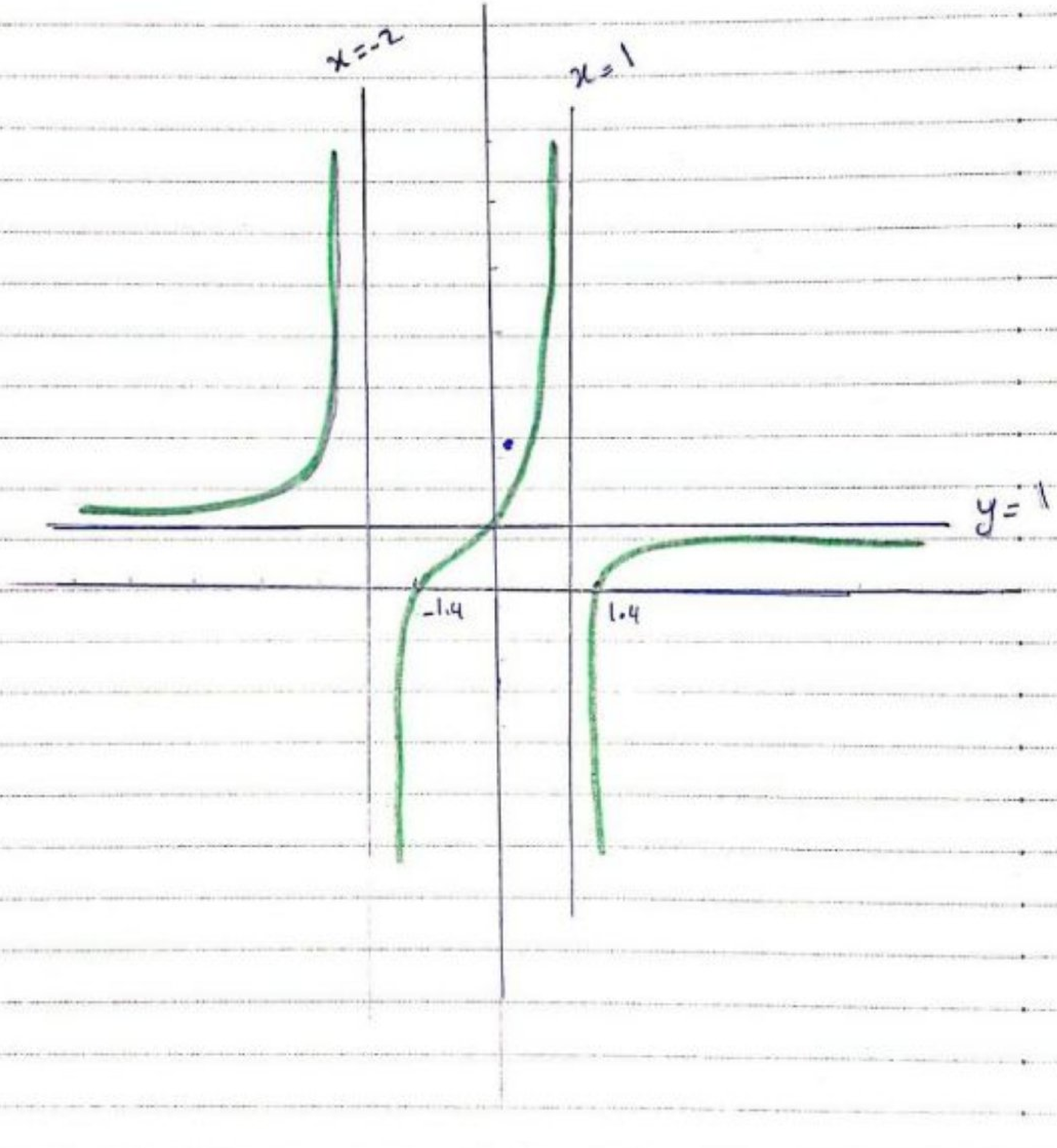
$\Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow x^2-2=0$

$x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt{2} & (\sqrt{2},0) \text{ نقطة مساعدة} \\ -\sqrt{2} & (-\sqrt{2},0) \text{ نقطة مساعدة} \end{cases}$

$\sqrt{2} \simeq 1.4$

$-\sqrt{2} \simeq -1.4$



11

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$$]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \ln(1-1) - 1$$

$$= \ln(0) - 1$$

$$= -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

ومنه

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

نخرج $x+1$ عامل مشترك

$$(x+1)\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x}{x+1}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right]$$

$$= +\infty(0 - 1)$$

$$= +\infty(-1) = -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x+1} : \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

• نشتق ونعدم المشتق :

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

نعدم المشتق :

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} - 1 = 0$$

« نوحد المقامات »

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1}_{(1+x)} = 0$$

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = 0$$

$$\frac{\cancel{1-1} - x}{1+x} = 0$$

$$\frac{-x}{1+x} = 0$$

$$\Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

• نحسب $f(0)$

$$f(0) = \ln(1+0) - 0$$

$$f(0) = \ln(1)$$

$$\ln 1 = 0$$

$$f(0) = 0$$

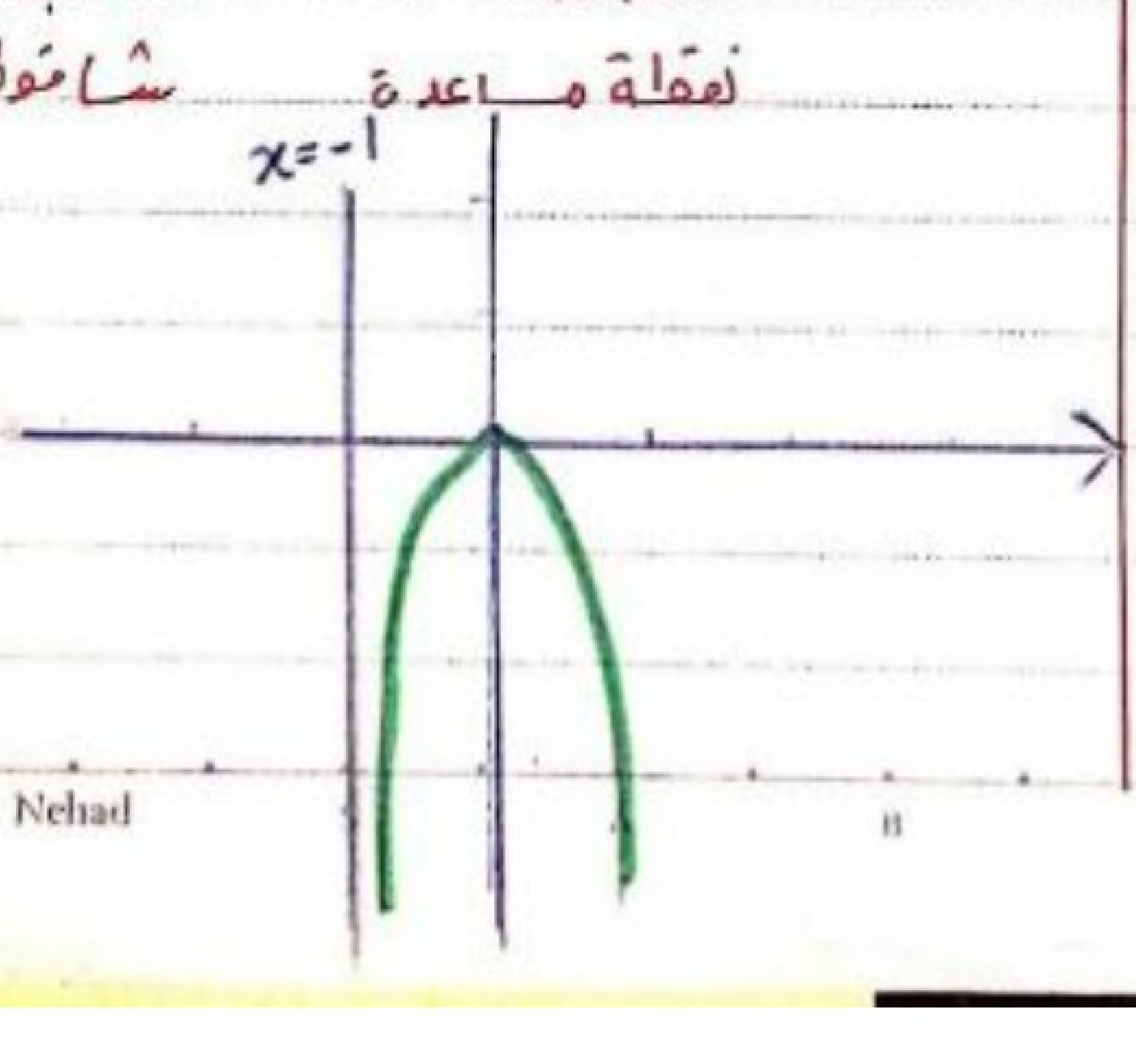
• نرسم جدول تغيرات التابع :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

رسم الخط البياني

$x = -1$
مقارب شاقولي

$(0,0)$
نقطة مساعدة



12

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]0,+\infty[$

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

لأن

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

لأنّ

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

• نشتق ونعدم المشتق :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x) - (1)(\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

نعدم المشتق

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 1 - \ln x = 0$

$\Rightarrow 1 = \ln x$

$e^{\ln x} = e^1$

$x = e$

• نحسب $f(e)$

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

$f(e) = \frac{1}{e}$ $\quad$ $\ln e = 1$

• نرسم جدول تغيرات التابع :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

• نرسم الخط البياني .

$x=0$ مقارب شاقولي

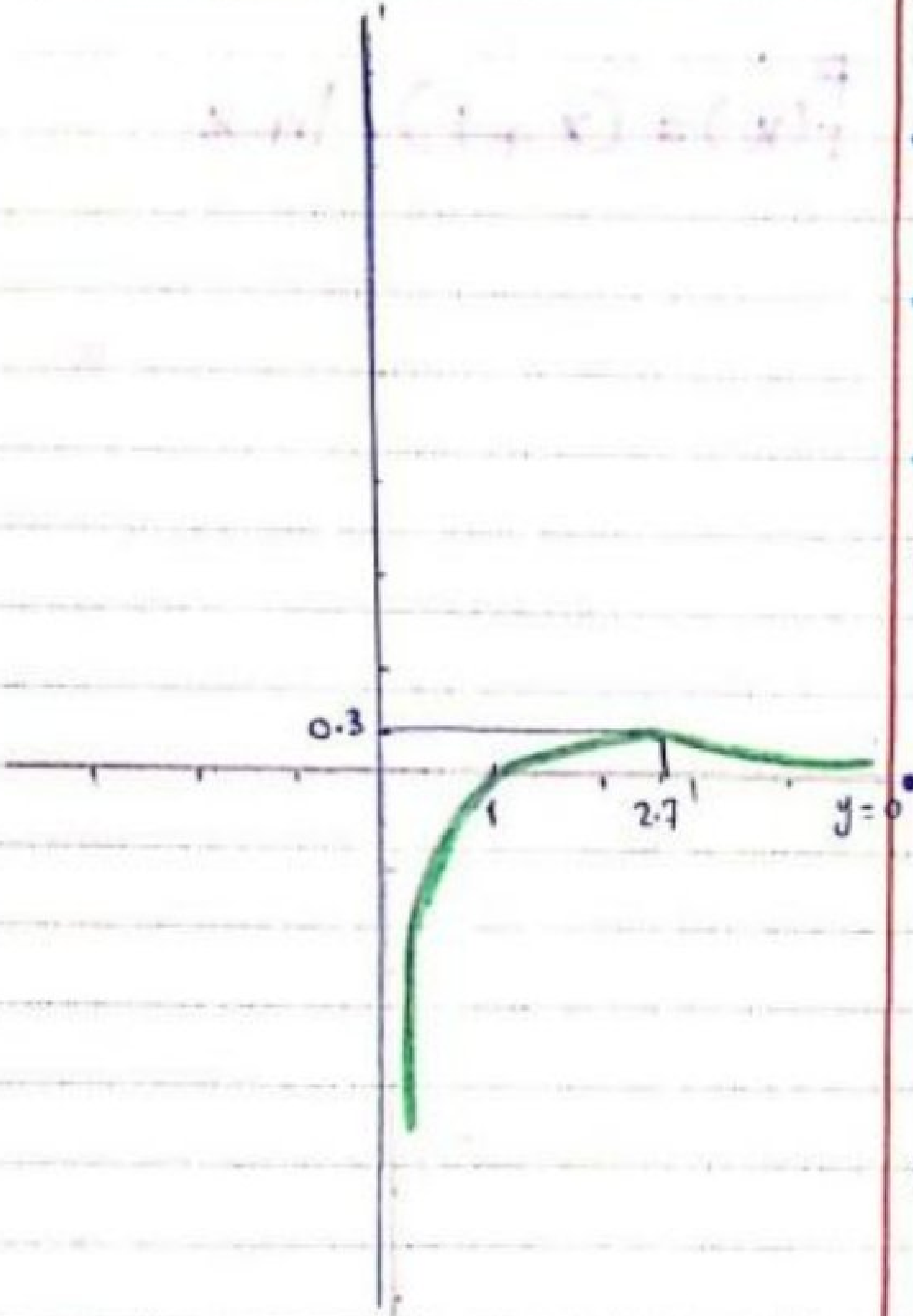
$y=0$ مقارب أفقي

$(1,0)$ نقطة مساعدة

$(e, \frac{1}{e})$ نقطة مساعدة

$e \simeq 2.7$

• $\frac{1}{e} \simeq 0.3$



نقطة مساعدة:

$f(x)=0$

$\frac{\ln x}{x}=0$

$\Rightarrow \ln(x)=0$

$e^{\ln x}=e^0$

$x=1$

$e^0=1$

ومنه $(1,0)$ نقطة مساعدة

13 $f(x) = (x+1)\ln x$

$D :]0, +\infty[$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = (1)(-\infty) = -\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

• نشتق ونعدم المشتق:

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

$$f'(x) = (1)\ln x + \frac{1}{x}(x+1)$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

نفرض تابع:

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(1)(x) - (1)(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x - x - 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2}$$

توحيد مقامات

$$g'(x) = \underset{(x)}{\frac{1}{x}} - \underset{(1)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x-1}{x^2}$$

نعدم

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$g(1) = \ln 1 + \frac{1+1}{1}$$

$$= \ln 1 + 2 \qquad \ln 1 = 0$$

$$g(1) = 2$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	2	↗	

$g(1) = 2$ قيمة حدية محلية صغرى

$$g(x) \geq 2 > 0$$

ومنه $g(x) > 0$

لكن $g(x) = f'(x)$

ومنه

$f'(x) > 0$

ومنه الجدول متزايد تماماً.

● نرسم جدول تغيرات التابع

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

رسم الخط البياني للتابع :

$f(x) = 0$

$(x+1)\ln x = 0$

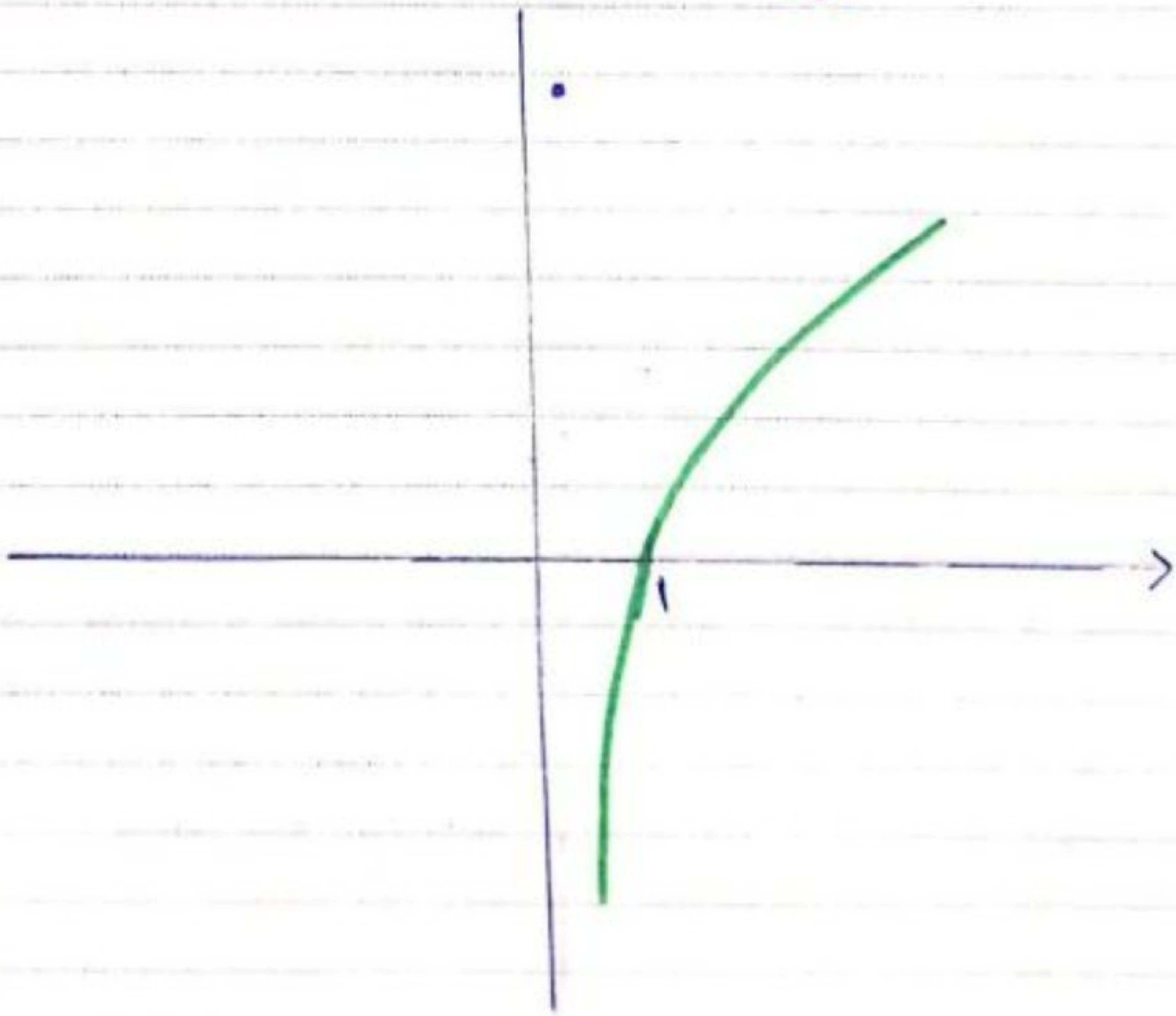
إما $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \rightarrow$ مرفوض خارج مجموعة التعريف

أو $\ln x = 0$

$\Rightarrow e^{\ln x} = e^{0}$ $\quad e^{0}=1$

$\Rightarrow x=1$

ومنه $(1,0)$ نقطة مساعدة



14

$f(x) = x - \ln x$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]0, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - (-\infty)$

$= 0 + \infty$

$= +\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

لأنَّ

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

حالة عدم تعيين.

$f(x) = x - \ln x$

• نخرج x عامل مشترك

$f(x) = x\left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$= x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty(1 - 0)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لأنَّ

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

• نشتق ونعدم المشتق:

• $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

نعدم المشتق:

$f(x) = 0$

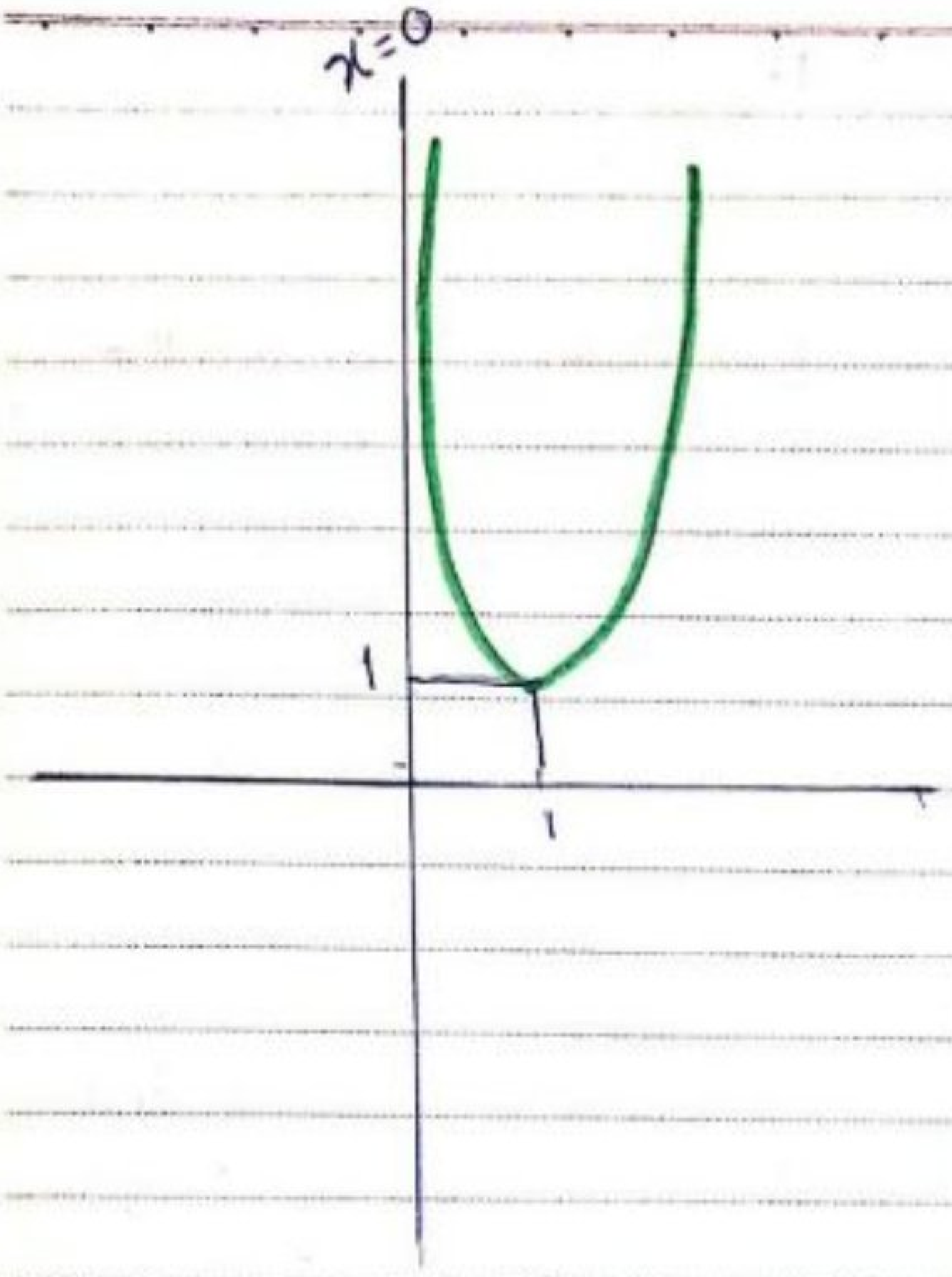
$\Rightarrow \frac{1}{1}_{(x)} - \frac{1}{x} = 0$

توحيد المقامات

$\Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0$

$x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$



نحسب.

$f(1) = 1 - \ln 1$

$f(1) = 1$ $\qquad$ $\ln 1 = 0$

• نرسم جدول تغيرات التابع :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• نرسم الخط البياني للتابع

$x = 0$
مقارب
شاقولي

$(1,1)$
نقطة مساعدة

15

$f(x) = x - x\ln x$

التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$

لأنَّ

$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x - x\ln x$

نخرج x عامل مشترك

$f(x) = x[1 - \ln x]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - \infty)$

$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

لأنَّ

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

نشتق ونعدم المشتق

$f'(x) = 1 - \left((1)(\ln x) + \frac{1}{x}(x)\right)$

$= 1 - (\ln x + 1)$

$= 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

$f'(x) = -\ln x$

نعدم المشتق

$-\ln x = 0$

$\Rightarrow \ln x = 0$

$\Rightarrow e^{\ln x} = e^0$

$e^{\ln x} = x$

$e^0 = 1$

$x = 1$

نحسب $f(1)$

• $f(1) = 1 - (1)\ln(1)$

$= 1 - (1)(0)$

$f(1) = 1$

$\ln 1 = 0$

$f(1) = 1$

• نرسم جدول تغيرات التابع:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

رسم الخط البياني للتابع

$(0,0)$ نقطة مقاربة

$(1,1)$ نقطة مساعدة

$(e,0)$ نقطة مساعدة

$f(x) = 0$

$x - x\ln x = 0$

نخرج x عامل مشترك

$f(x) = 0$

$x(1 - \ln x) = 0$

إما $x = 0 \longrightarrow$ مرفوض ليس من مجموعة التعريف

أو

$1 - \ln x = 0$

$\Rightarrow 1 = \ln x$

$e^{\ln x} = x$

$e^{\ln x} = e^{1}$

$x = e$

ومنه

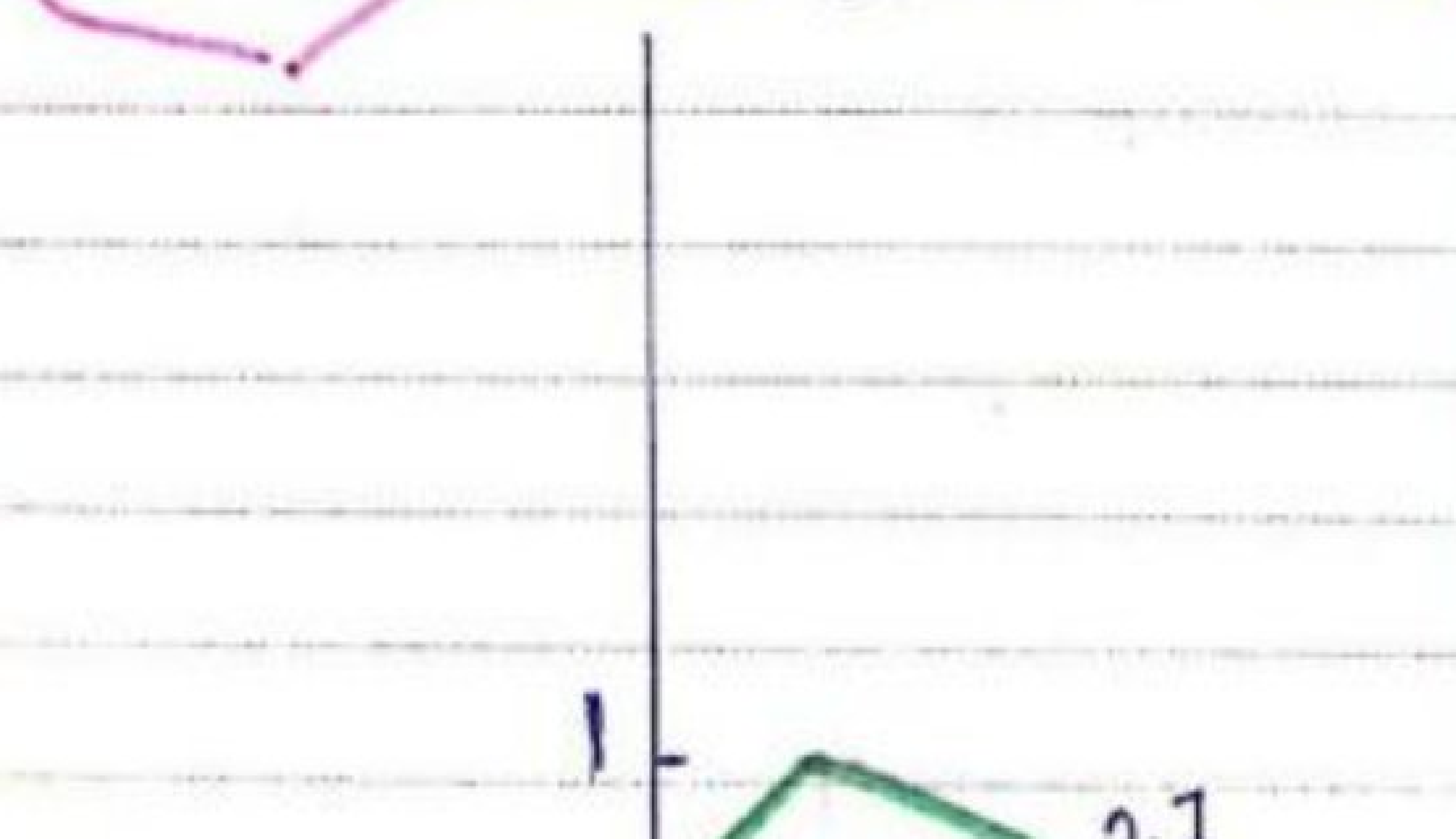
$f(e) = e - e\ln e$

$= e - e$

$= 0$

$\ln e = 1$

$f(e) = 0$ ومنه $(e,0)$ نقطة مساعدة



(15)

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty , +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{(-\infty)^2}{0} = \frac{\infty}{0} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم تعين

• $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$

نفك المتطابقة

• $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{e^x}$

نوزع البسط على المقام

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$= 0 + 0 + (0)$$

$$= 0$$

لأنه

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

لأنه

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ومنه $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

نشتق ونعدم المشتق:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

نفك المطابقة:

$$f(x) = \frac{(x^2+2x+1)}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(e^x) - (e^x)(x^2+2x+1)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{2xe^x + 2e^x - x^2e^x - 2xe^x - e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^x - e^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

نخرج e^x عامل مشترك ونختصر.

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x^2)}{(e^x)^2}$$

نختصر

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x^2}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{(1+1)^2}{e} = \frac{4}{e}$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1+1)^2}{e} = 0$$

$f(1) = \frac{4}{e}$ $\qquad$ $f(-1) = 0$

نرسم جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$\frac{4}{e} \simeq 1.4$

• رسم الخط البياني.

$y=0$ مقارب أفقي

$(0,1)$ نقطة مساعدة.

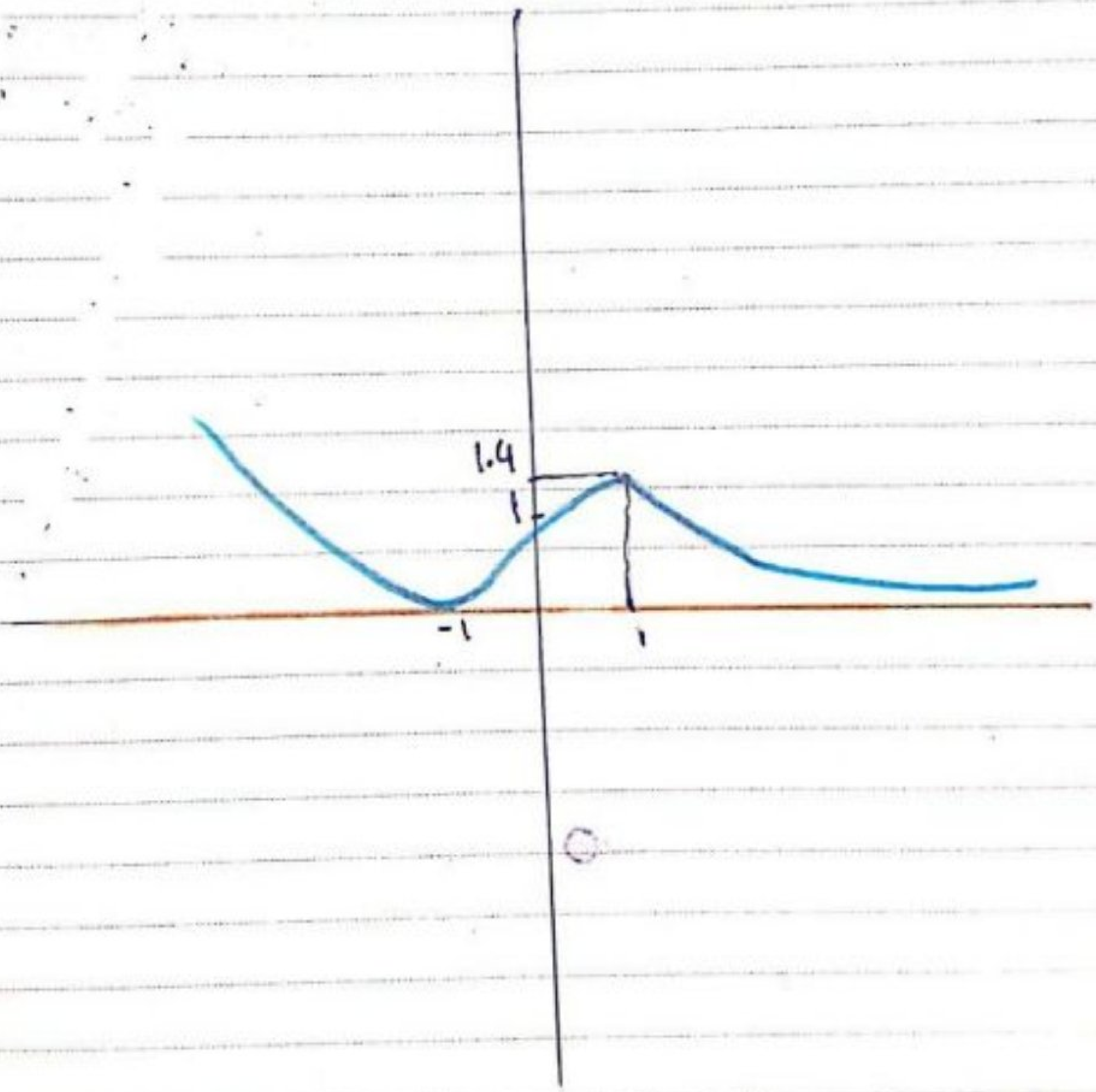
$(1, \frac{4}{e})$ نقطة مساعدة.

$(-1,0)$ نقطة مساعدة

• $x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{(0+1)^2}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$

$e^0 = 1$

$(0,1)$ نقطة مساعدة



Monira AL-ebraheem

سلسلة
التجمع التعليمي

التجمع التعليمي