الدالـة هـو المفهـوم الأكثر أهميـة في علم التفاضـل والتكامل بصفـة خاصة وعلوم الرياضيـات بصفة عامة. قبل أن نناقش المفهـوم الرياضي للدالة دعنا نناقش هذا المثال البسيط وهو طريقة عمل رغيف من الخبز (المُنتج أو المُخرج)، المكونات (المُدخلات) هي كـوب مـن الماء وكوب من الدقيق مع قليل مـن الملح وملعقة من الخميرة، كل مُدخل من تلك المُدخلات هو قيمة قابلة للتغير (الوزن - النوع......) وتبعا لتغيره سوف تتغير مواصفات المنتج النهائي، وهو رغيف الخبز (الوزن- الطعم.....). من هذا المنطلق نستطيع أن نعطي تلك المُدخلات مسمى المتغيرات المستقلة و غالبا ما يرمز لها بـــ ..... $x1,x2$ والتي تبعا لتغيرها يتغير المتغير التابع (المُخرج) و غالبا ما يرمز له بالرمز y. نستطيع أن نقول أن y هي دالة في المتغيرات ..... $x1,x2$

وهكذا أي نظام طبيعي يمكن التعبير عنه في صورة دالة وبالتالي يتحول النظام إلى صورة رياضية مجردة نستطيع معالجتها ودراسـة خواصها رياضيا على الأقل من الناحية النظرية.

سـنبدأ في الجزء التـالي بتعريف المجموعة وصـولا منه لتعريف الدالة،وسـوف نهتم فقـط بالمفاهيم الأساسـية والأمثلة البسـيطة عليها للتوضيح، ونـترك التناول التفصيلي لتلك المفاهيم وتطبيقاتها في مقررات أكثر اهتماما بها.

1.1 المجموعات والمجموعات الجزئية Sets and Subsets:

تستخدم المجموعات في كثير من المجالات العلمية وهي من أهم المفاهيم الأساسية في علوم الرياضيات وسوف نستخدم مفهوم المجموعة في هذا الكتاب تبعا للتعريف التالي:

تعريف 1.1.1 (المجموعة Set):

المجموعة هي أي تجمع من الأشياء المحددة تحديدا تاما وتسمى المجموعات بحروف اللغة الانجليزية الكبيرة .... $A, B, C, \ldots$. وتعرف تلك الأشياء بعناصر المجموعة ويرمز لها بالحروف الصغيرة .... $a, b, c, \ldots$.

نستطيع التعبير أو كتابة المجموعة بأحد طريقتين كما في التعريف التالي:

تعريف 1.1.2:

(1) طريقة السرد أو القائمة (Roster or List Method) و فيها توضع عناصر المجموعة بين قوسين يسميا بقوسي المجموعة على الصورة{}، يفصل بين كل عنصر والذي يليه بفاصلة ",".

(2) طريقة الصفة المميزة أو الشرط (Characteristic or Rule Method) و فيها نعبر عن المجموعة عن طريق صفة تميز أو تجمع بين عناصرها على الصورة $\{x: p(x)\}$ وتقرأ كل العناصر$\{x\}$ بحيث الصفة أو الشرط $\{p(x)\}$ صحيح.

مثال 1.1.1:

إذا كانت المجموعة A هي مجموعة مربعات كل الأعداد الطبيعية نستطيع كتابتها بطريقة الصفة المميزة على الصورة $A = \{x: x = n^2, n \in N\}$. وتكتب بطريقة السرد على الصورة $A = \{1,4,9, \ldots\}$.

العلاقة التي تربط بين العنصر والمجموعة تسمى بعلاقة الانتماء وتعطى في التعريف التالي:

تعريف 1.1.3 (الانتماء Belonging): عنصر بمجموعة

يقال أن العنصر a ينتمي للمجموعة A ويرمز له بالرمز $a \in A$ إذا وفقط إذا كان أحد عناصر المجموعة A. يقال أنه لا ينتمي للمجموعة A ويرمز له بالرمز $a \notin A$ إذا وفقط إذا كان ليس من عناصر المجموعة A.

تنقسم المجموعات من حيث عدد عناصرها إلى نوعين المجموعة النهائية واللانهائية كما في التعريف التالي:

تعريف 1.1.4:

(1) المجموعة النهائية وهي المجموعة التي يوجد بها عدد نهائي من العناصر (نستطيع عده).

(2) المجموعة اللانهائية وهي المجموعة التي يوجد بها عدد لانهائي من العناصر (لا نستطيع عده). ويرمز لعدد عناصر المجموعة A بـ $|A|$ بـ قيمة مطلقة

مجموعات الأعداد (Numbers Sets):

أهم المجموعات اللانهائية هي مجموعات الأعداد وهي: مجموعة الأعداد الطبيعية، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. مجموعة الأعداد الصحيحة، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ حيث $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. و مجموعة الأعداد الغير نسبية ويرمز لها بالرمز $\dot{\mathbb{Q}}$ وهي مجموعة كل الأعداد التي لا يمكن وضعها في صورة كسر ومنها $\ldots \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e,$. مجموعة الأعداد الحقيقة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ حيث هي مجموعة كل الأعداد على خط الأعداد $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \dot{\mathbb{Q}} = (-\infty, \infty)$.

N الأعداد الطبيعية
Z الأعداد الصحيحة
Q الأعداد النسبية
Q̇ الأعداد الغير نسبية
R الأعداد الحقيقية

تعريف 1.1.5 (المجموعة الخالية Empty Set):

جزئية من أي مجموعة

هي المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر ويرمز لها بالرمز φ (فاي) أو $\{\}$.

تعريف 1.1.6 (المجموعة الجزئية Subset): مقارنة مجموعة بـ مجموعة

إذا كان A و B مجموعتين، يقال أن A مجموعة جزئية من B ويرمز لها بالرمز $A \subset B$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر في A هو عنصر من عناصر B. أي أن المجموعة A تحتوي على بعض أو كل عناصر B. ويعبر عن التعريف رياضيا بالتقرير التالي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in B\ \forall x \in A$$

أو المعكوس المنفي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \notin A\ \forall x \notin B.$$

$A \subseteq A$ $\quad \phi \subseteq A$

تعرف المجموعة نفسها والمجموعة الخالية بالمجموعات الجزئية غير الفعلية *(Improper subsets)* لأي مجموعة بينما أي مجموعة جزئية أخرى تسمى بالمجموعة الجزئية الفعلية *(Proper subset)*.

تعريف 1.1.7 (المجموعات المتساوية Equal Sets):

إذا كان A و B مجموعتين، يقال أنهما متساويتان ويرمز لهما بالرمز $A = B$ إذا وفقط إذا كان بهما نفس العناصر بالضبط أي أن كل عنصر في A هو عنصر من عناصر B وكل عنصر من B هو عنصر من عناصر A.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A.$$

1.2 العمليات على المجموعات Operations on Sets:

من المعتاد في علوم الرياضيات أن نعرف مفهوما رياضيا ثم نبدأ في استخدامه لتكوين صور أخرى منه، وذلك بتعريف عمليات على هذا المفهوم ودراسة خواص هذه العمليات وهذا ما سوف نقوم به إن شاء الله في هذا الجزء بالنسبة للمجموعات.

تعريف 1.2.1 (الاتحاد Union):

إذا كان A و B مجموعتين، اتحادهما يرمز له بالرمز $A \cup B$ ويعرف على أنه مجموعة العناصر الموجودة في A أو موجودة في B (أي هي المجموعة التي تحتوي على عناصر المجموعة A بالإضافة إلى عناصر المجموعة B بدون تكرار). ويمكن كتابة هذه المجموعة على الصورة:

$$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \ or \ x \in B\}.}$$

من دون تكرار

تعريف 1.2.2 (التقاطع Intersection):

إذا كان A و B مجموعتين، تقاطعهما يرمز له بالرمز $A \cap B$ ويعرف على أنه مجموعة العناصر الموجودة في A وموجودة في B (أي هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين المجموعتين A و B). ويمكن كتابة هذه المجموعة على الصورة:

$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \ and \ x \in B\}.}$$

المشتركة فقط

تعريف 1.2.3 (الفرق Difference):

إذا كان A و B مجموعتين، فإن المجموعة A فرق B يرمز لها بالرمز $A - B$ وتعرف على أنها مجموعة كل العناصر الموجودة في A وغير الموجودة في B. ويمكن كتابة هذه المجموعة على الصورة:

$$A - B = \{x : x \in A \ and \ x \notin B\}.$$

وبالتالي فإن:

$$B - A = \{x : x \in B \ and \ x \notin A\}.$$

تعريف 1.2.4 (المجموعة المكملة Complement):

إذا كانت U مجموعة شاملة (تحتوي كل المجموعات) و كانت $A \subset U$ فإن مكملة المجموعة A يرمز لها بالرمز $\grave{A}$ أو A^c، وتعرف على أنها مجموعة كل العناصر الموجودة في U و غير موجودة في A. أي أن:

$$A^c = \{x: x \in U \text{ and } x \notin A\}.$$

خواص العمليات على المجموعات تعطي في النظرية التالية:

نظرية 1.2.1 (خواص العمليات على المجموعات Properties of Operations on Sets):

إذا كان A ، B و C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U فإن:

$(i)\ A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية الإبدال *(Commutative Property)*.

$(ii)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup A), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية الدمج *(Associative Property)*.

$(iii)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية التوزيع *(Distribution Property)*.

$(iv)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

وتعرف هذه الخاصية بقوانين دي مورجان *(De Morgan's Laws)*.

1.3 الأعداد الحقيقية والفترات : Real Numbers and Intervals

يبني علم التفاضل ونظرياته على خواص مجموعة الأعداد الحقيقية والتي من أهمها الترتيب والاكتمال سنذكر هنا بعض تلك الخواص وسوف تدرس تفصيليا إن شاء الله في مقررات أخرى متقدمة.

خاصية 1.3.1 (خواص الأعداد الحقيقية Properties of Real Numbers):

إذا كان a ، b عددين حقيقيين فإنهما يعرفان العدد الحقيقي $a+b$ ويعرف بمجموع العددين (عملية الجمع) والعدد الحقيقي ab ويعرف بحاصل ضرب العددين (عملية الضرب) ويحققان الخواص التالية:

(i) $a+b=b+a, \qquad ab=ba.$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية الإبدال لعملتي الجمع والضرب على الترتيب *(Commutative Property).*

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (ab)c=a(bc).$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية الدمج لعملتي الجمع والضرب على الترتيب *(Associative Property).*

(iii) $a(b+c)=ab+bc.$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية التوزيع *(Distribution Property).*

يوجد $0,1 \in \mathbb{R}$ حيث:

(iv) $0+a=a+0=a, 1a=a1=a, 0 \neq 1$

وتعرف هذه الخاصية بخاصية وجود محايد جمعي وضربي على الترتيب *(Addition and Multiplication identities).*

1 0

خاصية 1.3.2 (خواص الأعداد الحقيقية Properties of Real Numbers):

إذا كان a ، b عددين حقيقيين، فإن أحد البدائل الآتية فقط صحيح:

(v) $a > b$ or $b > a$ or $a = b$.

وتعرف بخاصية الترتيب وعلاقة الترتيب فيها هي (أقل من $<$).

أحد البدائل الآتية فقط صحيح:

a هو عدد موجب أو $a-$ هو عدد موجب أو $a = 0$.

تعريف 1.3.1 (الفترات Intervals):

إذا كان a ، b عددين حقيقيين حيث $a < b$ فإن:

(1) مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a ، b يرمز لها بالرمز (a, b) وتعرف بالفترة المفتوحة a و b أي أن:

$$(a, b) = \{x: a < x < b, x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a ، b بما فيها العدد a يرمز لها بالرمز $[a, b)$ وتعرف بالفترة نصف المفتوحة من اليمين أي أن:

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}.$$

(3) مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a ، b بما فيها العدد b يرمز لها بالرمز $(a, b]$ وتعرف بالفترة نصف المفتوحة من اليسار أي أن:

$$(a, b] = \{x: a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}.$$

(4) مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a ، b بما فيها العددين a ، b يرمز لها بالرمز $[a, b]$ وتعرف بالفترة المغلقة أي أن:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}.$$

(5) مجموعة كل الأعداد الحقيقية أكبر من a يرمز لها بالرمز (a, ∞) أي أن:

$$(a, \infty) = \{x: x > a, x \in \mathbb{R}\}.$$

(6) مجموعة كل الأعداد الحقيقية أكبر من a بما فيها a يرمز لها بالرمز $[a, \infty)$ أي أن:

$[a,\infty) = \{x: x \geq a, x \in \mathbb{R}\}.$

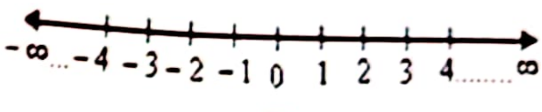
(7) مجموعة كل الأعداد الحقيقية أقل من a يرمز لها بالرمز $(-\infty,a)$ أي أن:

$(-\infty,a) = \{x: x < a, x \in \mathbb{R}\}.$

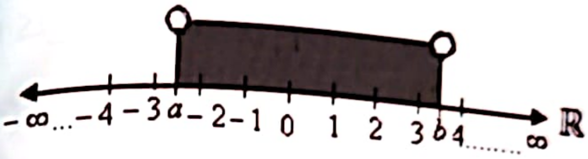
(8) مجموعة كل الأعداد الحقيقية أقل من a بما فيها a يرمز لها بالرمز $(-\infty,a]$ أي أن:

$(-\infty,a] = \{x: x \leq a, x \in \mathbb{R}\}.$

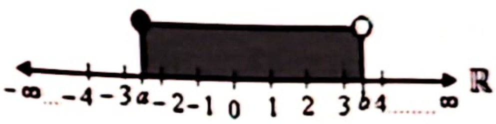
تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية والفترات بيانيا كما بالشكل (1-1).



$\mathbb{R}$

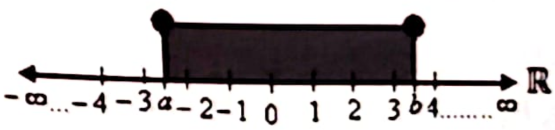


(a,b)

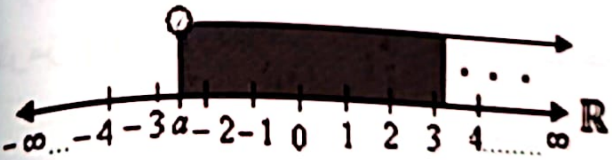


$[a,b)$

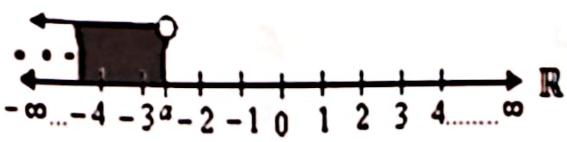
$(a,b]$



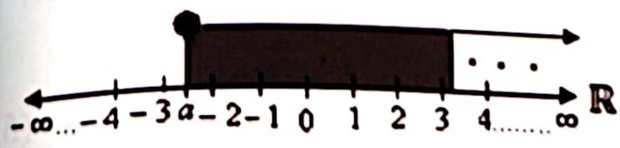
$[a,b]$



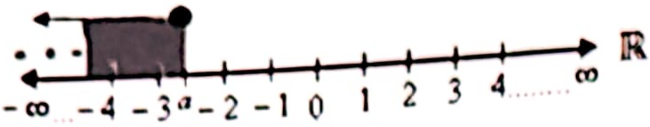
(a,∞)



$(-\infty,a)$



$[a,\infty)$



$(-\infty, a]$

الشكل (1-1)

1.4 الدوال في متغير واحد: Functions in One Variable

نستطيع تعريف الدالة في متغير واحد على أنها متغير تابع يتغير بتغير متغير مستقل واحد فقط سوف نستخدم لفظ الدالة في هذا الكتاب للتعبير عن الدالة في متغير واحد.

تعريف 1.4.1 (الزوج (الثنائي) المرتب 2-tuple):

الزوج المرتب هو نظم ثنائي (من عنصرين) مرتب، ويكتب على الصورة (a, b) ويعرف a بالمسقط الأول و b بالمسقط الثاني.

يستخدم بعض المؤلفين تعبير مصفوفة صف مرتبة للتعبير عن النظم المرتب.

تعريف 1.4.2 (الضرب الكارتيزي Cartesian Product):

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فان حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة A و B يرمز له بالرمز $A \times B$ و هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول هو أحد عناصر A و مسقطها الثاني هو أحد عناصر B. أي أن:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

مثال 1.4.1:

إذا كان $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ فإن:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

ماذا عن $B \times A$؟

$BXA = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c) (2, c)\}$

تعريف 1.4.3 (العلاقة Relation):

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي $A \times B$.

سوف نكتفي في هذا الكتاب بتعريف العلاقة فقط دون التطرق لخواصها وأنواعها وهذا ما نحتاج إليه فقط في هذا المقرر. إذا أراد القارئ مزيدا من المعلومات عليه الرجوع إلي المراجع في نهاية الكتاب.

نستطيع الآن صياغة تعريف رياضي للدالة.

تعريف 1.4.4 (الدالة Function): يعبر عنها

إذا كان X و Y مجموعتين غير خاليتين فإن الدالة f من المجموعة X إلى المجموعة Y هي علاقة من المجموعة X الى المجموعة Y بحيث يرتبط كل عنصر من عناصر المجموعة X بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة Y. (نستطيع صياغتها بصورة أخرى و هي: أن كل عنصر من عناصر المجموعة X يظهر كمسقط أول في عناصر الدالة f ويظهر مرة واحدة فقط). ويرمز لها بالرمز $f: X \to Y$ أو $y = f(x)$ وتعرف y بصورة العنصر (الأصل) x.

يسمى X بمجال الدالة و Y بالمجال المقابل. انظر الشكل (2-1). و على ذلك فإن العلاقة $y = f(x)$ تمثل دالة إذا و فقط إذا كان: D

$$f(x_1) = f(x_2)\ \forall\, x_1 = x_2,\ x_1, x_2 \in X.$$

يتبين من التعريف أن الدالة من X إلى Y ما هي إلا مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي $X \times Y$ و لكن لا بد أن يظهر كل عنصر من عناصر المجموعة X كمسقط أول ويظهر مرة واحدة فقط. إذا كانت y هي صورة العنصر x تحت تأثير الدالة f يعبر عنها بالصورة $y = f(x)$ وباعتبار أن x هو عنصر عام في مجال الدالة فإنه يعرف بالمتغير المستقل ويعرف y بالمتغير التابع. ونستطيع تعريفه بالصورة الآتية:

تعريف 1.4.5 (المتغير المستقل والمتغير التابع Independent Variable and Dependent Variable):

بصورة عامة نستطيع أن نعرف المتغير المستقل على أنه قيمة قابلة للتغير بشكل مستقل، يتبع هذا التغير تغير قيمة أخرى تسمى بالمتغير التابع.

لكي يتضح التعريف السابق دعنا نناقش هذا المثال البسيط، نستطيع أن نقول أن طول الطالب هو متغير مستقل، يتبع التغير في طول الطالب تغير في وزنه، وبالتالي فإن الوزن هو متغير تابع في هذه الحالة (مع زيادة الطول يزداد الوزن).

إذا لم يذكر مجال الدالة بصورة صريحة فهناك ما يسمى بالمجال الطبيعي أو المجال الممكن لهذه الدالة ويعطى من التعريف التالي:

تعريف 1.4.6 (المجال الطبيعي أو الممكن للدالة Natural or Possible Domain of a Function):

المجال ⑤

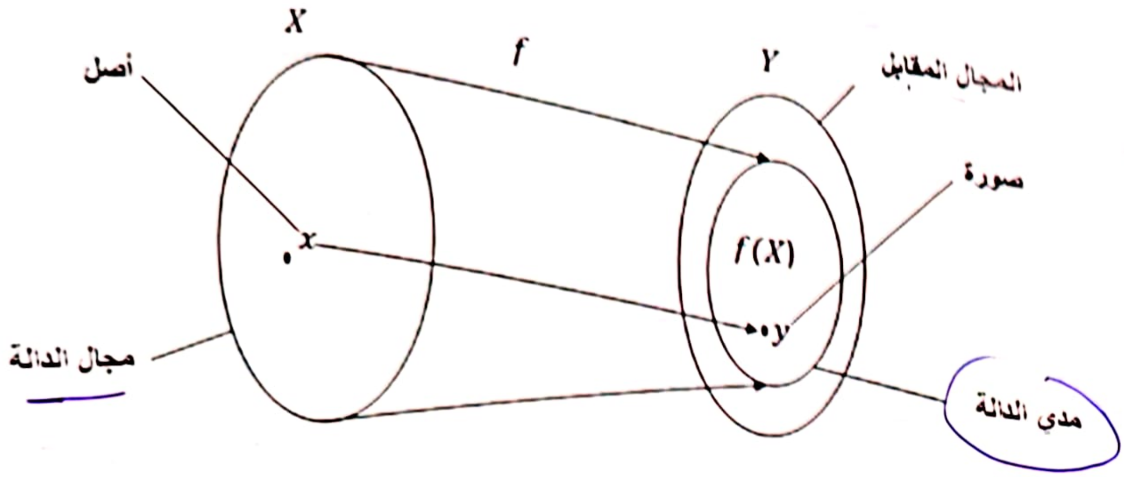
المجال الطبيعي أو الممكن للدالة f هي جميع قيم x الممكنة والتي تكون لها $f(x)$ قيمة حقيقية (معرفة).

عند قسمة عدد حقيقي على الصفر فإنه كمية غير معرفة. سنكتفي بالتعريف فقط في هذه المرحلة وسوف نناقش الأمثلة تفصيليا بعد التعرف على أنواع الدوال الجبرية.

تعريف 1.4.7 (مدى الدالة Rang of a Function):

مدى الدالة $f: X \to Y$ هي جميع قيم Y والتي تظهر كصور لعناصر X (أحياناً تسمى بمجموعة الصور للدالة و نستطيع أن نقول أن X هي مجموعة الأصول) ويرمز لها بالرمز R_f أي أن :

$$.R_f = \{y \in Y, y = f(x) \; \forall \; x \in X\}$$



الشكل (1-2)

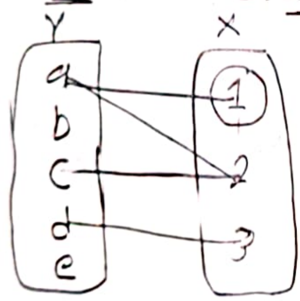
مثال 1.4.1:

إذا كانت $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{a, b, c, d, e\}$ حدد أي من المجموعات الآتية تمثل دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y وأيها لا تمثل مع ذكر السبب.

(i) $f_1 = \{(1, a), (2, c), (3, e), (3, c)\}$. ✗

(ii) $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$.

(iii) $f_3 = \{(2, a), (3, c)\}$. ×



الحل:

f_1 لا تمثل دالة لأن العنصر 3 ظهر كمسقط أول مرتين بينما f_2 تمثل دالة (لاحظ أن العنصر a ظهر كصورة مرتين وهذا لا يؤثر على كون العلاقة دالة)، f_3 لا تمثل دالة و ذلك لأن العنصر 1 لم يظهر كمسقط أول.

D = R

تعريف 1.4.8 (الدوال حقيقية القيمة Real-Valued Functions):

الدالة حقيقية القيمة هي دالة مجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية. الدالة حقيقية القيمة في المتغير الحقيقي هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية.

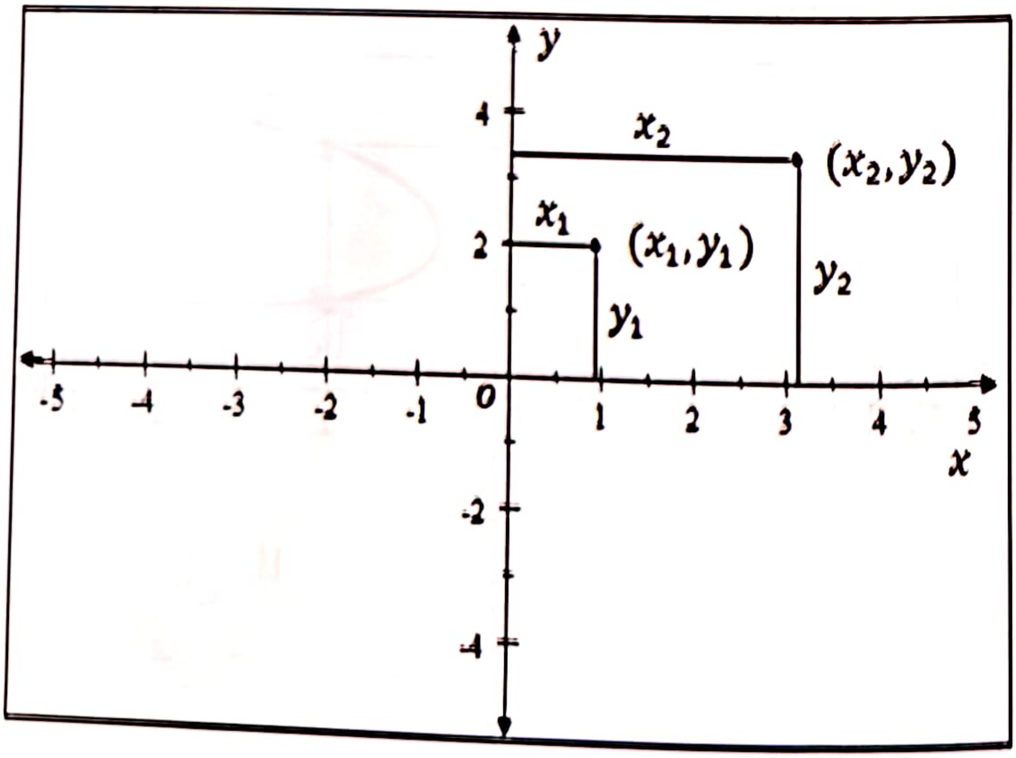
سوف نهتم في هذا المقرر بدراسة الدالة حقيقية القيمة في المتغير الحقيقي، وسوف نستخدم لفظ الدالة للتعبير عنها ما لم يذكر خلاف ذلك. ومن أمثلة هذه الدوال، كثيرة الحدود، دالة القيمة المطلقة، الدالة الجذرية، الدالة الكسرية، الدوال المثلثية وغيرها. سوف ننتقل إلى دراسة هذه الدوال بصورة تفصيلية.

1.5 الشكل البياني للدوال : Graph of Functions

الشكل البياني للدالة يعطي صورة مرئية للدالة فيما يسمى بمنحنى الدالة. بفرض الدالة $y =$ $f(x)$ و حيث أنه لكل قيمة لـ x (أصل) في مجال الدالة ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y (صورة) في مدى الدالة f أي أنه بفرض قيمة x هي x_1 في مجال الدالة f فإنه يوجد قيمة واحدة فقط و لتكن y_1 ترتبط بها. بالتالي فإن الأزواج المرتبة (x, y) هي أزواج مرتبة مختلفة لجميع قيم x في مجال الدالة f وبفرض المستوى الثنائي المتعامد oxy فإن كل زوج (x, y) يناظره نقطة وحيدة فقط في المستوي (انظر الشكل 3-1). نستطيع تعريف الشكل البياني للدالة أو منحنى الدالة كما في التعريف التالي.

تعريف 1.5.1 (منحنى الدالة Curve of Function):

منحنى الدالة $y = f(x)$ هو جميع النقط في المستوي الثنائي المتعامد (الكارتيزى) oxy المناظرة للأزواج المرتبة (x, y).

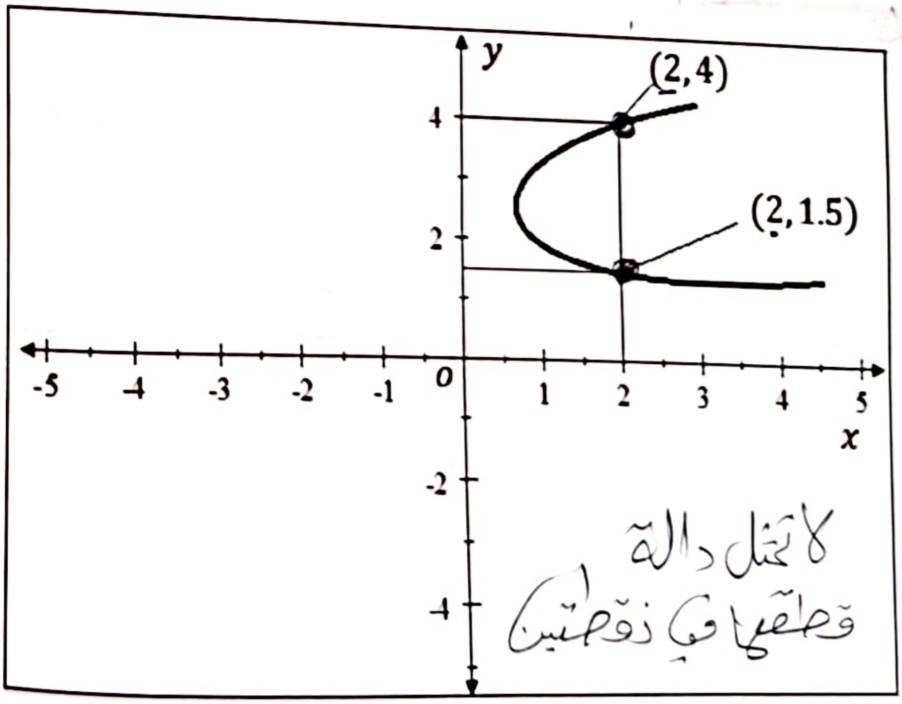


الشكل (3-1)

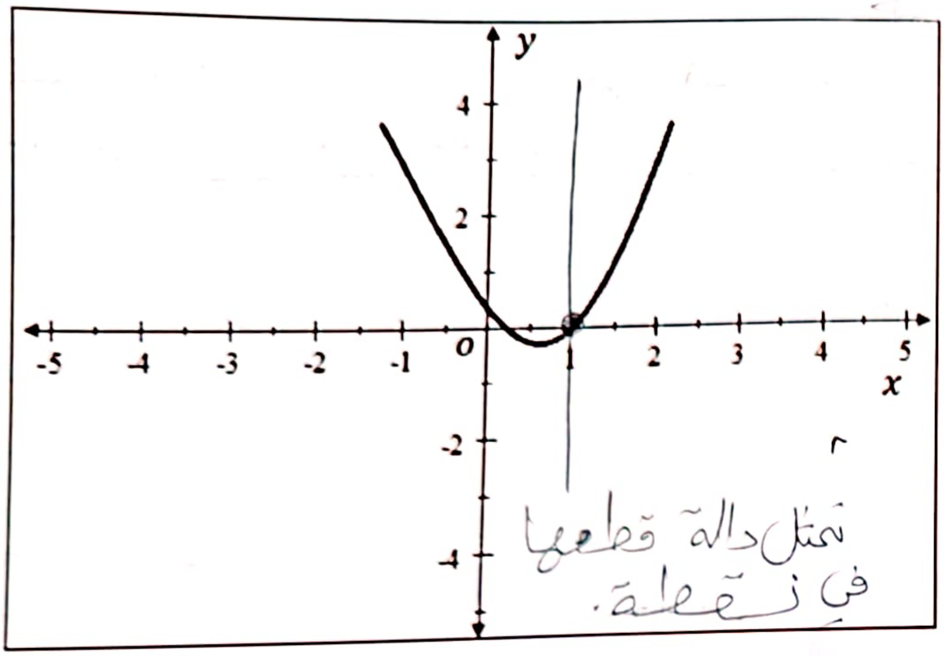
من المناقشة السابقة فإن أي خط رأسي لا يمكن أن يقطع منحى الدالة في أكثر من نقطة. بفرض منحى والذي يقطعه خط رأسي في نقطتين، وبالتالي فإن لهم نفس قيمة x و لتكن x_3 بينما قيمة y مختلفة و لتكن القيمتين هما y_3, y_4 أي يوجد الزوجين المرتبين $(x_3, y_3), (x_3, y_4)$ مما يعني أن x_3 ظهرت كمسقط أول مرتين وبالتالي المنحنى لا يمثل دالة فيما يعرف باختبار الخط الرأسي.

تعريف 1.5.2 (اختبار الخط الراسي Vertical Line Test): الشكل البياني في المستوي الثنائي المتعامد oxy يمثل منحى دالة إذا كان وفقط إذا كان أي خط رأسي لا يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

باستخدام اختبار الخط الرأسي فإن المنحنى في الشكل (1-4) لا يمثل دالة بينما المنحنى في الشكل (1-5) يمثل دالة.



الشكل (1-4)



الشكل (1-5)

R مجالها

1.6 كثيرات الحدود: Polynomials

تطرق الطالب لدراسة هذا النوع من الدوال أو حالات خاصة منها في مراحل دراسية سابقة وتعرف كثيرات الحدود كما في التعريف التالي.

تعريف 1.6.1 (كثيرات الحدود Polynomials): يعبر عنها بالصورة

يقال أن P هي كثيرة حدود من درجة n إذا كانت على الصورة:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 0,1,2,\ldots,n.$$

من التعريف السابق فإن $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\ ,\ a_4 \neq 0$ هي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة، كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى بالخطية ومن الدرجة الثانية تسمى بالتربيعية، ومن الدرجة الثالثة تسمى بالتكعيبية.

يظهر هنا مجموعة من الأسئلة، وهي: هل تمثل كثيرات الحدود دوال؟ ما هو مجالها ومداها؟ الإجابة في المثال التالي.

مثال 1.6.1:

حدد المجال، المجال المقابل والمدى لكثيرة الحدود؟

الحل:

لتحديد مجال كثيرة الحدود نحتاج إلى الإجابة على هذا السؤال و هو هل هناك قيمة حقيقية لـ x تجعل قيمة $P(x)$ غير حقيقية (غير معرفة)؟

بفرض أن x هو عدد حقيقي من خواص الأعداد الحقيقية فإن $x^n\ ,\ x^{n-1}\ ,\ldots,\ x^2 \in \mathbb{R}$ و حيث أن $a_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 0,1,2,\ldots,n$ ، فإن: $a_nx^n\ ,\ a_{n-1}x^{n-1}\ ,\ldots,\ a_2x^2 \in \mathbb{R}$

وبالتالي فإن: $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}$

أي نستطيع أن نقول أنه لجميع قيم x الحقيقية فإن $P(x)$ هو عدد حقيقي وبالتالي فإن مجال كثيرات الحدود هو $\mathbb{R}$ و مجالها المقابل هو $\mathbb{R}$.

بينما مدى كثيرات الحدود لا نستطيع تحديده في حالتها العامة لأنه سوف يتغير بتغير درجة كثيرة الحدود وكذلك قيم معاملاتها.

مثال 1.6.2:

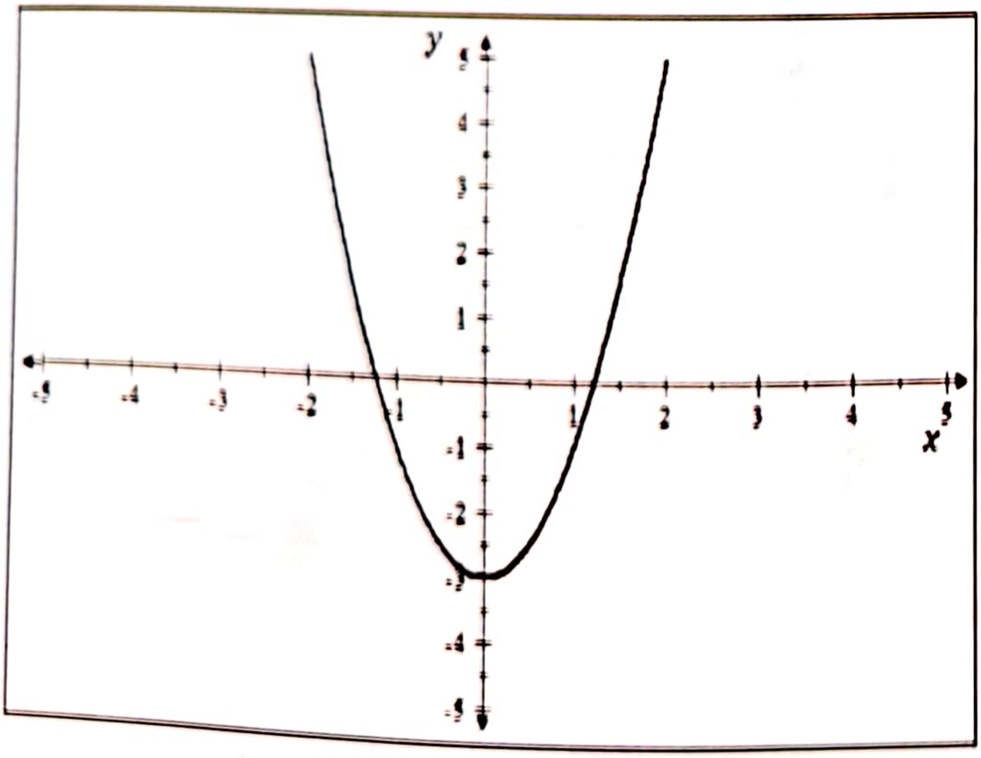
أوجد مجال و مدى الدالة $f(x) = 2x^2 - 3$.

المجال $= (-\infty, \infty)$
المدى $= [-3, \infty)$

الحل:

الدالة f هي كثيرة حدود من الدرجة الثانية وبالتالي فإن مجالها هو الفترة $(-\infty, \infty)$.

دعنا نناقش مدى الدالة، لتحديد المدى نحتاج إيجاد جميع القيم الممكنة لـ $f(x)$ والتي تتغير قيمتها تبعا لتغير قيمة x. سوف نتابع ذلك التغير. عند قيم x السالبة فان المقدار $2x^2$ هو كمية موجبة وبالتالي فأن أقل قيم للمقدار $2x^2 - 3$ هي عند $x = 0$ و عندها $f(0) = -3$ وبالتالي فإن مدى الدالة هو الفترة $[-3, \infty)$. (سوف نناقش طرق جبرية لإيجاد المدى في مرحلة متقدمة من هذا المقرر). لاحظ منحنى الدالة في الشكل (1-6).



الشكل (1-6)

[0,∞) مداها R مجالها

1.7 دالة القيمة المطلقة: The Absolute Value Function

قبل مناقشة دالة القيمة المطلقة سوف نناقش أولا المقصود بالقيمة المطلقة للعدد الحقيقي، نقصد بها القيمة الموجبة لهذا العدد، على سبيل المثال فإن القيمة المطلقة للعدد 3 هي نفس العدد 3 بينما القيمة المطلقة للعدد 3- هي العدد 3 و على ذلك لإيجاد القيمة المطلقة للعدد نقوم بتركه كما هو في حالة ما إذا كان العدد موجب بينما نحوله إلى عدد موجب إذا كان العدد سالبا و كأننا نقوم بضرب العدد السالب في 1- (إشارة سالبة). القيمة المطلقة للعدد x يرمز لها بالرمز $|x|$ و تقرأ أحياناً مقياس x.

تعريف 1.7.1 (خواص القيمة المطلقة Properties of Absolute Value):

إذا كان b , عددين حقيقيين فإن الخواص الآتية تتحقق:

(i) $|a| = |-a|,$

(ii) $|ab| = |a||b|,$

(iii) $|a/b| = |a|/|b|, b \neq 0,$

(iv) $|a + b| \leq |a| + |b|,$

أكتبها

وتعرف الخاصية الرابعة بخاصية المثلث.

تعريف 1.7.2 (دالة القيمة المطلقة The Absolute Value Function):

دالة القيمة المطلقة هي دالة تربط كل عدد حقيقي بالقيمة المطلقة له وتكتب على الصورة:

$$f(x) = |x|.$$

من تعريف الدالة و المناقشة السابقة فإن مجالها هو الفترة $(-\infty, \infty)$ و مداها هو الفترة $[0, \infty)$ (لاحظ أن $|0| = 0$). ويمكن كتابتها على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

ولها الشكل (1-8).

R
مجال $= (-\infty, \infty)$
R
المدى $(-\infty, \infty)$

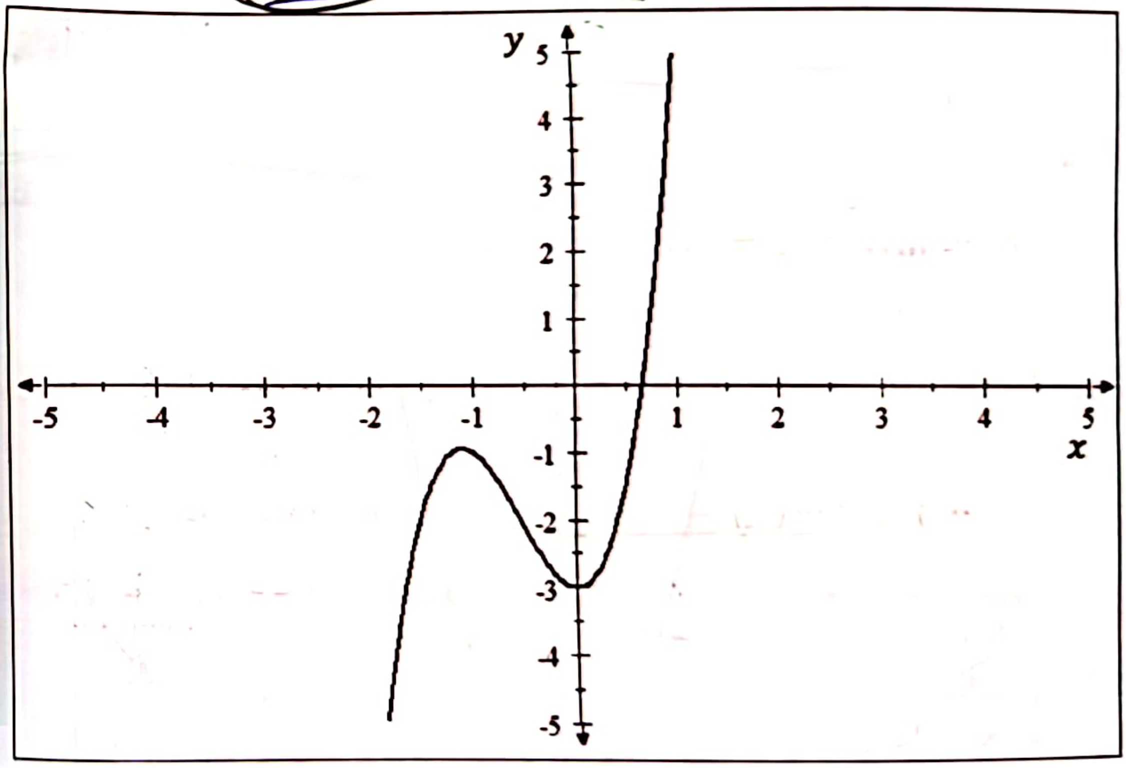
مثال 1.6.3:

أوجد مجال و مدى الدالة $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3$.

الحل:

الدالة f هي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، وبالتالي فإن مجالها هو الفترة $(-\infty, \infty)$.

سوف نناقش تغير الدالة تبعا لتغير قيمة x. عند قيم x السالبة التي تقترب من $-\infty$ فإن المقدار $3x^3$ هو كمية سالبة تقترب من $-\infty$ بينما المقدار $5x^2$ هو كمية موجبة تقترب من ∞ و لكن تقارب المقدار $3x^3$ أسرع و على ذلك فإن المقدار $3x^3 + 5x^2$ يتقارب من $-\infty$ وبالتالي فإن المقدار $3x^3 + 5x^2 - 3$ يتقارب من $-\infty$ بالمثل فإن المقدار $3x^3 + 5x^2 - 3$ يتقارب من ∞ عندما تقترب x من ∞ بالتالي فإن مدى الدالة هو الفترة $(-\infty, \infty)$ انظر الشكل (1-7).



الشكل (1-7)

$[0,\infty)$ مداها R مجالها

1.7 دالة القيمة المطلقة: The Absolute Value Function

قبل مناقشة دالة القيمة المطلقة سوف نناقش أولاً المقصود بالقيمة المطلقة للعدد الحقيقي، نقصد بها القيمة الموجبة لهذا العدد، على سبيل المثال فإن القيمة المطلقة للعدد 3 هي نفس العدد 3 بينما القيمة المطلقة للعدد 3- هي العدد 3 و على ذلك لإيجاد القيمة المطلقة للعدد نقوم بتركه كما هو في حالة ما إذا كان العدد موجب بينما نحوله إلى عدد موجب إذا كان العدد سالبا و كأننا نقوم بضرب العدد السالب في 1- (إشارة سالبة). القيمة المطلقة للعدد x يرمز لها بالرمز $|x|$ و تقرأ أحياناً مقياس x.

تعريف 1.7.1 (خواص القيمة المطلقة Properties of Absolute Value):

إذا كان b , عددين حقيقيين فإن الخواص الآتية تتحقق:

$(i)\ |a| = |-a|,$

$(ii)\ |ab| = |a||b|,$

$(iii)\ |a/b| = |a|/|b|, b \neq 0,$

$(iv)\ |a + b| \leq |a| + |b|,$

أكتبها

وتعرف الخاصية الرابعة بخاصية المثلث.

تعريف 1.7.2 (دالة القيمة المطلقة The Absolute Value Function):

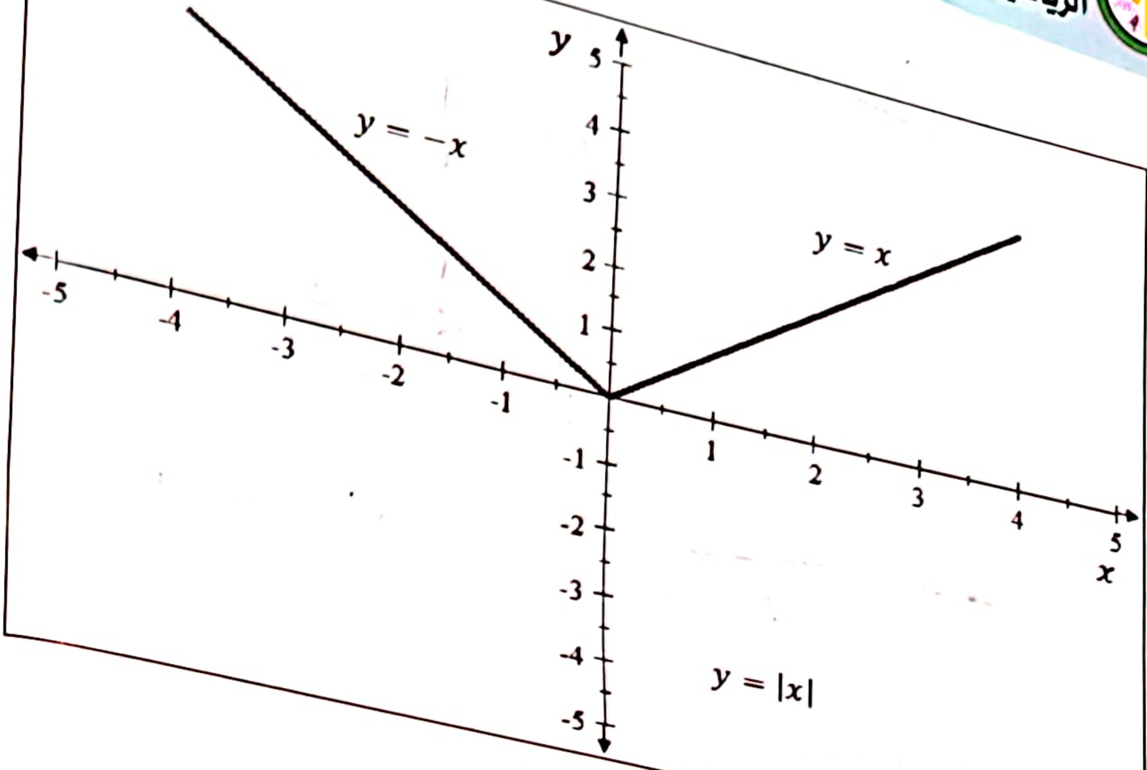
دالة القيمة المطلقة هي دالة تربط كل عدد حقيقي بالقيمة المطلقة له وتكتب على الصورة:

$$f(x) = |x|.$$

من تعريف الدالة و المناقشة السابقة فإن مجالها هو الفترة $(-\infty, \infty)$ و مداها هو الفترة $[0, \infty)$ (لاحظ أن $|0| = 0$). ويمكن كتابتها على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

ولها الشكل (1-8).



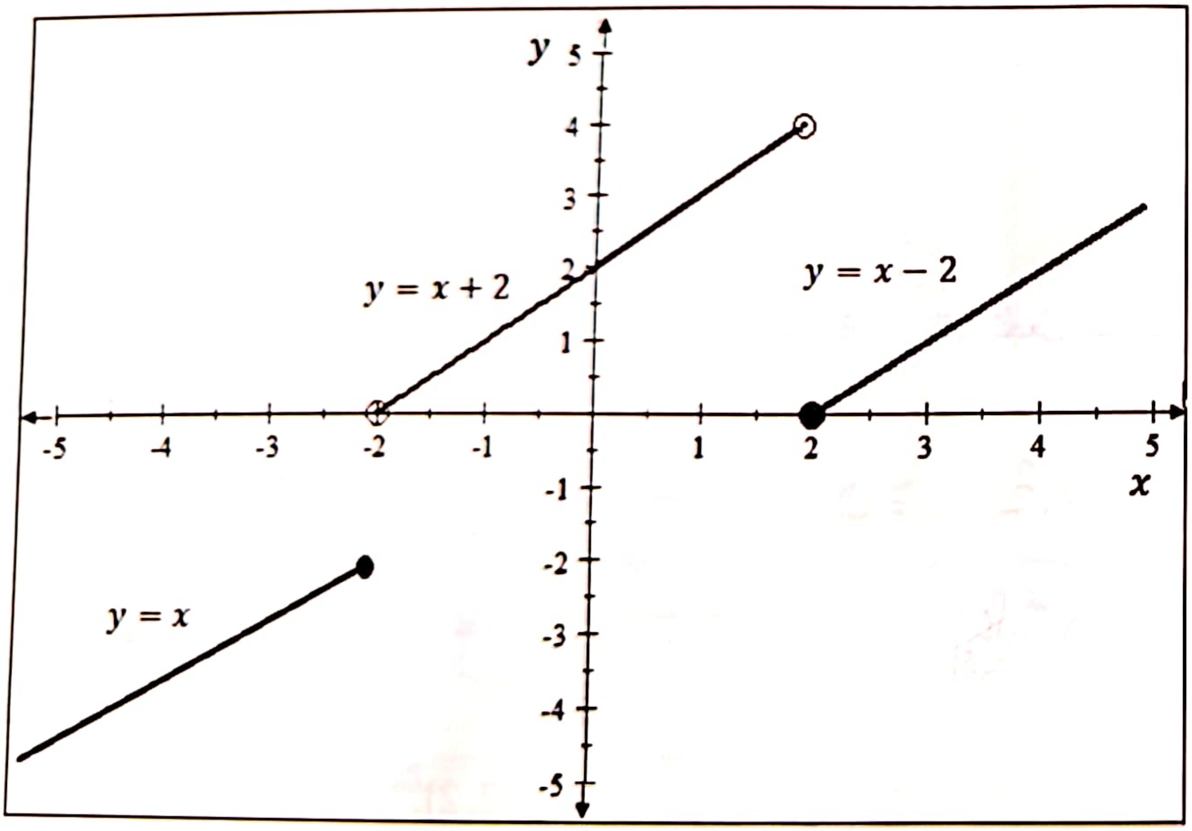
الشكل (1-8)

1.8 الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة: Piecewise-defined Function

نستطيع تعريف الدالة بأكثر من قاعدة أو معادلة وتختلف القاعدة باختلاف قيم x في مجال الدالة. دالة القيمة المطلقة هي مثال للدوال المعرفة بأكثر من قاعدة. مثال آخر لهذه الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \le -2 \\ x + 2, & -2 < x < 2 \\ x - 2, & x \ge 2 \end{cases}$$

وتعرف النقاط التي تتغير عندها القاعدة للدالة بنقاط الفصل. في المثال السابق فان $x = -2$ و $x = 2$ هي نقاط فصل للدالة g. لاحظ الشكل البياني للدالة g شكل (1-9).



الشكل (1-9)

1.9 الدالة الكسرية: Rational Function

باستخدام كثيرات الحدود نستطيع تعريف ما يسمى بالدالة الكسرية وتعطى من التعريف التالي:

تعريف 1.9.1 (الدالة الكسرية Rational Function):

إذا كانتا $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود فإن الدالة $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ تسمى بالدالة الكسرية.

نلاحظ أن قيمة $Q(x) = 0$ تجعل الدالة $f(x)$ غير معرفة وبالتالي فإن المجال الطبيعي لها هو جميع القيم الحقيقية ما عدا قيم x التي تجعل $Q(x) = 0$ فيما يسمى بمجموعة الأعداد الحقيقية فرق أصفار المقام ويعبر عنه رياضيا على الصورة:

كسر

$$D_f = \mathbb{R} - \{x : Q(x) = 0\}$$

مثال 1.9.1:

أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2-4}$.

الحل:

بمجرد أن نحدد أن الدالة هي دالة كسرية تتحول المسألة إلى إيجاد قيم x التي تجعل مقام الدالة يساوي الصفر أي حل المعادلة:

أساوي المقام بالصفر

$$x^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4},$$
$$\boxed{\Rightarrow x = \pm 2.}$$

$x^2 - 4 = 0$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

عشان أتخلص من التربيع

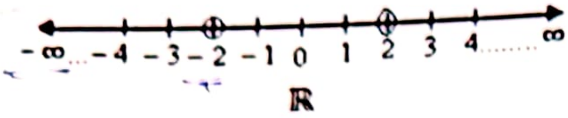
الجذر تطلع القيمة مرتين بموجب وسالب.

وبالتالي فإن:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

نستطيع تمثيل المجال بيانيا على خط الأعداد كما بالشكل (1-10).

$D_f = R - \{-2,2\}$



الشكل (1-10)

ونستطيع كذلك كتابته على صورة اتحاد فترات:

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2, \infty).$$

اتحاد

مثال 1.9.2:

$X - 3 = 0$

$X = 3$

$D_f = R - \{3\}$ / $(-\infty, 3) \cup (3, \infty).$

أوجد مجال الدالة $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

الحل:

الدالة هي دالة كسرية وبالتالي المطلوب هو إيجاد قيم x التي تجعل مقام الدالة يساوي الصفر أي حل المعادلة:

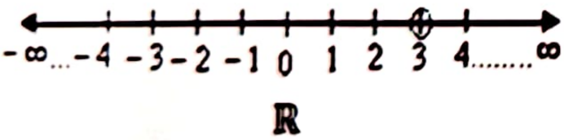
$$x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

صورة فترة.

وبالتالي فإن:

$$D_g = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty).$$



دعنا نجري بعض العمليات الحسابية على هذه الدالة. نستطيع تحليل البسط إلى الصورة:

$$(x - 3)(x + 3).$$

و من ثم حذف المقدار $(x - 3)$ بسطا و مقاما لنحصل على المقدار $x + 3$. يظهر هنا سؤال و هو هل نستطيع كتابة الدالة على الصورة $g(x) = x + 3$؟

نلاحظ أن مجال الدالة $x+3$ هو المجموعة $\mathbb{R}$ بينما مجال الدالة g هو $\mathbb{R}-\{3\}$ وبالتالي لا نستطيع كتابتها على هذه الصورة بالضبط و لكن نستطيع كتابتها على الصورة:

$$g(x)=x+3, x\neq 3.$$

من المناقشة في المثال السابق اتضح لنا أن إجراء عمليات على الدالة من شأنه أن يغير من خواصها ويظهر هنا مفهوم مهم وهو تساوي الدالتين والذي يُعطى في التعريف التالي.

تعريف 1.9.2 (تساوي دالتين Equality of Two Functions):

يقال أن الدالتين f و g متساويتان ويرمز لهما بالرمز $f=g$ إذا كان وفقط إذا كان $f(x)=g(x)$ لجميع قيم x و لهما نفس المجال $D_f=D_g$.

مثال 1.9.3: 4

هل الدالتين $f(x)=x-2$ و $g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ متساويتين؟

R ذاتية

x-2 $R-\{-2\}$

الحل:

نلاحظ أن المقدار $\frac{x^2-4}{x+2}$ نستطيع تبسيطه إلى الصورة $x-2$ و لكن $x=-2$ لا تنتمي لمجال الدالة g بينما تنتمي لمجال الدالة f و على ذلك فإن $D_f\neq D_g$ وبالتالي فإن $f\neq g$.

f(x)

إذا حذفنا $x=-2$ من مجال الدالة f في هذه الحالة نستطيع أن نقول أن الدالتين متساويتان.

1.10 دالة القوي: Power Function

سنعرف في هذا الجزء دالة القوي ونذكر بعض حالتها المختلفة.

تعريف 1.10.1 (دالة القوي Power Function):

تعرف الدالة $f(x) = x^{a}$ بدالة القوي حيث a مقدار ثابت.

(1) إذا كان a هو عدد صحيح موجب فإن $f(x)$ هي كثيرة حدود ذو حد واحد.

(2) إذا كان a حيث $n > 0$ ، $a = \frac{1}{n}$ فإن $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$، عندما $n = 2$ تسمي بدالة الجذر التربيعي و هي دالة مجالها $[0, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$، انظر الشكل (1-11).

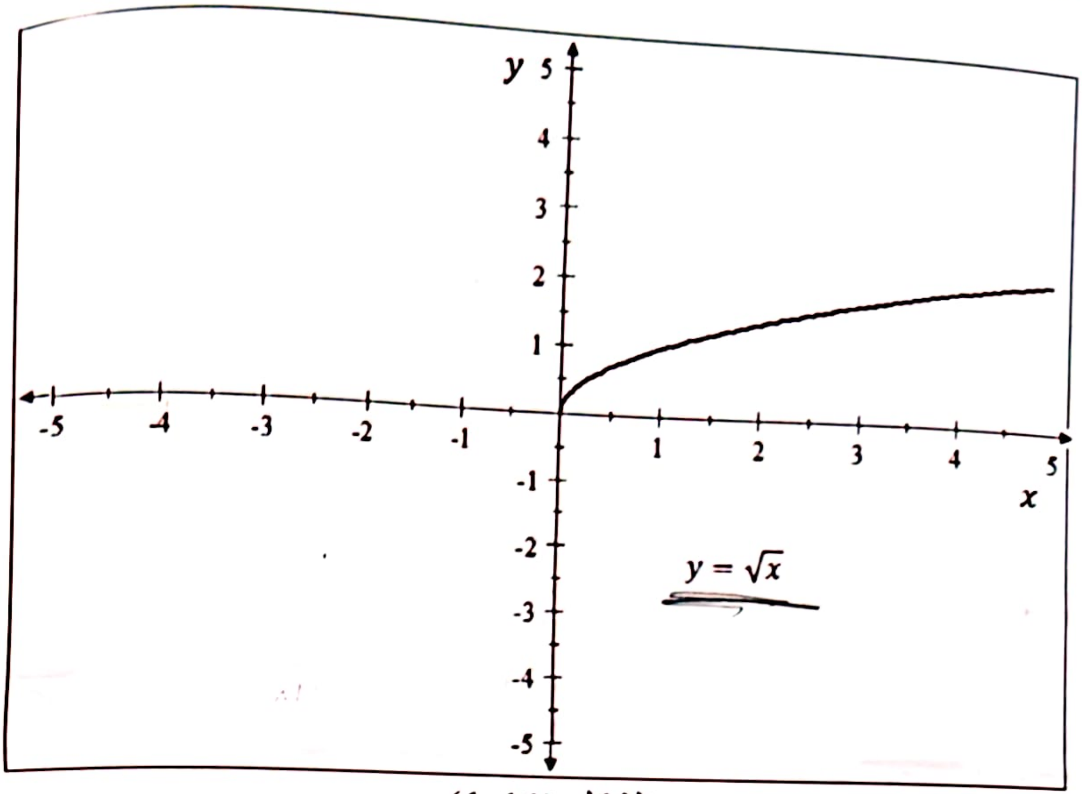
عندما $n = 3$ تسمى بدالة الجذر التكعيبي و هي دالة مجالها هو $(-\infty, \infty)$ ومداها $(-\infty, \infty)$، انظر الشكل (1-12).

R R

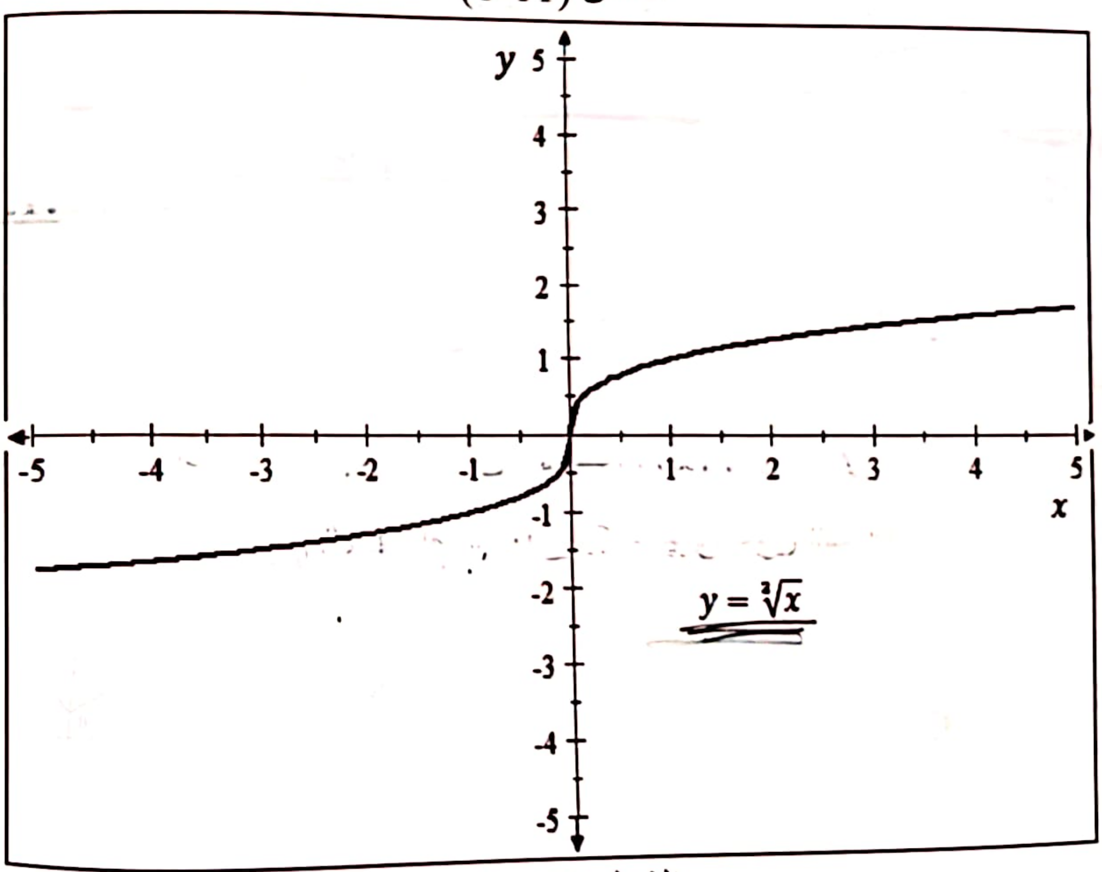
(3) إذا كان $a = -1$ فإن $f(x) = \frac{1}{x}$ وتسمى بالدالة العكسية و هي دالة مجالها هو $\mathbb{R} - \{0\}$ ومداها هو $\mathbb{R} - \{0\}$، انظر الشكل (1-13).

قرم أصفار المقام

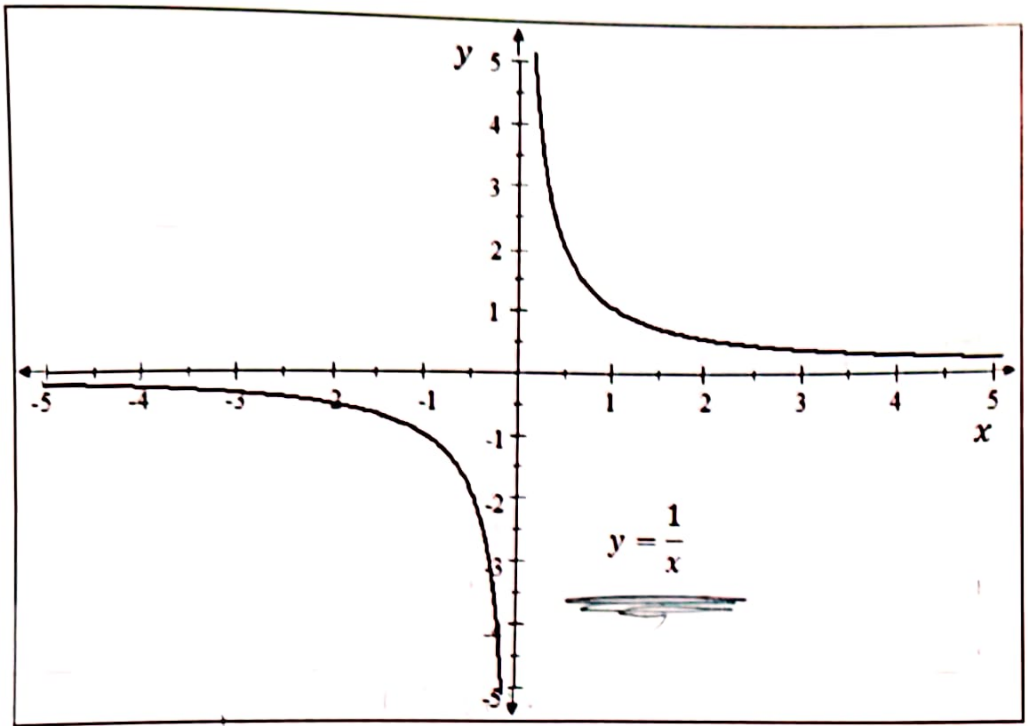
لاحظ أنه لكي يكون للجذر التربيعي قيمة حقيقية لابد وأن يكون ما تحت الجذر قيمته موجبة أو صفر.



الشكل (1-11)



الشكل (1-12)



الشكل (1-13)

أ عملها متباينة ①

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$D_f = [2, \infty)$

$[2, \infty)$

مثال1.10.1:

أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

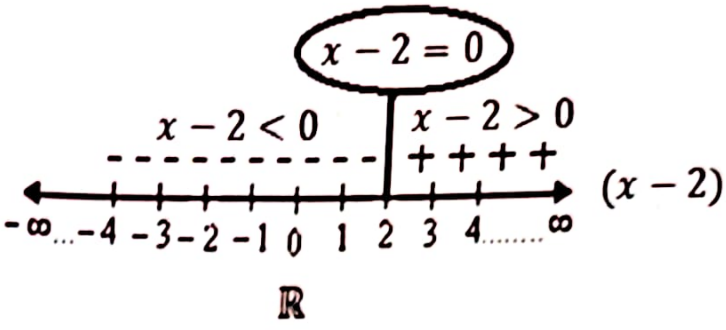
الحل:

نلاحظ أن الدالة هي دالة جذر تربيعي وبالتالي لكي تكون $f(x)$ قيمة حقيقية لابد و أن يكون ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر أي أن $x - 2 \geq 0$ وتتحول المسألة إلى إيجاد حل هذه المتباينة.

$$x - 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow x \geq 2.$$
$$\therefore D_f = [2, \infty).$$

نستطيع مناقشة الحل بطريقة أخرى وهي دراسة إشارة المقدار أسفل الجذر (إيجاد ما يجعل ما تحت الجذر يساوي الصفر ومن ثم دراسة إشارة المقدار على يمين ويسار هذه القيمة). $x = 2$ تجعل المقدار $x - 2 = 0$ وبالتالي القيم على يمينها تجعل المقدار

$x-2>0$ وبالتالي فان: $D_f=[2,\infty)$. لاحظ التمثيل البياني لإشارة المقدار $x-2$ في الشكل (1-14).



الشكل (1-14)

التربيعة

مثال1.10.2:

أوجد مجال و مدى الدالة $g(x)=\sqrt{x^2-4}$.

الحل:

مجال الدالة هو حل المتباينة:

$$x^2-4\geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2}\geq\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow |x|\geq 2$$

$$\boxed{\therefore D_g=(-\infty,-2]\cup[2,\infty).}$$

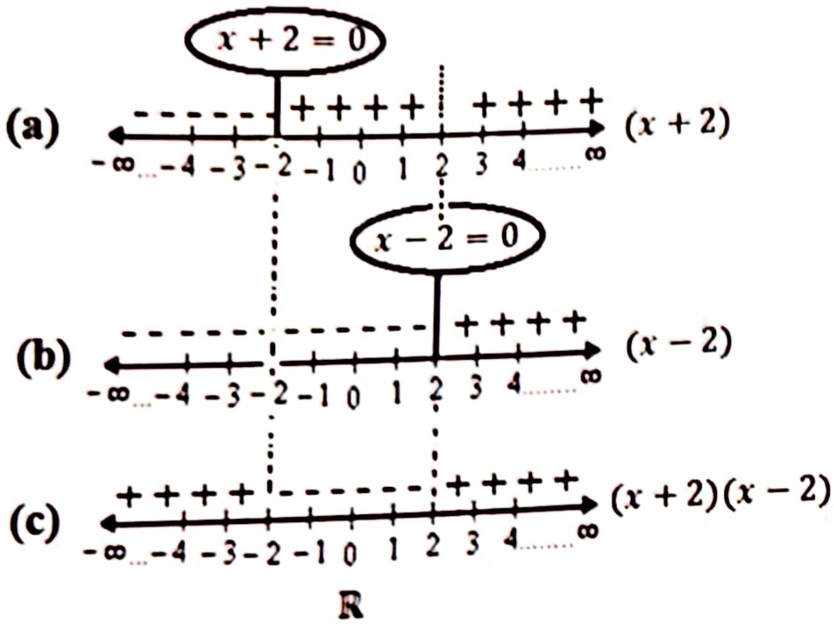
$|x|>a$ هي القيم على يمين a اتحاد القيم على يسار $-a$، $(a,\infty)\cup(-\infty,-a)$ بينما $|x|<a$ هي القيم المحصورة بين $-a$ و a أي الفترة $((-a,a))$.

نستطيع كذلك إيجاد المجال بدراسة إشارة المقدار x^2-4.

$$x^2-4=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+2)=0$$

سوف ندرس إشارة المقدار $(x+2)$ والمقدار $(x-2)$ ثم حاصل الضرب $(x-2)(x+2)$ كما بالشكل (1-15).



الشكل (1-15)

من الشكل (1-15) فإن: $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

مدى الدالة هو $[0, \infty)$.

مثال1.10.3:

$x^2 - 4x - 5 \geq 0$

أوجد مجال و مدى الدالة $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

الحل:

مجال الدالة هو حل المتباينة:

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

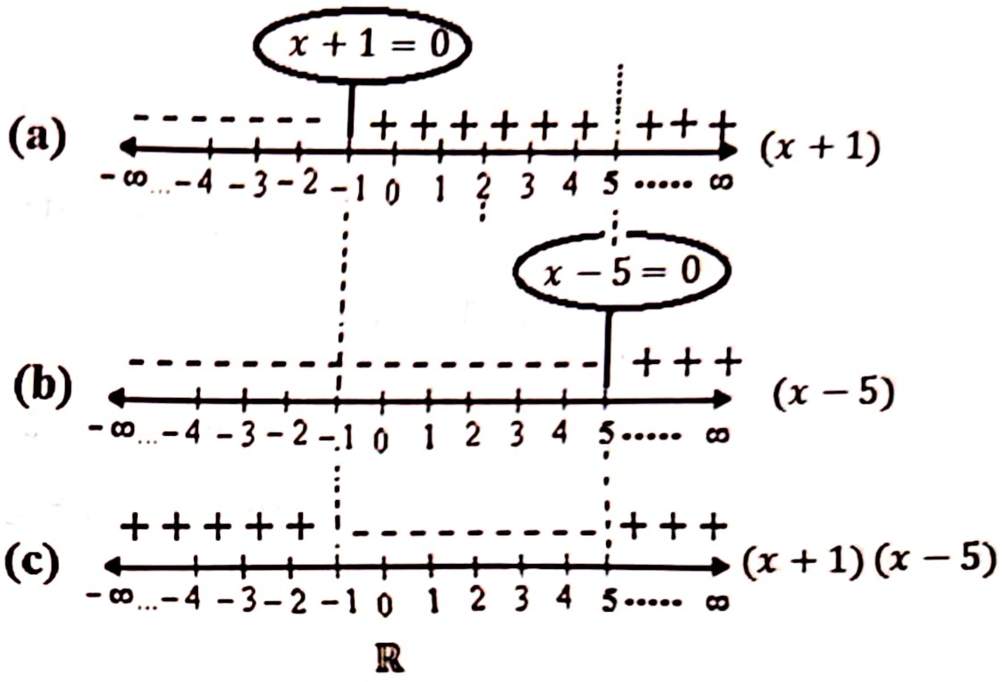
$$\Rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0$$

$\Rightarrow x + 1 \geq 0$ and $x - 5 \geq 0$ $\Rightarrow x \geq -1$ and $x \geq 5$ $\Rightarrow x \geq 5$ مجال $[5, \infty)$	or	$\Rightarrow x + 1 \leq 0$ and $x - 5 \leq 0$ $\Rightarrow x \leq -1$ and $x \leq 5$ $\Rightarrow x \leq -1$ $(-\infty, -1]$

المجال

$$D_h = (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$$

نستطيع حل هذا المثال بدراسة إشارة المقدار $(x+1)(x-5)$ كما في الشكل (1-16).



الشكل (1-16)

مدى الدالة هو $[0,\infty)$.

دائماً تكون جذرية تربيعية

$x^2 - 2x + 5 \geq 0$

مثال1.10.4:

أوجد مجال الدالة $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

الحل:

مجال الدالة هو حل المتباينة: $x^2 - 2x + 5 \geq 0$.

نلاحظ أننا لا نستطيع تحليل هذا المقدار، وبالتالي الطريقة في الأمثلة السابقة لا تصلح لحل هذا المثال (المقدار ليس له جذور حقيقية). وهو موجب لجميع قيم x الحقيقية، وبالتالي فإن مجال الدالة هو $\mathbb{R}$.

مثال 1.10.5:

أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-5}}$.

الحل:

الدالة هنا كسرية تحت الجذر التربيعي، وبالتالي فإن مجالها الطبيعي هي جميع قيم x التي تجعل الدالة الكسرية أكبر من أو تساوي الصفر، وفي نفس الوقت تجعل مقامها لا يساوي الصفر.

أي هي حل المتباينة: $\frac{x+1}{x-5} \geq 0$ و $x \neq 5$. بالرجوع إلى المثال 1.10.3 الشكل (16-1) نجد أن $\frac{x+1}{x-5} \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $(-\infty, -1] \cup (5, \infty)$ وبالتالي فإن مجال الدالة هو:

$D_f = (-\infty, -1] \cup (5, \infty)$.

$\frac{x+1}{x-5} \geq 0 \quad , \quad x \neq 5$

المجال $\boxed{D_f = (-\infty, -1] \cup (5, \infty)}$

1.11 العمليات الحسابية على الدوال: Arithmetic Operations on Function

باستخدام اثنين من الدوال نستطيع تكوين دوال جديدة عن طريق الجمع والطرح والضرب والقسمة.

تعريف 1.11.1:

إذا كانتا f و g دالتين مجالهما على الترتيب D_f و D_g فإن: جمع تقاطع

(1) حاصل جمعهما يرمز له بالرمز $f+g$ حيث $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و مجاله هو $D_f \cap D_g$.

طرح

(2) حاصل طرحهما يرمز له بالرمز $f-g$ حيث $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ و مجاله هو $D_f \cap D_g$.

ضرب

(3) حاصل ضربهما يرمز له بالرمز fg حيث $(fg)(x)=f(x)g(x)$ ومجاله هو $D_f \cap D_g$.

قسمة

(4) حاصل جمعهما يرمز له بالرمز f/g حيث $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ و مجاله هو $(D_f \cap D_g)-\{x: g(x)=0\}$.

تعريف 1.11.2(الدوال الجبرية Algebraic Functions):

الدوال التي تنتج من إجراء عمليات جبرية منتهية على كثيرات الحدود (جمع – طرح – ضرب – قسمة – جذر) تسمى بالدوال الجبرية.

مثال 1.11.1:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=x+2$ أوجد قاعدة للدوال الآتية ومجالها:

$f+g$, $f-g$, fg, f/g, $3f$

جمع طرح ضرب قسمة ضرب في 3

$x-3 \geq 0$

$x=3$

الحل:

$$(i)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-3}+x+2.$$

$$\because D_f=[3,\infty),\ D_g=(-\infty,\infty)$$

$$\therefore D_{f+g}=[3,\infty)\cap(-\infty,\infty)=[3,\infty).$$

$$(ii)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-3}-x-2.$$

$$\therefore D_{f-g}=[3,\infty).$$

$$(iii)\ (fg)(x)=f(x)g(x)=(x+2)\sqrt{x-3}.$$

عندما نضرب عدد في دالة لا يغير مجال الدالة.

$$\therefore D_{fg}=[3,\infty).$$

$$(iv)\ (f/g)(x)=f(x)/g(x)=(x+2)/\sqrt{x-3}.$$

$$\because D_{f/g}=(D_f\cap D_g)-\{x: g(x)=0\}$$

$$\therefore D_{f/g}=(3,\infty).$$

$$(v)(3f)(x)=3f(x)=3(x+2).$$

$$\therefore D_{3f}=(-\infty,\infty).$$

$R \times [0,\infty)$

مثال 1.11.2:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=x$ هل نستطيع أن نقول أن $h=fg$؟

الحل:

$$\because (fg)(x)=\sqrt{x}\sqrt{x}=x \leftarrow R$$

مجالها

$$\therefore h(x)=(fg)(x).$$

$$\because D_{fg}=[0,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)\neq D_h=(-\infty,\infty).$$

بالتالي لا نستطيع أن نقول أن $h=fg$.

بالرغم من ذلك نستطيع أن نقول أن $h=fg$ في الفترة $[0,\infty)$.

مثال 1.11.3:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ أوجد قاعدة للدوال الآتية ومجالها:

$f+g,\ f-g,\ fg,\ g/f,\ 5f$

الحل:

(i) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}.$

$\because D_f=[3,\infty),\ D_g=[-3,\infty)$

$\therefore D_{f+g}=[3,\infty)\cap[-3,\infty)=[3,\infty).$

(ii) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}.$

$\therefore D_{f-g}=[3,\infty).$

(iii) $(fg)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}.$

$\therefore D_{fg}=[3,\infty).$

(iv) $(g/f)(x)=g(x)/f(x)=\sqrt{x+3}/\sqrt{x-3}.$

$\because D_{g/f}=(D_f\cap D_g)-\{x: f(x)=0\}$ — نطرح أصفار المقام

$\therefore D_{g/f}=(3,\infty).$

(v) $(5f)(x)=5f(x)=5\sqrt{x+3}.$ $\quad x+3\geq 0 \quad x=-3$

$\therefore D_{5f}=[3,\infty).$

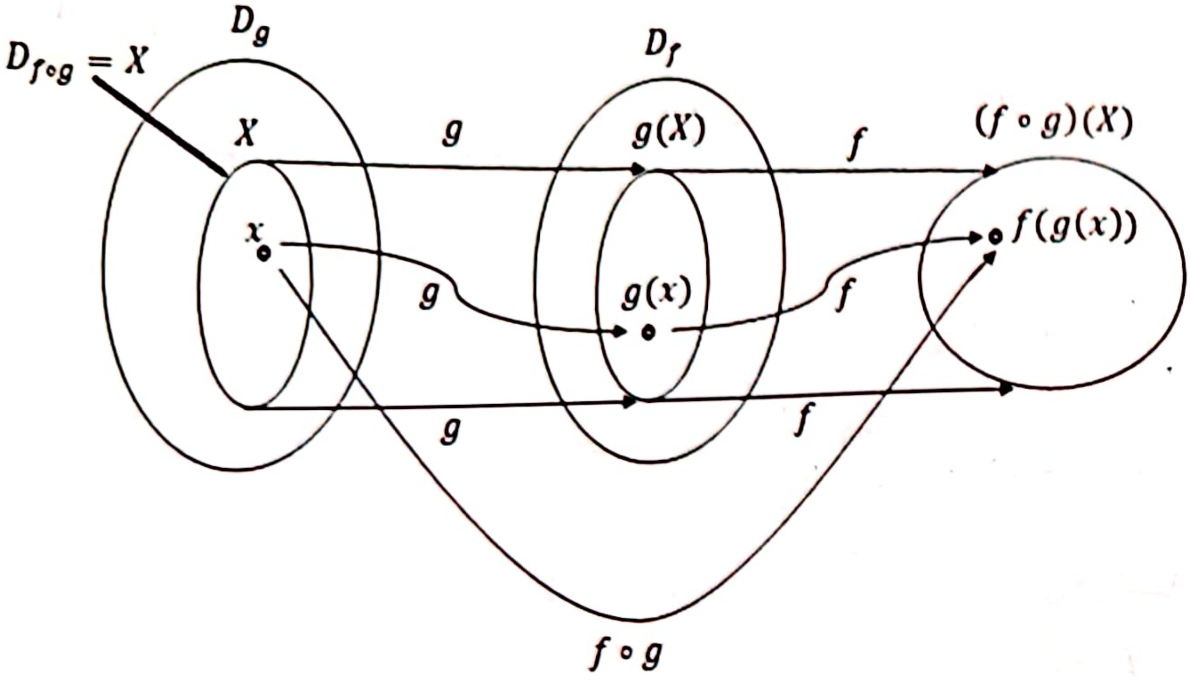
$[-3,\infty)$ يعبر عنها بالصورة الآتية

تعريف 1.11.3 (تركيب الدوال) (Composition of Functions):

إذا كانتا f و g دالتين مجالهما على الترتيب D_f و D_g فإن f تحصيل g يرمز له بالرمز $f\circ g$ حيث $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ومجالها جميع قيم x التي لها $g(x)$ تقع في مجال الدالة f.

(إذا كانت $x\in D_g$ و كانت $g(x)\in D_f$ فإن $x\in D_{f\circ g}$ أي أن:

$D_{f\circ g}=\{x: x\in D_g \text{ and } g(x)\in D_f\}$) أنظر الشكل (1-17).



الشكل (1-17)

مافهمته مرة

مثال 1.11.4:

إذا كانت $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ أوجد قاعدة للدوال $f \circ g$ و $g \circ f$ و مجال كل منهما. إذا كانت $h(x) = x$ هل نستطيع أن نقول أن $h = f \circ g$؟

الحل:

حيث أن:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$\therefore D_{f\circ g} = [0, \infty).$$ $\sqrt{x} \geq 0$

و بالتالي لا نستطيع أن نقول أن $h = f \circ g$.

حيث أن:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$\therefore D_{g\circ f} = (-\infty, \infty).$$

مثال 1.11.5:

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ أوجد قاعدة للدوال $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، $f \circ f$ و $g \circ g$ و مجال كل منهما.

الحل:

$$\because (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3-x}) = \sqrt{\sqrt{3-x}-1}.$$

في المثال السابق استنتاج مجال الدالة $f \circ g$ كان بصورة مباشره بينما هنا نحتاج إلى شيء من التفصيل.

$x \in D_g$ هذا يعني أن $x \leq 3$ و $g(x) \in D_f$ هذا يعني أن $\sqrt{3-x} \geq 1$ وبالتالي فإن مجال الدالة هو حل المتباينتين:

$$\sqrt{3-x} \geq 1 \ \& \ x \leq 3$$
$$\Rightarrow 2-x \geq 0 \ \& \ x \leq 3$$
$$\Rightarrow x \leq 2$$
$$\therefore D_{f \circ g} = (-\infty, 2].$$
$$\because (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \sqrt{3-\sqrt{x-1}}.$$

$x \in D_f$ هذا يعني أن $x \geq 1$ و $f(x) \in D_g$ هذا يعني أن $\sqrt{x-1} \leq 3$ وبالتالي فإن مجال الدالة هو حل المتباينتين:

إذا قسمت وتغيرت الإشارة تطلع فترة
نعوض في حاجتين المتباينة والدالة الأصلية.

$$x \geq 1 \ \& \ \sqrt{x-1} \leq 3$$
$$\Rightarrow x \geq 1 \ \& \ x \leq 10$$
$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 10$$
$$\therefore D_{g \circ f} = [1,10].$$
$$\because (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}.$$
$$\therefore D_{f \circ f} = [2, \infty).$$

$$\because (g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{3-x}) = \sqrt{3-\sqrt{3-x}}.$$

مجال الدالة هو حل المتباينتين:

$$\sqrt{3-x} \le 3 \ \ \& \ x \le 3$$

$$\Rightarrow 3 - x \le 9 \ \& \ x \le 3$$

$$\Rightarrow x \ge -6 \ \& \ x \le 3$$

$$\Rightarrow -6 \le x \le 3$$

$$\therefore D_{g\circ g} = [-6,3].$$

مثال 1.11.6:

إذا كانت $h(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ أكتبها في صورة محصلة دالتين $f\circ g$.

الحل:

بفرض الدالة $f(x) = \frac{x}{x+4}$ و $g(x) = x^2$ فإن:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

في الحالات المشابهة، نستطيع إجراء ذلك دائما بإيجاد دالة f هي نفسها h و لكن لقيمة x فقط (استبدال كل المقادير المتشابهة بـ x) ثم إيجاد دالة g تمثل هذا المقدار.

في المثال حصلنا على الدالة f باستبدال المقدار x^2 في الدالة h بـ x والدالة g بجعلها هي المقدار x^2.

مثال 1.11.7:

إذا كانت $h(x) = \sqrt{4-3x}$ أكتبها في صورة محصلة دالتين $f\circ g$.

الحل:

بفرض الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 4 - 3x$ فإن:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4 - 3x) = \sqrt{4 - 3x}.$$

الدالة الثابتة هي حالة خاصة من الدوال أي عندما $f(x) = c$ وبالتالي جمع الدالة مع مقدار ثابت، أو ضربها فيه، أو قسمتها عليه هي حالات خاصة من العمليات على الدوال ماذا يحدث عند إجراء هذه العمليات على شكل منحنى الدالة؟

$f(x+c)$ مزاح لليسار

$f(x-c)$ مزاح لليمين

أذا كان c جوا القوس

تعريف 1.11.4 (الانتقال Translation):

بفرض الدالة $y = f(x)$ والمقدار الثابت الموجب c عند إضافة الثابت إلى المتغير المستقل فان $f(x + c)$ هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ لكن مُزاحا إلى اليسار بعدد c وحدة، بينما عند طرح الثابت من المتغير المستقل فإن منحنى الدالة هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ و لكن مُزاحا إلى اليمين بعدد c وحدة.

$F(x-c)$

$f(x)+c$ أعلى

$f(x)-c$ أسفل

إذا كان c خارج القوس

عند إضافة الثابت إلى المتغير التابع فان منحنى الدالة $f(x) + c$ هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ و لكن مُزاحا إلى أعلى بعدد c وحدة. عند طرح الثابت من المتغير التابع فإن منحنى الدالة هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ و لكن مُزاحا إلى أسفل بعدد c وحدة.

مثال 1.11.8:

$x^2 + 2x + 1$

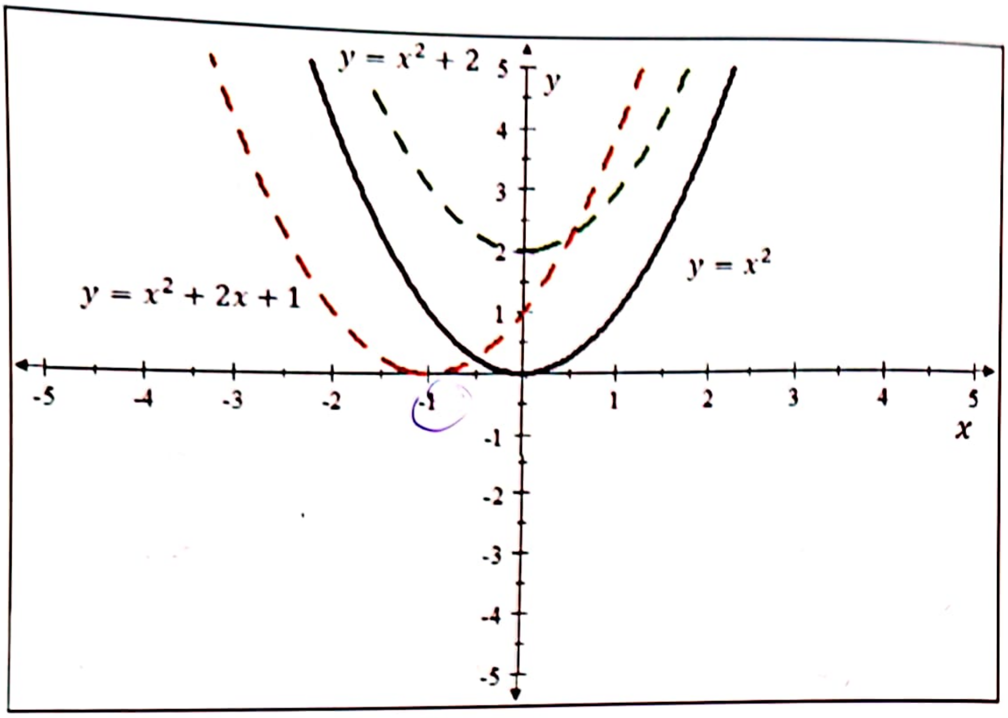
ارسم منحنى الدالة $h(x) = x^2 + 2x + 1$ والدالة $g(x) = x^2 + 2$.

$(x+1)^2$

الحل:

نستطيع كتابة الدالة $h(x)$ على الصورة $h(x) = (x + 1)^2$ وبالتالي منحنى هذه الدالة ما هو إلا منحنى الدالة $f(x) = x^2$ مزاحا إلى اليسار بمقدار وحدة واحدة.

الدالة $g(x)$ هي الدالة $f(x)$ مضافا إليها الثابت 2 وبالتالي فإن منحناها هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ مُزاحا إلى أعلى بمقدار 2 وحدة. كما بالشكل (1-18).



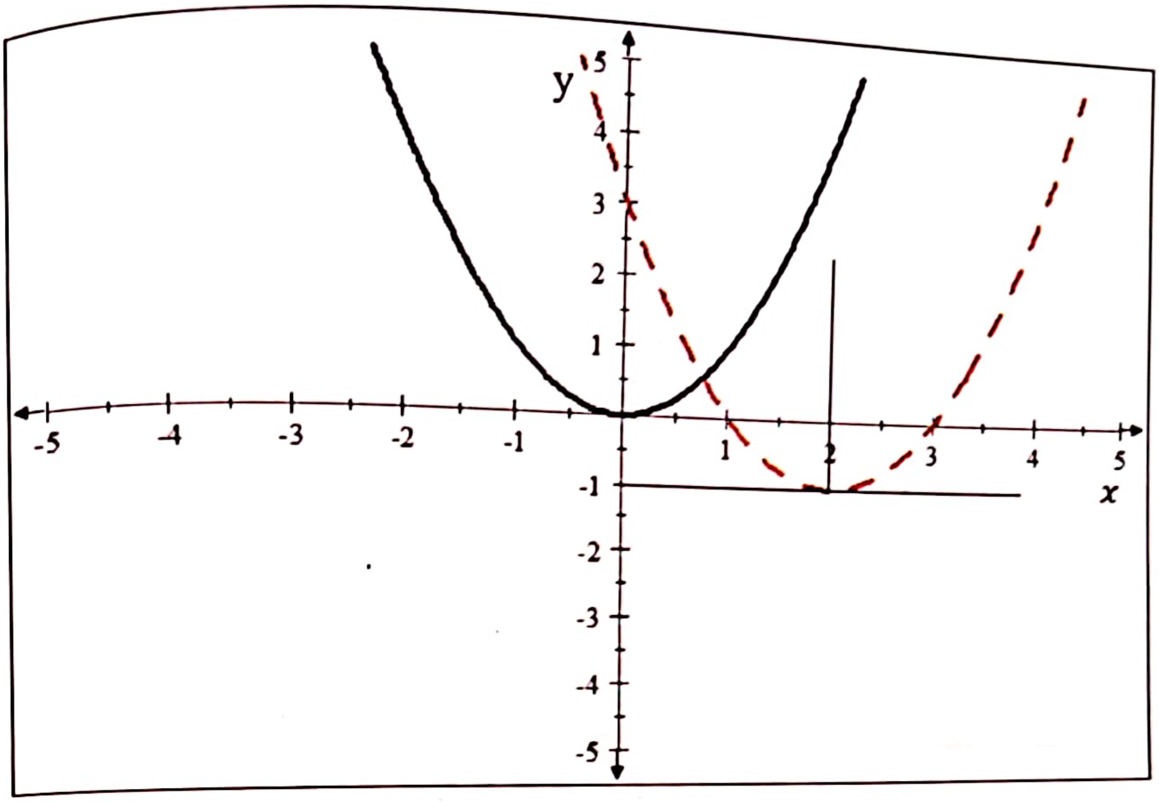
الشكل (1-18)

مثال 1.11.9:

ارسم منحنى الدالة $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

الحل:

نستطيع كتابة الدالة $g(x)$ على الصورة $g(x) = (x-2)^2 - 1$ وبالتالي منحنى هذه الدالة ما هو إلا منحنى الدالة $f(x) = x^2$ مُزاحا إلى اليمين بمقدار وحدتين و مُزاحا إلى أسفل بمقدار وحدة واحدة. كما بالشكل (1-19).



الشكل (1-19)

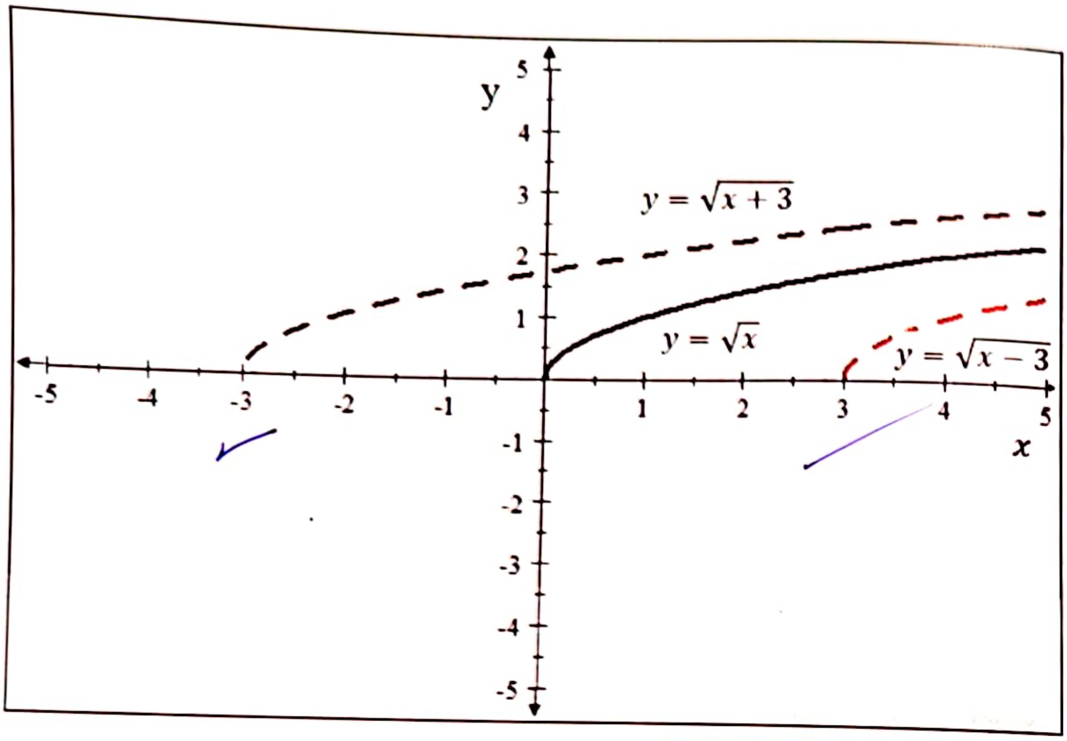
مثال 1.11.10: احفظ الرسمة والدالة نفسها

ارسم منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $h(x) = \sqrt{x-3}$.

الحل:

منحنى الدالة $g(x)$ ما هو إلا منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مزاحا إلى اليسار بمقدار ثلاث وحدات و منحنى الدالة $h(x)$ ما هو إلا منحنى الدالة $f(x)$ مزاحا إلى اليمين بمقدار ثلاث وحدات كما بالشكل (1-20).

الدالة $g(x)$ هي الدالة $f(x)$ مضافا إليها الثابت 2 وبالتالي فإن منحناها هو نفسه منحنى الدالة $f(x)$ مُزاحا إلى أعلى بمقدار 2 وحدة. كما بالشكل (1-20).



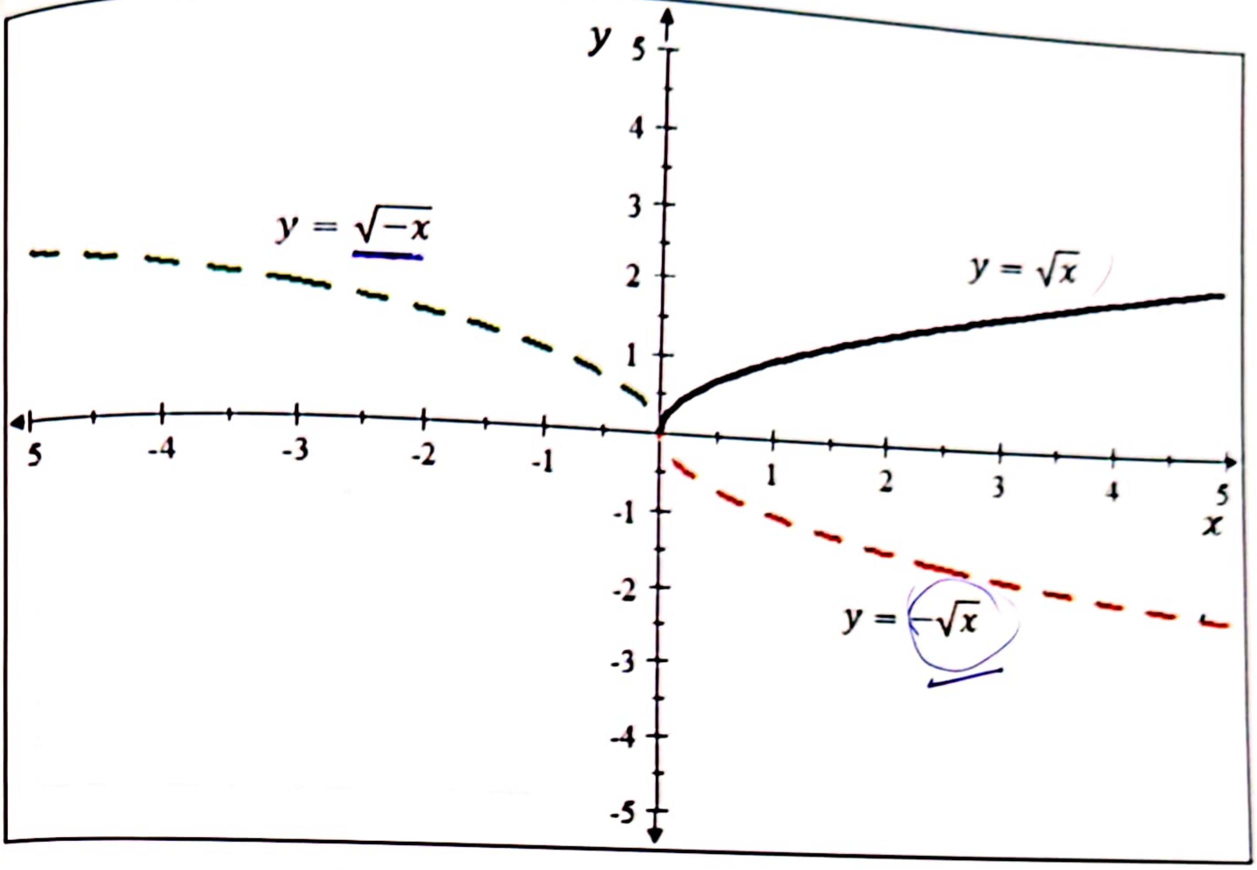
الشكل (1-20)

تعريف 1.11.5 (الانعكاس Reflection):

بفرض الدالة $y = f(x)$ فإن $f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة حول المحور oy بينما $-f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة حول المحور ox.

مثال 1.11.11:

الشكل (1-21) يوضح منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ، $f(-x) = \sqrt{-x}$ و $-f(x) = -\sqrt{x}$.



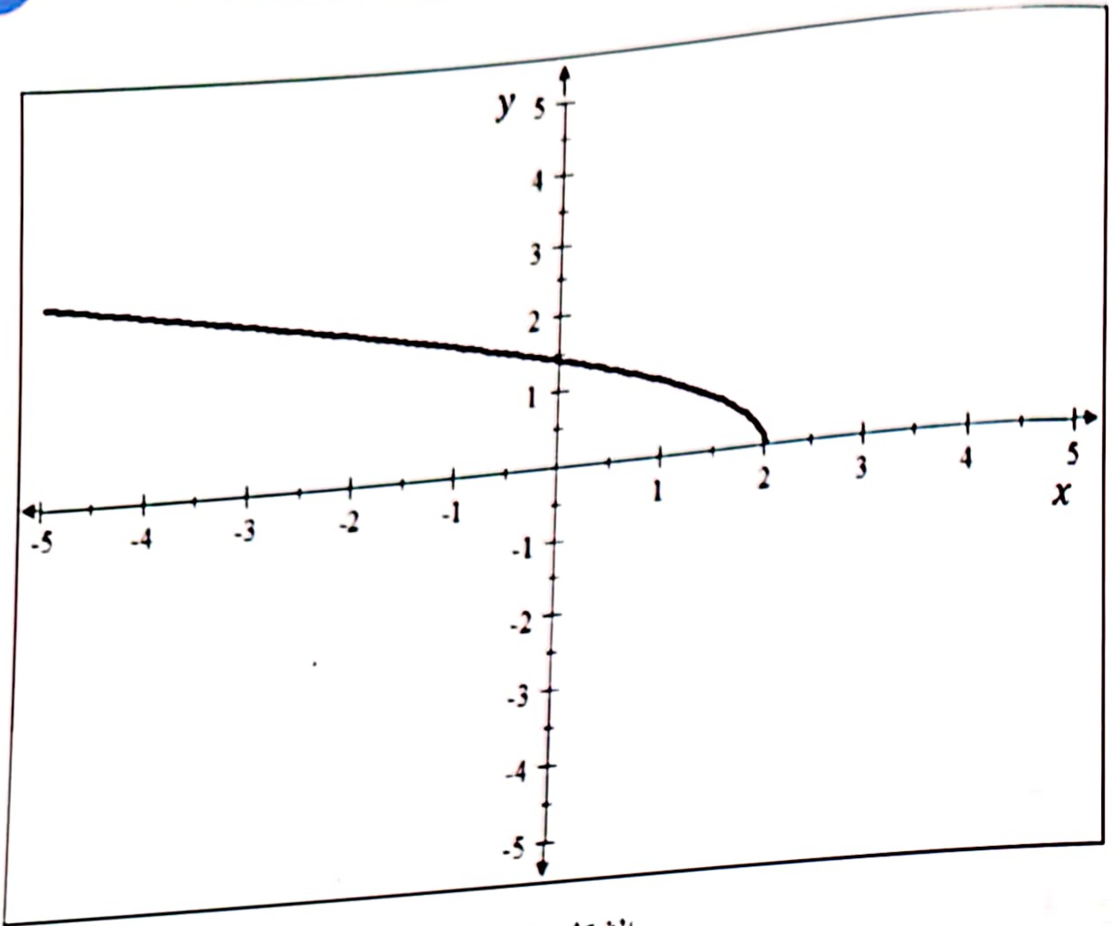
الشكل (1-21)

مثال 1.11.12:

ارسم منحنى الدالة $y = \sqrt{2 - x}$.

الحل:

الدالة هي انعكاس الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور oy مزاحا إلى اليمين عدد 2 وحدة. كم
بالشكل (1-22).



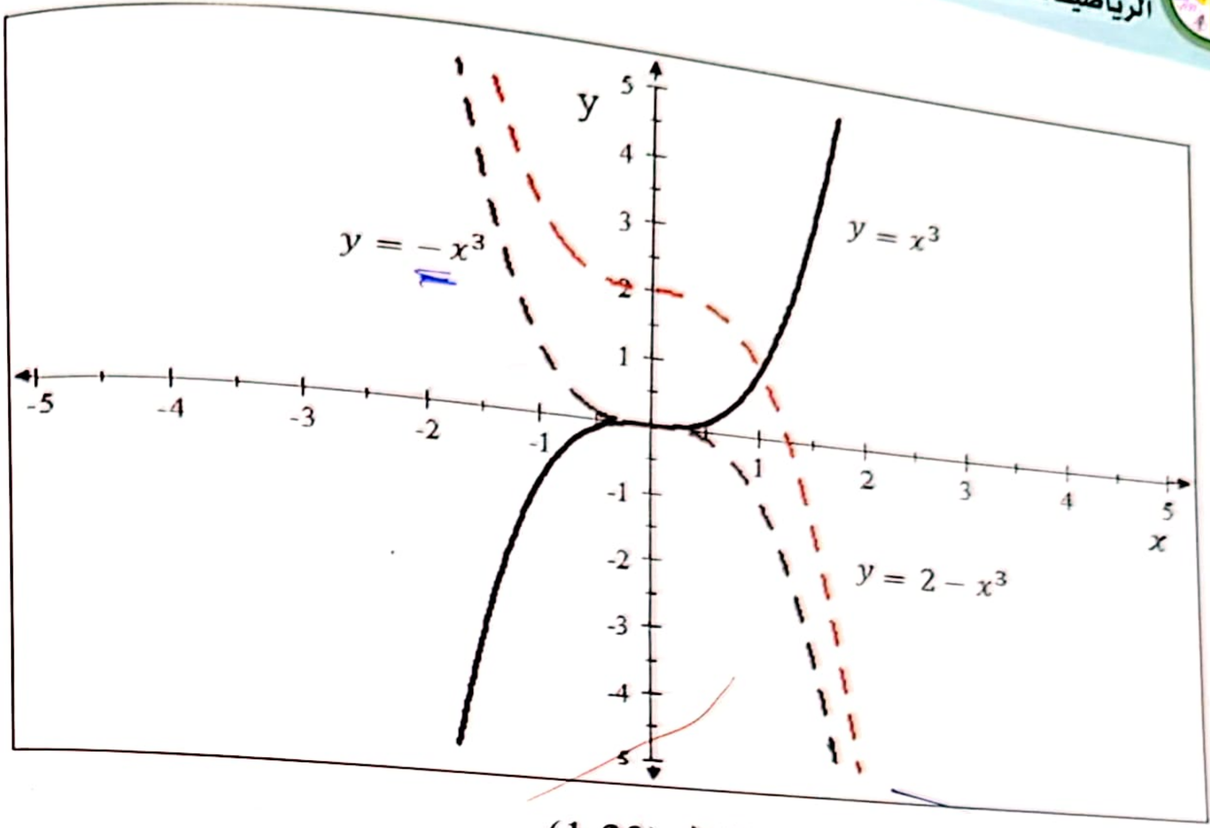
الشكل (1-22)

مثال 1.11.13:

ارسم منحنى الدالة $y = 2 - x^3$.

الحل:

الدالة هي انعكاس الدالة $f(x) = x^3$ حول المحور ox مزاحا إلى أعلى عدد 2 وحدة. كما بالشكل (1-23).



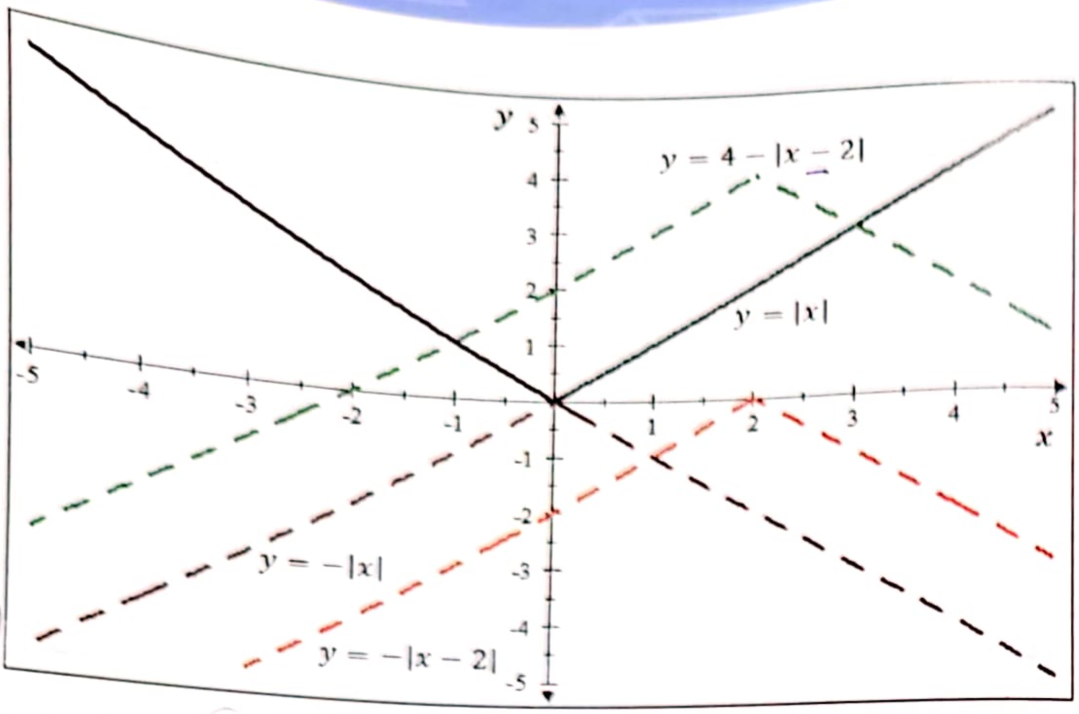
الشكل (1-23)

مثال 1.11.14:

ارسم منحنى الدالة $y = 4 - |x - 2|$.

الحل:

الدالة هي انعكاس الدالة $f(x) = |x|$ حول المحور ox مزاحا إلى اليمين عدد 2 وحدة ثم مزاحا إلى أعلى عدد أربع وحدات. كما بالشكل (1-24).



إذا كان c أكبر

الشكل (1-24)

(1) إذا كانت c خارج القوس هو تمدد في محور y

17/2/2020

(2) إذا كانت c داخل القوس انضغاط حول محور x

تعريف 1.11.6 (التمدد والانضغاط) (Stretches and Compression):

بفرض الدالة $y = f(x)$ والثابت الحقيقي الموجب c.

(1) إذا كان $c > 1$ (أكبر) فان $cf(x)$ هو تمدد لمنحنى الدالة f في اتجاه المحور oy بالعامل c أي أن كل نقطة على المنحنى يتضاعف إحداثيها y بالعامل c و $f(cx)$ هو انضغاط للمنحنى في اتجاه المحور ox.

إذا كانت c أصغر

(2) إذا كانت $c < 1$ (أصغر) فإن $cf(x)$ هو انضغاط لمنحنى الدالة f في اتجاه المحور oy بالعامل c أي أن كل نقطة على المنحنى ينقسم إحداثيها y بالعامل c و $f(cx)$ هو تمدد للمنحنى في اتجاه المحور ox.

(1) إذا كانت c خارج القوس انضغاط حول المحور

(2) إذا كانت c داخل القوس تمدد حول المحور

التعريف واضح في حالة التمدد والانضغاط في اتجاه المحور oy ، بينما قد يحدث التباس في حالة المحور ox لذلك سنتناول التعريف بشيء من التفصيل. بفرض أن $c = 2$ وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ ستصل للقيمة $f(4)$ عند قيمة $x = 4$ بينما ستصل الدالة $f(cx)$ لنفس القيمة $f(4)$ عند قيمة أقل لـ x و هي $x = 2$ وبالتالي سيكون منحنى الدالة $f(cx)$ أكثر قربا من المحور

oy من منحنى الدالة $f(x)$ أي أن المنحنى انضغط إلى نقطة الأصل على المحور ox. يحدث العكس في حالة ما إذا كانت $c < 1$. بفرض أن $c = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ ستصل للقيمة $f(4)$ عند قيمة $x = 4$ بينما ستصل الدالة $f(cx)$ لنفس القيمة $f(4)$ عند قيمة أكبر لـ x و هي $x = 8$ وبالتالي سيكون منحنى الدالة $f(cx)$ أكثر بعدا عن المحور oy من منحنى الدالة $f(x)$ أي أن المنحنى تمدد بعدا عن نقطة الأصل على المحور ox.

مثال 1.11.15:

أكبر من 1

ضرب في الدالة نفسها.

الدالة $f(x) = 2sinx$ هي تمدد للدالة $y = sinx$ بالعامل $c = 2$ في اتجاه المحور oy أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(x, 2y)$.

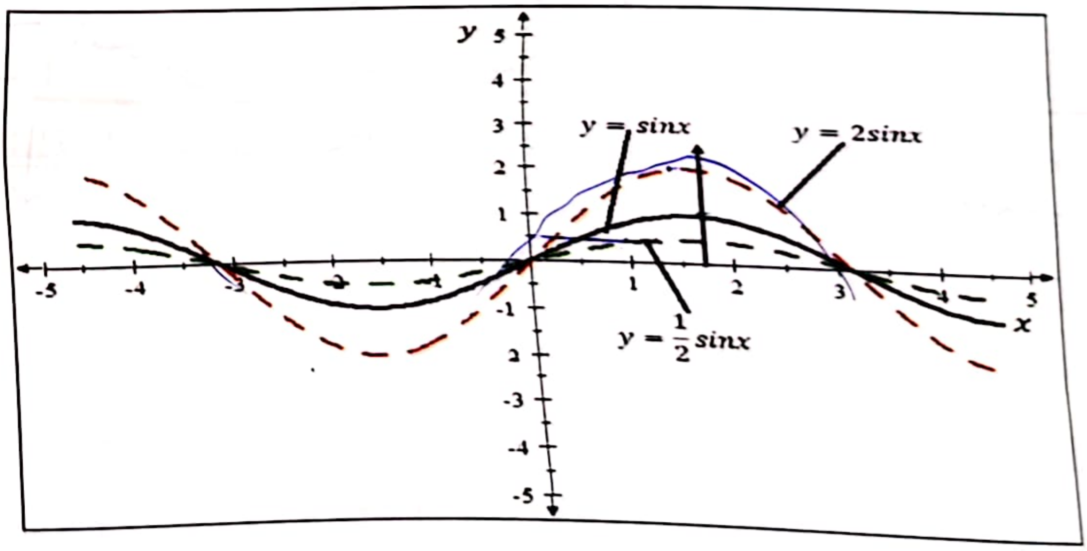
أصغر من 1

ضرب في الدالة نفسها

بينما الدالة $g(x) = \frac{1}{2}sinx$ هي انضغاط للدالة $y = sinx$ بالعامل $c = \frac{1}{2}$ في اتجاه المحور oy أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(x, \frac{1}{2}y)$.

لاحظ أنه إذا خرج سهم عموديا من نقطة على المحور ox في اتجاه oy فإنه يقطع $g(x) = \frac{1}{2}sinx$ ثم $y = sinx$ ثم $f(x) = 2sinx$. (تمدد في اتجاه oy)

انظر الشكل (1-25).



الشكل (1-25)

مضروب في X

$c < 1$

الدالة $f(x) = sin2x$ هي انضغاط للدالة $y = sinx$ بالعامل $c = 2$ في اتجاه المحور ox

أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(2x, y)$. التغيير في المحور X

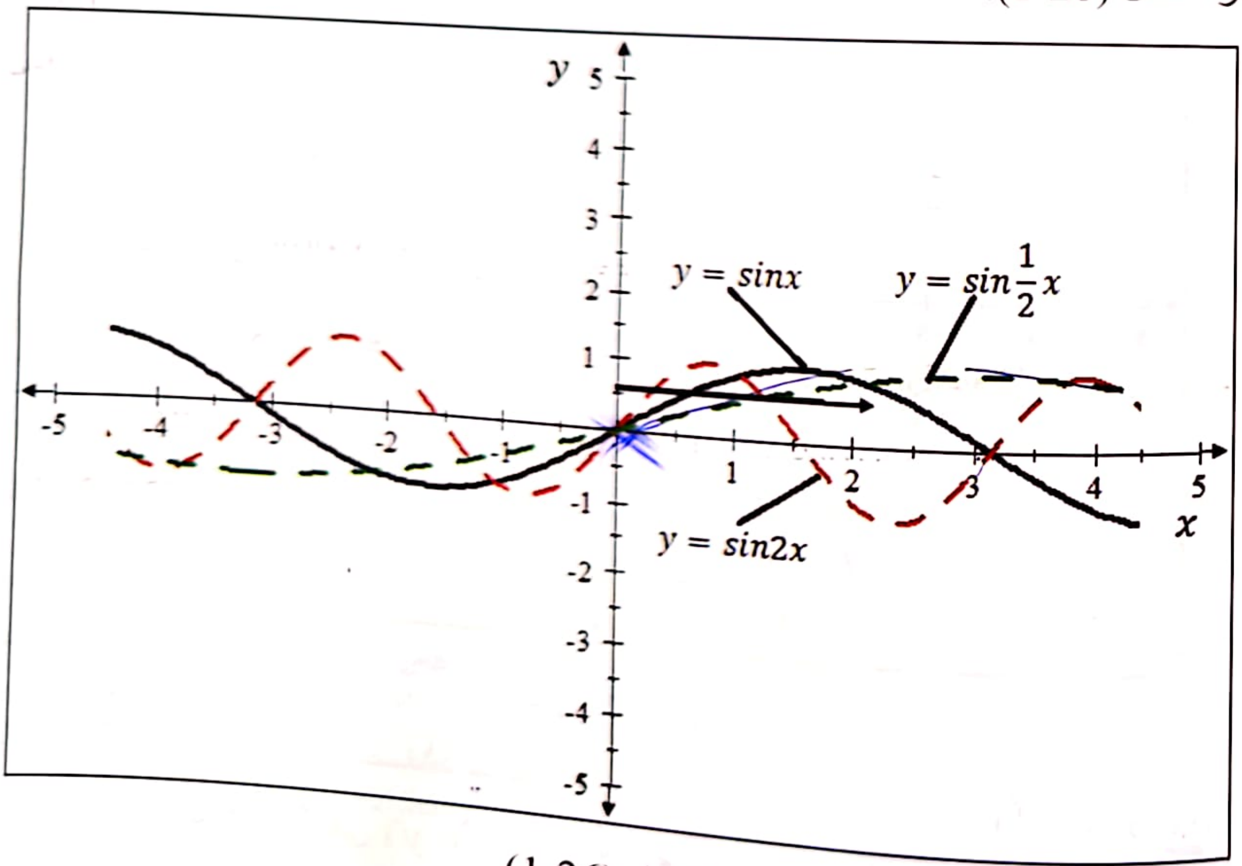
$c > 1$

بينما الدالة $g(x) = sin\frac{1}{2}x$ هي تمدد للدالة $y = sinx$ بالعامل $c = \frac{1}{2}$ في اتجاه المحور ox

أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(\frac{1}{2}x, y)$.

لاحظ أنه إذا خرج سهم عموديا من نقطة على المحور oy في اتجاه ox فإنه يقطع $f(x) =$ $sin2x$ ثم $y = sinx$ ثم $g(x) = sin\frac{1}{2}x$. (تمدد في اتجاه ox)

انظر الشكل (26-1).



الشكل (26-1)

مثال 1.11.16: مضروب في الدالة

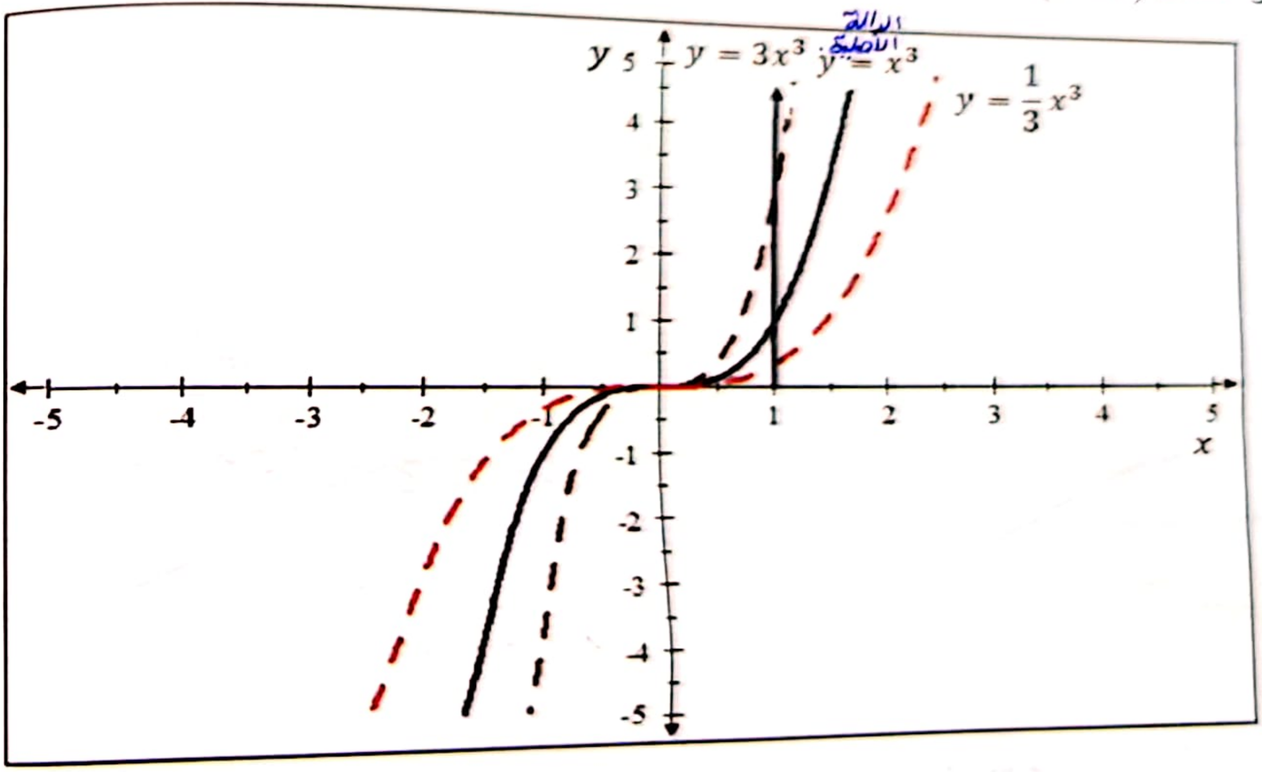
الدالة $f(x) = 3x^3$ هي تمدد للدالة $y = x^3$ بالعامل $c = 3$ في اتجاه المحور oy أي ا

نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(x, 3y)$.

بينما الدالة $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ هي انضغاط للدالة $y = x^3$ بالعامل $c = \frac{1}{3}$ في اتجاه المحور oy

أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(x, \frac{1}{3}y)$.

أنظر الشكل (1-27).



الشكل (1-27)

الدالة $f(x) = (3x)^3$ هي انضغاط للدالة $y = x^3$ بالعامل $c = 3$ في اتجاه المحور ox أي

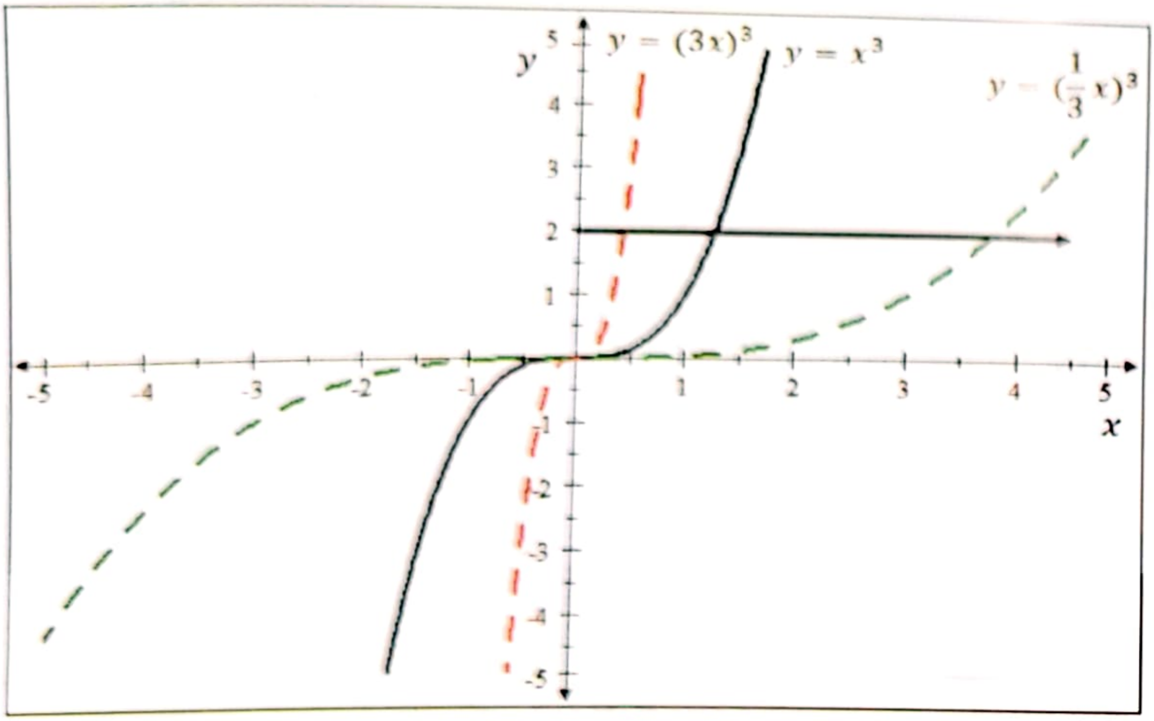
أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(3x, y)$. لأن 3 أكبر من 1

بينما الدالة $g(x) = (\frac{1}{3}x)^3$ هي تمدد للدالة $y = x^3$ بالعامل $c = \frac{1}{3}$ في اتجاه المحور ox

لأن $\frac{1}{3}$ أصغر من 1

أي أن نقط منحنى الدالة $f(x)$ هي $(\frac{1}{3}x, y)$.

انظر الشكل (1-28).



الشكل (1-28)

① (x, -y) حول ox متماثل
② (-x, y) حول oy متماثل
③ (-x, -y) حول نقطة الأصل متماثل

17/2/2020

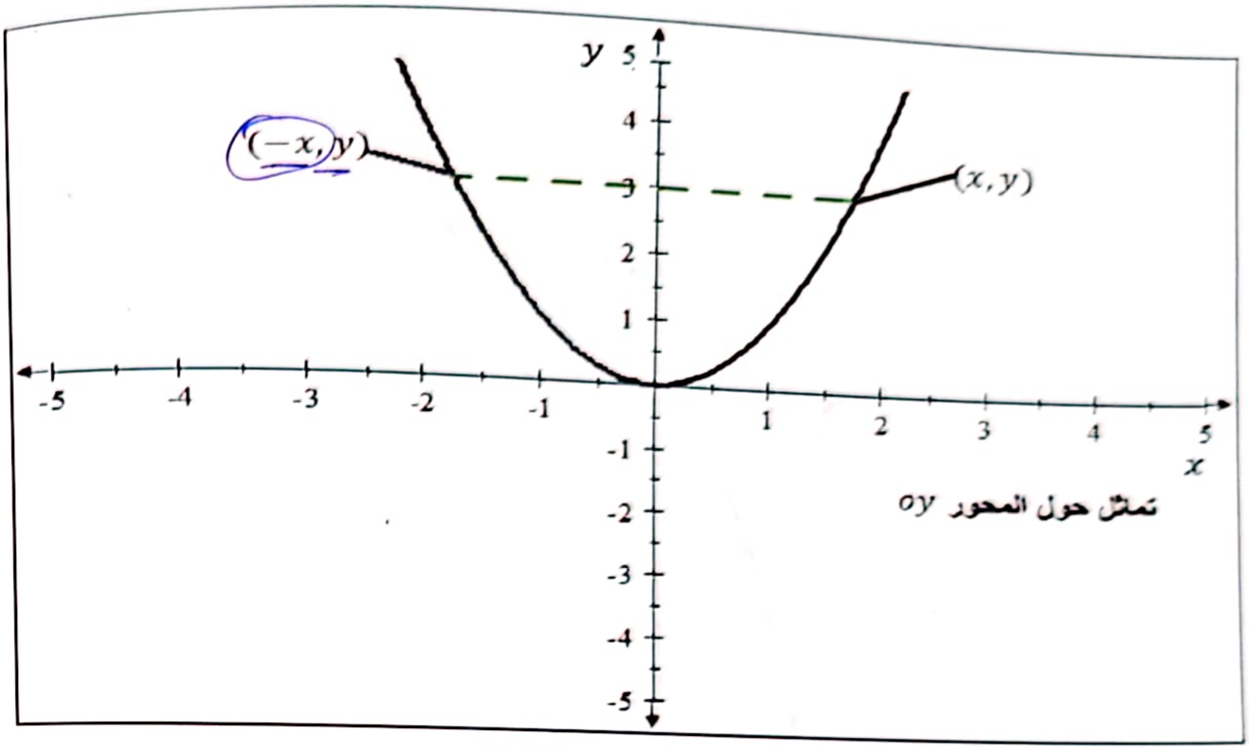
تعريف 1.11.7 (التماثل) (Symmetric):

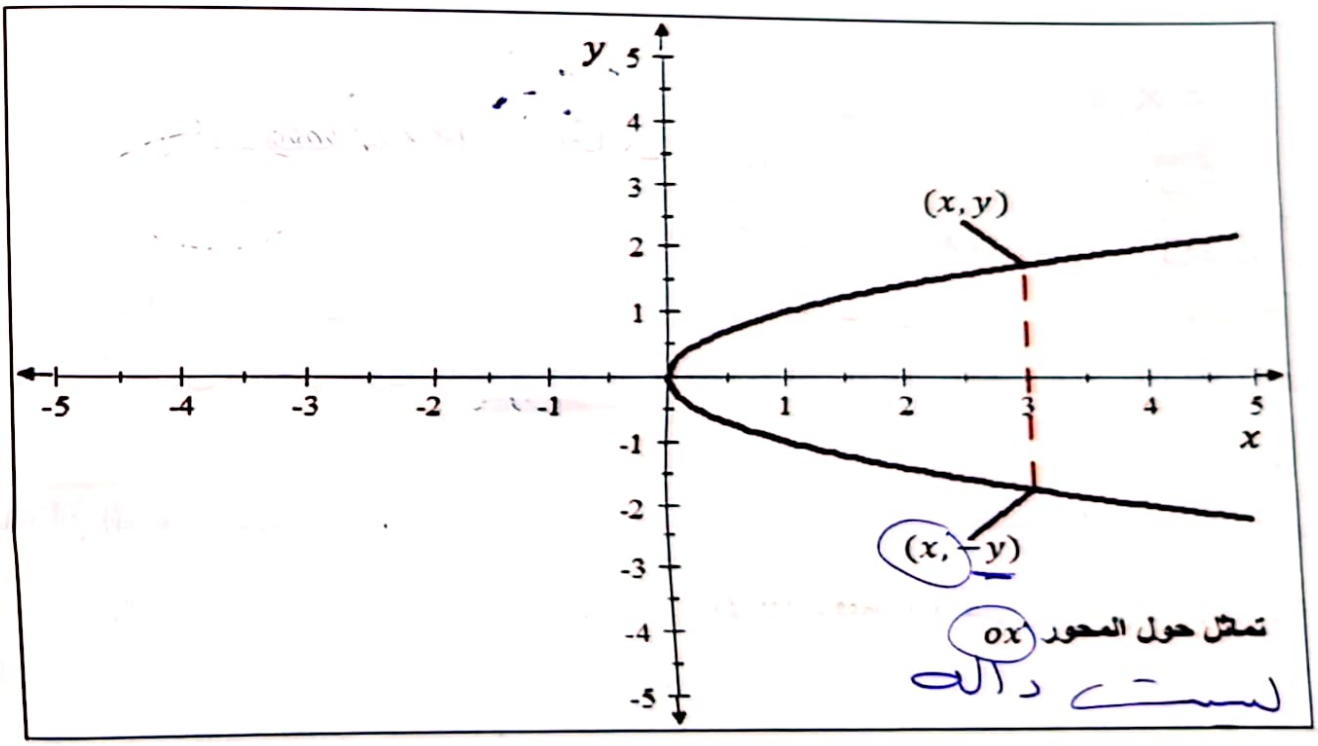
بفرض المنحنى $y = f(x)$.

(1) يقال أن المنحنى متماثل حول المحور ox إذا وفقط إذا كان جميع النقط $(x, -y)$ تقع على المنحنى.

(2) يقال أن المنحنى متماثل حول المحور oy إذا وفقط إذا كان جميع النقط $(-x, y)$ تقع على المنحنى.

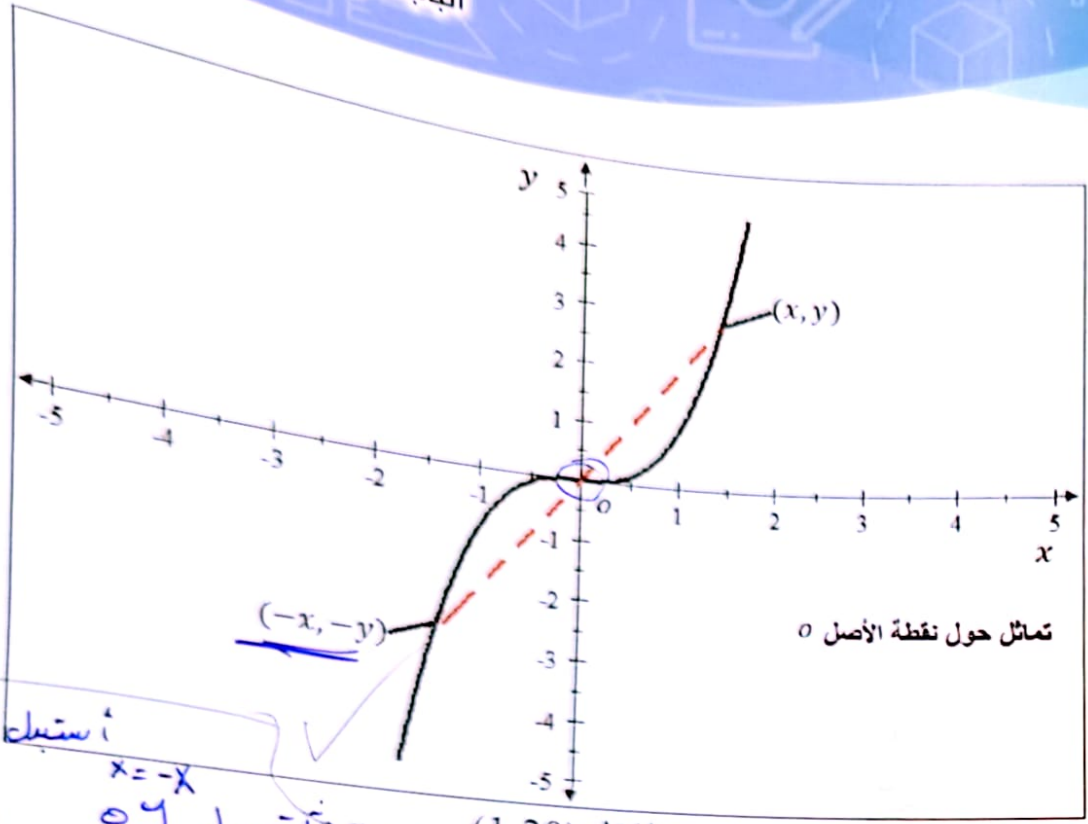
(3) يقال أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل $(0,0)$ إذا وفقط إذا كان جميع النقط $(-x, -y)$ تقع على المنحنى. انظر الشكل (1-29).





ليست دالة

لا يمثل تماثل



الشكل (1-29)

أستبدل كل x بسالب x

$f(-x) = f(x)$ متماثلة حول oy $x = -x$

$y = \pm f(x)$ ox $y = -y$ // أستبدل y بسالب y

$f(-x) = -f(x)$ نقطة الأصل // //

17/12/2020

نظرية 1.11.1 (اختبار التماثل Symmetry Test):

بفرض المنحنى $y = f(x)$.

(1) يكون المنحنى متماثل حول المحور oy إذا وفقط إذا كان باستبدال x بـ $-x$ نحصل على نفس المعادلة أي أن: $f(x) = f(-x)$.

(2) يكون المنحنى متماثل حول المحور ox إذا وفقط إذا كان باستبدال y بـ $-y$ نحصل على نفس المعادلة أي أن: $y = \pm f(x)$.

(3) يكون المنحنى متماثل حول نقطة الأصل $(0,0)$ إذا وفقط إذا كان باستبدال x بـ $-x$ وباستبدال y بـ $-y$ نحصل على نفس المعادلة أي أن: $f(-x) = -f(x)$.

مثال 1.11.17:

ادرس تماثل المنحنى $y = x^3$.

الحل:

باستبدال x بـ $-x$ فإن: $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ وبالتالي فإن منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل.

مثال 1.11.18:

ادرس تماثل المنحنى $y = x^2$.

الحل:

باستبدال x بـ $-x$ فإن: $f(-x) = x^2 = f(x)$ وبالتالي فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور oy.

مثال 1.11.19:

ادرس تماثل المنحنى $y^2 = x$.

الحل:

باستبدال y بـ $-y$ فإن $(-y)^2 = x$ و منها نحصل على نفس المعادلة وبالتالي فإن المنحنى متماثل حول المحور ox. أو من المعادلة مباشرة فإن: $y = \pm\sqrt{x}$.

متماثلة حول المحور x و y و نقطة الأصل

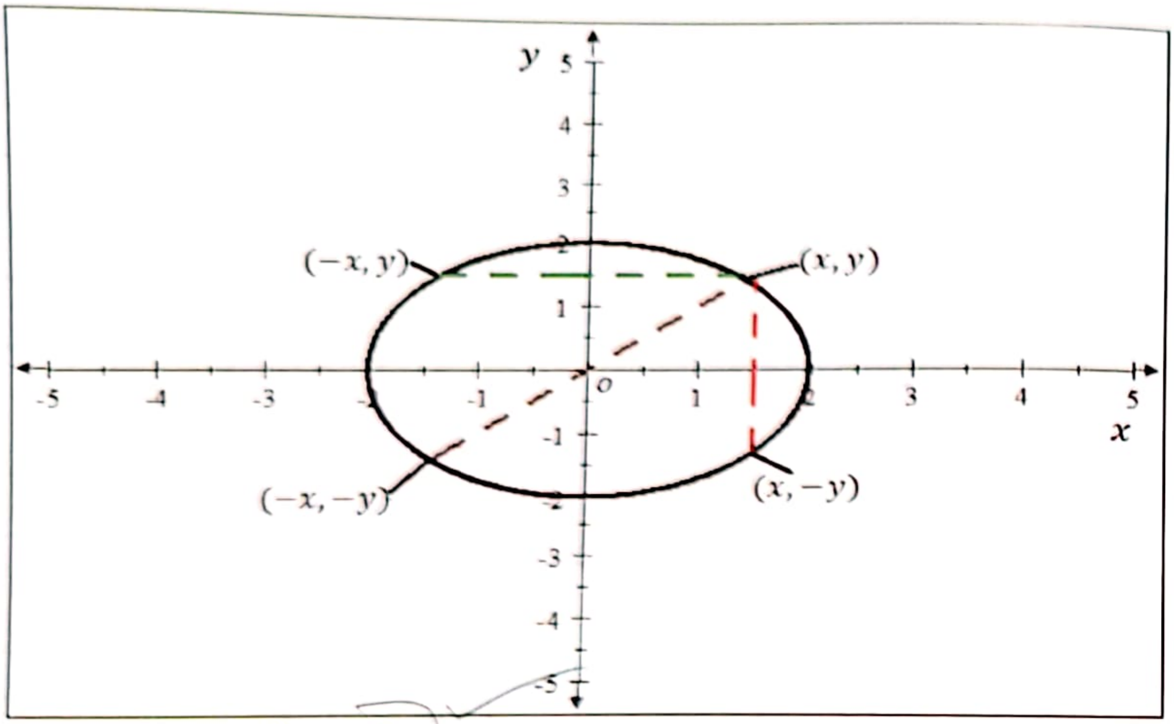
معادلة الدائرة

مثال 1.11.20:

ادرس تماثل المنحنى $x^2 + y^2 = 4$.

الحل:

نستطيع كتابة معادلة المنحنى على الصورة $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ وبالتالي فإن المنحنى متماثل حول المحور ox و حيث أن : $f(x) = f(-x)$ فإنه متماثل حول المحور oy و $f(-x) = -f(x)$ فإنه متماثل حول نقطة الأصل. (هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2) انظر الشكل (1-30).



الشكل (1-30)

① f(x) زوجية ← $f(-x) = f(x)$
متماثلة حول المحور y

② f(x) فردية ← $f(-x) = -f(x)$
متماثلة حول نقطة الأصل

17/2/2020

تعريف 1.11.8 (الدوال الزوجية والفردية) (Even and Odd Functions):

بفرض الدالة $y = f(x)$.

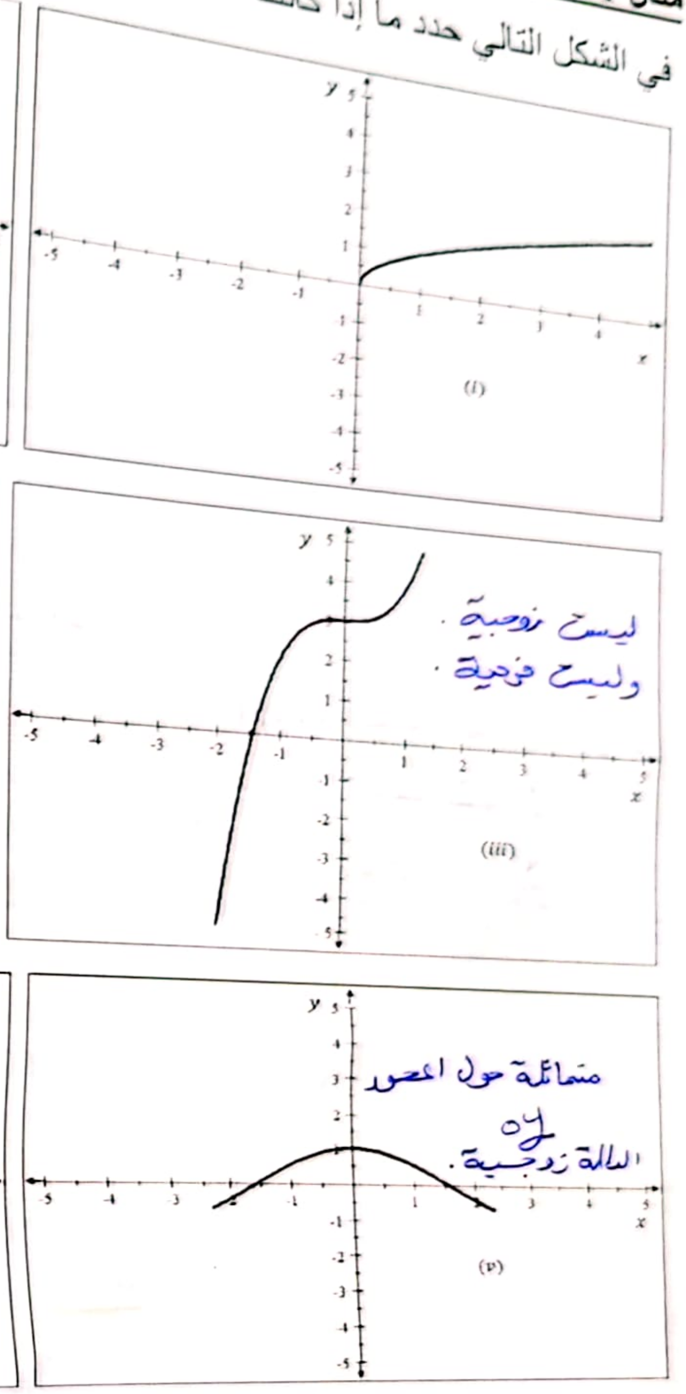
(1) يقال أن الدالة زوجية إذا وفقط إذا كان $f(-x) = f(x)$. هندسيا إذا وفقط إذا كان منحنى الدالة متماثل حول المحور oy.

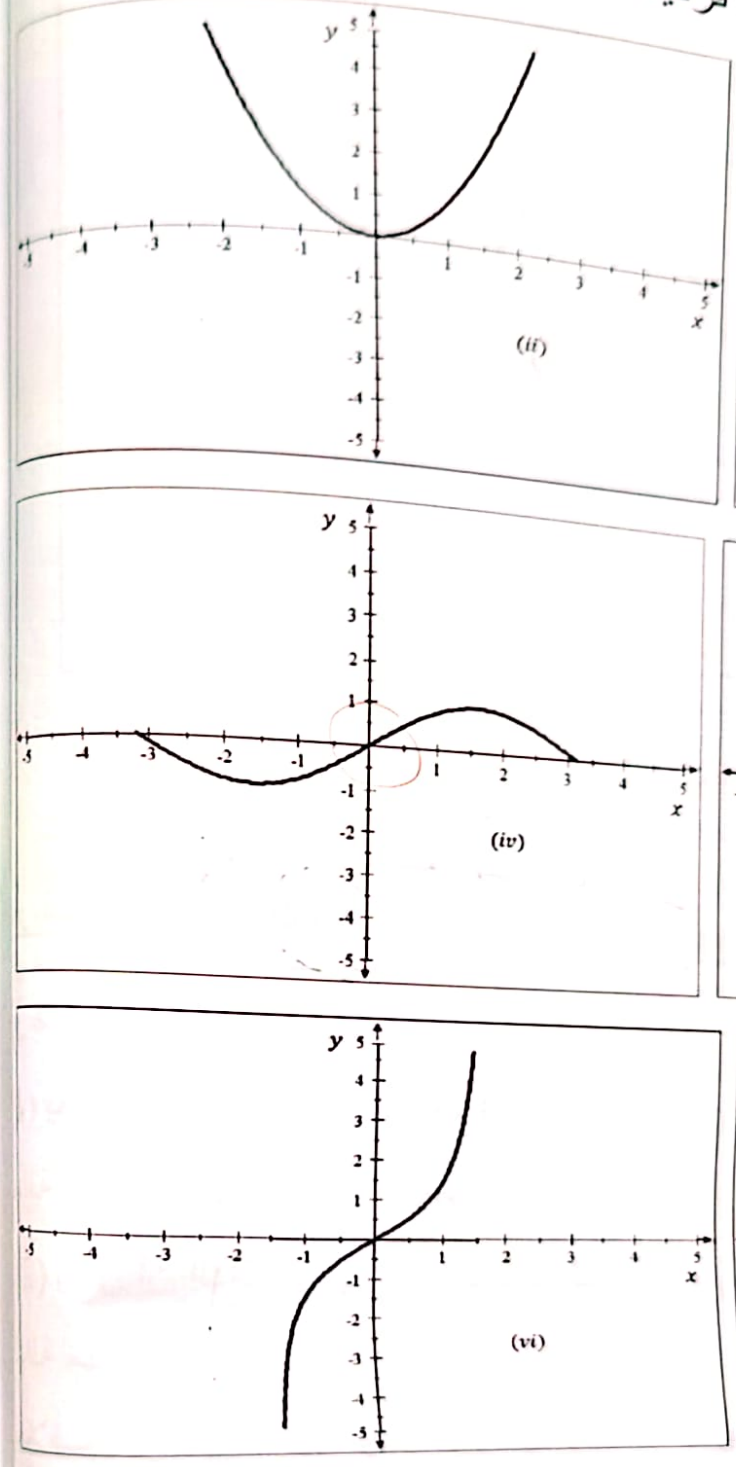
(2) يقال أن الدالة فردية إذا وفقط إذا كان $f(-x) = -f(x)$. هندسيا إذا وفقط إذا كان منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل.

بخلاف ذلك فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

مثال 1.11.21:

في الشكل التالي حدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية.





الحل:

- منحنى الدالة في الشكل (i) غير متماثل وبالتالي الدالة ليست زوجية و ليست فردية.
- منحنى الدالة في الشكل (ii) متماثل حول المحور oy وبالتالي الدالة زوجية.

- منحنى الدالة في الشكل (iii) غير متماثل حول المحور oy وغير متماثل حول نقطة الأصل بالتالي الدالة ليست زوجية و ليست فردية.
- منحنى الدالة في الشكل (iv) متماثل حول نقطة الأصل بالتالي الدالة فردية.
- منحنى الدالة في الشكل (v) متماثل حول المحور oy وبالتالي الدالة زوجية.
- منحنى الدالة في الشكل (vi) متماثل حول نقطة الأصل بالتالي الدالة فردية.

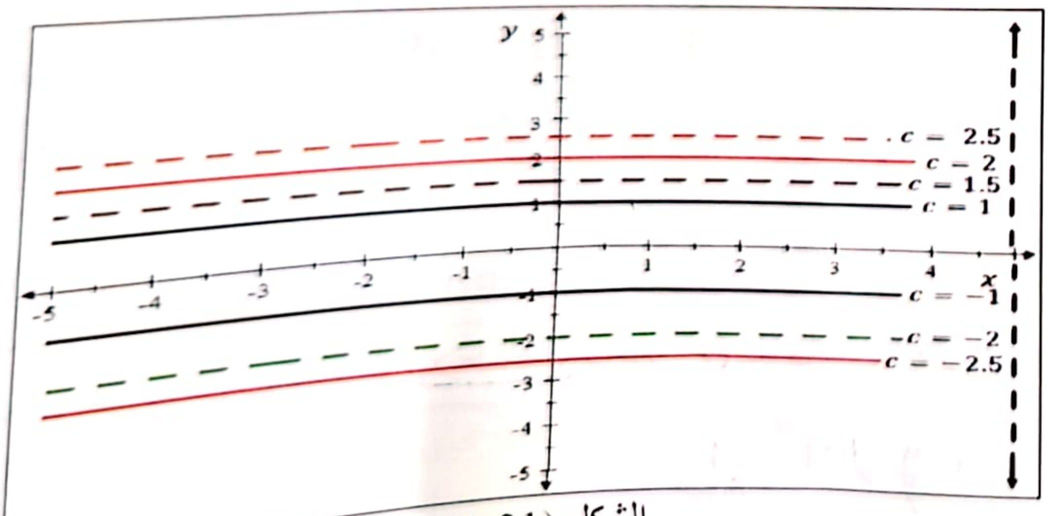
17/12/2020

تعريف 1.11.9 (عائلة الدوال Family of Functions):

إذا اعتمدت معادلة الدالة على بارامتر فإنها تسمى معادلة عائلة من الدوال.

$f(x) = x^2 + k$ ل

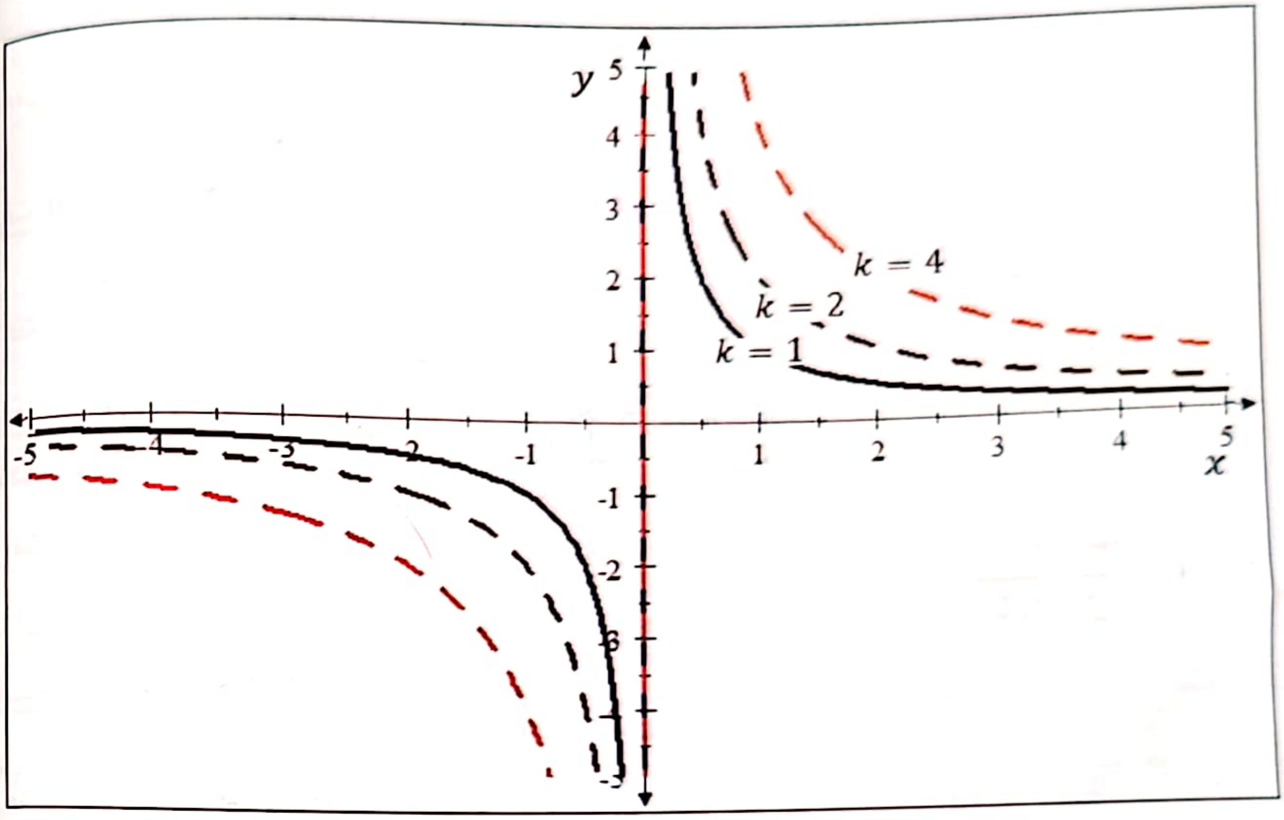
استخدمنا في التعريف السابق مصطلح سبق لنا دراسته ولكن سوف نعطيه جزءا من النقاش وهو البارامتر. الثابت هو قيمة ثابتة غير قابلة للتغير، نستطيع أن نقول ثابت بلانك. كما نستطيع أن نقول إن سرعة الضوء مقدار ثابت بينما البارامتر هو مقدار لا يعتمد على المتغير المستقل وبالتالي هو قيمة ثابتة ولكنها ممكن أن تتغير (غير محددة القيمة) وليس له علاقة بالمتغير المستقل نقول أن $y = c$ قيمة c لا تعتمد على المتغير المستقل بينما يمكن أن تأخذ الثابت 1 أو 2 او أي عدد ثابت آخر وبالتالي هو بارامتر. بالتالي فإن $y = c$ هي عائلة من الدوال ويمثلها هندسيا عائلة من المنحنيات انظر الشكل (31-1).



الشكل (31-1)

مثال 1.11.22:

المعادلة $y = \frac{k}{x}$ حيث k بارامتر تمثل عائلة من الدوال. (هنا نقول أن المتغير y يتناسب عكسياً مع x) انظر الشكل (1-32).



الشكل (1-32)

17 / 2 / 2020

تعريف 1.11.10 (دالة الوحدة Identity Function):

تسمى الدالة I حيث $I(x) = x$ بدالة الوحدة.

معكوس

تعريف 1.11.11 (معكوسة الدالة Inverse of Function):

يقال أن الدالة g هي معكوس الدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1}، إذا وفقط إذا كان $f \circ g = g \circ f = I$.

$f \circ g = g \circ f = I$ الوحدة

معكوس الدالة

عشان أجيب المعكوس (1) تحولها من دالة في x إلى دالة في y
(2) استبدل كل y بـ x
عشان أكتبها بالشكل $f^{-1}(x)$

(1) $y = f(x)$
(2) $x = g(y)$

سنعطي الآن خطوات لإيجاد معكوس الدالة بفرض الدالة $y = f(x)$ أولا نكتب الدالة على الصورة $x = g(y)$ ثم استبدال كل y بـ x نحصل على معكوس الدالة f.

مثال 1.11.23:

أوجد معكوس الدالة $\boxed{y = \frac{x-1}{x-2}}$. مقالي

(1) $y(x-2) = (x-1)$

$xy - 2y = x - 1$

$xy - x = 2y - 1$

$x(y-1) = 2y - 1$

(2) $x = \frac{2y-1}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, $x \neq 1$

الحل:

أولا نكتب الدالة على الصورة $x = g(y)$ كما يأتي:

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$
$$\Rightarrow y(x-2) = (x-1) \Rightarrow xy - 2y - x = -1$$
$$\Rightarrow x(y-1) - 2y = -1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-1}.$$
$$\therefore g(y) = \frac{2y-1}{y-1}.$$

باستبدال كل y بـ x نحصل على:

$$\boxed{\therefore g(x) = \frac{2x-1}{x-1}.}$$

وبالتالي فإن:

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

لاحظ أن:

$$(i)\ (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x-1}{x-1} - 1}{\frac{2x-1}{x-1} - 2}$$
$$\Rightarrow (f \circ f^{-1})(x) = \frac{2x-1-x+1}{2x-1-2x+2} = \frac{x}{1} = x.$$
$$\therefore f \circ f^{-1} = I.$$

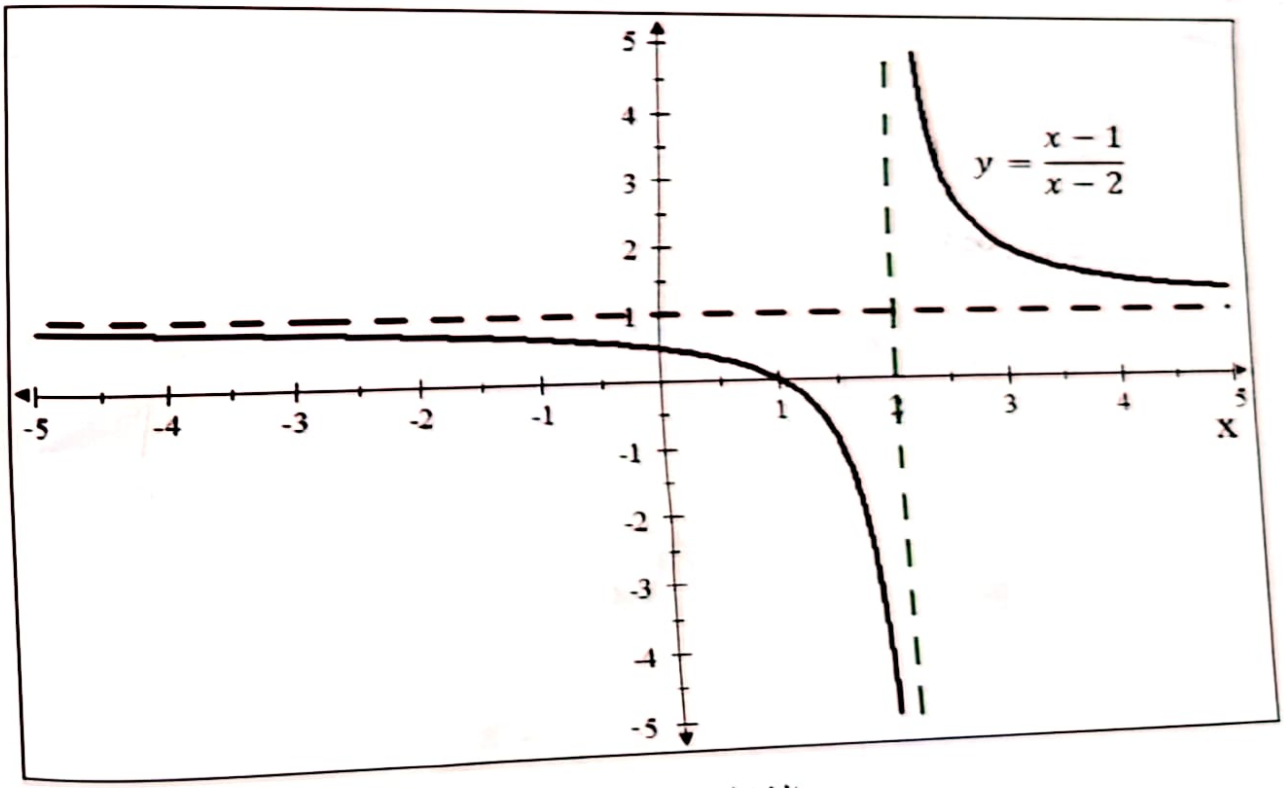
$$(ii)\ (f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-1}{\frac{x-1}{x-2}-1}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}\circ f)(x) = \frac{2x-2-x+2}{x-1-x+2} = \frac{x}{1} = x.$$

$$\therefore f^{-1}\circ f = I.$$

ذكرنا سابقا أننا سنعطي طريقة جبرية لإيجاد مدى الدالة. نستطيع استخدام نفس الإجراء السابق للحصول على مدى الدالة $y = f(x)$ حيث أن مدها هو مجال معكوسها. في المثال السابق نجد أن مجال الدالة $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ هو $\mathbb{R}-\{1\}$ وبالتالي فإن مدى الدالة $y = \frac{x-1}{x-2}$ هو كذلك $\mathbb{R}-\{1\} = (-\infty, 1)\cup(1,\infty)$. انظر الشكل (1-33).

← مدى الدالة الأصلية = مجال الدالة العكسية .



الشكل (1-33)

① $y = \sqrt{2x-1}$

$y^2 = 2x-1$

$2x = y^2+1$

$x = \frac{y^2+1}{2}$

② $f^{-1}(x)\ \frac{x^2+1}{2}$

مجال الدالة $\mathbb{R}$

$(-\infty, \infty)$

مقالي

مثال 1.11.24:

أوجد معكوس الدالة $y = \sqrt{2x-1}$ و مجالها.

الحل:

أولا نكتب الدالة على الصورة $x = g(y)$ كما يأتي:

$$y = f(x) = \sqrt{2x-1}$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x-1 \quad \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2}.$$

$$\therefore g(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)$$

باستبدال كل y بـ x نحصل على:

معكوسها

$$\boxed{\therefore g(x) = \frac{1}{2}(x^2+1).}$$

وبالتالي فإن:

$$\boxed{\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1),}$$

R

لاحظ أن مجال الدالة $g(x)$ هو $\boxed{(-\infty, \infty)}$ بينما مجال f^{-1} هو $[0, \infty)$ و ذلك لكي تكون الدالة معرفة.

نستطيع صياغة الإجراء السابق في النظرية التالية.

نظرية 1.11.2:

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ يمكن كتابتها على صورة الدالة $x = g(y)$ فإنها قابلة للانعكاس و معكوسها هو $f^{-1}(x) = g(x)$.

تعريف 1.11.12 (الدالة الأحادية One to One Function):

يقال أن الدالة $y = f(x)$ أحادية إذا وفقط إذا كان:

لكل

$$x_1 = x_2 \; \forall \; f(x_1) = f(x_2),\; x_1, x_2 \in D_f.$$

(أي أنه إذا كانت الصور متساوية فإن الأصول تكون متساوية)

هندسيا أن أي مستقيم أفقي يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط على الأكثر.

مثال 1.11.25:

ادرس ما إذا كانت الدالة $y = x^2$ أحادية.

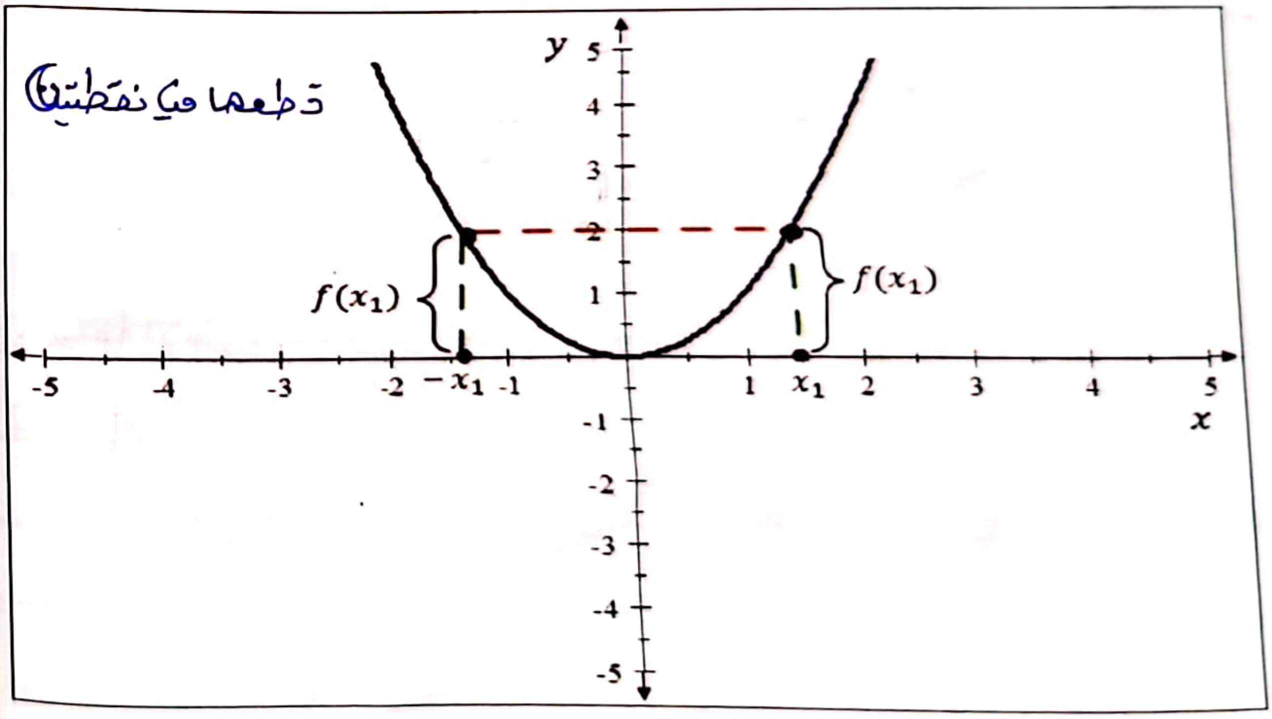
$x_1 \quad x_2$

الحل:

بفرض $x_1,\ x_2 \in D_f$ بحيث $f(x_1) = f(x_2)$ وبالتالي فإن:

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow x_1 = \pm x_2.$$

بالتالي فإن الدالة ليست أحادية. انظر الشكل (1-34).



الشكل (1-34)

مثال 1.11.26:

ادرس ما إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ أحادية.

الحل:

أعوض في الدالة مرة بـ x_1 ومرة بـ x_2

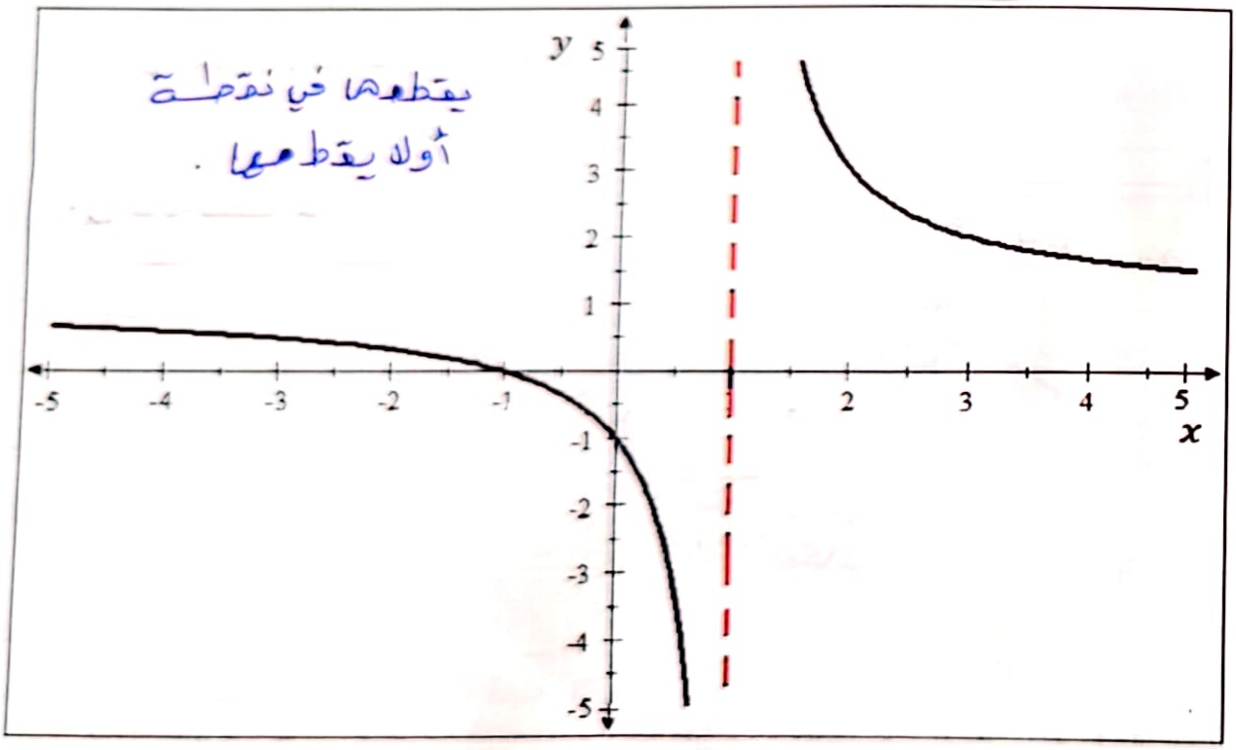
بفرض $x_1,\ x_2\ \in D_f$ بحيث $f(x_1)=f(x_2)$ وبالتالي فإن:

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Longrightarrow (x_1+1)(x_2-1)=(x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Longrightarrow \cancel{x_1}x_2+x_2-x_1-\cancel{1}=\cancel{x_1}x_2-x_2+x_1-\cancel{1}$$

$$\Longrightarrow 2x_2=2x_1.\quad \boxed{\therefore x_1=x_2.}$$

بالتالي فإن الدالة أحادية. انظر الشكل (1-35).



الشكل (1-35)

نظرية 1.11.3:

الدالة تكون قابلة للانعكاس (لها معكوس) إذا وفقط إذا كانت دالة أحادية.

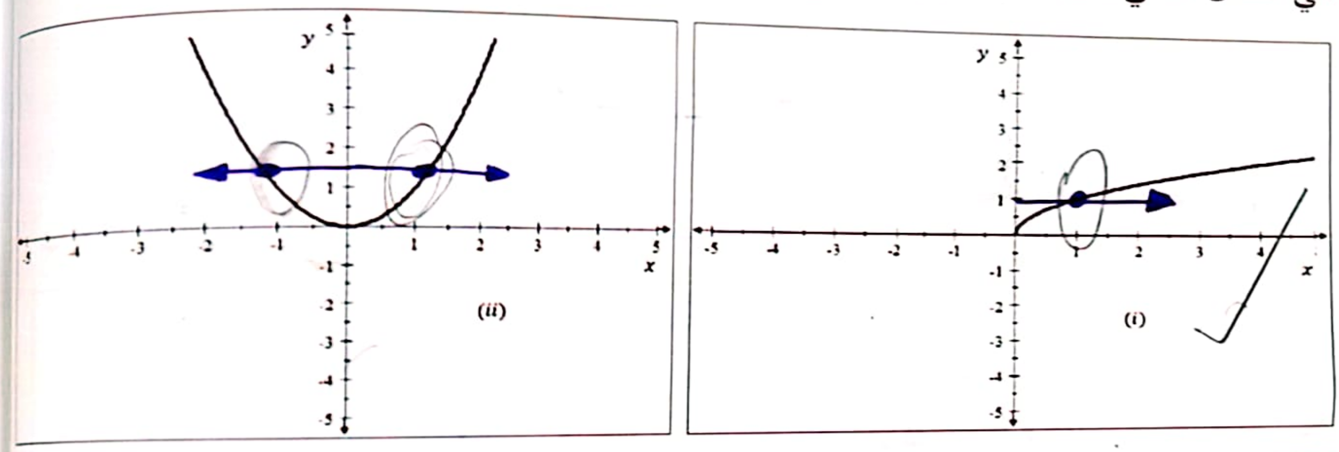
17/12/2020

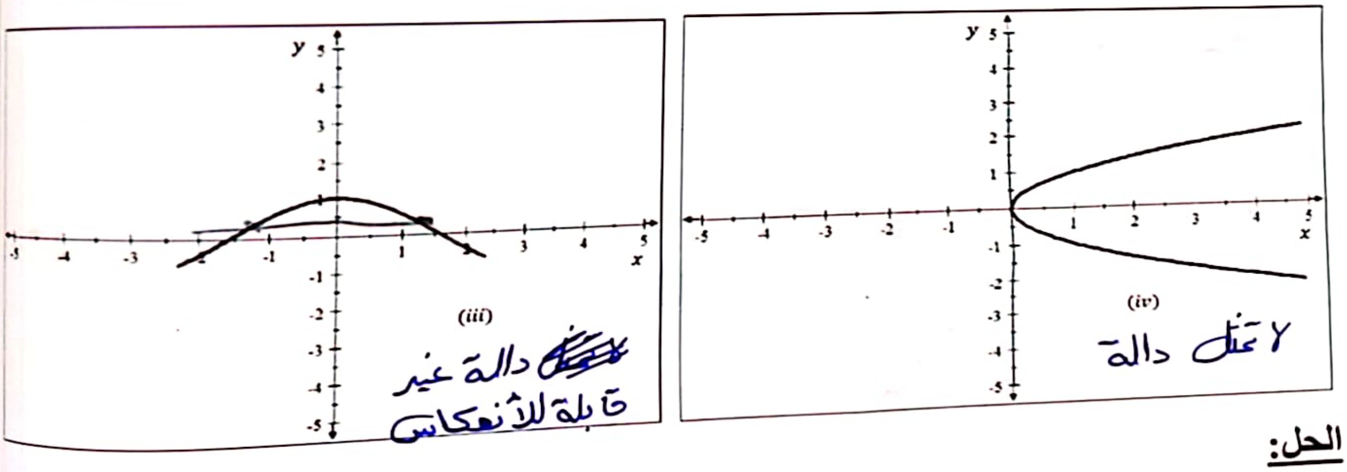
نظرية 1.11.4 (اختبار الخط الأفقي Horizontal line Test):

الدالة تكون قابلة للانعكاس (لها معكوس) إذا وفقط إذا كان أي خط أفقي يقطع منحناها في نقطة واحدة على الأكثر.

مثال 1.11.27:

في الشكل التالي حدد ما إذا كان المنحنى يمثل دالة قابلة للانعكاس.





الحل:

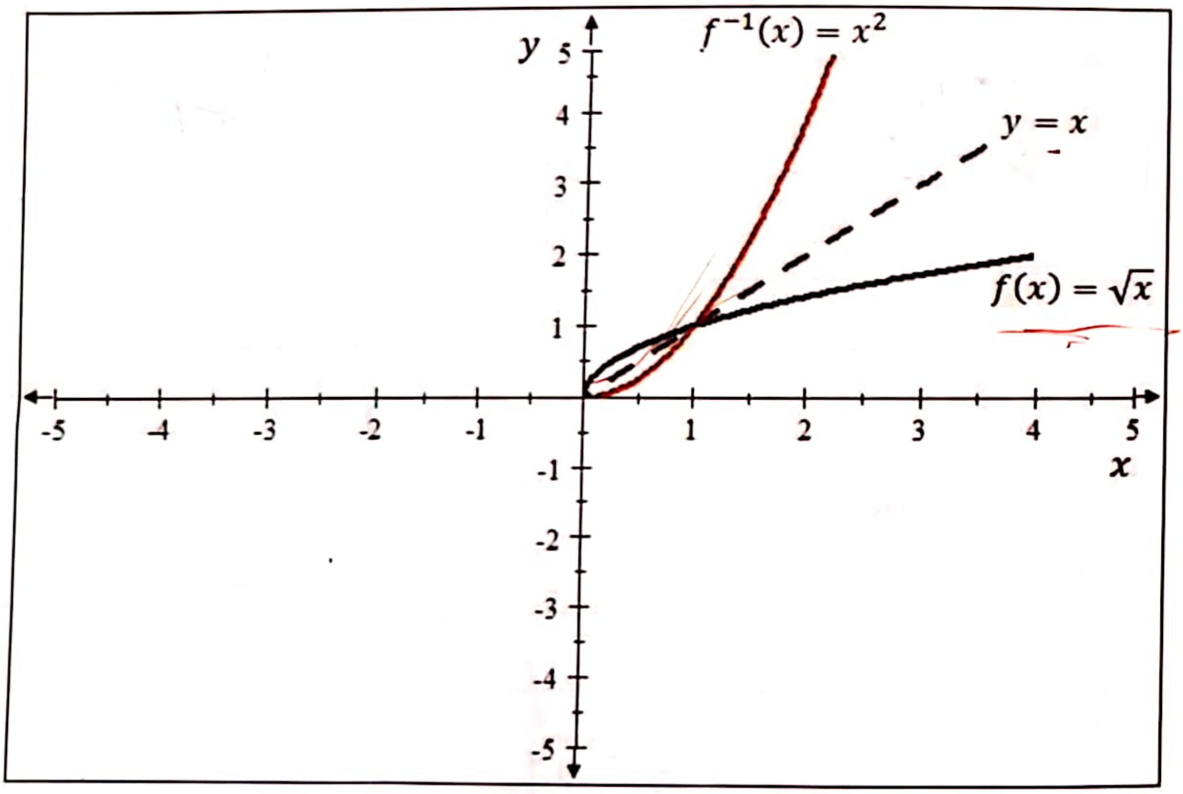
- منحنى الدالة في الشكل (i) يمثل دالة قابلة للانعكاس.
- منحنى الدالة في الشكل (ii) يمثل دالة غير قابلة للانعكاس.
- منحنى الدالة في الشكل (iii) يمثل دالة غير قابلة للانعكاس.
- المنحنى في الشكل (iv) لا يمثل دالة.

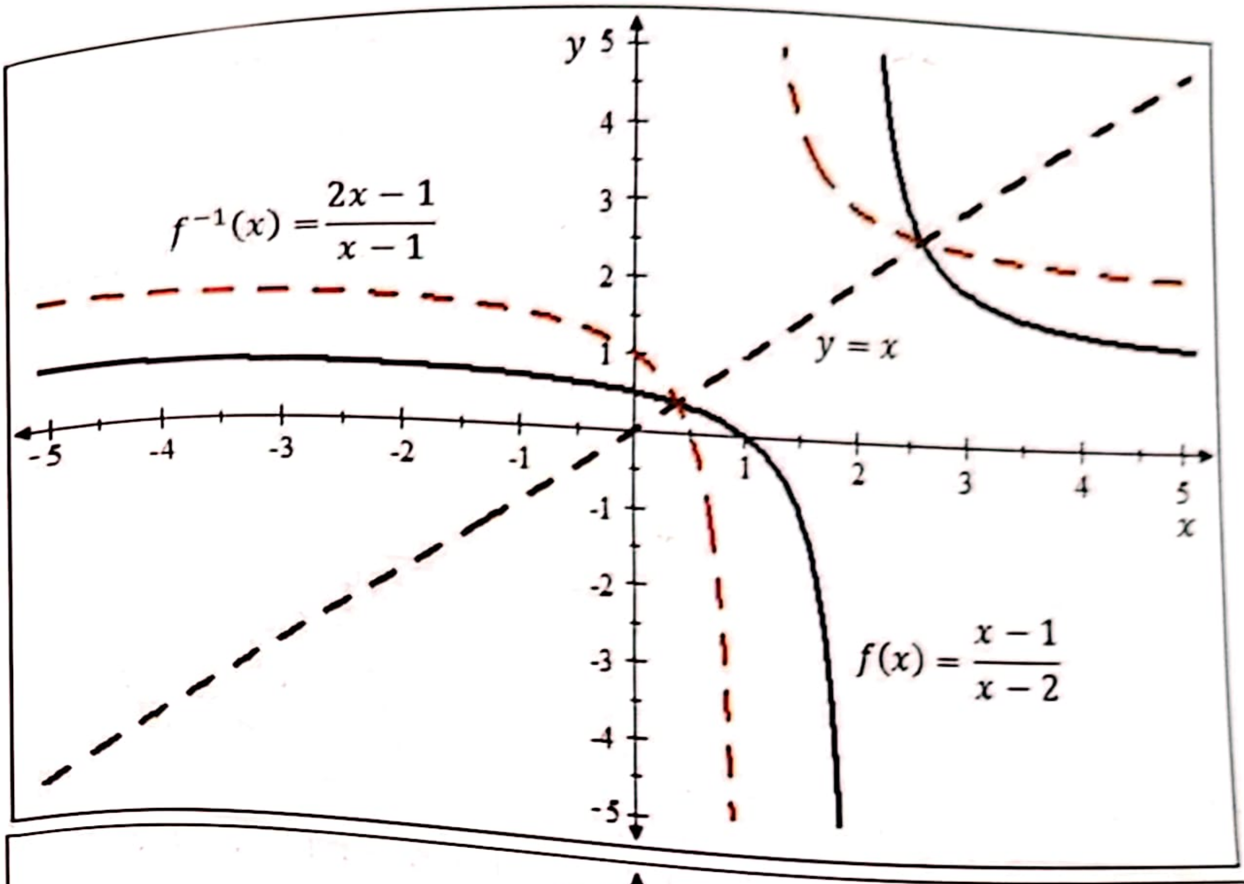
17/12/2020

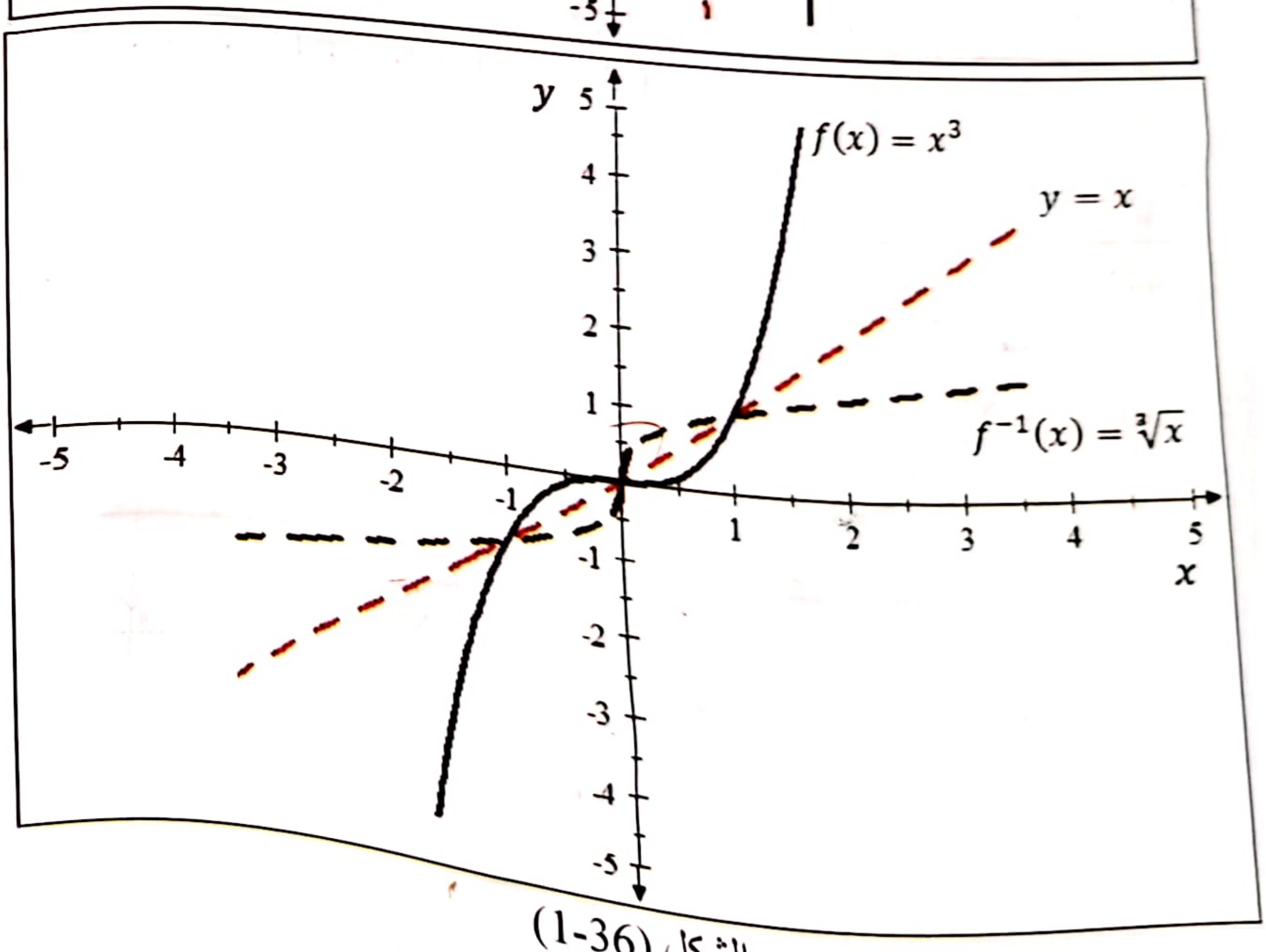
نظرية 1.11.5:

إذا كانت الدالة f^{-1} هي معكوس الدالة f فإن منحنى كلا منهما هو انعكاس للآخر حول المستقيم $y = x$.

الشكل (1-36) يعطي الدالة ومعكوسها:







الشكل (1-36)

التزايد والتناقص والثبات للدالة هو وصف لسلوكها عندما نتحرك على منحنى الدالة من اليسار إلى اليمين ويعرف كما بالتعريف التالي:

تعريف 1.11.13 (الدوال التزايدية أو التناقصية Increasing or Decreasing Functions):

بفرض الدالة $y = f(x)$.

(1) يقال أن الدالة تزايدية إذا وفقط إذا كان:

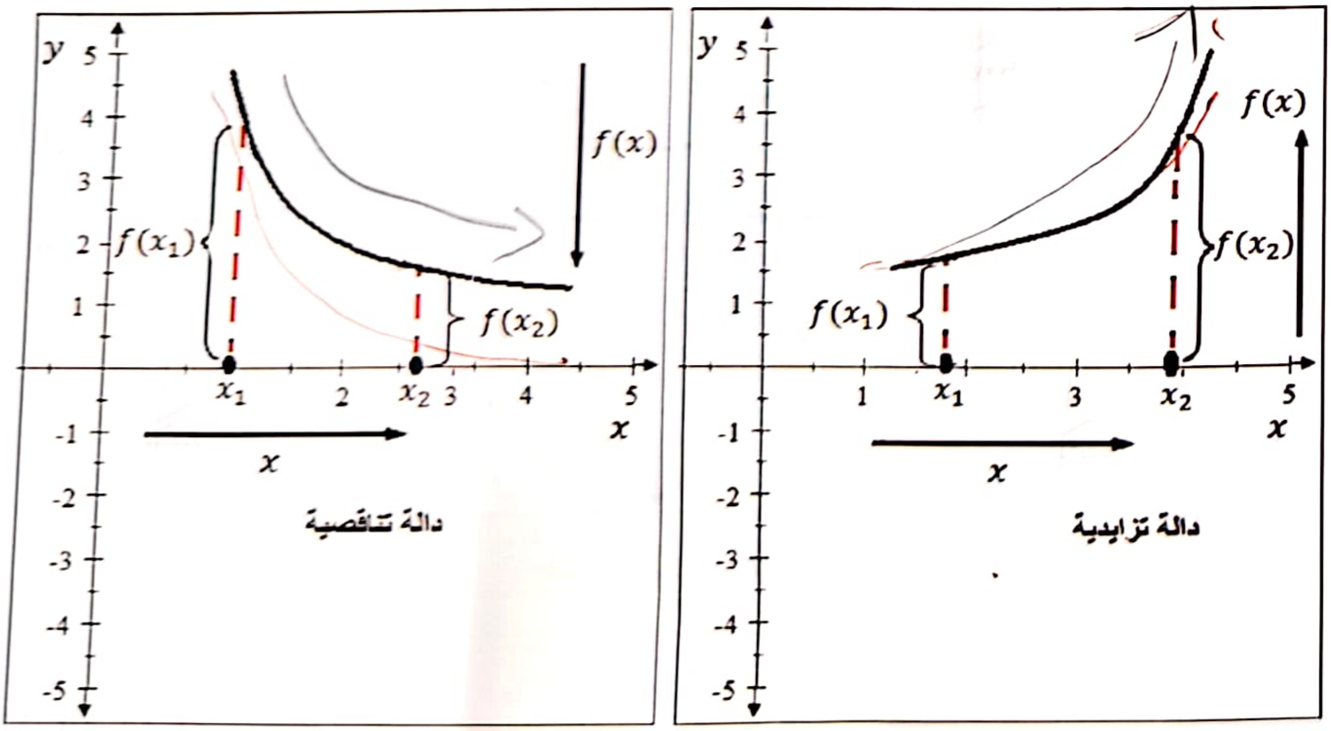
$$f(x_2) > f(x_1)\ \forall\ x_2 > x_1, x_1, x_2\ \in D_f.$$

(أي أنه كلما زادت قيمة x زادت قيمة y)

(2) يقال أن الدالة تناقصية إذا وفقط إذا كان:

$$f(x_2) < f(x_1)\ \forall\ x_2 > x_1, x_1, x_2\ \in D_f.$$

(أي أنه كلما زادت قيمة x قلت قيمة y) انظر الشكل (1-37).



الشكل (1-37)

مثال 1.11.28:

ادرس تزايد وتناقص الدالة $\boxed{f(x) = x^2}$.

الحل:

بفرض أن $x_1, x_2 \in D_f$ حيث:

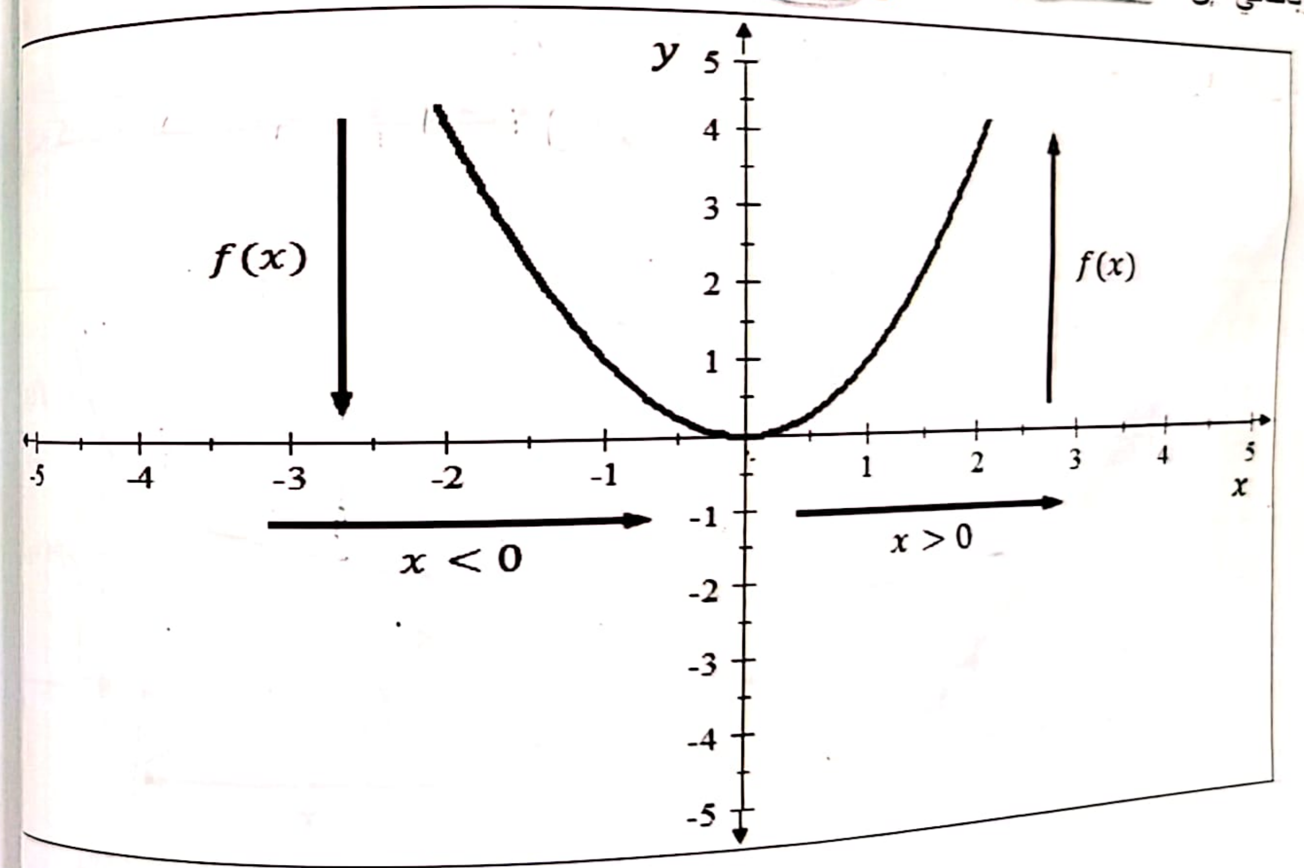
$$> x_1,\ x_1, x_2 > 0 \Rightarrow x_2^2 > x_1^2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

وبالتالي فإن الدالة تزايدية في الفترة $[0, \infty)$.

بفرض أن $x_1, x_2 \in D_f$ حيث:

$$> x_1,\ x_1, x_2 < 0 \Rightarrow x_2^2 < x_1^2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

وبالتالي فإن الدالة تناقصية في الفترة $(-\infty, 0]$. انظر الشكل (1-38).



الشكل (1-38)

مثال 1.11.29:

ادرس تزايد وتناقص الدالة $\boxed{g(x) = \sqrt{x}}$.

الحل:

بفرض أن $x_1, x_2 \in D_g$ حيث:

$$\Longrightarrow g(x_2) > g(x_1).$$

وبالتالي فإن الدالة تزايدية في الفترة $[0, \infty)$.

مثال 1.11.30:

ادرس تزايد وتناقص الدالة $h(x) = x^3$.

الحل:

بفرض أن $x_1, x_2 \in D_h$ حيث:

$$\Longrightarrow h(x_2) > h(x_1).$$

وبالتالي فإن الدالة تزايديه في الفترة $(-\infty, \infty)$.

R

1.12 الدوال المثلثية والمثلثية العكسية : Trigonometric and Inverse

Trigonometric Functions

تقاس الزاوية إما بالتقدير الدائري أو بالتقدير الستيني. ويعرف التقدير الدائري للزاوية المركزية θ في دائرة نصف قطرها r والتي تقابل قوس طوله s على أنه عدد أنصاف الأقطار الموجودة في طول القوس المقابل للزاوية أي أن: $\theta = s/r$.

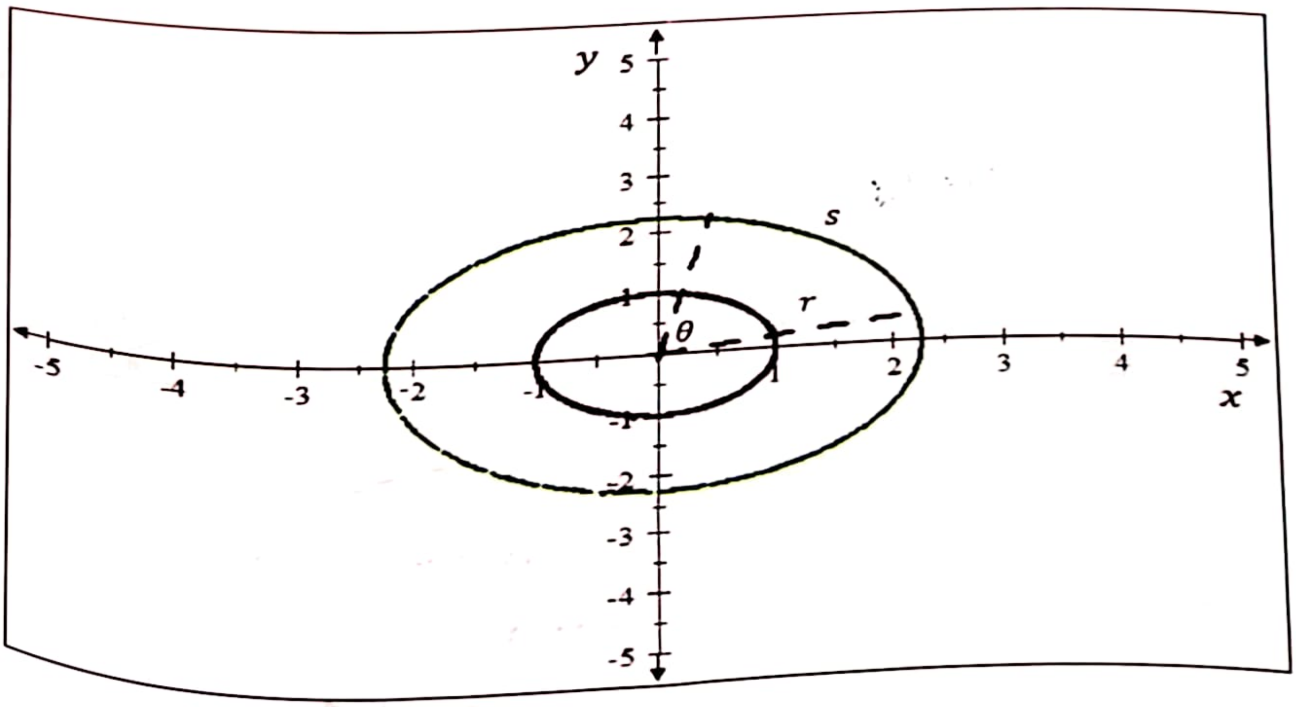
بالتالي فإنه هو طول القوس المقابل للزاوية المركزية في دائرة الوحدة. انظر الشكل (1-39).

وبالتالي فإن $180^\circ =$ (دائري) π ويكون $C^\circ \frac{\pi}{180^\circ} =$ (دائري) θ ومنها نحصل على الجدول التالي:

حفظ

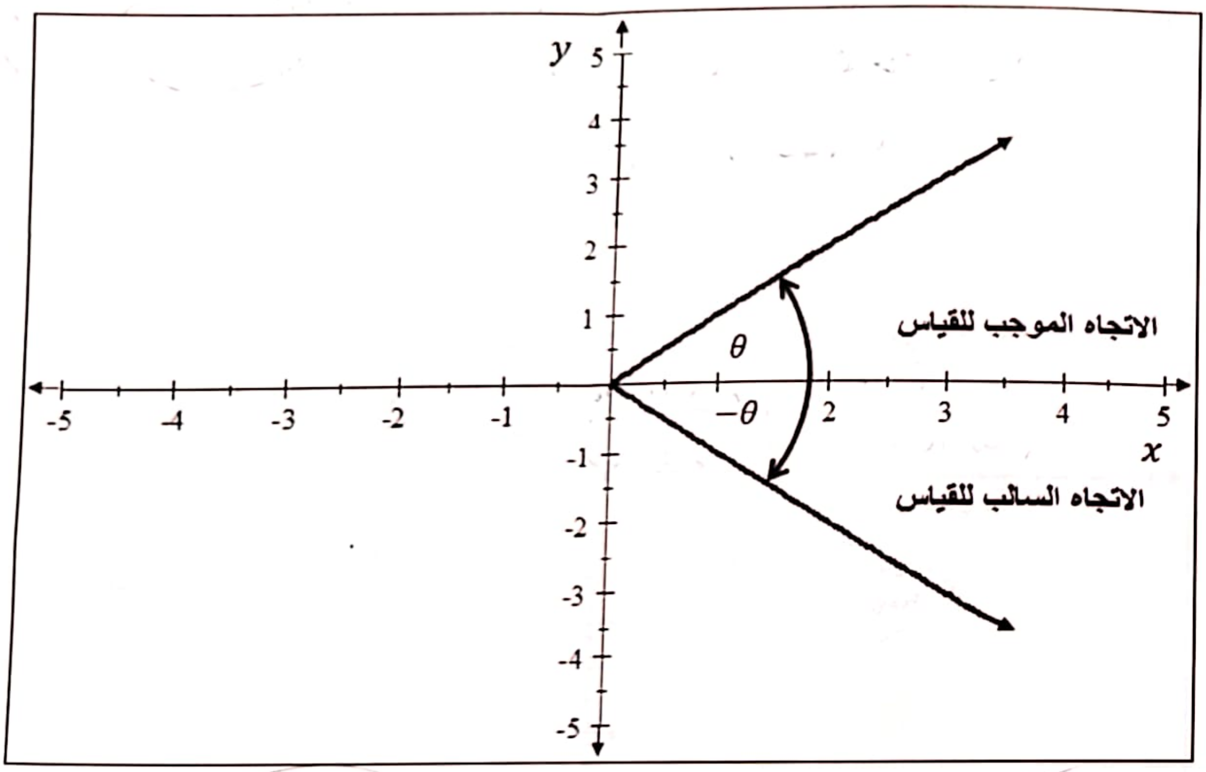
الزوايا مقاسة بالتقدير الدائري والستيني											
ستيني	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
دائري	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

سيستخدم التقدير الدائري خلال هذا الكتاب ما لم يذكر بخلاف ذلك.



الشكل (1-39)

الزاوية في المستوي الكارتيزي oxy في وضعها القياسي هي التي شعاعها الابتدائي ينطبق على المحور ox في الاتجاه من نقطة الأصل إلى الخارج وتقاس بوحدات موجبة إذا كان اتجاه الدوران عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ووحدات سالبة إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة. انظر الشكل (1-40).



الشكل (1-40)

إذا كانت

وأتحول عنها دورية

تعريف 1.12.1 (الدوال الدورية Periodic Functions):

يقال أن الدالة f دورية إذا وجد عدد موجب p بحيث $f(x+p)=f(x)$ لكل قيمة x في مجال تعريف الدالة. أصغر عدد p يحقق ذلك يسمى بطول دورة الدالة.

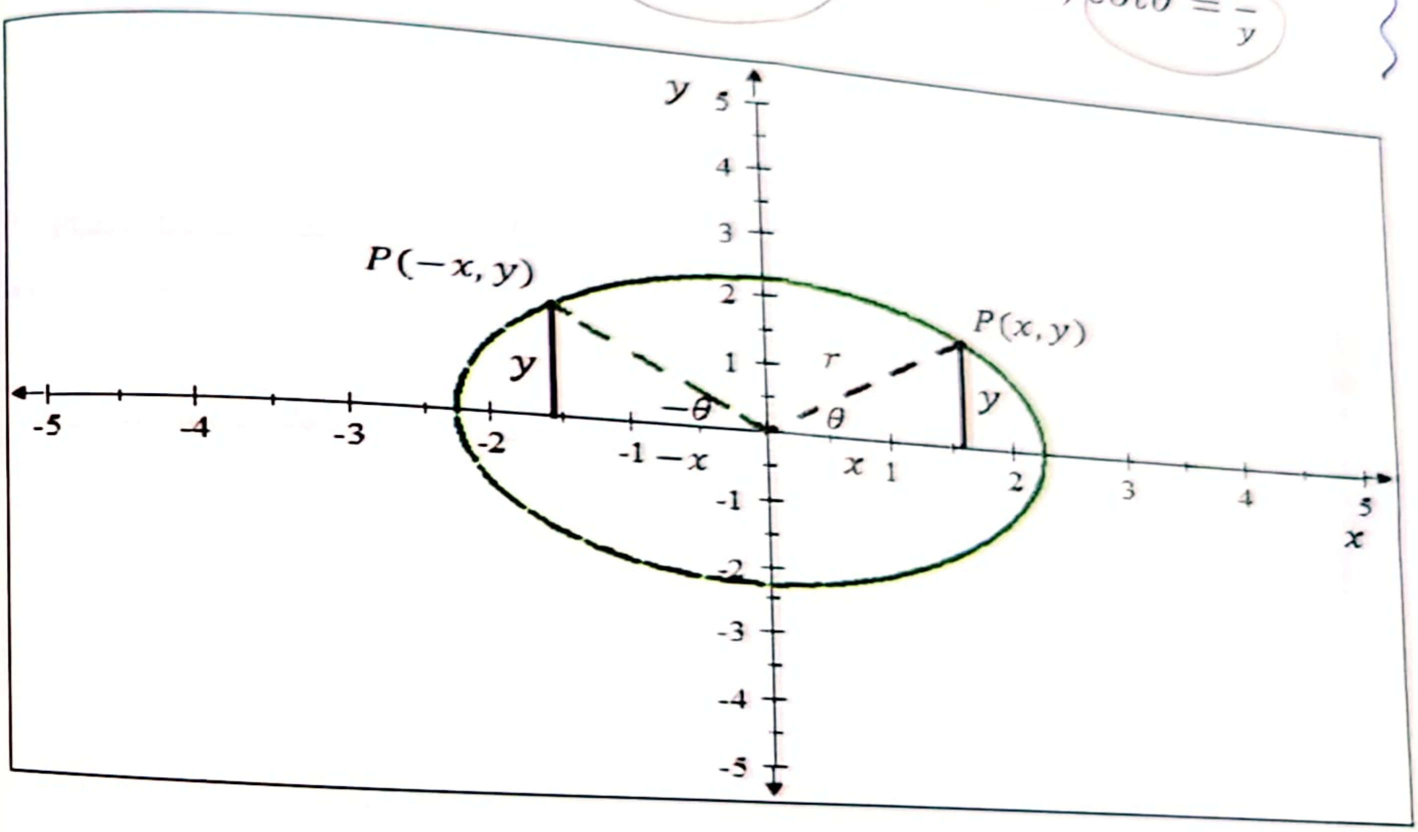
نستطيع تعريف الدوال المثلثية كما سبق لنا دراستها باستخدام الزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية. ولكن هنا سنطور هذا التعريف ليشمل الزوايا المنفرجة والسالبة كما بالتعريف التالي:

(Trigonometric Functions):

تعريف 1.12.2 (الدوال المثلثية Trigonometric Functions): بفرض الزاوية θ والتي يقطع شعاعها الطرفي دائرة نصف قطرها r في النقطة $P(x,y)$ من الشكل (1-41) فإن:

(Sine) $sin\theta = \frac{y}{r}$, (Cosine) $cos\theta = \frac{x}{r}$, (Tangent) $tan\theta = \frac{y}{x}$,

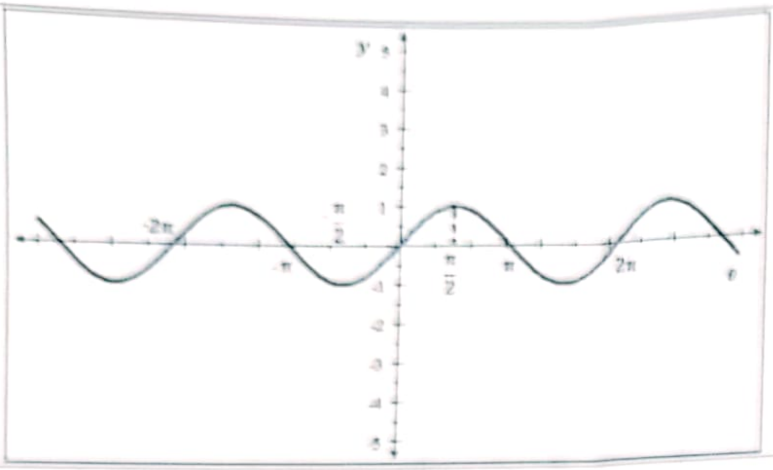
(Cosecant) $csc\theta = \frac{r}{y}$, (Secant) $sec\theta = \frac{r}{x}$, (Cotangent) $cot\theta = \frac{x}{y}$

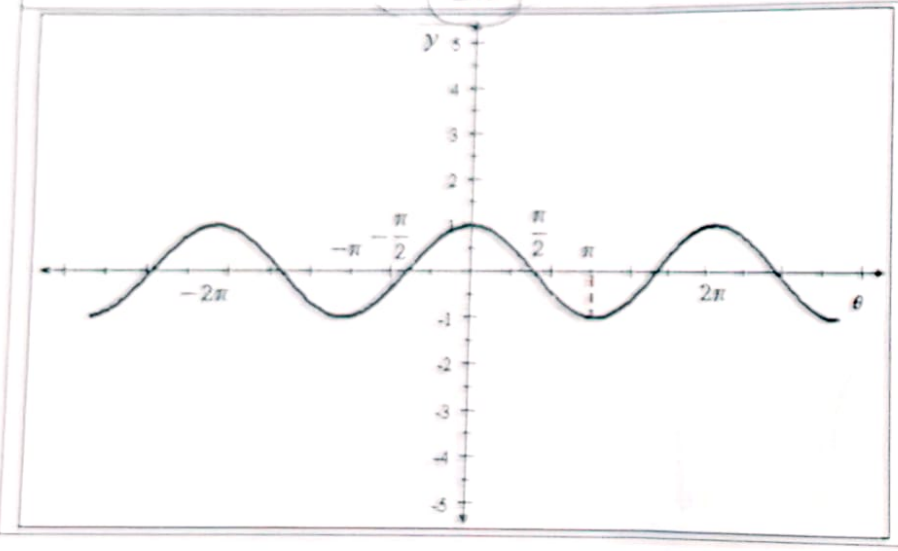


الشكل (1-41)

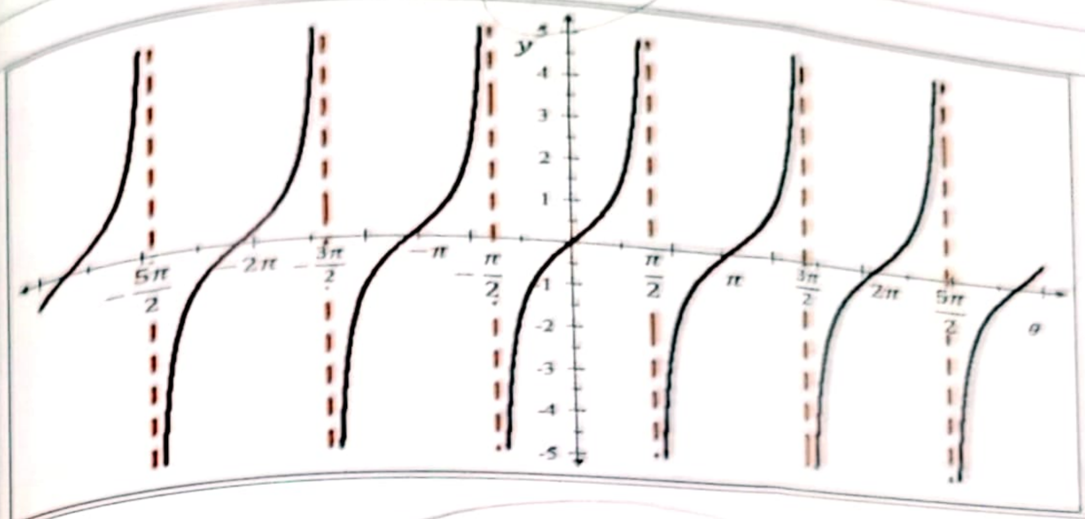
الجداول الآتية تعطي خواص الدوال المثلثية.

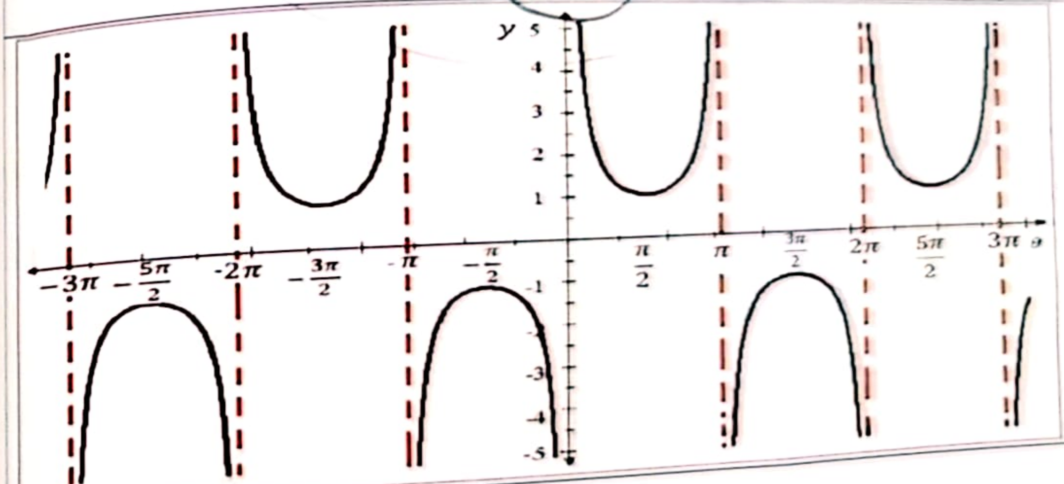
$sin\theta$	الدالة
$(-\infty,\infty)$ R	المجال
$[-1,1]$	المدى
فردية	نوع الدالة
2π	طول الدورة

منحنى الدالة	

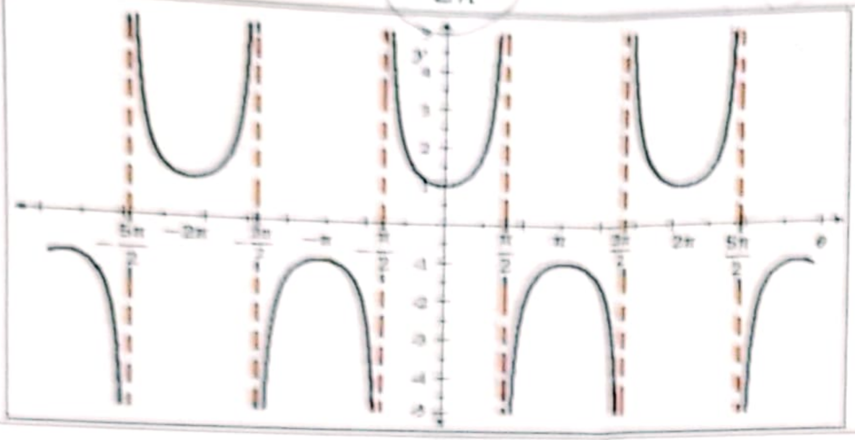
الدالة	$cos\theta$
المجال	$(-\infty,\infty)$ R
المدى	$[-1,1]$
نوع الدالة	زوجية
طول الدورة	2π
منحنى الدالة	

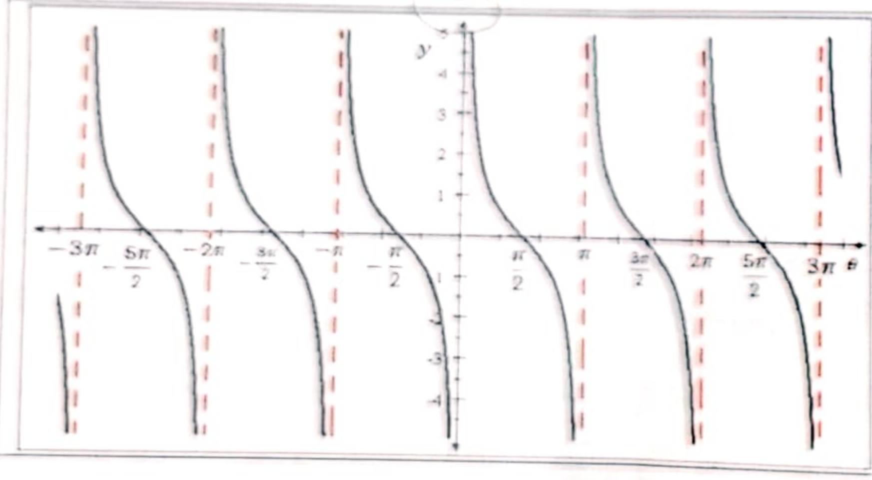
الدالة	$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$
المجال	$\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{2}, n = \pm 1, \pm 3, \dots\}$
المدى	$(-\infty,\infty)$ R
نوع الدالة	فردية

طول الدورة	π
منحنى الدالة	

الدالة	$csc\theta = \frac{1}{sin\theta}$
المجال	$\mathbb{R} - \{n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$
المدى	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
نوع الدالة	فردية
طول الدورة	2π
منحنى الدالة	

الدالة	$sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$
المجال	$\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{2}, n = \pm 1, \pm 3, \dots\}$
المدى	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
نوع الدالة	زوجية

طول الدورة	2π
منحنى الدالة	

الدالة	$cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$
المجال	$\mathbb{R} - \{n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
المدى	$(-\infty, \infty)$
نوع الدالة	فردية
طول الدورة	2π
منحنى الدالة	

باستخدام مفهوم إحداثيات النقطة نجد أن $x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$ وبفرض أن الدائرة هي دائرة الوحدة نحصل على المتطابقات الآتية:

المتطابقات المثلية:

$(i)\ sin^2\theta + cos^2\theta = 1,$

$(ii) 1 + tan^2\theta = sec^2\theta,$

$(iii) 1 + cot^2\theta = csc^2\theta,$

$(iv)\ \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2,$

$(v)\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2,$

$(vi)\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - sin^2\theta,$

$(vii)\ \sin(2\theta) = 2sin\theta cos\theta,$

$(viii)\ cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta),$

$(ix)\ sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\theta).$

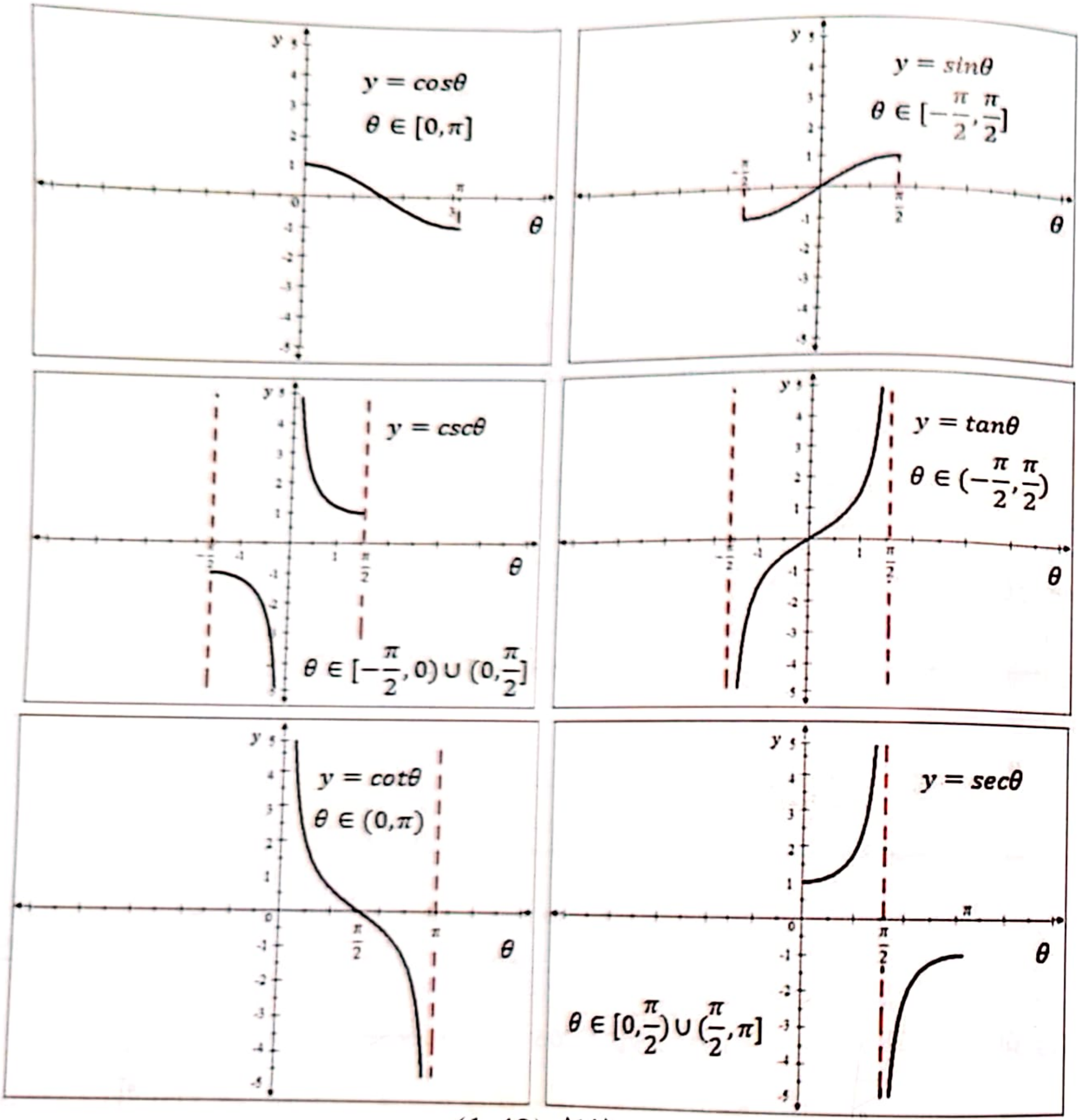
إذا كانت b, ca , هي أطوال أضلاع المثلث ABC والضلع c يقابله الزاوية θ فإن:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta.$$

ويعرف بقانون جيب التمام.

من شكل منحنى الدوال المثلية نجد أنها ليست أحادية وبالتالي لا نستطيع إيجاد معكوسها مباشرة لذلك يجب قصر مجالها على فترات معينة لإيجاد المعكوس. الدالة $sin\theta$ نستطيع قصر مجالها على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، $cos\theta$ في الفترة $(0, \pi)$، $tan\theta$ في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$، $csc\theta$ في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$، $sec\theta$ في الفترة $[\frac{\pi}{2}, \pi] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ و $[0, \frac{\pi}{2})$ و $cot\theta$ في الفترة $(0, \pi)$.

وتصبح الدوال كما بالشكل (1-42).

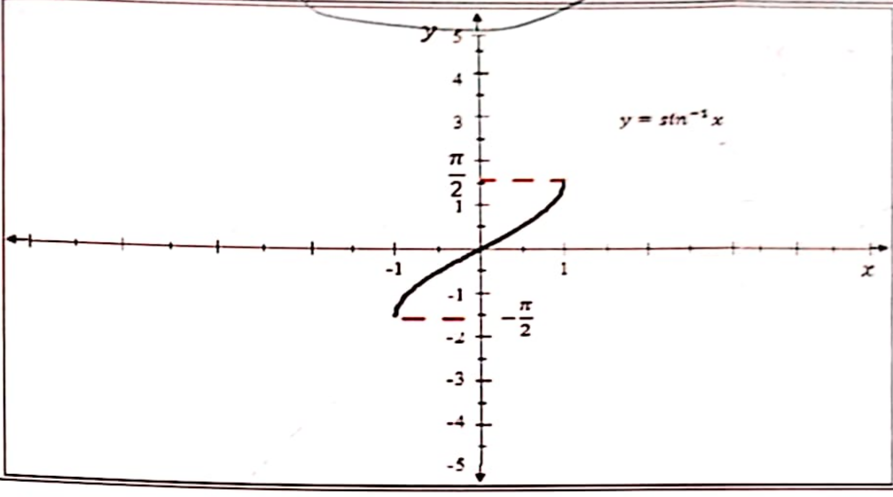


الشكل (1-42)

الآن نستطيع تعريف معكوسات الدوال المثلثية والتي تعرف بالدوال المثلثية العكسية كما بالتعريفات التالية:

تعريف 1.12.3:

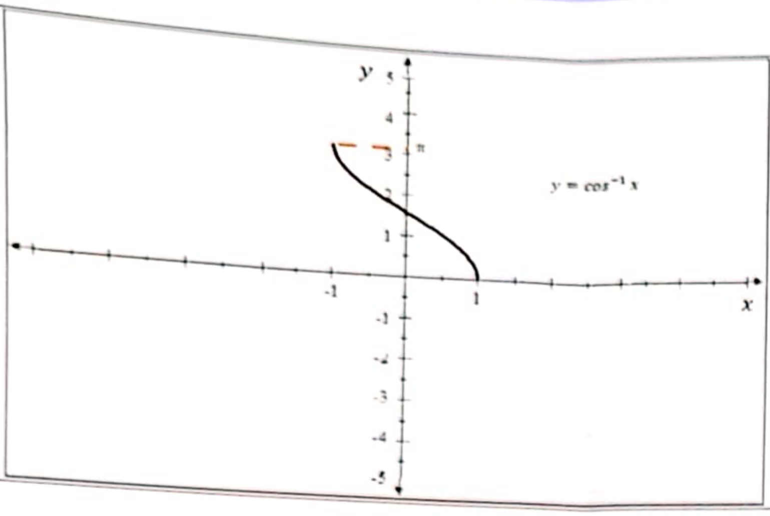
دالة معكوس الجيب ويرمز لها بالرمز $y = sin^{-1}\theta$ وتعني الزاوية y (بالتقدير الدائري) في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ والتي جيبها يساوي θ. ولها الخواص الآتية:

الدالة	$sin^{-1}x$
المجال	$[-1,1]$
المدى	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
نوع الدالة	فردية
منحنى الدالة	

تعريف 1.12.4:

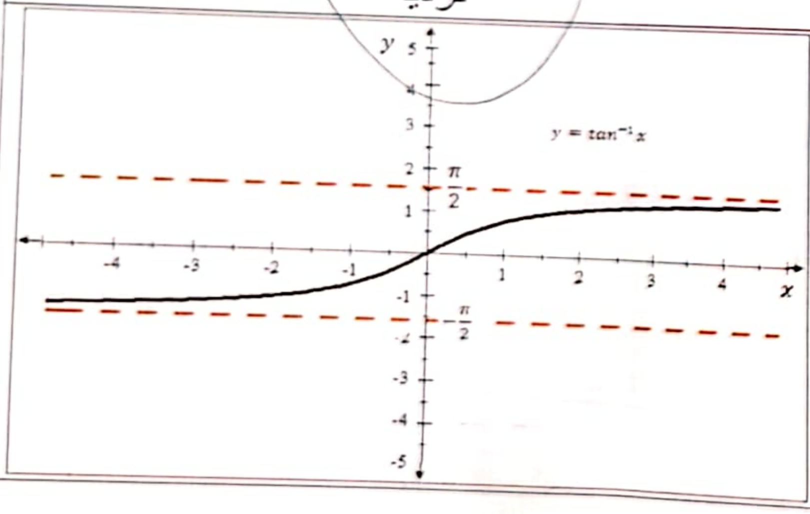
دالة معكوس جيب التمام ويرمز لها بالرمز $y = cos^{-1}\theta$ وتعني الزاوية y (بالتقدير الدائري) في الفترة $[0, \pi]$ والتي جيب تمامها يساوي θ. ولها الخواص الآتية:

الدالة	$cos^{-1}x$
المجال	$[-1,1]$
المدى	$[0, \pi]$
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية

منحنى الدالة	

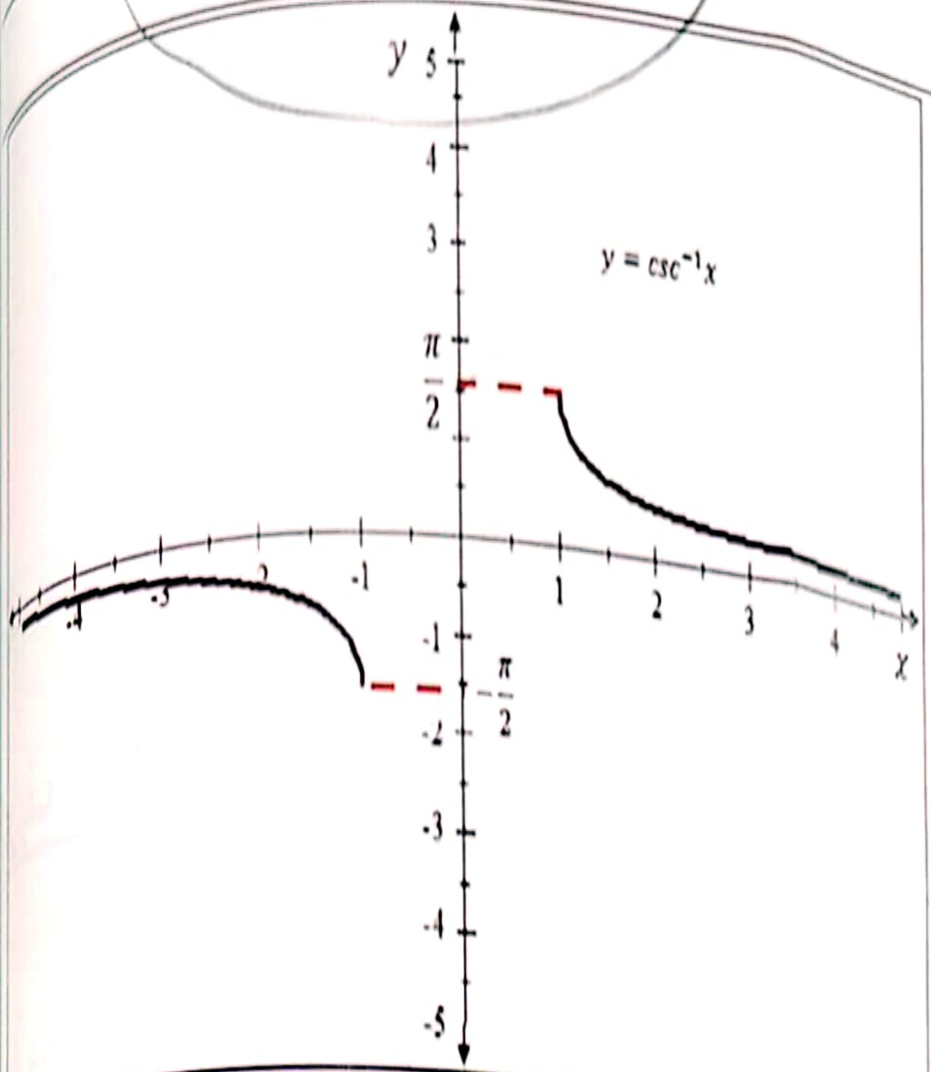
تعريف 1.12.5:

دالة معكوس الظل ويرمز لها بالرمز $y = tan^{-1}\theta$ وتعني الزاوية y (بالتقدير الدائري) في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ والتي ظلها يساوي θ. ولها الخواص الآتية:

الدالة	$tan^{-1}x$
المجال	$(-\infty, \infty)$
المدى	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
نوع الدالة	فردية
منحنى الدالة	

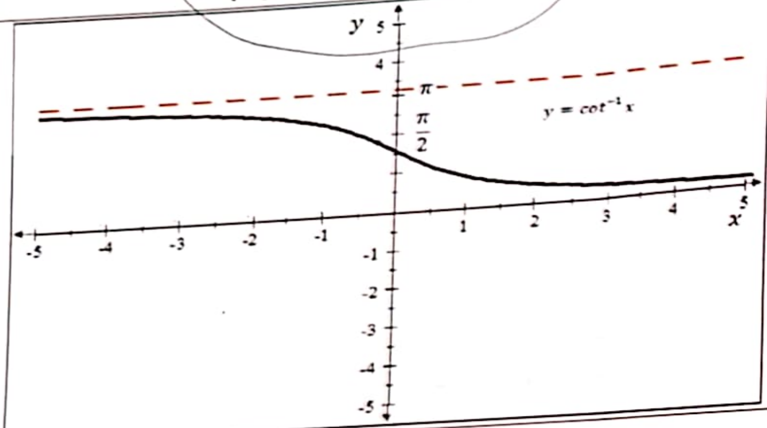
تعريف 1.12.6:

دالة معكوس مقلوب الجيب ويرمز لها بالرمز $y = csc^{-1}\theta$ وتعني الزاوية y (بالتقدير الدائري) في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ والتي مقلوب جيبها يساوي θ. ولها الخواص الآتية:

الدالة	$csc^{-1}x$
المجال	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
المدى	$[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$
نوع الدالة	فردية
منحنى الدالة	

تعريف 1.12.8:

دالة معكوس مقلوب الظل ويرمز لها بالرمز $y = cot^{-1}\theta$ وتعني الزاوية y (بالتقدير الدائري) في الفترة $(0,\pi)$ والتي مقلوب ظلها يساوي θ. ولها الخواص الآتية:

الدالة	$cot^{-1}x$
المجال	$(-\infty,\infty)$
المدى	$(0,\pi)$
نوع الدالة	ليست زوجية و ليست فردية
منحنى الدالة	

مثال 1.12.1:

بالآلة

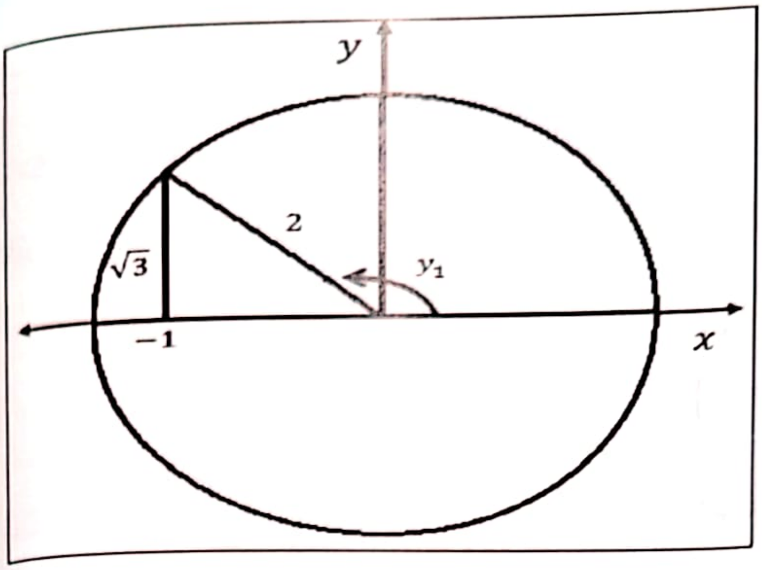
احسب $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ و $sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

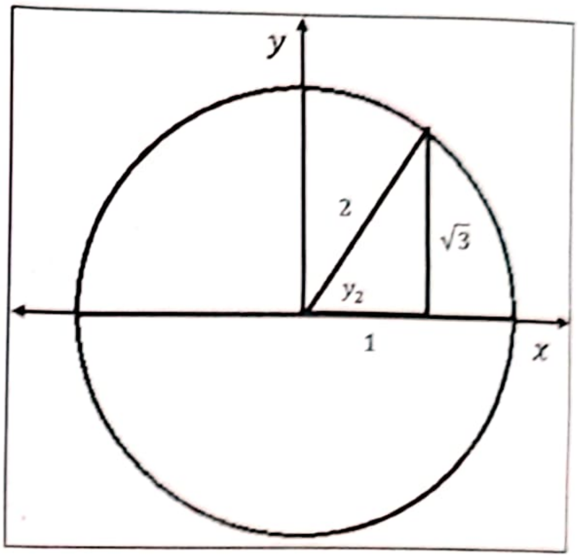
الحل:

بفرض أن $y_1 = cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ وبالتالي فإن $cos y_1 = -\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن الزاوية هي $y_1 = \frac{2\pi}{3}$. لاحظ أن $\frac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$.

بفرض أن $y_2 = sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ وبالتالي فإن $sin y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي فإن الزاوية هي $y_2 = \frac{\pi}{3}$. لاحظ أن $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

انظر الشكل (1-43).





الشكل (1-43)

وباستخدام نفس الأسلوب في المثال السابق نستطيع الحصول على الجدول التالي للزوايا الخاصة:

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$sin^{-1}x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$cos^{-1}x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

مثال 1.12.2:

بالآلة

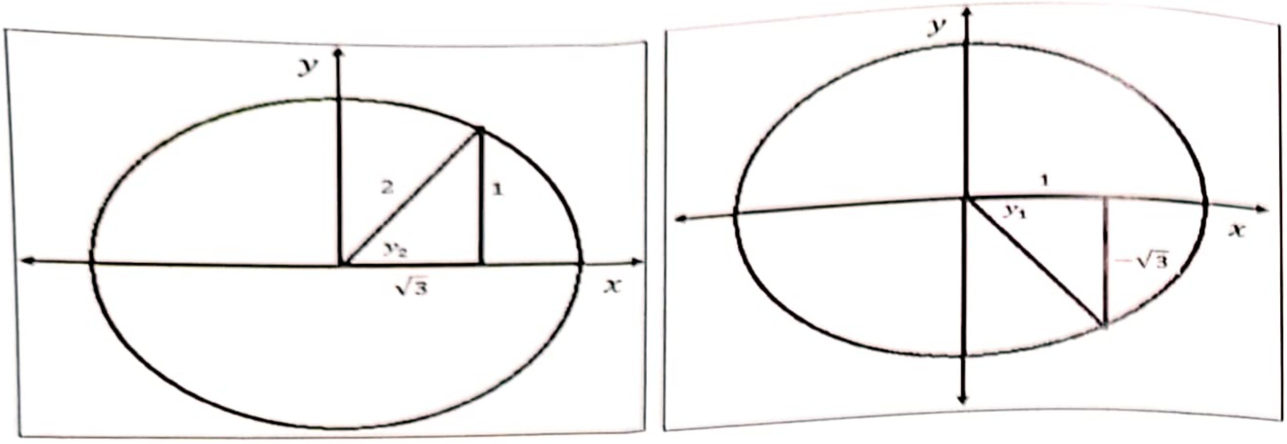
احسب $tan^{-1}(-\sqrt{3})$ و $tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

الحل:

بفرض أن $y_1 = tan^{-1}(-\sqrt{3})$ وبالتالي فإن $tany_1 = -\sqrt{3}$ وبالتالي فإن الزاوية هي $y_1 = -\frac{\pi}{3}$. لاحظ أن $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

بفرض أن $y_2 = tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ وبالتالي فإن $tany_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وبالتالي فإن الزاوية هي $y_2 = \frac{\pi}{6}$. لاحظ أن $\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

انظر الشكل (1-44).



الشكل (1-44)

وباستخدام نفس الأسلوب في المثال السابق نستطيع الحصول على الجدول التالي للزوايا الخاصة:

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$tan^{-1}x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

وباستخدام دائرة الوحدة نحصل على المتطابقات الآتية:

المتطابقات المثلية العكسية:

كلما كانت معكوسات الدوال المثلثية معرفة فإن:

$(i)\ sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1,$

$(ii)\ cos^{-1}x + cos^{-1}(-x) = \pi, -1 \le x \le 1,$

$(iii) tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, -\infty < x < \infty,$

$(iv)\ csc^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, -1 \le x\ or\ x \ge 1,$

$(v)\ csc^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}, -1 \le x\ or\ x \ge 1,$

$(vi)\ sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}, -1 \le x\ or\ x \ge 1,$

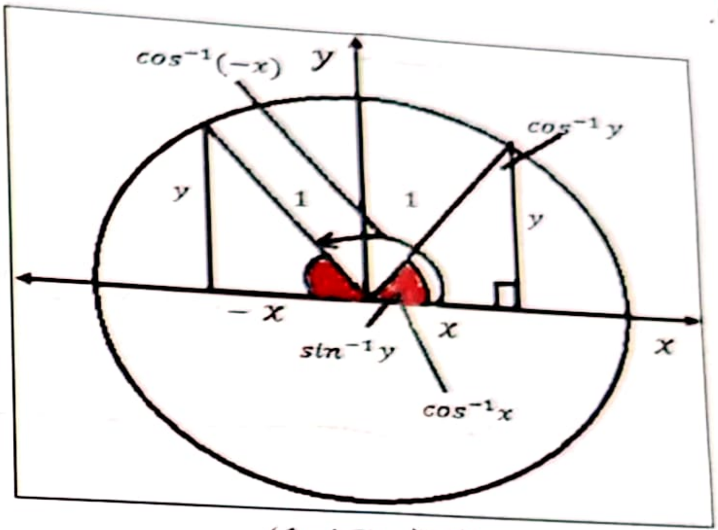
(vii) $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x},\ x \neq 0,$

(viii) $\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2},\ -1 \leq x \leq 1,$

(ix) $\sin(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2},\ -1 \leq x \leq 1,$

(x) $\tan(\sin^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \leq x \leq 1.$

انظر الشكل (1-45).



الشكل (1-45)

1.13 الدوال الأسية واللوغاريتمية: Exponential and Logarithmic Functions

الدالة الأسية لها العديد من التطبيقات في الرياضيات والعلوم سوف نتعرف في هذا الجزء على الدالة الأسية ومعكوسها وبعض خواصهما. تعرف الدالة الأسية كما بالتعريف الآتي:

تعريف 1.13.1: (الدالة الأسية Exponential Function)

لأي عدد حقيقي $b > 0$ فإن الدالة $f(x) = b^x$ تسمى بالدالة الأسية للأساس b

من التعريف السابق فإن دالة القوى ليست دالة أسية بينما الدوال الآتية تمثل دوال أسية

$$f(x) = 3^x,\ g(x) = (\tfrac{1}{3})^x,\quad h(x) = \pi^x, \ldots$$

الأساس الطبيعي هو عدد غير نسبي ويرمز له بالرمز e و قيمته لستة خانات عشرية هو $e \approx 2.718282$ ويستخدم في تعريف الدالة الأسية للأساس الطبيعي كما بالتعريف التالي:

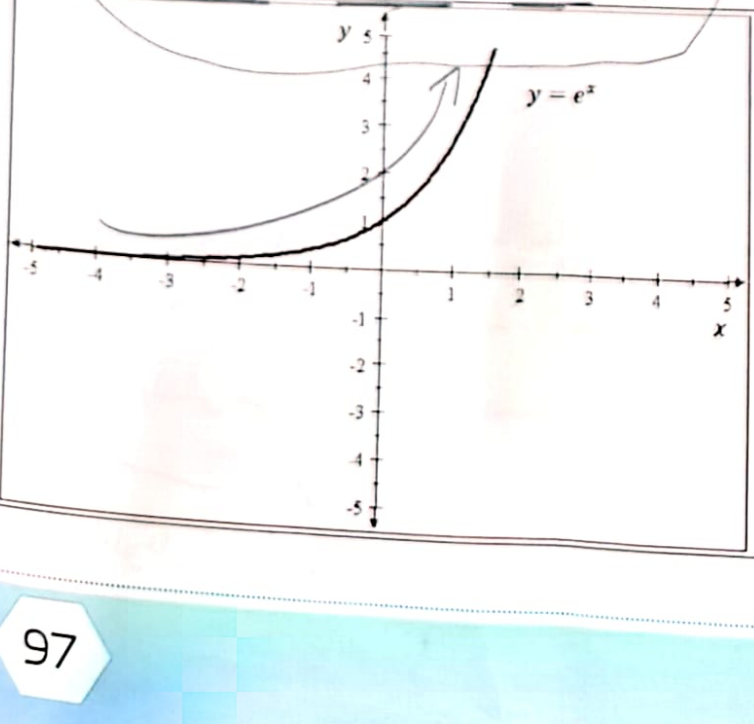
$exp(x)$

e^x

تعريف 1.13.2: (الدالة الأسية الطبيعية Natural Exponential Function)

$y,\ e^x$

الدالة $f(x) = e^x$ تسمى بالدالة الأسية للأساس الطبيعي e. وتكتب أحياناً على الصورة $f(x) = exp(x)$. وتعطى خواصها في الجدول الآتي:

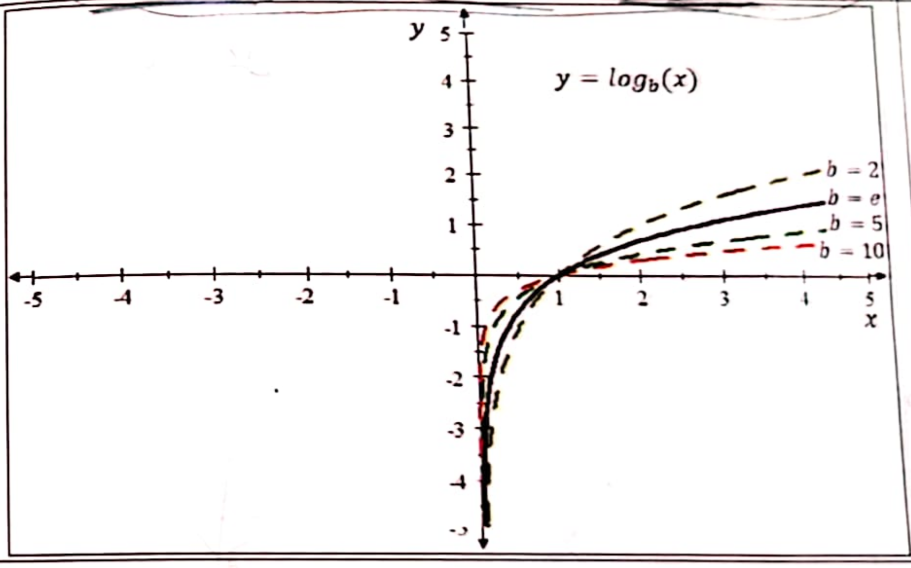
الدالة	e^x
المجال	$R(-\infty, \infty)$
المدى	$(0, \infty)$
نوع الدالة	ليست زوجية و ليست فردية و لكنها تزايدية
منحنى الدالة	

من شكل منحنى الدالة الأسية نلاحظ أنها تزايديه وتتزايد بصورة متسارعة. مدى الدالة هو الفترة $(0,\infty)$ أي أن الدالة تتزايد بلا حد مع زيادة x. يقال أن الدالة f تتزايد بلا حد مع زيادة x إذا كان لأي عدد M مهما كان كبيرا فإن $f(x) > M$ عندما تتزايد x بلا نهاية. بالفعل إذا كان $x > lnM$ فإن $e^x > M$ وبالتالي هي تزايدية بلا حد عندما تتزايد x.

لوغاريتمية
$y = \log_b(x)$
أسية
$x = b^y$

تعريف 1.13.3: (الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function)

الدالة اللوغاريتمية يرمز لها بالرمز $y = log_b(x)$ حيث $b > 0, b \neq 1$ وتقرأ لوغاريتم x للأساس b وتكون إذا كان وفقط إذا كان $x = b^y$ وبالتالي فإن لها الخواص:

الدالة	$log_b(x)$
المجال	$(0,\infty)$
المدى	$(-\infty,\infty)$ R
نوع الدالة	ليست زوجية و ليست فردية و لكنها تزايدية
منحنى الدالة	

من شكل منحنى الدالة اللوغاريتمية نلاحظ أنها تزايديه ولكنها تتزايد بصورة بطيئة. مدى الدالة هو الفترة $(-\infty,\infty)$ أي أن الدالة تتزايد بلا حد مع زيادة x. بالفعل إذا كان $x > e^M$ فإن $lnx > M$ وبالتالي هي تزايديه بلا حد عندما تتزايد x.

إذا كان للأساس e يكتبها كذا

دالة اللوغاريتم الطبيعي.

نظرية 1.13.1:

الدالة اللوغاريتمية $y = log_b x$ حيث $b > 0, b \neq 1$ هي معكوس الدالة الأسية $f(x) = b^x$.

عندما يكون أساس الدالة اللوغاريتمية يساوي 10 فإنه يعرف بالأساس المعتاد و في هذه الحالة لا نحتاج كتابته وتكتب على الصورة $y = log(x)$ بدلا من $y = log_{10}(x)$.

تعريف 1.13.4: (الدالة اللوغاريتمية الطبيعية Natural Logarithmic Function)

الدالة اللوغاريتمية للأساس e تسمى بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية أو الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي ويرمز لها بالرمز $\boxed{y = ln(x)}$.

من تعريف الدالة اللوغاريتمية نستطيع إثبات الخواص التالية:

نظرية 1.13.2(الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية Algebraic Properties of Logarithmic Function):

إذا كانت $b > 0, b \neq 1$ ، $a > 0$ ، $c > 0$ و r عدد حقيقي فإن:

$(i) log_b(ac) = log_b a + log_b c,$ خاصية الضرب

$(ii) log_b(\frac{a}{c}) = log_b a - log_b c,$ خاصية القسمة

$(iii) log_b a^r = r log_b a ,$ خاصية القوى

$(iv) log_b a = \frac{ln a}{ln b},$ معادلة تغيير الأساس

مثال 1.13.1:

حلها باستخدام صفة الخاصية وبطلع بالأدلة.

أوجد قيمة x حيث:

$(i)\ log x = 3, \quad (ii)\ ln(x+2) = 6, \quad (iii)\ 3^x = 8.$ ٩

b

أحولها للوغاريتم

الحل:

(i) بفرض أن $logx = 3$ وبالتالي فإن $x = 10^3 = 1000$.

(ii) بفرض أن $ln(x + 2) = 6$

$$\Rightarrow x + 2 = e^6 \quad \Rightarrow x = e^6 - 2 \approx 401.43.$$

(iii) بفرض أن $3^x = 8$

$$\Rightarrow ln3^x = ln8 \quad \Rightarrow xln3 = ln8 \quad \Rightarrow x = \frac{ln8}{ln3} = 1.89.$$

مقابل

مثال 1.13.2:

أوجد حل المعادلة $e^x - e^{-x} = 2$ في x. ضربتها في e^x

الحل:

بفرض أن

$$e^x - e^{-x} = 2 \quad \ldots\ldots (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في e^x فإن:

$$e^{2x} - 1 = 2e^x$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

باستبدال e^x في المعادلة (2) بـ u نحصل على المعادلة

$$u^2 - 2u - 1 = 0,$$

وهي معادلة تربيعية حلولها هي:

$$u_1 = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2}, \quad u_2 = \frac{2-\sqrt{4+4}}{2},$$

$$\Rightarrow u_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad u_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

حيث أن $u = e^x > 0$ فإن الحل المطلوب هو فقط $u_1 = 1 + \sqrt{2}$ وبالتالي فإن:

$$e^x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88.$$

ملحوظة: حلول المعادلة التربيعية على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

هي:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

مثال 1.13.3:

أوجد حل المعادلة $e^{2x-6} = 4$ في x.

الحل:

بفرض أن

$$e^{2x-6} = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بأخذ ln لطرفي المعادلة (1) فإن:

$$ln(e^{2x-6}) = ln4$$

$$\Longrightarrow (2x-6)lne = ln4 \qquad \Longrightarrow 2x-6 = ln4 \quad \Longrightarrow x = \frac{ln4+6}{2} \approx 3.69.$$

أخذ ln للطرفين

$\ln(e^{2X-6}) = \ln(u)$

$2X-6 = \ln(u)$

$\frac{2X}{X} = \frac{\ln(u)+6}{2}$

$X =$

تمارين

(1) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$ أكمل العبارات الآتية:

- مجال الدالة هو...............

- $f(3) =$..........................

- $f(t^2 - 1) =$..........................

- إذا كانت $f(x) = 7$ فإن.......... $= x$.

- مدى الدالة هو..........................

(2) إذا كان منحنى الدالة $y = f(x)$ يعطي من الشكل ت-1 ، أكمل العبارات الآتية:

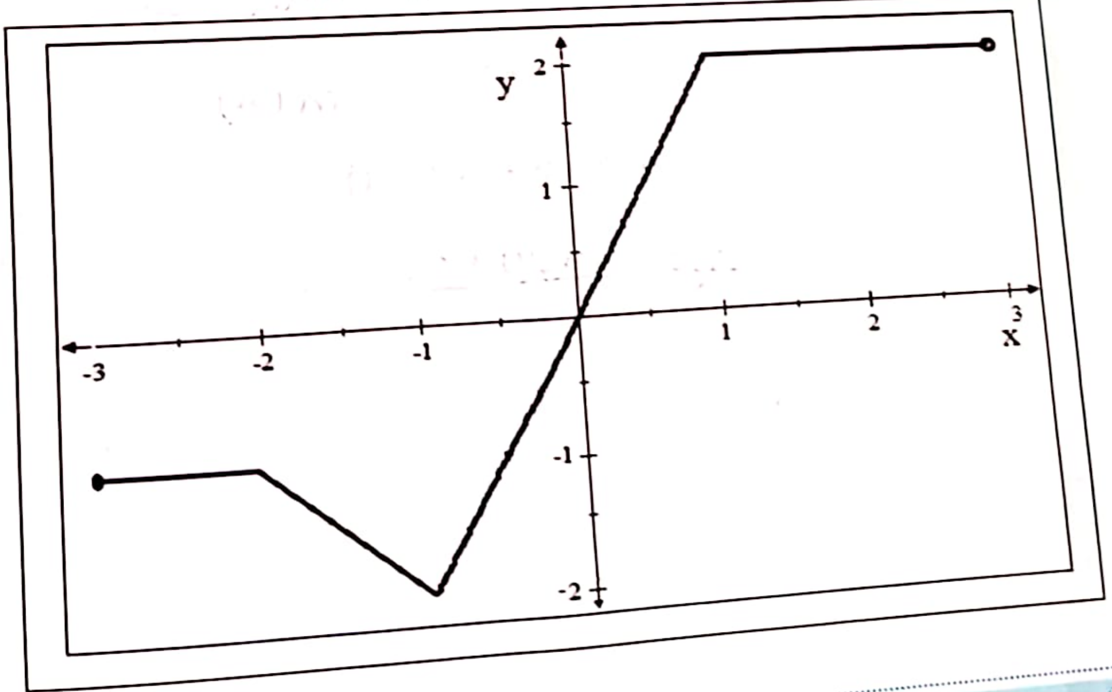
- مجال الدالة هو..............

- مدى الدالة هو.........................

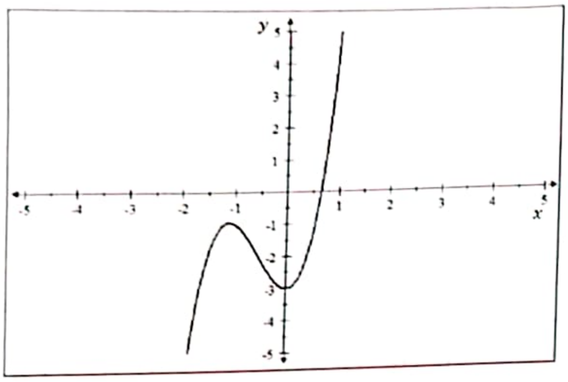
- $f(-3) =$..........................

- $f\left(\frac{1}{2}\right) =$..........................

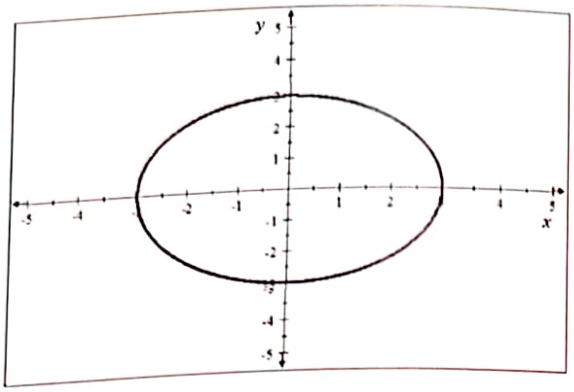
- حلول $f(x) = -\frac{3}{2}$ هي.......... $= x$ و .... $= x$.



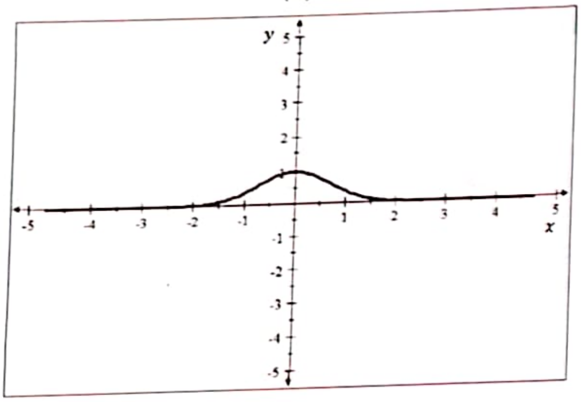
(4) أي من الأشكال الآتية يعبر عن y كدالة في x.



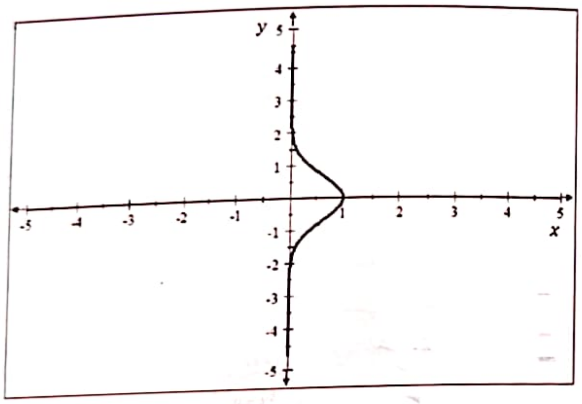
(1)



(2)



(3)



(4)

(5) أوجد مجال ومدى الدوال الآتية (جبريا وهندسيا كلما أمكن ذلك):

$(i) f(x) = x^2 + 1$ $\quad (ii) g(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad (iii) h(x) = |x+1|$

$(iv) l(x) = \sqrt{2x}$ $\quad (v) m(x) = |x| - 1$ $\quad (vi) f(x) = \sqrt{1 - |x-2|}$

$(vii) f(x) = \frac{|x+1|-1}{x}$ $\quad (viii) f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ $\quad (ix) g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

$(x) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$ $\quad (xi) g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $\quad (xii) h(x) = \sqrt{3 - x}$

(6) تُعرف دالة صحيح العدد على الصورة $f(x) = [x]$ و هي اكبر عدد صحيح اقل من او يساوي x أوجد مجال و مدى الدالة f.

(7) حدد العبارة الصحيحة والخاطئة مع الشرح.

(أ) المنحنى الذي يقطع المحور x عند نقطتين مختلفتين لا يمكن أن يكون منحنى دالة.

(ب) مجال الدالة حقيقية القيمة يتكون من جميع الأعداد الحقيقية والتي تكون قيمة الدالة عندها حقيقية.

(ج) مدى دالة القيمة المطلقة هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة.

(د) إذا كان $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ فإن مجال الدالة g يتكون من جميع الأعداد الحقيقية x والتي لها $f(x) \neq 0$.

(7) إذا كانت $y = x^2 - 2x + 5$ اجب عن الاسئلة الآتية:

(ا) لأي قيمة x تكون $y = 0$؟

(ب) لأي قيمة x تكون $y = -10$؟

(ج) لأي قيمة x تكون $y > 0$؟

(د) هل هناك قيمة عظمى لـ y؟ قيمة عظمى؟ إن كان كذلك اوجدهم.

(8) إذا كانت $y = 1 + \sqrt{x}$ اجب عن الاسئلة الآتية:

(ا) لأي قيمة x تكون $y = 4$؟

(ب) لأي قيمة x تكون $y = 0$؟

(ج) لأي قيمة x تكون $y \geq 6$؟

(د) هل هناك قيمة عظمى لـ y؟ قيمة عظمى؟ إن كان كذلك اوجدهم.

(9) اكتب الدوال الآتية في صورة دوال بأكثر من قاعدة (أي بدون استخدام دالة القيمة المطلقة):

$(i) f(x) = |x| + 3x - 1$ $\quad$ $(ii) g(x) = 3 + |2x - 5|$

$(iii) h(x) = |x| + |x - 1|$ $\quad$ $(iv) g(x) = 3|x - 2| - |x + 5|.$

(10) إذا كانت $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ و $g(x) = |x|$ أكمل العبارات الآتية:

(أ) $(f + g)(x) =$........................ و مجالها هو........................

(ب) $(f - g)(x) =$........................ و مجالها هو........................

(ج) $(fg)(x) =$........................ و مجالها هو........................

(د) $(f/g)(x) =$........................ و مجالها هو........................

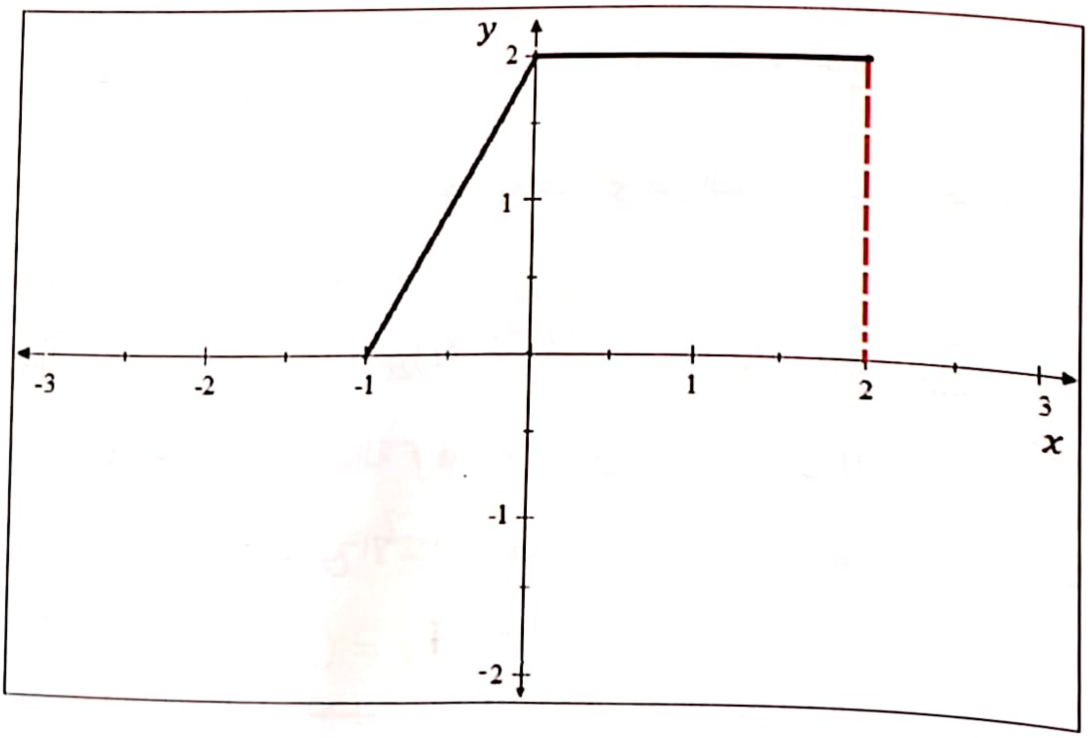
(11) إذا كانت $f(x) = 2 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ أكمل العبارات الآتية:

(أ) $(f \circ g)(x) =$........................ و مجالها هو........................

(ب) $(g \circ f)(x) =$........................ و مجالها هو........................

(12) باستخدام منحنى الدالة f المعطي في الشكل-ت2 التالي ارسم المعادلات الآتية:

$(i) y = f(x) - 1 \quad (ii) y = f(x - 1) \; (iii) y = \frac{1}{2} f(x) \; (iv) y = f\left(-\frac{1}{2}x\right).$



الشكل- ت2

(13) اكتب الدالة f في صورة محصلة دالتين بمعني اخر اوجد دالتين g, h بحيث تكون $f = g \circ h$.

$(i) f(x) = \sqrt{x+2}$ $(ii) f(x) = |x^2 - 3x + 5|$ $(iii) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$(iv) f(x) = |2x + 5|$ $(v) f(x) = \frac{2}{x-3}$ $(vi) f(x) = x^2 + 1.$

(14) استخدم البيانات في الجدول الآتي لرسم $y = f(g(x))$ ثم اوجد مجال $g \circ f$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	0	1	2	3	-2	-3

(15) إذا كانت $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = \frac{x}{x-1}$ فإن

$(f \circ g \circ h)(x) =$.................... و مجالها هو ....

(16)حدد ما إذا كانت الدالة f زوجية او فردية او ليست.

$(i) f(x) = x^2$ $(ii) f(x) = |x|$ $(iii) f(x) = \frac{x^5 - x}{1+x^2}$

$(iv) f(x) = x + 1$ $(v) f(x) = 2$ $(vi) f(x) = x^3.$

(17) إذا كانت f مجالها جميع الأعداد الحقيقية حدد أي من الدوال الآتية زوجية و أيها فردية مع الشرح.

$$(ii) h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. (i) g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

(18) ناقش صحة العبارة: تكون الدالة f فردية إذا كان و فقط إذا كان $f(0) = 0$.

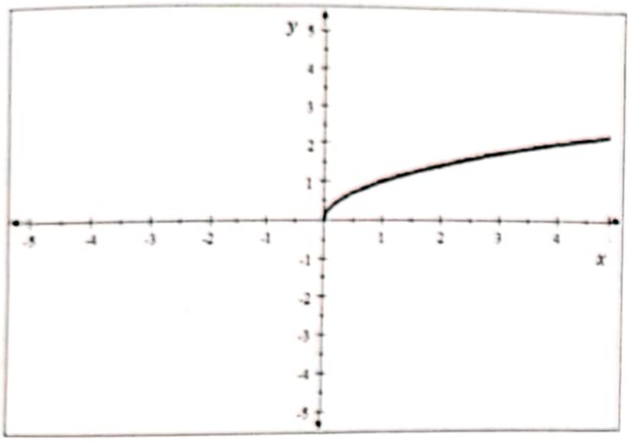
(19) إذا كانت f دالة مجالها جميع الأعداد الحقيقية أثبت أنه يمكن كتابتها كمجموع دالتين حدهما زوجية والأخرى فردية.

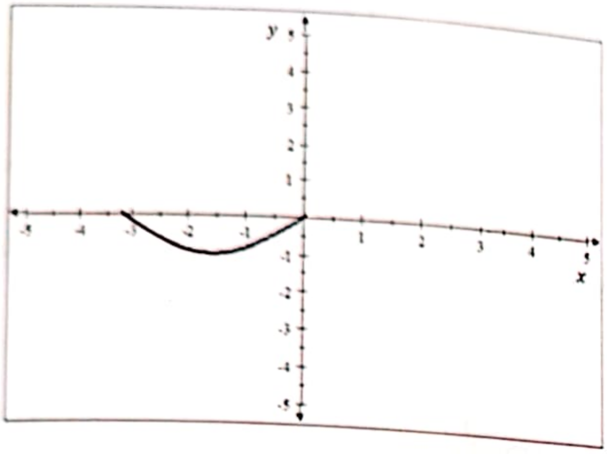
(20) استخدم اختبار التماثل في تحديد ما إذا كان الشكل متماثل حول: المحور x- المحور y- صفر.

$(i) x = 5y^2 + 9$ $\quad$ $(ii) x^2 - 2y^2 = 3$ $\quad$ $(iii) xy = 5$

$(iv) y^2 = |x| - 5$ $\quad$ $(v) x^4 = 2y^3 + y$ $\quad$ $(vi)\ y = \frac{x}{3+x^2}$.

(21) الأشكال الآتية تعطي جزء من منحنى الدالة f، أكمل منحنى الدالة في الحالات الآتية:
إذا كانت الدالة f زوجية – إذا الدالة f فردية.





(22) استخدم التحويلات المناسبة في رسم المعادلات الآتية:

$(i) y = 1 - \sqrt{x+2}$ $\quad$ $(ii) y = 2(x+1)^2$ $\quad$ $(iii) y = x^2 + 2x$

$(iv) y = \sqrt{|x|}$ $\quad$ $(v) y = \frac{-3}{(x+1)^2}$ $\quad$ $(vi) y = -3(x-2)^3$.

(23) حدد ما إذا كانت الدالة f احادية.

$(i) f(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad$ $(ii) f(x) = x^2 - 9$ $\quad$ $(iii) f(x) = \frac{1}{x-1}$

$(iv) f(x) = |x-5|$ $\quad$ $(v) f(x) = \frac{1}{x+3}$ $\quad$ $(vi) f(x) = x^3 - 1$.

(24) بين أن الدالتين g ، f كلا منهما معكوسا للآخر، ناقش ذلك باستخدام الشكل البياني للدالتين (في شكل بياني واحد).

$(i) f(x) = 2x + 1,\ g(x) = \frac{x-1}{2}$

$(ii) f(x) = x^2 - 9,\ g(x) = \sqrt{x+9}, x > -9$

$(iii) f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1,\ g(x) = 1 + \frac{1}{x}, x \neq 0.$

(25) بين أن الدالة f احادية و من ثم اوجد معكوسها و حدد مجالها و مداها.

$(i) f(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad (ii) f(x) = x - 9$ $\quad (iii) f(x) = \frac{1}{x-1}$

$(iv) f(x) = 1 + \sqrt{x-3}$ $\quad (v) f(x) = \frac{1}{x+3}$ $\quad (vi) f(x) = x^3 - 1.$

$$(vii) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} - x, & x < 2 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 2 \end{cases} \qquad (viii) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

(26) إذا كانت $\theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$، اوجد القيم الفعلية لـ

$sin\theta,\quad cos\theta,\quad cot\theta,\quad sec\theta,\quad csc\theta.$

(27) لأي قيم x تكون العلاقات الآتية صحيحة:

$(i) cos^{-1}(cosx) = x$ $\quad (ii) \cos(cos^{-1}x) = x$

$(iii) tan^{-1}(tanx) = x$ $\quad (iv) \tan(tan^{-1}x) = x.$

(28) أكمل المتساويات الآتية:

$(i)\ sin(cos^{-1}x) =$ .... $(ii)\ tan(cos^{-1}x) =$ ....

$(iii) csc(tan^{-1}x) =$ .... $(iv) sin(tan^{-1}x) =$..................

$(v) cos(tan^{-1}x) =$ .... $(vi)\ tan(cos^{-1}x) =$ ....

$(vii) sin(sec^{-1}x) =$ .... $(viii) cot(sec^{-1}x) =$..................

(29) أثبت أن:

$(i)\ sin^{-1}(-x) = -\ sin^{-1}x$ $\quad (ii)\ tan^{-1}(-x) = -\ tan^{-1}x$

$(iii)\ cos^{-1}(-x) = \pi -\ cos^{-1}x$ $\quad (iv)\ sec^{-1}(-x) = \pi -\ sec^{-1}x$

$$(v)\ sin^{-1}(x) = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$$(vi)\ cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$(vii)\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\ -\frac{\pi}{2} < tan^{-1}x + tan^{-1}y < \frac{\pi}{2}.$

(30) بدون استخدام الآلة الحاسبة اوجد القيم الفعلية:

$(i)log_{10}16$ $\quad (ii)log_2\frac{1}{32}$ $\quad (iii)log_{10}(0.001)$ $\quad (iv)log_4 4$

$(v)log_9 3$ $\quad (vi)log_{10}(10)^4$ $\quad (vii)ln(e^3)$ $\quad (viii)ln\sqrt{e}.$

(31) بدون استخدام الآلة الحاسبة اوجد قيمة x.

$(i)log_{10}(1+x) = 3$ $\quad (ii)log_{10}\sqrt{x} = -1$ $\quad (iii)ln(x^2) = 4$

$(iv)\ ln\left(\frac{1}{x}\right) = -2$ $\quad (v)log_3(3^x) = 7$ $\quad (vi)log_5(5^{2x}) = 8$

$(vii)ln(4x) - 3ln(x^2) = ln2$ $\quad (viii)\ ln\left(\frac{1}{x}\right) + ln(2x^3) = ln3.$

$(ix)3^x = 2$ $\quad (x)5^{-2x} = 3$ $\quad (xi)3e^{-2x} = 5$ $\quad (xii)2e^{3x} = 7$

$(xiiii)xe^{-x} - 2e^{-x} = 0\ (xv)e^{-2x} - 3e^{-x} = (xiii)e^x - 2xe^x = 0$

2−(32) فك اللوغاريتم في صورة مجموع، طرح، ضرب لوغاريتم ابسط.

$(i)log\left(10x\sqrt{x-3}\right) = 3$ $\quad (ii)\ln\left(\frac{x^2\sin^3x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$(iii)log\left(\frac{\sqrt[3]{x+2}}{cos5x}\right)$ $\quad (iv)\ ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3+5}}\right) = -2.$

(33) أثبت أن.

$(i)log_b x = \frac{log_a x}{log_b x}$ $\quad (ii)\ log(xy) = logx + logy$

$(iii)\ log\left(\frac{x}{y}\right) = logx - logy$ $\quad (iv)\ log\ x^y = ylogx.$

(33) اكتب الدالة الآتية في صورة دالة كسرية في x.

$$3\ln(e^{2x}(e^{x})^{3}) + 2e^{\ln 1}.$$

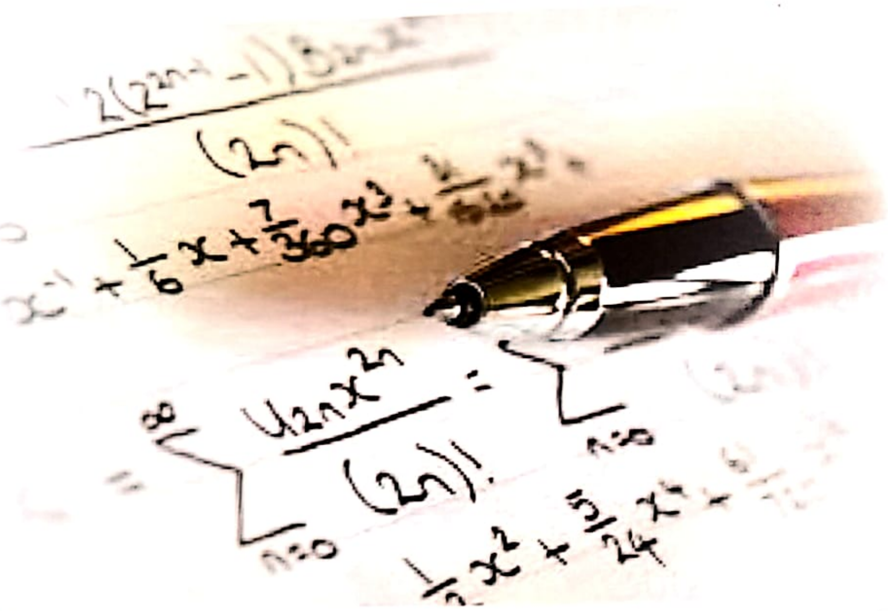
(34) ناقش صحة التقارير الآتية:

$$\ln e^{x} = x \ , \ e^{\ln x} = x \ , \ e^{x \ln b} = b^{x}, \ e^{n \ln x} = x^{n}.$$

جامعة بيشة
UNIVERSITY OF BISHA

الباب الثاني

النهايات و الاتصال



الرياضيات العامة