خلاصة في الأفكار الرئيسية لمادة الرياضيات في الصف الثالث الثانوي العلمي الحديث مع التدريبات والمسائل المناسبة لها

طلابنا الأعزاء

نقدم لكم هذا العمل المتواضع الذي يضم جميع الأفكار الواردة في منهاج الصف الثالث الثانوي العلمي و تدريبات ومسائل الوحدة المتعلقة بكل فكرة . ونتمنّى أن نكون قد وفقنا في ذلك .

. وإنّ طريقة التعامل مع هذا العمل يعتمد على خبرة الطالب ودراسته أثناء العام الدراسي فهو يعيّن الحد الأدنى مما يجب على الطالب حلّه من التمارين والمسائل، بالإضافة إلى خلاصة نظرية لموضوعات الكتاب مما يسهّل على الطالب دراستها ومراجعتها .

مع التمنيات بالنجاح والتفوق

العمل من إعداد السادة

الأستاذة : وفاء حمشو

الأستاذ: محمد خلدون شماع

وبإشراف ومراجعة

الأستاذ : أحمد الفقير

الأفكار الرئيسية في المتتاليات والإثبات بالتدريج

فكرة رقم 1 : تعريف المتتالية وجهة اطرادها

- تعريف المتتالية كتابع صريح للحد ذي الدليل n أي $u_n = f(n)$
- تعريف متتالية بالتدريج : $u_0 = a$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- تعريف جهة الاطراد :

1) نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ متزايدة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \ge n_0$ يكن $u_{n+1} > u_n$.

2) نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ متزايدة إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \ge n_0$ يكن $u_{n+1} \ge u_n$.

3) نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ متناقصة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط مهما تكن $n \ge n_0$ يكن $u_{n+1} < u_n$.

4) نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ متناقصة إذا وفقط إذا تحقق الشرط مهما تكن $n \ge n_0$ يكن $u_{n+1} \le u_n$.

5) نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا تحقق الشرط مهما تكن $n \ge n_0$ يكن $u_{n+1} = u_n$.

- كيف ندرس جهة اطراد متتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$:

✓ دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

✓ إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً يمكن استخدام المعيار : حساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، ومقارنتها مع العدد 1 .

✓ كتابة $u_n = f(n)$ ودراسة اطراد التابع f على المجال I .

تدريبات المناسبة

تدرب: ص 18 رقم ④

مسائل الوحدة رقم 1 و 5

فكرة رقم 2 : المتتالية الحسابية وخواصها

- التعريف :ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بإضافة العدد الثابت نفسه (الأساس r)
- صيغة العلاقة بين حدين من حدود المتتالية : $u_n = u_m + (n-m)r$

  أو $u_n = u_0 + nr$
- مجموع حدود متتالية حسابية مع التأكيد أنّ عدد الحدود يساوي $m - p + 1$ حيث m ترتيب الحد ذي الدليل m و p ترتيب الحد ذي الدليل p .

تدريبات المناسبة

تدرب : ص 18 رقم ②

فقرة : ❶ و ❸ و ❺ و ❼

$$S=u_p+u_{p+1}+\dots+u_m=\frac{m-p+1}{2}.(u_p+u_m)$$ • خاصية ثلاثة حدود متتابعة a و b و c هي : $a+c=2b$ • لإثبات $(u_n)_{n\geq n_0}$ أنها متتالية حسابية نثبت : أيا كان $n\geq n_0$ يكون $u_{n+1}-u_n=r$ حيث r عدد ثابت .	اضغط على الرّابط للانتقال إلى القناة
فكرة رقم 3 المتتالية الهندسية وخواصها • التعريف : ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بالضرب بالعدد الثابت(الأساس q) نفسه . • صيغة العلاقة بين حدين من حدود المتتالية : $u_n=u_0q^n$ أو $u_n=u_mq^{n-m}$ • مجموع حدود متتالية هندسية مع التأكيد أنّ عدد الحدود يساوي $m-p+1$ حيث m ترتيب الحد ذي الدليل m و p ترتيب الحد ذي الدليل p ، بشرط $q\neq1$: $$S=u_p+u_{p+1}+\dots+u_m=u_p.\frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$$ • خاصية ثلاثة حدود متتابعة a و b و c هي : $a\cdot c=b^2$ • لإثبات $(u_n)_{n\geq0}$ أنها متتالية هندسية نثبت : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ حيث q عدد ثابت .	تدرب ص 18 : رقم ① رقم ②فقرة ❷ و ❹ و ❻ و ❽ مسائل الوحدة : رقم 6 و 9
فكرة رقم 4 مبدأ الاثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي لإثبات صحة خاصة $E(n)$ تتعلق بالعدد الطبيعي n في حالة $n\geq n_0$: ① نثبت صحة هذه الخاصة في الحالة القاعدية $n=n_0$. ② نثبت في حالة $p\geq n_0$ أنّ صحة $E(p)$ تقتضي صحة $E(p+1)$ وعندها نستنتج صحة الخاصة $E(n)$ أيا كان $n\geq n_0$.	تدرب ص 18 : رقم ③ تدرب ص 21 مسائل الوحدة : رقم 4 و 7 و 11 و 13
فكرة رقم 5 مسائل داعمة	مسائل الوحدة : رقم 15 و 16

الأفكار الرئيسية لوحدة التوابع : النهايات والاستمرار

الأفكار الهامة في النهايات	التدريبات المناسبة للفقرة
فكرة رقم 1 : تعريف نهاية تابع : 1) عند اللانهاية الموجبة تعريف (1) صفحة (31) 2) عند اللانهاية السالبة تعريف (2) صفحة (32) 3) النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي تعريف (3) صفحة (35) 4) النهاية عند a هي عدد حقيقي ℓ تعريف (4) صفحة (36) **ملاحظة :** عندما يطلب منا تطبيق تعريف نهاية التابع عند اللانهاية الموجبة أو السالبة أي تحديد قيم M التي تحقق الشرط : أيا كان العدد الحقيقي M، وُجِدَ العدد الحقيقي A بحيث إذا كان $x > A$ كان $f(x) > M$	تدرب: رقم ❷ ص 34، رقم ❸ ص 42. تدرب : رقم ❷ ص 38 مسائل الوحدة رقم 12 تدرب : رقم ❹ ص 42.
فكرة رقم 2 : العمليات على النهايات 1) نهاية تابع كثير الحدود عند اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة : نجد نهاية الحد المسيطر لكثير الحدود عند $+\infty$ و $-\infty$. 2) إيجاد نهاية تابع كسري عند اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة: نجد نهاية خارج قسمة الحد المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام . 3) إيجاد نهاية تابع كسري عند العدد $a \notin D_f$: • نعوض في التابع وننتبه إلى إشارة المقام عندما $x \to a$ ، وكان الجواب اللانهاية فإذا دعت الحاجة نحسب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار . • إذا كانت النهاية عند عدد حقيقي a، $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين : لإزالة عدم التعيين: نحلل البسط والمقام إلى جداء عوامل ونختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام وننهي من جديد . 4) إيجاد نهاية تابع جذري من الشكل $f(x)=\sqrt{g(x)}$: نطبق قاعدة نهاية تابع مركب وعندما تكون النهاية حالة عدم تعيين $\boxed{\text{من الشكل : } \infty-\infty}$ نتبع ما يأتي : ⊙ إزالة عدم التعيين $+\infty-\infty$: • بشكل عام نخرج الحد المسيطر عامل مشترك .	تدرب : رقم ❶ ص 34. تدرب : رقم ❶ ص 38، رقم ❶ ص 42. مسائل الوحدة رقم 1 مسائل الوحدة رقم 9 تدرب : رقم ❷ ص 42 مسائل الوحدة رقم 13

اضغط على الرّابط للانتقال إلى القناة

• ما داخل الجذر درجة ثانية وخارجه درجة أولى : $\sqrt{a^2x^2 ...} ... bx$:

نميز حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $\sqrt{a^2} \neq b$ لإزالة عدم التعيين : نخرج x^2 خارج الجذر عامل مشترك ثم نخرج x خارج قوسين وننهي من جديد .

الحالة الثانية : إذا كان $\sqrt{a^2} = b$ لإزالة عدم التعيين : نضرب ونقسم على مرافق الجذر.

(لا تنس إذا تساوى الحدان بالدرجة والأمثال في توابع الجذر التربيعي لإزالة عدم التعيين $\infty - \infty +$ نضرب بالمرافق ونقسم عليه)

⊙ إزالة عدم التعيين $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$: في كل التوابع نخرج الحد المسيطر من البسط و نخرج الحد المسيطر من المقام .

⊙ إزالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$: نضرب بالمرافق ونقسم عليه لكي نختصر

5) نهاية التوابع المثلثية : (مبرهنات المقارنة) :

تدرب : رقم ❶ فقرة ① و ② صفحة 46 رقم ❷

مبرهنة الإحاطة 1 :(صفحة 43) ونستخدم غالباً مبرهنة الإحاطة عند إيجاد نهاية تابع مثلثي وينتج حالة $\cos(\pm\infty)$ أو $\sin(\pm\infty)$.

فنحاول تطبيق مبرهنة الإحاطة إذا كانت f و h و g توابع معرفة على مجال من النمط $I =]b, +\infty[$ ، ومن أجل كل x من I يتحقق $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكان $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \ell$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

تدرب : رقم ❶ فقرة ③ صفحة 46

مسائل الوحدة رقم 4 و رقم 10

مبرهنة الإحاطة 2 : إذا كان التابعان f و g تابعين معرفين على مجال من النمط $I =]b, +\infty[$ ومن أجل كل x من I تتحقق المتراجحة : $|f(x) - \ell| < g(x)$ وإذا كان $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell$ كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

مبرهنة المقارنة عند اللانهاية : إذا كانت التوابع f و g تابعين معرفين على مجال من النمط $I =]b, +\infty[$

الأمثلة المحلولة (صفحة 45)

تدرب : رقم ❶ فقرة ④ و ⑤ صفحة 46

• إذا كان $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I وكان $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

• إذا كان $f(x) \leq g(x)$ عند كل x من I، وكان $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

برهنة هامة تستخدم لإزالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 , \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 , \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

نذكر

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x , \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} , \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x , \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

نشاط 2 : تطبيق ❺ صفحة 66

مسائل الوحدة رقم 14

فكرة رقم 3 : نهاية تابع مركب :

لإيجاد نهاية تابع مركب : لإيجاد نهاية التابع $f(x) = g \circ h(x)$

نبحث بداية عن $\lim_{x \to a} h(x) = b$ ثم نبحث عن نهاية g عند b .

تدرب : رقم ❶

فقرات ①, ②, ⑤, ⑥, ⑧, ⑨ صفحة 49

رقم ❷ صفحة 49

مسائل الوحدة رقم 15

فكرة رقم 4 : المستقيمات المقاربة لخط بياني لتابع f معرف على D :

لإيجاد معادلات المقاربات الأفقية أو الشاقولية لخط بياني للتابع f ندرس نهاية التابع f عند أطراف مجوعة تعريفه المفتوحة ، ثم نستنتج معادلة المقارب إن وجد حيث :

- إذا كانت مجموعة تعريف التابع من الشكل $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,b[$
وكان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = c$ مقارب أفقي ($x'x$ //) في جوار اللانهاية الموجبة .
وبالمثل إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = d$ مقارب أفقي في جوار اللانهاية السالبة.
- إذا كانت مجموعة تعريف التابع من الشكل $]a,+\infty[$ ، وكان $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي ($y'y$ //) .
- لبرهان أنّ المستقيم الذي معادلته : $y = ax + b$
مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ أو جوار $-\infty$ نثبت :
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$
أو جوار $-\infty$ نثبت : $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$
- لدراسة الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب المائل ندرس إشارة $g(x) = f(x) - (ax+b)$ على مجموعة تعريف التابع f

تدرب : رقم ❶

فقرات ①, ②, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ صفحة 51

مسائل الوحدة رقم 3

مسائل الوحدة رقم 17 و 23

مسائل الوحدة رقم : 16 و 20 و 21

- تتم دراسة الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب [illegible] في بالأسلوب نفسه في المقارب المائل .
- في التوابع الكسرية التي درجة بسطها أكبر من مقامها أو تساويه من الأفضل إجراء القسمة الاقليدية أولاً .
- للبحث عن معادلة المقارب المائل نتبع مايلي (نشاط 1 صفحة 64

1. يمكن البحث عن المقارب المائل بشكل عام نتبع مايلي :

نبحث عن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وعن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$

2. إذا كتبنا التابع بالصيغة $f(x)=ax+b+g(x)$

وكان $\lim\limits_{x\to\mp\infty}g(x)=0$ كان المستقيم الذي معادلته

$y=ax+b$ مقارب مائل للخط البياني في جوار اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة .

- في التوابع الجذرية من النموذج $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$: من الأفضل كتابة مقدار ما تحت الجذر بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل) ثم استنتاج معادلتي المقاربين المائلين .

مسائل الوحدة رقم 7 و 18

مسائل الوحدة رقم 19 و 22

فكرة رقم 5 : الاستمرار

مسائل الوحدة رقم 27 و 28 و 29 و 30 و 31

- نقول أنّ التابع f مستمر عند $a\in D_f$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.
- نقول أنّ التابع f مستمر عند المجموعة $D\subseteq D_f$ إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند كل نقطة من نقاط D.
- إذا كان التابع f مستمراً على D ، كان f مستمراً على كل مجال محتوى في D
- إذا كان التابع f اشتقاقياً في نقطة a،كان مستمراً في a
- إذا كان التابع f اشتقاقياً في مجال I،كان مستمراً في I
- إنّ تابع $x\to\sqrt{x}$ مستمر على المجال $[0,+\infty[$.
- إنّ كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- إنّ التوابع الكسرية مستمرة على مجموعة تعريفها D.
- إنّ التابعين $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ مستمران على $\mathbb{R}$

إنّ مجموع تابعين مستمرين عند نقطة a أو جداء ضربهما أو خارج قسمتهما ، تابع مستمر عند النقطة a

• إنّ مركب تابعين مستمرين تابع مستمر . إنّ الخط البياني لتابع مستمر على مجال I مؤلف من قطعة واحدة في هذا المجال (مثال صفحة 53) . • تذكر تابع الجزء الصحيح (صفحة (30)	
فكرة رقم 6 : التوابع المستمرة وحل المعادلات. • مبرهنة القيمة الوسطى : إذا كان التابع f مستمراً على مجال $[a,b]$. عندئذٍ أياً يكن العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b يحقق $f(c)=y$. إذن للبحث عن حلول المعادلة $f(c)=y$ ننتبه دوماً إلى شرط الاستمرار في المجال المفروض ، وأنّ العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$.	تدرب : رقم ❶ و ❷ ص61 تدرب : رقم ❸ و ❹ ص61
• إذا تحققت مبرهنة القيمة الوسطى في مجال $[a,b]$ ، وكان التابع f مطرداً تماماً في هذا المجال ، فإنّ للمعادلة $f(c)=y$ حل وحيد في هذا المجال .	تدرب : رقم ❻ ص61
• إذا كان f مستمراً ومطرداً تماماً على المجال $I=[a,b]$ ، وكان $f(a)\times f(b)<0$ ، كان للمعادلة $f(x)=0$ ، بالمجهول x ، حل وحيد في $I=[a,b]$	مسائل الوحدة رقم 5 و 32 و 34

الأفكار الرئيسية في الاشتقاق

تدريبات المناسبة	فكرة رقم 1 : العدد المشتق والتابع المشتق وقواعد الاشتقاق
مسائل الوحدة رقم 9 و 10 تدرب: رقم ① رقم ❸ و ❹ ص 84 رقم ② . ص 84 . مسائل الوحدة رقم 3 و 18 و 19 تدرب : رقم ③ رقم ❸ و ❺ و ❻ و ⑩ و 11 و 12 ص 84.	• عند دراسة العدد المشتق للتابع f عند a : نطبق التعريف : $\lim_{x\to a}\frac{f(x+a)-f(x)}{x-a}$ إذا كان الجواب عدد حقيقي ، ندعو هذا العدد المشتق للتابع f عند a .و نرمزه $f'(a)$ ويكون التابع f اشتقاقي عند a . • التابع اشتقاقي على المجال I عندما يكون التابع اشتقاقياً عند كل نقطة من هذا المجال . • من أهم تطبيقات العدد المشتق معرفة ميل المماس للخط البياني C للتابع f حيث $m=f'(a)$ وتكون معادلة المماس في النقطة $A(a,f(a))$ هو : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ • جدول مشتقات مرجعية ومبرهنات الاشتقاق صفحة 82

تدريبات المناسبة	فكرة رقم 2 : تطبيقات الاشتقاق
تطبيق : رقم ① و ② و ③ ص 101 مسائل الوحدة رقم 22 تدرب رقم ① و ④ ص 89 تدرب رقم ⑤ ص 89 مسائل الوحدة رقم 25	يطبق تعريف العدد المشتق في حساب نهاية تابع في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نشاط 1 صفحة 101 يطبق الاشتقاق في دراسة : • دراسة اطراد تابع اشتقاقي: نجد مشتق التابع وندرس اشارته إذا كان f' موجباً على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I،كان f متزايداً على I. إذا كان f' سالباً على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I،كان f متناقصاً على I. • معرفة القيم الحدية : أ. بالاعتماد على التعريف 3 صفحة 85 ب . بالاعتماد على المبرهنة 3 صفحة 86 • من جدول تغيرات التابع f يمكن : أ . معرفة صورة مجال من منطلق التابع ب .معرفة عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ حيث $k\in f(I)$

فكرة رقم 3 : **اشتقاق تابع مركب** تذكر مبرهنة اشتقاق تابع مركب ، مبرهنة ،صفحة (90) إذا كان التابع g اشتقاقياً على مجال J، وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفترض أنه أياً كان x من I، انتمى $u(x)$ إلى J عندئذٍ يكون التابع f المعرف وفق $f(x)=(g\circ u)(x)=g(u(x))$ اشتقاقياً على I و $f'(x)=(g\circ u)'(x)=u'(x)\cdot g'(u(x))$ • نستخدم مبرهنة اشتقاق التوابع المركبة لتعميم قواعد الاشتقاق المعروفة على توابع مركبة . • عند اشتقاق تابع من النموذج $f(x)=\sqrt{g(x)}$ حيث التابع g اشتقاقي على مجال التعريف . نطبق القاعدة $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$ حيث $g(x)>0$ ثم ندرس قابلية الاشتقاق عند قيم x التي تعدم $g(x)=0$ بالاعتماد على تعريف العدد المشتق .مثال محلول صفحة 93 و 94 .	تدرب رقم ① فقرة ❷ و ❹ و ❻ و ❽ ص 94 . مسائل الوحدة : رقم 15 و 17 تدرب رقم ③ ص 94 نشاط 2 : الفقرة ❸
فكرة رقم 4 : **المشتقات من مراتب عليا** اقرأ المثال المحلول الوارد في الصفحة 95 وهو هام	مسائل الوحدة : رقم 7 و 8
فكرة رقم 5 : **أنشطة** النشاط الأول : الاعتماد على التابع المساعد في دراسة إشارة أو حل معادلة النشاط الثاني : مماس شاقولي. النشاط الثالث : دراسة تابع مثلثاتي النشاط الرابع : النهايات والاشتقاق (تم مناقشة تمارينه في الفقرات السابقة)	تطبيق : دراسة تابع كسري ص 98 مسائل الوحدة : رقم 23 . نشاط 3 : الفقرة ❷ مسائل الوحدة: 30
فكرة رقم 6 : **مسائل داعمة** برهان مركز تناظر للخط C . التابع الزوجي والتابع الفردي .	مسائل الوحدة : رقم 27 و 28و 29

نهاية متتالية

فكرة رقم 1 : تعريف نهاية متتالية	تدريبات المناسبة
• تعريف نهاية متتالية منتهية : نقول إنّ عدداً حقيقياً ℓ هو نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح مركزه ℓ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) . ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ، أياً كان $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد طبيعي n_0	تدرب: ص 119
يحقق الشرط : $n > n_0$ فإنّ $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ أي $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة .	رقم ① و ②
• تعريف نهاية متتالية حالة النهاية اللانهائية : نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح من النمط $]A, +\infty[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) .ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أي أياً كان العدد الحقيقي A ، يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط : $n > n_0$ فإنّ $u_n > A$ ، ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متباعدة نحو $+\infty$.	رقم ③
نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تسعى إلى $-\infty$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح من النمط $]-\infty, A[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) .ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ أي أياً كان العدد الحقيقي A ، يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط : $n > n_0$ فإنّ $u_n < A$ ، ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متباعدة نحو $-\infty$.	اضغط على الرّابط للانتقال إلى القناة
• يجب الاستفادة دوماً في إيجاد نهاية متتالية مكتوبة بالشكل $u_n = f(n)$ من المتتاليات المرجعية $\left(u_n = \frac{1}{n}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, u_n = \frac{1}{n^2}, u_n = \frac{1}{n^3}\right)$ وهي تسعى إلى 0 عندما $n \to +\infty$ ومن مبرهنات النهايات التي تمّ تطبيقها في إيجاد نهاية تابع	تدرب: ص 123
• نهاية متتالية هندسية : إذا كان q أساس متتالية هندسية عدد حقيقي عندئذ :	تدرب: ص 119
1) إذا كان $-1 < q < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.	
2) إذا كان $q > 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	رقم ④ و ⑤ و ⑥ و ⑦
3) إذا كان $q \leq -1$ ، ليس للمتتالية نهاية .	مسائل الوحدة رقم 5 و 15 و 27
4) في حالة $q = 1$. تكون المتتالية ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ldots) = 1$	مثال محلول ص 117

رقم 2 . تقارب المتتاليات المطردة

- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى :إذا وجد عدد حقيقي M يحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $u_n \leq M$ ، ويسمى M عنصراً راجحا على $(u_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى :إذا وجد عدد حقيقي m يحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $u_n \geq m$ ، ونسمي m عنصراً قاصراً على $(u_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى معاً .
- مبرهنة : كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$.
  كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$.
- مبرهنة : كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة .
  كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى متقاربة .
- ملاحظة : إذا كانت متتالية غير محدودة من الأعلى ، فهي لا تنتهي بالضرورة إلى $+\infty$ (مثال صفحة 126) .

تدرب : ص 128 رقم ②

تدرب : ص 128 رقم ① و ⑤ و ⑥

مسائل الوحدة : رقم 17

مسائل الوحدة : رقم 8 و 10 و 16 و 21

فكرة رقم 3 : متتاليات متجاورة

- التعريف :: نقول إنّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة ، وتقاربت المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ من الصفر .
- مبرهنة : نتأمل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ عندئذٍ :
  ❶ تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين .
  ❷ يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ النهاية نفسها .

مثال محلول ص 130

تدرب ص 132 : رقم ①

رقم ③ فقرة ❷ و ❸ و ❹

مسائل الوحدة 26

فكرة رقم 4 : مسائل داعمة

مجموع عدد غير منته من الحدود :

مسائل الوحدة : رقم 13 و 19 و 22 و 23

متتاليات مع توابع :

مسائل الوحدة : رقم 28 و 29 و 30

الأفكار الرئيسية للتابع اللوغاريتمي

الأفكار الهامة في التابع اللوغاريتمي	التدريبات المناسبة للفكرة
فكرة رقم 1 : تعريف التابع اللوغاريتمي وخواصه • يوجد تابع واحد معرّف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه $x \to \frac{1}{x}$ ندعوه التابع اللوغاريتمي ونرمزه : $x \to \ln x$. • التابع مستمر على المجال $]0,+\infty[$، ومتزايد تماماً على هذا المجال من التزايد التام للتابع ln نستنتج الخلاصة الآتية لحل المعادلات والمتراجحات التي تحوي لوغاريتم : $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$ $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$ • يجب الانتباه دوماً أنّ الأعداد الموجبة تماماً لوغاريتماتها معرّفة . • لحل معادلة $\ln g(x)=\ln h(x)$ تكافئ الشروط : $h(x)>0$ و $g(x)>0$ و $g(x)=h(x)$ • لحل متراجحة $\ln g(x)\geq \ln h(x)$ تكافئ الشروط : $h(x)>0$ و $g(x)>0$ و $g(x)\geq h(x)$	تدرب ص 154 : رقم ③ و ④ و ⑤. مسائل الوحدة رقم 1 و 2
فكرة رقم 2 : خواص اللوغاريتم هناك خواص هامة نستخدمها في حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية ويجب قبل تطبيق الخواص التحقق من أنّ مضمون كل لوغاريتم موجب تماماً . ومن الخواص : أيا يكن $a>0$ و $b>0$ يكن : • $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ • $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$ • $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$ • $\ln(a)^n=n\ln a$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ • $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$ ✓ ويجب الانتباه إلى الخاصة : $\ln(x^2)=2\ln\lvert x\rvert$ بشرط $x\neq 0$ ✓ إنّ تساوي قاعدتي الربط لتابعين لا يعني تساوي تابعين انتبه للمثال المحلول صفحة 156	تدرب ص 158 : رقم ⑦ و ⑨ . مسائل الوحدة رقم 14 و 15 .

فكرة رقم 3 : صفات التابع اللوغاريتمي

- التابع $x \to \ln x$ مستمر واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ ومشتقه

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

- و $\lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$
- المعادلة $\ln x = m \Leftrightarrow x = e^m$ حيث (m عدد حقيقي و $x > 0$)
- المعادلة $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$
- نستخدم المساواة $\ln e^m = m$ في حل المعادلات و المتراجحات حيث نستبدل العدد الحقيقي m بـ $\ln e^m$. في المعادلات من الشكل

$$\ln g(x) = m \Leftrightarrow g(x) = e^m$$

- عند حل معادلة من الصعب حلها بالطرق الجبرية نتبع أسلوب الحل الوارد في المثال المحلول صفحة 162

تدرب ص 162 : رقم ② و ④.

فكرة رقم 4 : مشتق التابع المركب $\ln \circ u$ ونهايات مهمة بالتابع اللوغاريتمي

- إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I، وموجباً تماماً على I ، كان التابع $x \to \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I.وكان $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ هو تابعه المشتق على I .
- النهايات المميزة للتابع اللوغاريتمي

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty ، \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty ، \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty ، \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ، \lim_{x\to 0} x.\ln x = 0$$

تدرب ص 165 : رقم ② و ④.

مسائل الوحدة : رقم 8 و 9 و 19

مسائل داعمة

المسائل رقم : 5 و 6 و 7 و 20 و 23 و 27 و 30 و 32

فكرة رقم 5 : أنشطة

النشاط الأول : وضع الخط البياني للتابع $f(x) = \ln x$ بالنسبة إلى مماساته .

النشاط الثاني : التابع اللوغاريتمي بالنسبة لأساس a : في حالة عدد حقيقي a حيث $a \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ نعرّف على المجال $\mathbb{R}^*_+$ التابع $x \to \frac{\ln x}{\ln a}$ ونسمي هذا التابع اللوغاريتمي بالأساس a ونرمزه $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

النشاط الثالث : حصر المقدار $\ln(x+1)$

تطبيق ❷ ص 168

النشاط الرابع : دراسة تابع

تطبيق ص 170

الأفكار الرئيسيه في التوابع الأسية

فكرة رقم 1 : التابع الأسي النيبري

- يوجد تابع واحد رمزه exp معرّف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ يحقق $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$ حيث $y>0$.
- التابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+ ; x \to e^x$
- التابع مستمر على $\mathbb{R}$، ومتزايد تماماً على $\mathbb{R}$.

من التزايد التام للتابع exp نستنتج الخلاصة الآتية لحل المعادلات والمتراجحات التي تحوي exp:

$$\boxed{\begin{array}{l} a=b \Leftrightarrow e^a=e^b \\ a<b \Leftrightarrow e^a<e^b \\ a>b \Leftrightarrow e^a>e^b \end{array}}$$

- يجب الانتباه دوماً أنّ نتائج exp موجبة تماماً.
- لحل معادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ نحل المعادلة $u(x)=v(x)$
- لحل متراجحة $e^{u(x)}>e^{v(x)}$ نحل المتراجحة $u(x)>v(x)$
- إنّ $\ln e^x = \ln e^y \Leftrightarrow x=y$

التدريبات المناسبة للفقرة

تدرب ص 186 رقم ③

مسائل الوحدة 14 و 15

فكرة رقم 2 : خواص التابع الأسي

هناك خواص هامة نستخدمها في حل معادلات و متراجحات أسية

ومن الخواص : أيا كان العددان الحقيقيان a و b

- إنّ $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $e^x=1$
- $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ ، $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$ ، $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ ، $(e^a)^p=e^{ap}$

حيث p عدد صحيح .

القوى الحقيقية :

✓ إذا كان a عدد حقيقي موجب تماماً ، و x عدد حقيقي ما ، نعرف

$a^x = e^{x\ln a} \Leftrightarrow \ln(a^x)=x\ln a$

وجميع الخواص التي تطبق في حالة الأساس e تطبق في حالة الأساس a .

التدريبات المناسبة للفقرة

تدرب ص 190 رقم ③ و ④ و ⑤

فكرة رقم 3 : دراسة التابع الأسي ونهاياته

- التابع $x \to e^x$ مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $x \to e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty$
- حل المعادلة $e^x=m$ حيث ($m>0$ عدد حقيقي) هو $x=\ln(m)$

التدريبات المناسبة للفقرة

تدرب ص 194 رقم ②

مسائل الوحدة 2 و 4

النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ،

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$ ونعمم هذه النهاية $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ حيث n عدد طبيعي .

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ونعمم هذه النهاية حيث n عدد طبيعي $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ونعمم هذه النهاية حيث n عدد طبيعي $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

- نهايات مميزة :

إزالة عدم تعيين من الشكل 1^∞ نستخدم القاعدة :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

هذه الحالات من النمط a^b حيث a و b توابع للمتحول x .

راجع المثال المحلول صفحة 198

- التابع الأسي لتابع $x \to e^{u(x)}$ و مشتقه :

إنّ التابع $x \to e^{u(x)}$ معرف عندما التابع $u(x)$ معرّف .

ويكون التابع $f: x \to e^{u(x)}$ اشتقاقي على مجال I إذا كان التابع u اشتقاقي على المجال I ويكون $f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)}$

(جداء مشتق تابع الأس في التابع نفسه).

وينتج أنّ الخط البياني للتابع $x \to e^x$ فوق جميع مماساته (تكريساً للفهم صفحة 192)

الاستفادة من التابع المساعد في دراسة إشارة تابع آخر)

تدرب ص 199 رقم ② و ①

مسائل الوحدة 6 و 8

مسائل الوحدة 20 و 21

مسائل الوحدة 7 و 10 و 17 و 18 و 19

فكرة رقم 4: دراسة توابع من النمط $x \to a^x$ حيث $a>0$ و $a\neq1$

- نعرف التابع: $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ بالتابع الأسي بالأساس a .
- عندما $a=1$ يمثل التابع $\exp_1 x = 1$ تابع ثابت . لهذا في دراستنا نعتبر $a>0$ و $a\neq1$
- الاشتقاق : $(\exp_a(x))' = (a^x)' = \ln a \cdot e^{x\ln a}$

عندما $a>1$ فإنّ $\ln a > 0$ فالتابع $\exp_a(x) = a^x$ متزايد تماماً .

عندما $a<1$ فإنّ $\ln a < 0$ فالتابع $\exp_a(x) = a^x$ متناقص تماماً .

عند دراسة تغيرات التابع $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

$\boxed{\text{ندرسها كما التابع الأسي النبيري}}$

تدرب ص 203 رقم ② و ③ و ④ و ⑤ و ⑥ و ⑧ .

فكرة رقم 5 **المعادلات التفاضلية البسيطة** إنّ حل معادلة تفاضلية $y'=ay$ حيث $(a\neq 0)$ على مجال I هو أن نعثر على جميع التوابع f الاشتقاقية على I، والذي يحقق من أجل كل $x\in I$ العلاقة $f'(x)=a\,f(x)$ ، نسمي مثل هذا التابع حلاً للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ نماذج المعادلات التفاضلية البسيطة : • إن حل المعادلة $\boxed{y'=ay \text{ حيث } (a\neq 0)}$ هو مجموعة التوابع : $\boxed{f_k : x\to k\,e^{ax} \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}}$ • إن حل المعادلة $\boxed{y'=ay+b \text{ حيث } (a\neq 0)}$ هو مجموعة التوابع : $\boxed{f_k : x\to k\,e^{ax}-\frac{b}{a} \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}}$	تدرب ص 205
فكرة رقم 6 **مسائل داعمة**	مسائل الوحدة 16 و 23 و 25

الأفكار الرئيسية في التكامل والتوابع الأصلية

فكرة رقم 1 : التوابع الأصلية

- ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I. نقول إنّ التابع F تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان : F اشتقاقياً على I. وكان $F'(x) = f(x)$ في حالة $x \in I$

والتابع $G : x \to F(x) + k$ ، حيث k عدد حقيقي ، هو تابع أصلي للتابع f أي $G'(x) - F'(x) = 0$.

- إنّ الخط البياني للتابع أصلي F نسميه المنحني التكاملي C للتابع f.
(مثال صفحة 220) .
- إذا كان f تابعاً مستمراً على مجال I. يوجد تابع أصلي F للتابع f على I

التدريبات المناسبة:

تدرب ص 222 : رقم ①
فقرة : ❶ و ❹ و ❻ و ❽
رقم ② فقرة : ❷ و ❸

فكرة رقم 2 : بعض قواعد حساب التوابع الأصلية

- يجب حفظ قواعد التوابع الأصلية الواردة في الجدول المكتوب الصفحة 223، وفي الجدول الممثل للقواعد العامة الصفحة 225.
- التابع الأصلي لمجموع تابعين على مجال I، هو مجموع تابعيهما الأصليين على المجال I.
- إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على مجال I، وكان λ عدداً حقيقياً ، كان λF تابعاً أصلياً للتابع λf على المجال نفسه ،

التدريبات المناسبة:

تدرب ص 227
مسائل الوحدة 1 و 3 و 13

فكرة رقم 3 : التكامل المحدد وخواصه

- نسمي $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ بالتكامل المحدد للتابع f من a إلى b ،
- خواص التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال (صفحة 229)
- علاقة شال : ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I ، وليكن a و b و c ثلاثة أعداد من هذا المجال ، عندئذٍ تتحقق الخاصة الآتية : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
- ومن أشهر طرق التكامل لجداء تابعين ، التكامل بالتجزئة :

إذا كان التابعان u و v اشتقاقيين على المجال I، وكان المشتقان مستمرين على I، عندئذٍ :
$$\boxed{\int_a^b (u \cdot v') = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v}$$

- حساب تكامل بعض التوابع الكسرية : إذا كان التابع $f : x \to \dfrac{A(x)}{B(x)}$ حيث التابع $B(x)$ تابع من الدرجة الثانية وقابل للتحليل إلى عاملين مختلفين ،

التدريبات المناسبة:

تدرب ص 235
مسائل الوحدة 5

تدرب ص 236 رقم ② و ③
مسائل الوحدة 10

تدرب ص 236 رقم ④
مسائل الوحدة 14

عندئذٍ نميز حالتين : •درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام : نكتب التابع الكسري على شكل مجموع تابعين كسريين مقام كلٍ منهما تابع من الدرجة الأولى .كما في المثال المحلول صفحة (233) •درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام: **نجري القسمة الإقليدية أولاً** ، ونتابع الحل حسب الحالة كما في المثال المحلول صفحة (234)	مسائل الوحدة 6 و 7
فكرة رقم 4 : التكامل المحدد وحساب المساحة • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b>a$ ، وأنّ $f(x)\geq 0$ على $[a,b]$ عندئذٍ $\int_a^b f$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x=a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x=b$. • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b>a$ ، وأنّ $f(x)\leq 0$ على $[a,b]$ عندئذٍ $\int_a^b -f$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x=a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x=b$. • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b>a$ ، عندئذٍ $\int_a^b \|f\|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x=a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x=b$. (مثال محلول 240) .	
فكرة رقم 5 : أنشطة • نشاط ① حساب مساحة سطح مستوٍ : مساحة السطح المحصور بين منحنيين إذا كان C_f الخط البياني للتابع f المستمر على $[a,b]$ وكان C_g الخط البياني للتابع g المستمر على $[a,b]$. عندئذٍ تعطى مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$ بالصيغة التالية : $\int_a^b \|(f_2-f_1)\|$ نشاط ② حساب حجم مجسم	تمرين ❶ و ❷ ص 242 مسائل الوحدة 23 و 24 تمرين ❶ و ❷ ص 243
فكرة رقم 6 : مسائل داعمة	مسائل الوحدة 8 و 9 و 26