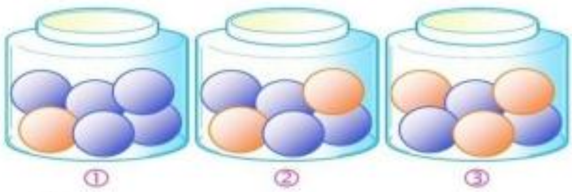
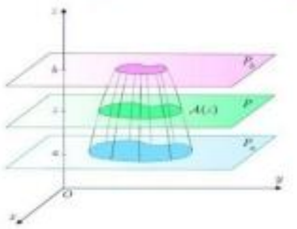
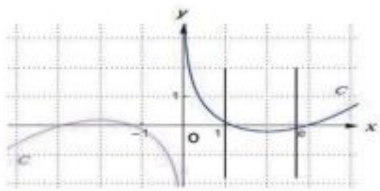
الـريـاضـيـات

الـصـف الـثـالـث الـثـانـوي الـعـلـمـي





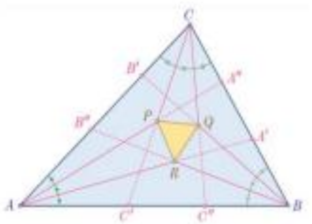


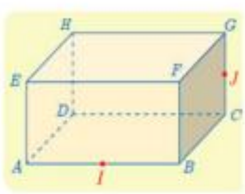
حـلـول أسـئـلـة الـدورات الـسـابـقـة

٢٠٢٢ ـ ٢٠١٧

اعـداد و تـنـسـيـق الـمـدرس سـام عـلـي حـمـدان

هـ : 0994 168 878

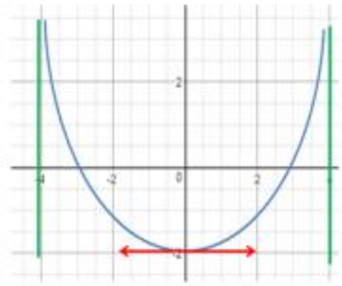




$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

الدورة الأولى – ٢٠١٧

أولاً – السؤال الأول :



تأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$

١- احسب $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ و استنتج معادلة كل مقارب للخط C

٢- احسب $f(0)$ و $f'(0)$

٣- جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

السؤال الثاني : حل المعادلة : $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في R

السؤال الثالث : اكتب معادلة الكرة التي مركزها O و نصف قطرها $R = \sqrt{3}$

ثم تحقق من المستوي P الذي معادلته $P : x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة

السؤال الرابع : في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الاجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية اسئلة

١- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

٢- بكم طريقة يمكن اختيار الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

ثانياً - التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

١- أثبت أن المتتالية v_n هندسية ثم عيّن أساسها .

٢- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n

٣- ليكن في حالة عدد طبيعي n حيث $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

عبّر عن s_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$

التمرين الثاني : ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ و $z_2 = 1 + i$ و المطلوب :

١- اكتب بالشكل المثلثي كلاً من z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$. ٢- اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ و استنتج $cos\frac{\pi}{12}$

التمرين الثالث : نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية $\frac{1}{3}$

نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، اكتب جدول قانونه الاحتمالي ، احسب توقعه الرياضي و تباينه .

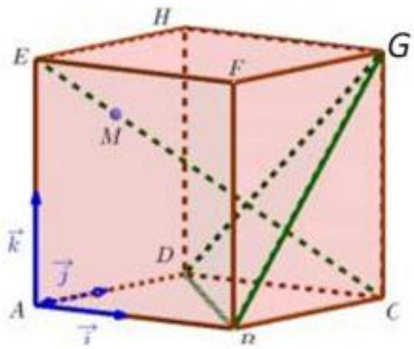
التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ مُعرف على R و المطلوب :

١- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- استنتج أن المستقيم $\Delta : y = x + 1$ مقارب لـ C بجوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

ثالثاً – المسألة الأولى : في الشكل المجاور مكعباً $ABCDEFGH$ طول حرفه 2

نتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC} = 2\vec{k}$



١- اكتب معادلة المستوي (GBD)

٢- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)

٣- جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

٤- جد احداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

٥- اثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ المعرف على $]0,+\infty[$ و المطلوب :

١- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to0} f(x)$ و استنتج معادلة المقارب الأفقي و الشاقولي .

٢- ادرس تغيرات التابع و نظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً.

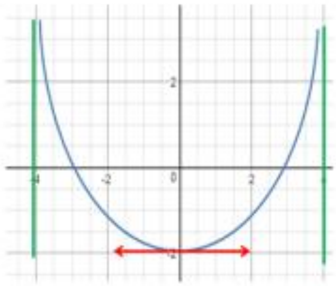
٣- جد معادلة المماس Δ لـ C في النقطة A التي فاصلتها $x = 1$.

٤- ارسم كل مقارب وجدته ، ثم ارسم C و Δ .

٥- احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ و المستقيم $x = e$.

حلول الدورة الأولى – ٢٠١٧

أولاً – السؤال الأول :



تأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$

١- احسب $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ و استنتج معادلة كل مقارب للخط C

٢- احسب $f(0)$ و $f'(0)$

٣- جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

١) من خلال الرسم نجد $\lim_{x\underset{>}{\to} -4} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\underset{<}{\to} 4} f(x) = +\infty$

$x = 4$ مقارب شاقولي على يمين C و $x = -4$ مقارب شاقولي على يسار C

٢) $f(0) = -2 \ , f'(0) = 0$

٣) $f(x) = 0$ لها حلان $x_1 = 3$ و $x_2 = -3$

السؤال الثاني : حل المعادلة : $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في R

المعدلة تكافئ $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$ منه : $3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0$

نفرض $3^x = t$ حيث $t > 0$ يعطي $3^{2x} = t^2$

$t^2 + 3t - 4 = 0$ نحلها عن طريق المميز Δ فنجد أن $\sqrt{\Delta} = 5$ يعطي

$t_1 = -4 < 0$ مرفوض $t_2 = 1 > 0$ مقبول يعطي $x = 0$

السؤال الثالث : اكتب معادلة الكرة التي مركزها O و نصف قطرها $R = \sqrt{3}$

ثم تحقق من المستوي P الذي معادلته $P : x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة

الحل : معادلة الكرة بالشكل العام مركزها $M(x, y, z)$ و نصف قطرها R

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$$

تصبح معادلة الكرة التي مركزها $O(0,0,0)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

حسب قانون بعد نقطة عن مستوي $dist(o.p) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$

و من خلال التعويض نجد $dist(o.p) = \sqrt{3} = R$ فالمستوي مماس للكرة .

السؤال الرابع : في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الاجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية اسئلة

٣- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

٤- بكم طريقة يمكن اختيار الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

الحل : ١- اختيار الأسئلة عشوائي لذلك نستخدم التوافيق $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

٢- بقي خمسة اسئلة على الطالب اختيار اثنين منها $\binom{5}{2} = 10$

ثانياً - التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

٤- أثبت أن المتتالية v_n هندسية ثم عيّن أساسها .

٥- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n

٦- ليكن في حالة عدد طبيعي n حيث $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

عبّر عن s_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$

الحل :

١) $V_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$

و منه $V_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ ، $v_0 = u_0 + 3 = 4$

٢) الحد العام للمتتالية $v_n = v_0 q^n$ يعطي $v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و منه $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

٣) مجموع الحدود : $s_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 4 . \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

$-1 < \frac{1}{3} < +1$ منه : $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$ ، منه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 6$$

التمرين الثاني : ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ و $z_2 = 1 + i$ و المطلوب :

٢- اكتب بالشكل المثلثي كلاً من z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$. ٢- اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

لدينا $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ باعتبار $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يعطي $r_1 = 2$ ، $\cos\theta_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta_1 = \frac{y_1}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ يعطي $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و منه $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

لدينا $z_2 = 1 + i$ يعطي $r_2 = \sqrt{2}$ و $\cos\theta_2 = \frac{x_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta_2 = \frac{y_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

و منه $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ يعطي $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ يعطي $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

نكتب $z = \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي يعطي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $r = \frac{r_1}{r_2}$ و $\theta = \theta_1 - \theta_2$

و بالتالي $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{12}$ و منه $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

يعطي $z = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$

نكتب $z = \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري يعطي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ نضرب و نقسم بمرافق المقام

يعطي $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{(1-\sqrt{3})}{2}$ و بالمقارنة مع الشكل المثلثي

نجد أن $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و منه $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

التمرين الثالث : نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية $\frac{1}{3}$

نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، اكتب جدول قانونه الاحتمالي ، احسب توقعه الرياضي و تباينه .

لدينا تجربة برنولية حيث $n = 3$ $p = \frac{1}{3}$ يعطي $q = \frac{2}{3}$ و $k \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

نطبق قانون برنولي $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$

من أجل $k = 0$ نجد $P(X = 0) = \binom{3}{0}(\frac{1}{3})^0 . (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$

من أجل $k = 1$ نجد $P(X = 1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{3})^1 . (\frac{2}{3})^2 = \frac{12}{27}$

من أجل $k = 2$ نجد $P(X = 2) = \binom{3}{2}(\frac{1}{3})^2 . (\frac{2}{3})^1 = \frac{6}{27}$

من أجل $k = 3$ نجد $P(X = 3) = \binom{3}{3}(\frac{1}{3})^3 . (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{27}$

التوقع الرياضي $E(X) = n . p = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

التباين $V(X) = n . p . q = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ملاحظة : يمكن حل المسألة عن طريق قاعدة الضرب (المبدأ الأساسي في العد)

لدينا $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ حيث $P(H) = \frac{1}{3}$ و $P(T) = \frac{2}{3}$

عندما $X = 0$ تكون الحالة (T,T,T) و منه $P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

عندما $X = 1$ تكون الحالة (H,T,T) أو (T,T,H) أو (T,H,T)

أي يوجد ثلاثة تبديلات و منه $P(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{12}{27}$

عندما $X = 2$ تكون الحالة (H,H,T) أو (H,T,H) أو (T,H,H)

أي يوجد ثلاثة تبديلات و منه $P(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{6}{27}$

عندما $X = 3$ تكون الحالة (H,H,H) و منه $P(X = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

التوقع الرياضي : $E(X) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 2 + \frac{1}{27} \times 3 = \frac{27}{27} = 1$

لدينا : $E(X^2) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 4 + \frac{1}{27} \times 9 = \frac{45}{27}$

التباين : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{45}{27} - \frac{27}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ مُعرف على R و المطلوب :

١- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- استنتج أن المستقيم $\Delta : y = x + 1$ مقارب لـ C بجوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

لدينا $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ المعرف على R

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\,(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}$

نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{+x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = 1$

نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = -1$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 1 = -\infty$

لدينا $h(x) = f(x) - y_\Delta$ يعطي $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

وجدنا سابقاً أن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

فالمستقيم Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$

الوضع النسبي : باعتبار $x < \sqrt{x^2+1}$ أياً كانت $x \in R$

يعطي $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ يعطي $h(x) < 0$ و منه C يقع كله تحت المقارب Δ

ثالثاً – المسألة الأولى : في الشكل المجاور مكعباً $ABCDEFGH$ طول حرفه 2

نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC} = 2\vec{k}$

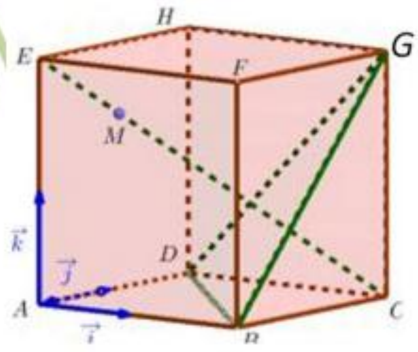
١- اكتب معادلة المستوي (GBD)

٢- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)

٣- جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

٤- جد احداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

٥- اثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)



المدرس سام علي حمدان

لدينا إحداثيات النقط التالية $B\,(2,0,0)$, $E\,(0,0,2)$, $G(2,2,2)$, $D\,(0,2,0)$, $C\,(2,2,0)$

لدينا $\overrightarrow{GD} = (-2,0,-2)$ و $\overrightarrow{GB} = (0,-2,-2)$ ، $\frac{-2}{-2} \neq \frac{0}{-2}$ منه $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GB}$ مستقلان خطياً

الشعاع الناظم للمستوي GBD هو $\vec{n} = (a, b, c)$

الشعاع $\vec{n}$ يعامد كل من $\overrightarrow{GD}$ و $\overrightarrow{GB}$ و منه $\overrightarrow{GB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{GD}.\vec{n} = 0$

يعطي $(a,b,c).(0,-2,-2)=0$ يعطي $-2b-2c=0$ يعطي $b=-c$

لدينا $(a,b,c).(-2,0,-2)=0$ و منه $-2a-2c=0$ يعطي $a=-c$

يصبح الشعاع $\vec{n}=(-c,-c,c)$ و من أجل أي قيمة لـ c ، نأخذ $c=-1$ ، يصبح الشعاع $\vec{n}=(1,1,-1)$

نعوض في معادلة المستوي من الشكل العام $a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

و بالتعويض تصبح معادلة المستوي GBD هي $x+y-z-2=0$

٢) المستقيم (EC) شعاعه الموجه $\overrightarrow{EC}=(2,2,-2)$ و يمر بالنقطة $E(0,0,2)$ يصبح التمثيل الوسيطي له :

$$(EC):\begin{cases} x=2t \\ y=2t \qquad ;t\in R \\ z=-2t+2 \end{cases}$$

٣) نعوض المعادلات الوسيطة في معادلة المستوي GBD فنجد : $2t+2t+2t-2-2=0$

و منه $t=\frac{2}{3}$ نعوض في المعادلات الوسيطة فنحصل

$$x=2t=\frac{4}{3}$$
$$y=2t=\frac{4}{3}$$
$$z=-2t+2=\frac{2}{3}$$

و منه $N\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GBD

٤) لدينا $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ و منه $[(x_M-x_E),(y_M-y_E),(z_M-z_E)]=\frac{1}{3}(2,2,-2)$

و منه $[(x_M-0),(y_M-0),(z_M-2)]=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

$$x_M=\frac{2}{3}$$
$$y_M=\frac{2}{3}$$
$$z_M-2=-\frac{2}{3}\Rightarrow z_M=\frac{4}{3}$$

و منه $M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

٥) لدينا النقطة $H(0,2,2)$ يصبح الشعاع $\overrightarrow{HM}=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ و لدينا الشعاع $\overrightarrow{EC}=(2,2,-2)$

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{HM}=\left(2\times\frac{2}{3}\right)+\left(2\times-\frac{4}{3}\right)+\left(-2\times-\frac{2}{3}\right)=0$ و منه $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HM}$ متعامدان

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{lnx}{x^2}$ المعرف على $]0,+\infty[$ و المطلوب :

٦- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to0}f(x)$ و استنتج معادلة المقارب الأفقي و الشاقولي .
٧- ادرس تغيرات التابع و نظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً.
٨- جد معادلة المماس Δ لـ C في النقطة A التي فاصلتها $x=1$.
٩- ارسم كل مقارب وجدته ، ثم ارسم C و Δ .
١٠-احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ و المستقيم $x=e$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}\times\frac{1}{x}=0$ و منه $y=0$ مقارب أفقي لـ C

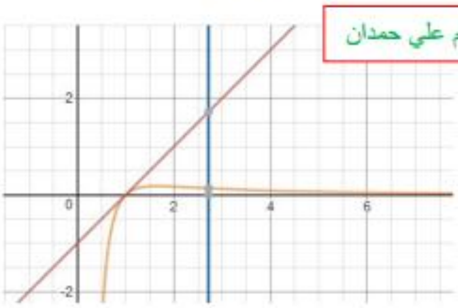
$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{lnx}{x^2}=\lim_{x\to0}lnx\times\frac{1}{x^2}=(-\infty).(+\infty)=-\infty$ ، و منه $x=0$ مقارب شاقولي لـ C

المشتق : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x.lnx}{x^4} = \frac{x - 2x.lnx}{x^4} = \frac{1-2lnx}{x^3}$ يعطي $f'(x) = 0$ عندما $1 - 2lnx = 0$

و منه $lnx = \frac{1}{2}$ أي عندما $lnx = ln\, e^{\frac{1}{2}}$ و منه $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

يعطي $f(\sqrt{e}) = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$ و هي قيمة كبرى محلياً

معادلة المماس $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ و منه معادلة Δ : $y = x - 1$



المدرس سام علي حمدان

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

المساحة : ندرس تقاطع $f(x)$ مع المحور $x'x$ عندما $f(x) = 0$ أي عندما $\frac{lnx}{x^2} = 0$ يعطي $lnx = 0$

أي عندما $x = 1$ و منه حدود التكامل بين $[1,e]$ ومن خلال جدول تغيرات التابع نلاحظ أن $f(x) \geq 0$ على المجال $[1,e]$

يعطي $S = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e lnx \times \frac{1}{x^2}dx$ .. نكامل بالتجزئة

$u = lnx$	$v' = \frac{1}{x^2}$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = \frac{-1}{x}$

يعطي $S = [lnx \times \frac{-1}{x}]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x}\, dx$ و منه $S = \frac{-1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2}\, dx$

يعطي $S = \frac{-1}{e} + [\frac{-1}{x}]_1^e$ يعطي $S = \frac{-1}{e} + \left[\frac{-1}{e} - (\frac{-1}{1})\right]$

يعطي $S = \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1$ ومنه $S = \frac{-2+e}{e} > 0$

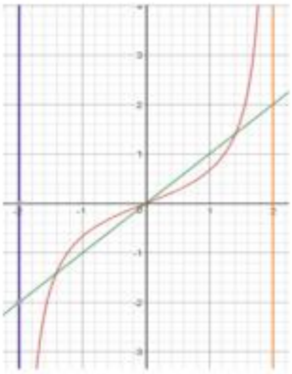
انتهى حل الدورة الأولى ٢٠١٧

مع تحيات المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

الدورة الثانية ــ ٢٠١٧

أولاً ــ السؤال الأول : تأمل الشكل المرسوم جانباً



حيث C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2\,,+2[$ و المطلوب :

١- احسب $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

٢- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$

٣- هل التابع   فردي أم زوجي ؟

٤- اكتب معادلة المماس Δ .

السؤال الثاني : اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d'

$$d:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} \quad t\in R \qquad \text{و} \qquad d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s-3 \\ z = -s+1 \end{cases} \quad S\in R$$

و هل المستقيمان d و d' يقعان في مستوي واحد ؟ علل اجابتك .

السؤال الثالث : حل المعادلة التفاضلية الآتية : $2y' + 3y = 0$ و الخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(ln4\,,1)$.

السؤال الرابع : نتأمل في المعلم المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

و المطلوب : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

ثـانياً : حل التمارين الأربعة التالية :

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

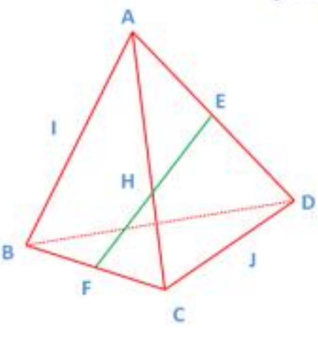
١- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

٢- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ و استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين الثاني : $ABCD$ رباعي وجوه ، a عدد حقيقي ، $I\,,J$ هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$

و $E\,,F$ نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$

و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة .



التمرين الثالث : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1 + i$ و المطلوب :

١- أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً .

٢- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و اكتبه بالشكل الأسي .

التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق التالي : $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$

١- اكتب التابع $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$

٢- أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

٣- احسب $\int_0^2 f(x)dx$.

ثالثاً – حل المسألتين التاليتين :

المسألة الأولى : ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق التالي :

$f(x) = x + x(\ln x)^2$ و ليكن $g(x) = (\ln x + 1)^2$ و المطلوب :

١) أوجد نهاية التابع عند الصفر و عند $+\infty$

٢) أثبت أن $f'(x) = g(x)$

٣) حل المعادلة $g(x) = 0$

٤) نظّم جدول بتغيرات $f(x)$

٥) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ و ارسم المماس Δ و الخط C

المسألة الثانية : يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ، صنعت الورشة A منها 600 قلماً و صنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال ، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال ، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة A >> و بالرمز B إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة B >> و بالرمز D إلى << القلم غير صالح للاستعمال >> .

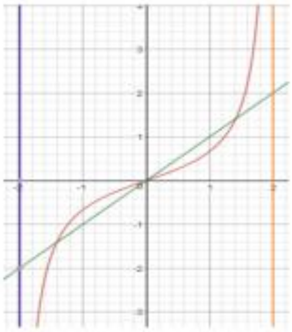
١) اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

٢) احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال .

٣) إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

٤) نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال ، احسب $P(X = 0)$

حلول الدورة الثانية ـ ٢٠١٧



أولاً ـ السؤال الأول : تأمل الشكل المرسوم جانباً

حيث C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2\,,+2[$ و المطلوب :

١- احسب $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

٢- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$

٣- هل التابع فردي أم زوجي ؟

٤- اكتب معادلة المماس Δ .

الحل : $\lim_{x\to -2^+} f\,(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 2^-} f\,(x) = +\infty$

لدينا $f\,(\,0\,) = 0$ و $f'\,(\,0\,) = 1$

لأن المماس في النقطة $o\,(\,0\,,0\,)$ هو المنصف الأول و ميله يساوي الواحد .

من خلال الرسم نجد أن التابع متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات فالتابع فردي .

معادلة المماس $T: y - f(0) = f'\,(0)(x-0) \;\Rightarrow T\,:\; y = x$

السؤال الثاني : اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d'

$$d':\begin{cases} x = \quad s \\ y = -3s-3 \\ z = \;\;-s+1 \end{cases} \quad S\in R \qquad \text{و} \qquad d:\begin{cases} x = \quad t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} \quad t\in R$$

و هل المستقيمان d و d' يقعان في مستوي واحد ؟ علل اجابتك .

الحل : لدينا $\vec{u} = (\,1\,,-3\,,-3\,)$ شعاع موجه للمستقيم d و لدينا $\vec{v} = (\,1\,,-3\,,-1\,)$ شعاع موجه للمستقيم d'

مركبات الشعاعين و بالتالي هما غير مرتبطان خطياً فالمستقيمان d و d' إما متقاطعين أو متخالفين .

نحل جملة المعادلتين
$$\begin{cases} (\,1\,) \\ (\,2\,) \\ (\,3\,) \end{cases} \qquad \begin{cases} t-s \;=\; -1 \\ t-s \;=\; \frac{5}{3} \\ 3t-s \;=\; 2 \end{cases} \sim \begin{cases} t+1 = \quad s \\ -3t+2 \;=\; -3s-3 \\ -3t+3 \;=\; -s+1 \end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) و المعادلة (2) فجملة المعادلات متناقضة و ليس لها حلول

بالتالي المستقيمان d و d' متخالفان و لا يقعان في مستوي واحد .

السؤال الثالث : حل المعادلة التفاضلية الآتية : $2y' + 3y = 0$ و الخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(ln4\,,1)$.

الحل : المعادلة من الشكل $y' = ay$ يعطي $y' = -\,\frac{3}{2}y$ و حلها العام من الشكل $f\,(\,x\,) = k\,e^{ax}$

و بالتالي الحل العام للمعادلة $f\,(\,x\,) = k\,e^{-\,\frac{3}{2}x}$ ، نعوض احداثيات $A(ln4\,,1)$ في الحل العام

$$1 = k\,e^{-\,\frac{3}{2}ln4} \Rightarrow 1 = k\,e^{-\,\frac{3}{2}ln2^2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-\,\frac{3}{2}\times 2ln2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-3ln2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-ln2^3}$$

منه $k = 8 \Leftarrow 1 = k\,\frac{1}{8} \Leftarrow 1 = k\,e^{ln\frac{1}{8}} \Leftarrow 1 = k\,e^{-ln8}$ ، منه : $f\,(\,x\,) = 8\,e^{-\,\frac{3}{2}x}$

السؤال الرابع : نتأمل في المعلم المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

و المطلوب : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

نفرض النقطة $M(x,y,z)$ متساوية البعد عن كل من النقطة A و النقطة B عندها يكون $MB^2 = MA^2$

$$(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 + (z_A - z_M)^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 + (z_B - z_M)^2$$

$$(2 - x_M)^2 + (0 - y_M)^2 + (1 - z_M)^2 = (1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2 + (1 - z_M)^2$$

يعطي $x^2 + 4 - 4x + y^2 = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 + 4y$

بعد الاصلاح نجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $2x + 4y + 1 = 0$

ثانياً : حل التمارين الأربعة التالية :

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

٣- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .
٤- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ و استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .

الحل : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ و منه $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

و باعتبار $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ و منه $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

و منه $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ وبالتالي $u_{n+1} < u_n$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

الطلب الثاني : أياً كان $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ و منه $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$ .. (1)

$\sqrt{n+1} \geq 1$ و منه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$ يعطي $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$ .. (2)

من (1) و (2) نجد أن $0 \leq u_n \leq 1$

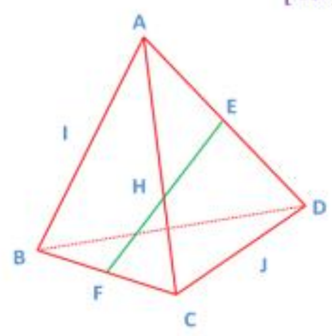
أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة بالأدنى بالعدد صفر و باعتبارها متناقصة فهي متقاربة .

نهاية المتتالية $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$

التمرين الثاني : $ABCD$ رباعي وجوه ، a عدد حقيقي ، I , J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$

و E , F نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$

و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن I , J , H تقع على استقامة واحدة .



الحل : لإثبات وقوع النقاط $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة

يكفي إثبات أن H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $I\,,J$ انطلاقاً من العلاقة $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$

نجد أن $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AE} + a\,\overrightarrow{ED} \Rightarrow \overrightarrow{AE} - a\,\overrightarrow{AE} + a\,\overrightarrow{DE} = 0 \Rightarrow (1-a)\overrightarrow{AE} + a\,\overrightarrow{DE} = 0$

و بالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-a)$ و $(D\,,a)$

بنفس الأسلوب و انطلاقاً من العلاقة $\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$

نجد أن $\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BF} + a\,\overrightarrow{FC} \Rightarrow \overrightarrow{BF} - a\,\overrightarrow{BF} + a\,\overrightarrow{CF} = 0 \Rightarrow (1-a)\overrightarrow{BF} + a\,\overrightarrow{CF} = 0$

و بالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B\,,1-a)$ و $(C\,,a)$

بما أن H هي منتصف $[EF]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E\,,1)$ و $(F\,,1)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A\,,1-a)\,,(B\,,1-a)\,,(D\,,a)\,,\ (C\,,a)$

بما أن I هي منتصف $[AB]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-a)\,,(B\,,1-a)$

بما أن J هي منتصف $[CD]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D\,,a)\ ,\ (C\,,a)$

بالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I\,,2-2a)\,,(J\,,2a)$

يعطي النقاط $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة .

التمرين الثالث : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1+i$ و المطلوب :

٣- أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً .

٤- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و اكتبه بالشكل الأسي .

الحل : لدينا $z = -1+i$ يعطي : $z^2 = (-1+i)^2 = -2i$

$z^8 = [(z)^2]^4 = (-2i)^4 = (-2i)^2.(-2i)^2$

منه : $z^8 = -4\times -4 = 16 \in R$ ، يعطي z عدداً حقيقياً

❖ لدينا $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$ و منه $z' - 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1-i)$

يعطي $z' - 1 - i = \left(\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}\right)(-1+i-1-i)$

$z' = \left(\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}\right)(-2) + 1 + i$

$z' = -\sqrt2 - \sqrt2 i + 1 + i$

$z' = (-\sqrt2 + 1)(1+i)$

يعطي $z' = (\sqrt2 - 1)(-1-i) = (\sqrt2 - 1)(\sqrt2)\left(-\frac{1}{\sqrt2} - i\frac{1}{\sqrt2}\right)$

باعتبار $\cos\frac{5\pi}{4} + sin\frac{5\pi}{4} = \left(-\frac{1}{\sqrt2} - i\frac{1}{\sqrt2}\right)$ و منه زاوية العدد العقدي z' هي $\frac{5\pi}{4}$

و $(\sqrt2 - 1)(\sqrt2) = 2 - \sqrt2 = r > 0$

يصبح الشكل الأسي لدينا $z' = re^{i\theta} \Rightarrow z' = (2-\sqrt2)e^{i\frac{5\pi}{4}}$

التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق التالي : $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

٤- اكتب التابع $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

٥- أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

٦- احسب $\int_0^2 f(x)dx$.

الحل : ١) معنا $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$ ولدينا $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

منه $ax+b+\frac{c}{x+3}=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

$$(ax+b)(x+3)+c=x^2+2x-2$$

$$ax^2+x(3a+b)+3b+c=x^2+2x-2$$

بالمقارنة نجد : $a=1\,,3a+b=2\,,3b+c=-2$

منه : $b=-1$ ومنه : $c=1$ وبالتالي : $f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$

٢) لدينا المستقيم $y=x-1$ و بالتالي $f(x)-y=\frac{1}{x+3}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$ ، فالمستقيم $y=x-1$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

٣) التكامل : $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x-1+\frac{1}{x+3})dx$ و باعتبار $x\in[0,2]$ كانت $x+3>0$

يعطي $I=\left[\frac{1}{2}x^2-x+ln(x+3)\right]_0^2=[2-2+ln5]-[ln3]=ln\frac{5}{3}$

ثالثاً – حل المسألتين التاليتين :

المسألة الأولى : ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق التالي :

$f(x)=x+x(lnx)^2$ و ليكن $g(x)=(lnx+1)^2$ و المطلوب :

١) أوجد نهاية التابع عند الصفر و عند $+\infty$

٢) أثبت أن $f'(x)=g(x)$

٣) حل المعادلة $g(x)=0$

٤) نظّم جدول بتغيرات $f(x)$

٥) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ و ارسم المماس Δ و الخط C

الحل : $f(x)=x+x(lnx)^2=x+(\sqrt{x})^2[ln(\sqrt{x})^2]^2$

يعطي $f(x)=x+[\sqrt{x}\,ln(\sqrt{x})^2]^2=x+[2\sqrt{x}\,ln\sqrt{x}]^2$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x}\,ln\sqrt{x})=0$ يعطي $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ وضوحاً $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

التابع $f(x)$ مستمر و اشتقاقي على مجموعة تعريفه نعلم أن : $[(lnx)^2]'=2lnx\times\frac{1}{x}$

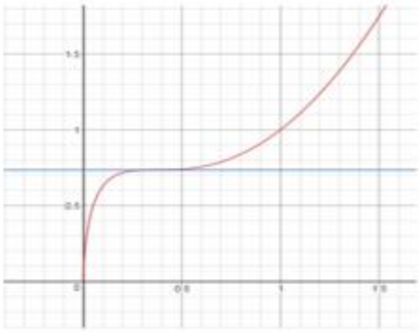
منه : $f'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2(\ln x) \times \frac{1}{x} \times x = 1 + (\ln x)^2 + 2(\ln x)$

يعطي لدينا $f'(x) = [1 + \ln x]^2 = g(x)$

حل المعادلة $g(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

دراسة تغيرات $f(x)$ ، لدينا $g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ و منه $x = \frac{1}{e}$ يعطي $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$



معادلة المماس $y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$

و منه معادلة Δ : $y = \frac{2}{e}$

المسألة الثانية : يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ، صنعت الورشة A منها 600 قلماً و صنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال ، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال ، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة A >> و بالرمز B إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة B >> و بالرمز D إلى << القلم غير صالح للاستعمال >> .

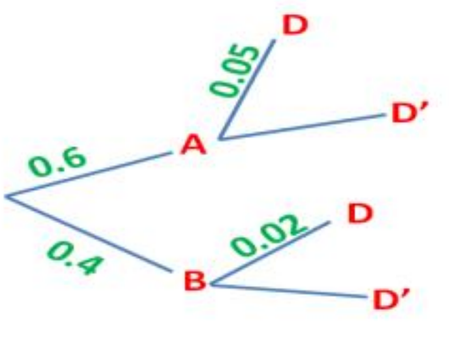
١) اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

٢) احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال .

٣) إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

٤) نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال ، احسب $P(X = 0)$

الحل : ١- المخطط الشجري



٢) احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال هو $P(D')$

لدينا $P(A) = \frac{600}{100} = 0.6$ و $P(B) = \frac{400}{100} = 0.4$

لدينا أيضاً $P(D'|A) = 1 - 0.05 = 0.95$ و $P(D'|B) = 1 - 0.02 = 0.98$

يعطي $P(D') = P(A \cap D') + P(B \cap D')$

يعطي $P(D') = P(A) \times P(D'|A) + P(B) \times P(D'|B)$

و منه $P(D') = 0.6 \times 0.95 + 0.4 \times 0.98 = 0.962$

٣) لدينا $P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{0.6 \times 0.95}{0.962} = \frac{285}{481}$

٤) لدينا $X = \{0, 1, 2\}$ و $P(X = 0)$ هو احتمال سحب قلم غير صالح
عدد الأقلام غير الصالحة من الورشة A يساوي : $600 \times 0.05 = 30$
باعتبار السحب معاً .. لذلك نستخدم التوافيق

و منه $P(X = 0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{30 \times 29}{600 \times 599} = \frac{29}{11980}$

انتهى حل الدورة الثانية ٢٠١٧

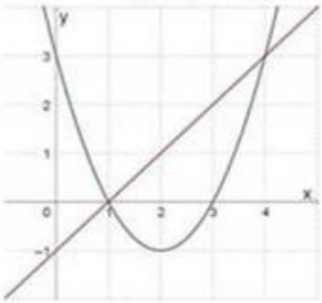
مع تحيات المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

الدورة الأولى - عام ٢٠١٨

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة التالية (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : تأمل الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R و المطلوب :



١) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

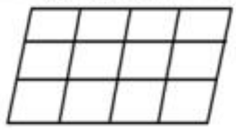
٢) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٣) ما حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$

٤) اكتب معادلة المستقيم Δ

السؤال الثاني : : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ و المستوي $p : x+2y+z-1=0$
و المطلوب احسب بعد النقطة A عن المستوي p ، ثم اكتب معادلة للكرة S التي مركزها A و تمس المستوي p .

السؤال الثالث : تأمل في الشكل المجاور شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية ، تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع
و المطلوب : احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة



السؤال الرابع : ليكن $f(x)$ التابع المعرف على R وفق التالي $f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$

١) أثبت محدودية التابع $f(x)$. ٢) استنتج $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+\cos x}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة التالية (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقط التالية A,B,C,M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية التالية $a=-1-i\ ,\ b=1-i\ ,\ c=2i\ ,\ m=-1+i$ و المطلوب :

١) مثّل الأعداد a,b,c,m في المستوي .

٢) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

٣) أثبت أن النقط B,O,M تقع على استقامة واحدة .

٤) احسب $\arg \frac{c-d}{m}$ و استنتج أن (OM) و (DC) متعامدان .

التمرين الثاني : ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$
المعرفتان وفق $u_n = 5-\frac{1}{n}$ و $v_n = 5+\frac{1}{n^2}$ و المطلوب :

١) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

٢) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة .

٣) هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان ؟ علل اجابتك .

التمرين الثالث : ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، الجدول المجاور غير مكتمل هو القانون الاحتمالي X الممثل لثلاث نجاحات ، إذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ ، $P(X=0)=\frac{1}{27}$, $P(X=1)=\frac{6}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

١) جد $P(X=3)$ و $P(X=3)$

٢) ما التوقع الرياضي للمتحول X ؟

٣) ما تباين المتحول العشوائي X ؟

التمرين الرابع : ليكن $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2}{e^x+2}\,dx$ و $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

و المطلوب : ١) احسب J ٢) احسب $I+J$ ثم استنتج I .

ثالثاً – حل المسألتين التاليتين (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق التالي : $f(x)=ln(e^{-x}+1)$

١) جد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ، هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة ؟

٢) أثبت أن $f(x)=-x+ln(e^x+1)$

٣) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته : $y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

٤) ادرس تغيرات $f(x)$ و نظم جدولاً بها .

٥) ارسم المقاربات ثم ارسم الخط البياني C

المسألة الثانية : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط $A(1,1,0),B(1,2,1),C(4,0,0)$ و المطلوب :

١) أثبت أن النقط A,B,C لا تقع على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة : $(ABC): x+3y-3z-4=0$

٣) ليكن المستويان Q و P معادلتهما : $P: x+2y-z-4=0$ و $Q: 2x+3y-2z-5=0$

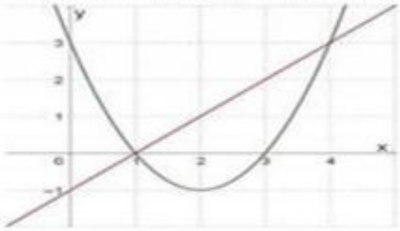
أثبت أن المستويين Q و P يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي $t\in R$ ، $d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

٤) ما هي نقطة تقاطع المستويات Q و P و (ABC)

٥) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d .

حلول الدورة الأولى - عام ٢٠١٨

السؤال الأول : تأمل الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R و المطلوب :



١) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

٢) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٣) ما حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$

٤) اكتب معادلة المستقيم Δ

الحل : ١) $f(2) = -1$ ٢) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

٣) $x = 4$ و $x = 1$ ٤) $y = x - 1$

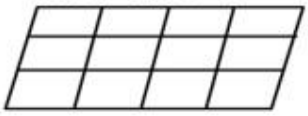
السؤال الثاني : : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(1, -2, 0)$ و المستوي $p : x + 2y + z - 1 = 0$
و المطلوب احسب بعد النقطة A عن المستوي p ، ثم اكتب معادلة للكرة S التي مركزها A و تمس المستوي p .

الحل : $dist(A,p) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\times1+2(-2)+1\times0-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

معادلة الكرة S : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

و منه تصبح معادلة الكرة S : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = \frac{8}{3}$

السؤال الثالث : نتأمل في الشكل المجاور شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية ، تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع
و المطلوب : احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة



الحل : $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{5\times4}{2} \times \frac{4\times3}{2} = 60$

السؤال الرابع : ليكن $f(x)$ التابع المعرف على R وفق التالي $f(x) = \frac{1}{3+cosx}$

١) أثبت محدودية التابع $f(x)$. ٢) استنتج $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+cosx}$

الحل : ١) أياً يكن x فإن $-1 \le cosx \le +1$ و منه $+2 \le 3 + cosx \le +4$ و منه $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+cosx} \ge \frac{1}{4}$
و منه $\frac{1}{2} \ge f(x) \ge \frac{1}{4}$ فالتابع $f(x)$ محدود

٢) أياً يكن x كان $x^2 > 0$ يعطي $\frac{x^2}{2} \ge \frac{x^2}{3+cosx} \ge \frac{x^2}{4}$ و نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$
و حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+cosx} = +\infty$

ثانياً – حل التمارين الأربعة التالية (٦٠ درجة لكل تمرين)

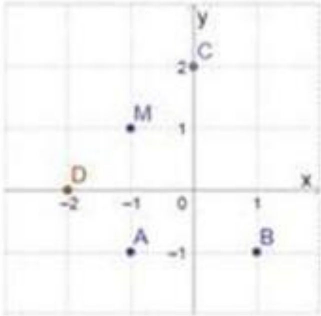
التمرين الأول : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقط التالية A, B, C, M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية التالية $a = -1 - i$, $b = 1 - i$, $c = 2i$, $m = -1 + i$ و المطلوب :

١) مثّل الأعداد a, b, c, m في المستوي .

٢) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

٣) أثبت أن النقط B, O, M تقع على استقامة واحدة .

٤) احسب $\arg \frac{c-d}{m}$ و استنتج أن (OM) و (DC) متعامدان



الحل : ٢) $d = ic = i \times 2i = -2$

٣) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \arg\left(\frac{m}{b}\right)$ ، يعطي $\frac{m}{b} = \frac{-1+i}{1-i} = -1$

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \arg(-1) = \pi$ و بالتالي $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$ مرتبطان خطياً

و منه النقط B, O, M تقع على استقامة واحدة .

٤) $\frac{c-d}{m} = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4i}{2} = -2i$

و منه $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{DC}) = \arg\left(\frac{c-d}{m}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و منه (OM) و (DC) متعامدان

التمرين الثاني : ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$

المعرفتان وفق $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ و $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$ و المطلوب :

١) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

٢) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة .

٣) هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان ؟ علل اجابتك .

الحل : ١) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

٢) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة .

٣) نعم ، لأن $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة و $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة و $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0$

التمرين الثالث : ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، الجدول المجاور غير مكتمل هو القانون الاحتمالي X

الممثل لثلاث نجاحات ، إذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ ، $P(X=1) = \frac{6}{27}$ ، $P(X=0) = \frac{1}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

١) جد $P(X=3)$ و $P(X=3)$

٢) ما التوقع الرياضي للمتحول X ؟

٣) ما تباين المتحول العشوائي X ؟

الحل : ١) لدينا تجربة برنولية $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$ حيث $k \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

و $n = 3$ ، $p = \frac{2}{3}$ يعطي $q = \frac{1}{3}$

$P(X=2) = \binom{3}{2} . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$ و $P(X=3) = \binom{3}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$

٢) التوقع الرياضي : $E(X) = n.p = 3 \times \frac{2}{3} = 2$

٣) التباين : $V(X) = n.p.q = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

التمرين الرابع : ليكن $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x+2}\,dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

و المطلوب : ١) احسب J ٢) احسب $I + J$ ثم استنتج I .

الحل : ١) $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = [\ ln(e^x+2)\ ]_0^{\ln 2} = ln4 - ln3 = ln\frac{4}{3}$

٢) $I + J = \int_0^{\ln 2} \frac{2+e^x}{e^x+2}\,dx = \int_0^{\ln 2} dx = [\ x\ ]_0^{\ln 2} = ln\,2$

منه : $I = ln2 - J = ln2 - ln\frac{4}{3} = ln2 - 2ln2 + ln3 \Rightarrow I = ln\frac{3}{2}$

ثالثاً – حل المسألتين التاليتين (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق التالي : $f(x) = ln(e^{-x} + 1)$

١) جد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ، هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة ؟

٢) أثبت أن $f(x) = -x + ln(e^x + 1)$

٣) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته : $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

٤) ادرس تغيرات $f(x)$ و نظم جدولاً بها .

٥) ارسم المقاربات ثم ارسم الخد البياني C

الحل : ١) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، الخط C يقبل محور الفواصل مقارب أفقي بجوار $+\infty$

٢) $f(x) = ln[e^{-x}(1 + e^x)]$ منه : $f(x) = ln\,e^{-x} + ln(1 + e^x) = -x + ln(e^x + 1)$

٣) $g(x) = f(x) - y_d = -x + ln(e^x + 1) + x$ منه : $g(x) = ln(e^x + 1)$

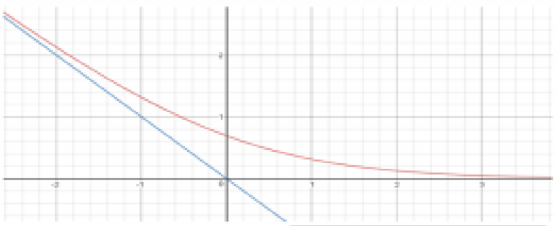
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^x + 1) = 0$ إذاً d مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

٤) $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$ فالتابع $f(x)$ متناقص تماماً

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$- - - -$	
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0

نقطة مساعدة للرسم $(0, \ln 2)$



المدرس سام علي حمدان

المسألة الثانية : : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط $A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$ و المطلوب :

١) أثبت أن النقط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة : $(ABC): x+3y-3z-4=0$

٣) ليكن المستويان Q و P معادلتهما : $P: x+2y-z-4=0$ و $Q: 2x+3y-2z-5=0$

أثبت أن المستويين Q و P يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي $t \in R$ ، $d: \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

٤) ما هي نقطة تقاطع المستويات Q و P و (ABC)

٥) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d .

الحل : ١) لدينا $\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$ و $\overrightarrow{AC}=(3,-1,0)$ $\frac{0}{3}\neq\frac{1}{-1}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً و منه النقط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة .

٢) بفرض $\vec{n}=(a,b,c)$ شعاع ناظم على (ABC) يكون $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

و منه $b+c=0$ (1) و $3a-b=0$ (2) ... من (1) نجد $c=-b$ و من (2) نجد $a=\frac{b}{3}$

و منه $\vec{n}=(\frac{b}{3},b,-b)$ نأخذ $b=3$ يعطي $\vec{n}=(1,3,-3)$ و منه $(ABC): x+3y-3z+d=0$

و بتعويض احداثيات C في معادلة الستوي نجد أن : $d=-4$ و منه : $(ABC): x+3y-3z-4=0$

٣) نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي P فنجد $t-2+2(3)-t-4=0$ فنلاحظ أن المعادلة محققة

نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي Q فنجد أن $2(t-2)+3(3)-2t-5=0$ فنلاحظ أن المعادلة محققة

و منه المستقيم d ينتمي الى المستويان Q و P معاً فهو الفصل المشترك بينهما .

٤) لايجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في المستوي (ABC)

فنجد : $t-2+3(3)-3t-4=0$ منه $t=\frac{3}{2}$

نعوض في التمثيلات الوسيطية فنجد أن : $x=-\frac{1}{2}, y=3, z=\frac{3}{2}$ و منه نقطة التقاطع المطلوبة $K(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2})$

٥) من خلال التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد أنه أياً تكون النقطة M حيث $M\in d$ تكون $M(t-2,3,t)$

و بالتالي : $AM^2=(t-3)^2+4+t^2=2t^2-6t+13$

و منه $AM^2=2\left(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+13=2(t-\frac{3}{2})^2+\frac{17}{2}$

وأصغر قيمة لـ AM^2 هي $\frac{17}{2}$ أي أصغر قيمة لـ AM هي $\sqrt{\frac{17}{2}}$ و هو يدل على أصغر بعد بين النقطتين A و M

فالبعد المطلوب بعد النقطة A عن المستقيم d هو $\sqrt{\frac{17}{2}}$

انتهى حل اسئلة الدورة الأولى ٢٠١٨

اعداد و تنسيق المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

الدورة الثانية - عام ٢٠١٨

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة التالية :

السؤال الأول : تأمل جدول التغيرات للتابع $f(x)$ المعرف على R و المطلوب :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

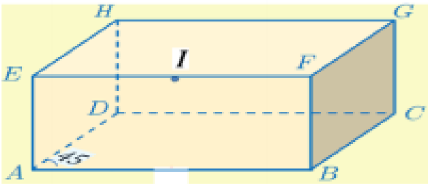
١) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢) اكتب معادلة المقارب للتابع $f(x)$

٣) ما عد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٤) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي السطوح ، فيه $AB = 2 \ , BC = GC = 1$
و قياس الزاوية $\widehat{DAB} = 45$ و النقطة I منتصف $[EF]$ و المطلوب :



١) احسب $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD}$

٢) عيّن موضع النقطة M التي تحقق العلاقة
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

السؤال الثالث :

في احدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين و خمس عمال ، كم لجنة قوامها مهندس واحد و عاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة .

السؤال الرابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و فيها $u_0 = 1$ و المطلوب :
احسب u_3 ثم احسب المجموع $S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

ثانياً – حل التمارين الأربعة التالية :

التمرين الأول :

ليكن $f(x)$ التابع المعرف على المجال $]2 , +\infty[$ وفق التالي : $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

١) ادرس تغيرات التابع $f(x)$ على المجال $]2 , +\infty[$ و نظم جدولاً بها .

٢) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً .

٣) اكتب معادلة المماس للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 3

التمرين الثاني :

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء ، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً ، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 اذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء و القيمة 3 اذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراء و القيمة صفر فيما عدا ذلك و المطلوب : اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه الرياضي .

التمرين الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق التالي : $f(x) = e^{x} - 1$ و المطلوب :

١) جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

٢) احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$

التمرين الرابع :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A , B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان : $Z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ و $Z_A = 4$ و لتكن I منتصف $[AB]$ و المطلوب :

١) مثل النقطتين A , B في معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ و اكتب Z_B بالشكل الأسي .

٢) عيّن طبيعة المثلث OAB ، و أثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

٣) اكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية و الأسية ثم استنتج $\sin\frac{\pi}{8}$

ثالثاً – المسألة الأولى : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا النقط التالية : $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

١) جد $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$

٢) أثبت أن النقط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة .

٣) أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)

٤) اكتب معادلة المستوي (CDE)

٥) احسب بعد B عن المستوي (CDE)

٦) اكتب معادلة الكرة التي مركزها B و تمس المستوي (CDE)

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق التالي : $f(x) = x^2 - \ln x$ و المطلوب :

١) احسب نهاية التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه .

٢) ادرس تغيرات التابع $f(x)$ و نظم جدولاً بها .

٣) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$

٤) في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ارسم المماس T و الخط البياني C

٥) احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C و محور الفواصل و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$

٦) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n = n^2 - \ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

حلول الدورة الثانية - عام ٢٠١٨

السؤال الأول : تأمل جدول التغيرات للتابع $f(x)$ المعرف على R و المطلوب :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢) اكتب معادلة المقارب للتابع $f(x)$

٣) ما عد حلول المعادلة $f(x)=0$

٤) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

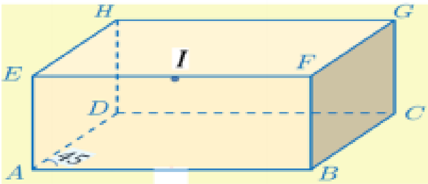
١) من خلال الجدول نجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

٢) معادلة المقارب $y=2$

٣) للمعادلة $f(x)=0$ حلان

٤) القيمة الحدية الصغرى $f(2)=-1$

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي السطوح ، فيه $AB=2\ ,BC=GC=1$
و قياس الزاوية $\widehat{DAB}=45$ و النقطة I منتصف $[EF]$ و المطلوب :



١) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

٢) عيّن موضع النقطة M التي تحقق العلاقة
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

١) لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos\widehat{DAB}=2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

٢) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}$

و منه M منطبقة على I

السؤال الثالث :

في احدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين و خمس عمال ، كم لجنة قوامها مهندس واحد و عاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة .

الاختيار عشوائي لذلك نستخدم توافيق $\binom{3}{1}.\binom{5}{2}=\frac{3\times1}{1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=30$

السؤال الرابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ و فيها $u_0=1$ و المطلوب :
احسب u_3 ثم احسب المجموع $S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$

١) باعتبار u_n متتالية هندسية فإن $u_3=u_0q^3=1\times2^3=8$

٢) باعتبار $n=5$ فحسب دستور المجموع $s=u_3\times\frac{1-q^n}{1-q}=8\times\frac{1-2^5}{1-2}=8\times\frac{-31}{-1}=248$

ثانياً – التمرين الأول :

ليكن $f(x)$ التابع المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق التالي : $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

١) ادرس تغيرات التابع $f(x)$ على المجال $]2,+\infty[$ و نظم جدولاً بها .

٢) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً .

٣) اكتب معادلة المماس للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 3

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -2$ $\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$

لدينا $f(x)$ مستمر و متزايد تماماً على مجموعة تعريفه حيث $f(]2,+\infty[) =]-2,+\infty[$

و $0 \in]-2,+\infty[$ و منه $f(x) = 0$ لها حل وحيد في مجال تعريف التابع

معادلة المماس $T : y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow T : y - 0 = \frac{3}{2}(x-3)$

يعطي $T : y = +\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		+ +	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الثاني :

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء ، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً ، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 اذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء و القيمة 3 اذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراء و القيمة صفر فيما عدا ذلك و المطلوب : اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه الرياضي .

لدينا $X = \{0\ ,3\ ,5\}$ و $P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5\times4\times3}{9\times8\times7} = \frac{5}{42}$ و $P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5\times4\times4}{2\times1\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}} = \frac{240}{504} = \frac{20}{42}$

و منه $P(X=0) = 1 - [P(X=5) + P(X=3)] = 1 - \frac{25}{42} = \frac{17}{42}$

التوقع الرياضي $E(X) = 0\times P(X=0) + 3\times P(X=3) + 5\times P(X=5) = \frac{60}{42} + \frac{25}{42} = \frac{85}{42}$

التمرين الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق التالي : $f(x) = e^x - 1$ و المطلوب :

١) جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

٢) احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$

١) لدينا $e^x - 1 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x \leq e^0 \Rightarrow x \leq 0$ يعطي مجموعة حلول المتراجحة $x \in]-\infty,0]$

٢) لدينا $\int_0^{\ln 2}(e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^{\ln 2} = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2$

التمرين الرابع :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان : $Z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ و $Z_A = 4$ و لتكن I منتصف $[AB]$ و المطلوب :

١) مثل النقطتين A, B في معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ و اكتب Z_B بالشكل الأسي .

٢) عيّن طبيعة المثلث OAB ، و أثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

٣) اكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية و الأسية ثم استنتج $\sin\frac{\pi}{8}$

١) لدينا $r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$

و لدينا $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ و منه $Z_B = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

٢) باعتبار $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| = 4$ فالمثلث OAB متساوي الساقين

بما أن OI خط متوسط متعلق بالضلع $[AB]$ فهو أيضاً منصف

للزاوية θ أي للزاوية $\widehat{AOB}$ و منه $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{\pi}{8}$

٣) لدينا $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ يعطي $r_I = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

يعطي $Z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} . e^{i\frac{\pi}{8}}$ و منه $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

ثالثاً – المسألة الأولى : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا النقط التالية : $A(2,1,3), B(1,0,-1), C(4,0,0), D(0,4,0), E(1,-1,1)$

١) جد $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$

٢) أثبت أن النقط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة .

٣) أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)

٤) اكتب معادلة المستوي (CDE)

٥) احسب بعد B عن المستوي (CDE)

٦) اكتب معادلة الكرة التي مركزها B و تمس المستوي (CDE)

١) لدينا $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -4)$, $\overrightarrow{CD} = (-4, 4, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (-3, -1, 1)$

٢) نلاحظ $\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$ فالشعاعان $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ غير مرتبطان خطياً

و منه النقط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة

٣) لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 4 - 4 - 0 = 0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 3 + 1 - 4 = 0$ يعطي $\overrightarrow{AB}$ يعامد الشعاعين $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$

و باعتبار الشعاعين غير مرتبطين خطياً فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعامد المستوي (CDE)

٤) الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع الناظم للمستوي (CDE) و منه تصبح معادلة المستوي : $-x-y-4z+d=0$
نعوض احداثيات C في معادلة المستوي فنجد أن : $d=4$ و منه معادلة (CDE) : $x+y+4z-4=0$

٥) بعد نقطة عن مستوي : $dist(B,p)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1\times1+1\times0+4\times-1-4|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{7}{\sqrt{18}}$

٦) معادلة الكرة : $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$

باعتبار $R=\frac{7}{\sqrt{18}}$ حيث R هي بعد B عن المستوي (CDE)

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق التالي : $f(x)=x^2-lnx$ و المطلوب :

١) احسب نهاية التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه .

٢) ادرس تغيرات التابع $f(x)$ و نظم جدولاً بها .

٣) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$

٤) في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ارسم المماس T و الخط البياني C

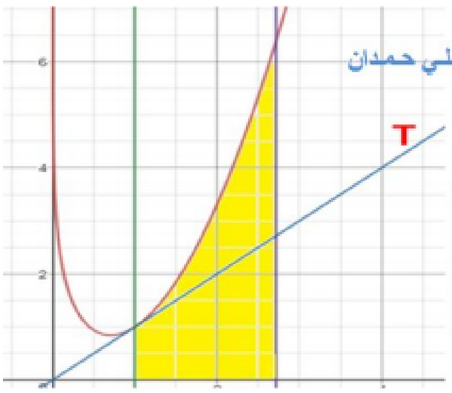
٥) احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

٦) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n=n^2-ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

١) لدينا $\lim_{x\to0}f(x)=0-(-\infty)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty-\infty$ حالة عدم تعيين
و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x^2(1-\frac{lnx}{x^2})]=+\infty\times(1-0)=+\infty$ س

٢) لدينا $f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$ حيث $f'(x)=0$ عندما $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ مقبول أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض
و منه $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}-ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-ln(1)+ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln\,2$

٤) معادلة المماس $T:\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=x-1\Rightarrow T:y=x$



x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

٥) $f(x) > 0$ على المجال $[1, e]$ منه : $S = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x^2 - lnx)dx = \int_1^e x^2dx - \int_1^e lnxdx$

بفرض : $M = \int_1^e x^2dx = [\frac{1}{3}x^3]_1^e = \frac{e^3-1}{3}$ ، بفرض $I = \int_1^e lnxdx$

حسب التكامل بالتجزئة يعطي $I = [xlnx]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e \Rightarrow I = e - e + 1 = 1$

$u = ln\, x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

منه : $S = M - I = \frac{e^3-1}{3} - \frac{3}{3} = \frac{e^3-4}{3}$

٦) من خلال جدول تغيرات التابع وجدنا أن $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

فالتابع $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $[1, +\infty[$ ، $f(n) = u_n$

منه التابع $f(n)$ متزايد تماماً فالمتتالية u_n المعرفة وفق : $n \geq 1$ هي متتالية متزايدة .

انـتـهـى حل الـدورة الـثـانـيـة ٢٠١٨

مـع تـحـيـات الـمـدرس سام علـي حـمـدان

0994 168 878

الدورة الأولى – ٢٠١٩

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة التالية

السؤال الأول : فيما يلي جدول تغيرات للتابع $f(x)$ المعرف على R خطه البياني

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	3

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

3) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

4) احسب $f(]-1,2[)$

السؤال الثاني : عين الحد المستقل عن x في المنشور $(x + \frac{1}{x^2})^6$

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق : $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$ و المطلوب :

أثبت أن : $\Delta : y = x + 3$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $B(0,1,1)$, $A(1,0,1)$

1) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{u} = (2,2,1)$ شعاعاً موجها له

2) أثبت أن المستقيمان $(AB), (d)$ متعامدان

ثانياً : حل التمارين الأربعة التالية

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}$ والمطلوب

1) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$ ثم استنتج عنصرا راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبيّن أنها متقاربة .

التمرين الثاني : يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام التالية $0, 1, 2$

وكرتان بيضاء تحمل الرقمين $0, 1$ ، نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون اعادة من هذا الصندوق .

1) الحدث A : الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته ، احسب $P(A)$.

2) نعرف متحولاً عشوائياً X الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين

عيّن مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

التمرين الثالث : ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$ والمطلوب :

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم اعط حقيقياً A يحقق الشرط اذا كان $x > A$ كان $f(x)$ يقع في المجال $]0.9, 1.1[$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

التمرين الرابع : لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $Z_A = -1 + i$ و $Z_B = -3i$

وليكن : $P(Z) = Z^2 + (1+2i)Z + 3 + 3i$

1) أثبت أن Z_A حلاً للمعادلة $P(Z) = 0$ ، ثم استنتج الحل الآخر .

2) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) اكتب Z_A بالشكل الأسي

ثالثاً- حل المسألتين التاليتين

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1) اكتب في هذا المعلم احداثيات كل من النقط A, C, D, F, H

2) اكتب معادلة المستوي (ACH)

3) أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P : -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)

4) بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D, F, I تقع على استقامة واحدة .

5) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ ، وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

1) جد نهاية التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه ثم اكتب معادلة كل مقارب وجدته .

2) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها

3) جد معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة $(0,2)$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و T

4) في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C

5) ليكن C' الخط البياني للتابع $g(x)$ المعرف على R وفق : $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C'

حلول الدورة الأولى – ٢٠١٩

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة التالية

السؤال الأول : فيما يلي جدول تغيرات للتابع $f(x)$ المعرف على R خطه البياني

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

3) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع $f(x)$

4) احسب $f(]-1,2[)$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) $y = 3$

3) $f(-1) = -2$

4) $f(]-1,2[) =]-2,4[$

السؤال الثاني : عيّن الحد المستقل عن x في المنشور $(x + \frac{1}{x^2})^6$

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$T_r = \binom{6}{r} (x)^{6-r} (\frac{1}{x^2})^r = \binom{6}{r} x^{6-r} . x^{-2r}$$

لدينا $x^{6-3r} = x^0$ ومنه $6 - 3r = 0$

يعطي $r = 2$ ومنه $T_2 = \binom{6}{2} = 15$

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق : $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$ و المطلوب :

أثبت أن : $\Delta : y = x + 3$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

$$g(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$g(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

$x^2 > 0$ أيا كانت $x \in R\backslash\{0\}$

$g(x) < 0$ ومنه C يقع تحت Δ

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$

1) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{u}=(2,2,1)$ شعاعاً موجها له

2) أثبت أن المستقيمان $(d),(AB)$ متعامدان

$$(d):\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} \quad : t\in R$$

$\vec{u}=(2,2,1)$ و $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2+2=0$$

فالمستقيمان $(d),(AB)$ متعامدان

ثانياً : حل التمارين الأربعة التالية

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\ldots\ldots+\frac{1}{3^n}$ والمطلوب

1) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n=\frac{1}{2}(3-\frac{1}{3^n})$ ثم استنتج عنصرا راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبيّن أنها متقاربة .

$S_{n+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\ldots\ldots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}$ ومنه : $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3^{n+1}}>0$ فالمتتالية متزايدة تماماً

٢) S_n مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

حدها الأول هو العدد واحد و عدد حدودها $(n+1)$ يكون مجموع حدودها

$S=a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ومنه $S=1\times\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$$S_n=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{n+1}})$$

$$S_n=\frac{1}{2}(3-\frac{3}{3^{n+1}})$$

$$S_n=\frac{1}{2}(3-\frac{1}{3^n})$$

$-\frac{1}{3^n}\leq0$ منه : $3-\frac{1}{3^n}\leq3$ منه : $\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)\leq\frac{3}{2}$ يعطي : $S_n\leq\frac{3}{2}$

فالعدد الراجح على المتتالية هو $\frac{3}{2}$ ،، S_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثاني : يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام التالية $0 , 1 , 2$

وكرتان بيضاء تحمل الرقمين $0 , 1$ ، نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون اعادة من هذا الصندوق .

1) الحدث A : الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته ، احسب $P(A)$.

2) نعرف متحولاً عشوائياً X الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين

عيّن مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

$$X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{4}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{10}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(X) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{8}{5}$$

التمرين الثالث : ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرف على $I =]e^{-1} , +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$ والمطلوب :

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم اعط حقيقياً A يحقق الشرط اذا كان $x > A$ كان $f(x)$ يقع في المجال $]0.9 , 1.1[$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ <u>حالة عدم تعيين</u>

$$f(x) = \frac{\ln x\left(\frac{2}{\ln x} + 1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} + 1\right)}$$

$f(x) = \frac{\left(\frac{2}{\ln x} + 1\right)}{\frac{1}{\ln x} + 1)}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{2+\ln x}{1+\ln x} - 1\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{2+\ln x-1-\ln x}{1+\ln x}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{1}{1+\ln x}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow 1 + \ln x > 10$$

$$\ln x > 9 \Rightarrow \ln x > \ln e^9 \Rightarrow x > e^9$$

٢) $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(1) = 2$

التمرين الرابع : لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $Z_A = -1+i$ و $Z_B = -3i$

وليكن : $P(Z) = Z^2 + (1+2i)Z + 3 + 3i$

1) أثبت أن Z_A حلاً للمعادلة $P(Z) = 0$ ، ثم استنتج الحل الآخر .

2) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) اكتب Z_A بالشكل الأسي

1) $P(-1+i) = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$

$$P(-1+i) = 1 - 1 - 2i - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i \Rightarrow P(-1+i) = 0$$

$$Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -1 + i + Z_2 = -1 - 2i \Rightarrow Z_2 = -3i$$

2) $Z' - Z_B = e^{\frac{\pi}{2}}(Z_A - Z_B)$

$$Z' + 3i = i(-1+4i) \Rightarrow Z' = -4 - 4i$$

3) $r = \sqrt{2}$ ومنه $Z_A = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow Z_A = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

ثالثاً- حل المسألتين التاليتين

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

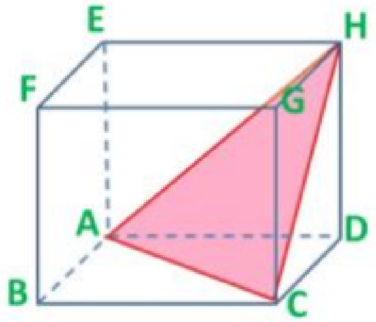
1) اكتب في هذا المعلم احداثيات كل من النقط A, C, D, F, H

2) اكتب معادلة المستوي (ACH)

3) أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P : -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)

4) بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D, F, I تقع على استقامة واحدة

5) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ ، وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S



١) $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $F(1,0,1)$, $H(0,1,1)$

٢) $\overrightarrow{AC} = (1,1,0), \overrightarrow{AH} = (0,1,1)$ ، $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}$ مستقلان خطياً

نفرض $\vec{n} = (a,b,c)$ هو الشعاع الناظم للمستوي (ACH) فيكون $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$

$(a,b,c).(0,1,1) = 0 \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow c = -b$

$(a,b,c).(1,1,0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

منه $\vec{n} = (-b,b,-b) \Rightarrow \vec{n} = (1,-1,+1)$

$(ACH): x - y + z + d = 0$ ، نعوض احداثيات A فنجد أن $d = 0$ فنجد : $(ACH): x - y + z = 0$

٣) من معادلة P نجد أن $\vec{n}_P = (-2,2,-2)$

$\frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1}$ فالمركبات متناسبة فالشعاعان $\vec{n}_P$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً فالمستويان متوازيان.

٤) $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C + x_H}{3} = \frac{1}{3} \\ y_I = \frac{y_A + y_C + y_H}{3} = \frac{2}{3} \\ z_I = \frac{z_A + z_C + z_H}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$ ، $I(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ، $\overrightarrow{FD} = (-1,1,-1), \overrightarrow{FI} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

$\overrightarrow{FI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$ ومنه $\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FI}$ مرتبطان خطياً

٥) $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

$dist(\Omega, ACH) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$ ، وبالتالي المستوي ACH يمس الكرة S

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

1) جد نهاية التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه ثم اكتب معادلة كل مقارب وجدته.

2) ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها

3) جد معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة $(0,2)$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و T

4) في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C

5) ليكن C' الخط البياني للتابع $g(x)$ المعرف على R وفق : $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C'

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

$y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لـ C بجوار $+\infty$ ، $y = 4$ (مقارب أفقي) مقارب لـ C بجوار $-\infty$

$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ فالتابع متناقص تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	4 ↘	0

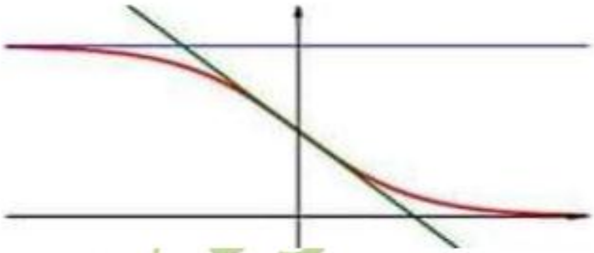
٣) $T : y - 2 = f'(0)(x - 0) \Rightarrow T : y = -x + 2$

الوضع النسبي : $h(x) = f(x) - y_T \Rightarrow h(x) = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$

$h'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$h'(x) = 0$ عندما $x = 0$ ومنه $h(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$h(x)$	$- -$	0	$+ +$
الوضع النسبي	C يقع تحت T		C يقع فوق T



$g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x} = \frac{4e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{4}{1+e^{-x}}$

$g(x) = f(-x)$ ، C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب

انتهى حل الدورة الأولى ٢٠١٩

مع تحيات المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

الدورة الثانية – ٢٠١٩

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

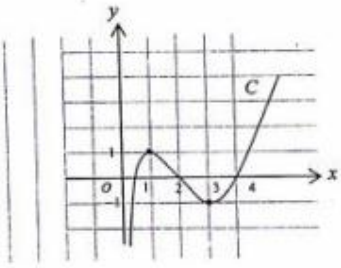
امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠١٩

الرياضيات: (الفرع العلمي)

الدورة الثانية

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:



في الشكل المرسوم جانباً ،ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب:

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) دل على القيم الحدّية مبيّناً نوعها.

3) جد حلول المتراجحة: $f'(x)\le 0$.

4) جد $f([1,3])$.

السؤال الثاني: عيّن قيم العدد n التي تحقق العلاقة : $\binom{15}{2n}=\binom{15}{n+3}$.

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & :x\neq 0\\ m & :x=0\end{cases}$$ والمطلوب:

1- جد نهاية التابع f عند الصفر .

2- عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان: $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$ والمستوي: $P: 3x-y-3z-8=0$

1- أثبت أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي P .

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثمّ عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P .

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكلّ تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$ **والمطلوب:**

1- عيّن العددين الحقيقيين a , b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته: $y=3x$

2- من أجل $a=4$, $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثمّ ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

التمرين الثاني:

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية: $a=6-i$, $b=-6+3i$, $c=-18+7i$ بالترتيب. **المطلوب:**

1) احسب العدد $\dfrac{b-a}{c-a}$ ، واستنتج أنّ النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

2) بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ أحسب θ .

3) جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً.

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠١٩

الرياضيات:

(الفرع العلمي)

الدورة الثانية

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

1) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

2) أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9\ ,\ 2.1[$.

التمرين الرابع:

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء، نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة.

عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X ، واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X ، واحسب توقعه الرياضي.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P : 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q : x + y + z - 1 = 0$$
$$R : x - z - 1 = 0$$

والمطلوب:

1) أثبت أنّ المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

2) تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A .

3) أثبت أنّ المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.

4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \dfrac{2x}{e^x}$ والمطلوب :

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3) في معلم متجانس ارسم الخط C.

4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x) = 2xe^x$.

6) أثبت أنّ $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$.

– انتهت الأسئلة –

ملاحظة : يمنع استعمال الآلات الحاسبة والجداول اللوغاريتمية

حلول الدورة الثانية ـــ ٢٠١٩

السؤال الأول:

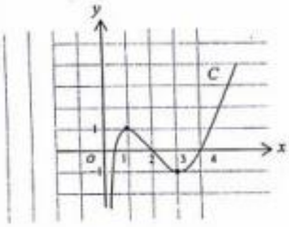
في الشكل المرسوم جانباً ،ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب:

1) جد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) دل على القيم الحدّية مبيّناً نوعها.

3) جد حلول المتراجحة: $f'(x)\le 0$.

4) جد $f([1,3])$.



1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2) $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى ، $f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى

3) $f'(x) \le 0$ أي أن التابع متناقص تماماً وبالتالي حلول المتراجحة $x \in [1,3]$

4) $f([1,3]) = [-1,1]$

السؤال الثاني: عيّن قيم العدد n التي تحقق العلاقة : $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$.

الشرط : $\begin{cases} 2n \le 15 \\ n+3 \le 15 \end{cases} : n \le 7$

$\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$

إما $2n = n + 3$ يعطي $n = 3$ مقبول

أو $2n + n + 3 = 15$ يعطي $n = 4$ مقبول

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x \ne 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- جد نهاية التابع f عند الصفر .

2- عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

<u>الطلب الأول :</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{0}{0}$ <u>حالة عدم تعيين</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.(\sqrt{x^2+1}+1)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \times 2 = 2$$

يكون $f(x)$ مستمر عند الصفر إذا كان $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ومنه $m = 2$

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان: $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$ والمستوي: $P:3x-y-3z-8=0$

1- أثبت أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي P .

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثمّ عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P .

$$\overrightarrow{AB}=(-3\,,1\,,3\,)\,,\vec{n}=(3\,,-1\,,-3\,)$$

المركبات متناسبة فالشعاعين مرتبطين خطياً ومنه المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

$$(AB):\begin{cases}x=-3t+2\\ y=t+1\\ z=3t-2\end{cases}\quad ;t\in R$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) مع معادلة المستوي P فنجد : $-9t+6-t-1-9t+6-8=0$

$$-19t=-3\ \Rightarrow t=\frac{3}{19}$$

$$A':\begin{cases}x=-3\times\frac{3}{19}+2\\ y=\frac{3}{19}+1\\ z=3\times\frac{3}{19}-2\end{cases}\quad\Rightarrow A'(\frac{29}{19}\,,\frac{22}{19}\,,\frac{-29}{19})$$

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$ **والمطلوب:**

1- عيّن العددين الحقيقيين a , b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته: $y=3x$

2- من أجل $a=4$, $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثمّ ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

$$f(x)=ax+b-\frac{lnx}{x}\quad ,\quad f(1)=0\ \Rightarrow a+b=0$$

$$f'(x)=a-\frac{1-lnx}{x^2}\quad ,\quad f'(1)=3\ \Rightarrow a-1=3\Rightarrow a=4\ ,\ b=-4$$

٢) $g(x)=f(x)-y_{\Delta}=4x-4-\frac{lnx}{x}-4x+4=-\frac{lnx}{x}$

$$g(x)=-\frac{lnx}{x}\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

باعتبار $g(x)$ معرف على المجال $]\,0\,,+\infty\,[$ فالمقام موجب تماماً أياً كانت $x>0$ وبالتالي اشارة $g(x)$ من اشارة البسط نعلم $lnx\le0$ عندما $x\in]\,0\,,1\,]$ ونعلم $lnx\ge0$ عندما $x\in[\,1\,,+\infty\,[$

ومنه $g(x)>0$ عندما $x\in]\,0\,,1\,[$ ومنه C فوق المقارب على المجال $]\,0\,,1\,[$
و $g(x)<0$ عندما $x\in]\,1\,,+\infty\,[$ ومنه C تحت المقارب على المجال $]\,1\,,+\infty\,[$

التمرين الثاني:

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية:
$a = 6 - i$, $b = -6 + 3i$, $c = -18 + 7i$ بالترتيب. **المطلوب:**

1) احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$، واستنتج أنّ النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.
2) بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ أحسب θ.
3) جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً.

١) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{-12+4i}{-24+8i} = \frac{-12+4i}{2(-12+4i)} = \frac{1}{2}$ منه : $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0$ ، ومنه النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

٢) $d - o = e^{i\theta}(a - o) \Rightarrow d = e^{i\theta}.a \Rightarrow e^{i\theta} = \frac{d}{a} \Rightarrow \theta = arg(\frac{d}{a})$

$\frac{d}{a} = \frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{6+i+36i-6}{36+1} = i$ ، منه $\theta = arg\left(\frac{d}{a}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$

٣) $Z_{\overrightarrow{OA}} = Z_{\overrightarrow{DN}} \Rightarrow a = n - d$ منه : $n = a + d = 6 - i + 1 + 6i = 7 + 5i$

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:
1) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.
2) أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.
3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أيّاً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9 , 2.1[$.

$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ المتتالية معرفة وفق الدليل n

$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ حيث f معرف واشتقاقي على $[0, +\infty[$

فالتابع متزايد تماماً وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{-3}{n+1} < 0$

ومنه $u_n < 2$ فالعدد 2 راجح على المتتالية u_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

$1.9 < u_n < 2.1 \Rightarrow -0.1 < u_n - 2 < 0.1$

$|u_n - 2| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$

$n + 1 > 30 \Rightarrow n > 29$

التمرين الرابع:

صندوق يحتوي على خمس كرات منها .كرتان حمراوان. وثلاث كرات زرقاء، نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته .
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة.
عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X ، واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X ، واحسب توقعه الرياضي.

$X = \{2,3,4\}$

السحب مرتان عندما يكون (حمراء ، حمراء)

السحب ثلاث مرات عندما يكون (زرقاء ، زرقاء ، زرقاء) ، (حمراء ، زرقاء ، حمراء) (زرقاء ، حمراء ، حمراء)

السحب أربع مرات عندما يكون :

(ح ، ز ، ز ، ح) ، (ح ، ز ، ز ، ز) ، (ز ، ح ، ز ، ح) (ز ، ح ، ز ، ز) ، (ز ، ز ، ح ، ز) ، (ز ، ز ، ح ، ح)

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=4) = 1 - [\ P(X=2) + P(X=3)\ ] = \frac{6}{10}$$

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = \frac{2+9+24}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$$

المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$P:\ 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q:\ x + y + z - 1 = 0$

$R:\ x - z - 1 = 0$

والمطلوب:

1) أثبت أنّ المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

2) تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A .

3) أثبت أنّ المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.

4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

$\overrightarrow{n_Q} = (1,1,1)\ ,\ \overrightarrow{n_p} = (2,-1,2)$ الشعاعين غير مرتبطان خطياً فالمستويان P, Q يتقاطعان بفصل مشترك Δ

من معادلة Q نجد أن : $y = -x - z + 1$ ، و من معادلة P نجد أن : $y = 2x + 2z - 2$

ومنه : $2x + 2z - 2 = -x - z + 1$ يعطي $3x = -3z + 3$ ومنه : $x = -z + 1$

وبفرض $z = t$ نعوض في المعادلة الأولى فنجد $y = 0$ يصبح التمثيل الوسيطي

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$$

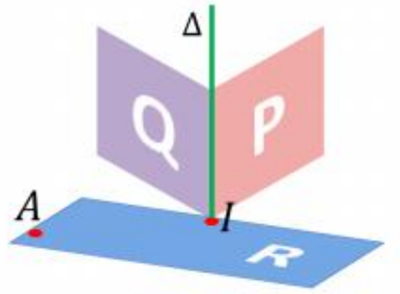
٢) الشعاع الموجه لـ Δ هو $\vec{u} = (-1,0,1)$ ولدينا $\overrightarrow{n_R} = (1,0,-1)$

ومنه $\overrightarrow{n_R}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً فالمستقيم Δ يعامد المستوي R

نعوض احداثيات النقطة A في معادلة R فنجد $1 - 0 - 1 = 0$ محققة ومنه $A \in R$

٤) نعوض التمثيل الوسيطي لـ Δ في معادلة R

فنجد $1 - t - t - 1 = 0$ ، منه $t = 0$ وبالتالي : $I(1,0,0)$



<u>طريقة أولى :</u> بفرض $M \in \Delta$ حيث $M(1-t, 0, t)$

نوجد أصغر بعد M عن A ، $l^2 = AM^2 = (1-t-1)^2 + (-2)^2 + t^2$

$l^2 = 2t^2 + 4$ وأصغر بعد عندما $t = 0$ ومنه $l^2 = 4$ وبالتالي $l = 2$

<u>طريقة ثانية :</u>

I نقطة مشتركة بين المستوي R والمستقيم Δ و لدينا Δ يعامد R و $A \in R$

وبالتالي النقطة I هي المسقط القائم للنقطة A على Δ فيكون بعد A عن المستقيم Δ هو ذاته بعد A عن I

نطبق دستور بعد نقطة عن نقطة (بعد A عن I)

$$l = \sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = 2$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ والمطلوب :

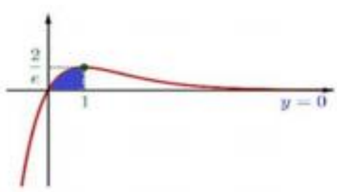
1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.
2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3) في معلم متجانس ارسم الخط C.
4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.
5) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x) = 2xe^x$.
6) أثبت أنّ $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ ، $f(x) = 2xe^{-x}$ منه : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x}{e^x}$ ، اشارة المشتق من اشارة البسط

$f'(x) = 0$ عندما $x = 1$ ، $f(1) = \frac{2}{e}$ قيمة كبرى محلياً

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0



حساب المساحة : $f(x) \geq 0$ على المجال $[0, 1]$ ، منه : $S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xe^{-x}dx$

$u = 2x$	$v' = e^{-x}$
$u' = 2$	$v = -e^{-x}$

$$S = [-2xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 2(-e^{-x})dx \Rightarrow S = [-2xe^{-x}]_0^1 - [2e^{-x}]_0^1 = \frac{2e-4}{e}$$

٥) $f(x) = 2xe^{-x} \Rightarrow f(-x) = -2xe^{x} \Rightarrow -f(-x) = 2xe^{x}$

منه : $g(x) = -f(-x)$ ، بالتالي : C' نظير C بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

٦) $y' = f'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$, $y = f(x) = \frac{2x}{e^x}$ ، منه : $y + y' = \frac{2x}{e^x} + \frac{2-2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$

ومنه $f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $y + y' = 2e^{-x}$

انتهى حل الدورة الثانية ٢٠١٩

مع تحيات المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

الدورة الأولى – ٢٠٢٠

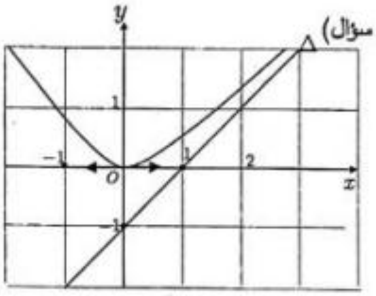
الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2020

الرياضيات: (الفرع العلمي)

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول:

نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$، والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة المستقيم Δ.

3- جد $f(0)$, $f'(0)$.

4- جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

السؤال الثاني: نتأمل المستويين $p_1: 2x - y + z + 1 = 0$, $p_2: x + y - z = 0$ والمطلوب:

1- تيقن أن المستويين متعامدان.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

السؤال الثالث: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم: 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0

1- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

2- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى.

السؤال الرابع: أثبت أن: $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > -1$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - E(x)$. **المطلوب:**

1- اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$.

2- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجة لكلّ تمرين)

التمرين الأول :

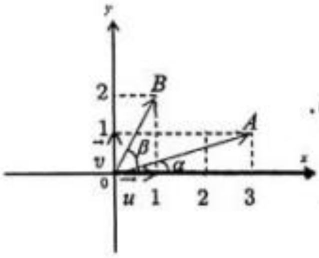
نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n}$ عند كل $n \ge 0$. والمطلوب:

1- أثبت أن التابع $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2,+\infty[$.

2- أثبت بالتدريج أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

3- استنتج أن المتتالية متقاربة، واحسب نهايتها.

التمرين الثاني:



نتأمل في المستوي العقدي المزوّد بالمعلم المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{oA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{oB})$.

المطلوب:

1) اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B .

2) اكتب العدد العقدي $\dfrac{Z_B}{Z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي، ثم استنتج قيمة $\beta - \alpha$.

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2020

الرياضيات: (الفرع العلمي)

التمرين الثالث:

f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ في حالة $x\neq 0$. المطلوب:

1- أثبت أنّ f اشتقاقي عند $x=0$.

2- احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

3- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط: $A(1,0,0)$ ، $B(4,3,-3)$ ، $C(-1,1,2)$ ، $D(0,0,1)$. **المطلوب:**

1) أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

2) أثبت أنّ الأشعة : $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

3) استنتج أنّ النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: (C,γ) ، (B,β) ، (A,α) حيث أنّ α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعينها.

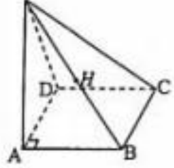
ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E ، قاعدته مربع طول ضلعه 3 ،

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA=3$.

نختار المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:



1) عين إحداثيات A , B , C , D , E

2) جد معادلة المستوي (EBC).

3) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4) استنتج أنّ H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5) احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]-2,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب :

1) أثبت أن f تابع فردي.

2) ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.

3) اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

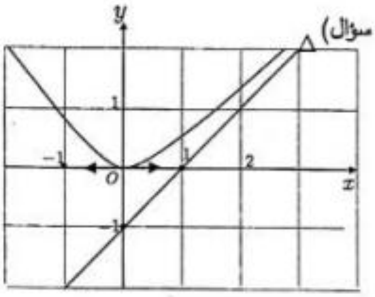
5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$.

– انتهت الأسئلة –

ملاحظة : يمنع استعمال الآلات الحاسبة والجداول اللوغاريتمية

حلـول الدورة الأولى – ٢٠٢٠

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول:

نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ ، والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة المستقيم Δ .

3- جد $f(0)$, $f'(0)$.

4- جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

١) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

٢) معادلة المستقيم : $y = mx + p$ ، Δ يمر بالنقطتين $A(1,0)$, $B(0,-1)$

نعوض احداثيات B بالمعادلة فنجد $p = -1$ ، نعوض احداثيات A بالمعادلة

فنجد : $0 = m - 1 \Rightarrow m = 1$ ، ومنه : $\Delta: y = x - 1$

٣) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

٤) $S =]-\infty, 0[$

السؤال الثاني: نتأمل المستويين $p_1: 2x - y + z + 1 = 0$, $p_2: x + y - z = 0$ والمطلوب:

1- تيقن أن المستويين متعامدان.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

١) $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = (2,-1,1)(1,1,-1) = 2 - 1 - 1 = 0$ ، منه P_1, P_2 متعامدان

٢) بجمع المعادلتين نجد : $3x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$ ، نعوض في (2) نجد : $z = y - \frac{1}{3}$ ، نفرض $y = t$ ومنه :

$$d: \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = t \\ z = t - \frac{1}{3} \end{cases} ; \ t \in R$$

السؤال الثالث: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم: 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0

1- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

2- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى.

١) $6 \times 6 \times 6 = 216$

٢) $6 \times 5 \times 4 = 120$

السؤال الرابع: أثبت أن: $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أيّاً كان $x > -1$

نفرض التابع $f(x) = ln(x+1) - \sqrt{x+1}$ ، ندرس اطراد التابع على المجال $]-1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$ ، $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = ln4 - 2 < 0$ قيمة كبرى محلياً

x	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\ln 4 - 2$	$\searrow$	

من جدول الاطراد نجد : $f(x) \le ln4 - 2 < 0$ ، منه : $ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

بالتالي : $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ محققة أيا كانت $-1 < x$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - E(x)$. **المطلوب:**

1- اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$.

2- جد $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

$x \in [0,1[\Rightarrow E(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$x \in [1,2[\Rightarrow E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; x \in [0,1[\\ x - 1 \ ; x \in [1,2[\end{cases}$$

$x - 1 < E(x) \le x \Rightarrow 1 - x > -E(x) \ge -x$

$1 > x - E(x) \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{x-E(x)}{x^2} \ge \frac{0}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{f(x)}{x^2} \ge 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2}) = 0$ ، حسب مبرهنة الاحاطة

التمرين الأول :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \ge 0$. والمطلوب:

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$.

2- أثبت بالتدريج أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n

3- استنتج أن المتتالية متقاربة، واحسب نهايتها.

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$ ، $f'(x) = 0$ عندما $x = 2$ مقبول ، $x = -2$ مرفوض

$f'(x) < 0$ على $[0,2[$ ، $f'(x) \ge 0$ على المجال $]2, +\infty[$ منه : $f(x)$ متزايد على المجال $]2, +\infty[$

٢) القضية $E(n)$ حيث : $E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$

من أجل $n = 0$ نجد : $u_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \cong 2.15$

منه : $3 = u_0 \leq 2.15 = u_1 \leq 2$ ، فالقضية $E(0)$ صحيحة

نفترض صحة القضية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

$E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

بالاستفادة من تزايد $f(x)$ على المجال $[2,+\infty[$ ، نجد : $f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

ومنه : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ، فالقضية صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي هي صحيحة من أجل n

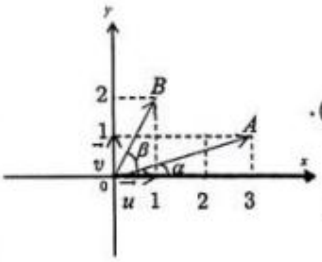
باعتبار $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كانت n ، فالمتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة من العدد 2

المتتالية u_n معرفة بالتدريج ولحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 4$ ، إما $x = -2$ مرفوض لأن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

أو $x = 2$ مقبول بالتالي $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 2$

التمرين الثاني:



نتأمل في المستوي العقدي المزوّد بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$:

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oB})$.

المطلوب:

1) اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B.

2) اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي، ثمّ استنتج قيمة $\beta - \alpha$.

$Z_A = 3 + i \ , Z_B = 1 + 2i$

$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

$|Z_A| = \sqrt{10} \ , |Z_B| = \sqrt{5}$ ، $arg(Z_A) = \alpha, \ arg(Z_B) = \beta$

$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{\sqrt{5}\,e^{i\beta}}{\sqrt{10}\,e^{i\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}$ ، منه : $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}$

منه : $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i(\beta-\alpha)} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\beta-\alpha)}$

يعطي : $\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث:

f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ في حالة $x \neq 0$. المطلوب:

1- أثبت أنّ f اشتقاقي عند $x=0$.

2- احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

3- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

١) $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin(\frac{1}{x})$

$$\left|\sin(\tfrac{1}{x})\right| \leq |1| \Rightarrow \left|x\sin(\tfrac{1}{x})\right| \leq |x|$$

$|g(x)| \leq |x|$ وباعتبار $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ ، يعطي : $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ ومنه : $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر

٢) $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left[\frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ ، منه : $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

٣) $f(x) = x.x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = x.\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

نضع $\frac{1}{x} = t$ وعندما $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$

$f(x) = \frac{1}{t}.\frac{\sin(t)}{t}$ ، منه $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t}.\frac{\sin(t)}{t}\right) = \frac{1}{0^+}\times 1 = +\infty$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط: $A(1,0,0)$ ، $B(4,3,-3)$ ، $C(-1,1,2)$ ، $D(0,0,1)$. **المطلوب:**

1) أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

2) أثبت أنّ الأشعة : $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

3) استنتج أنّ النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: (A,α) ، (B,β) ، (C,γ) حيث أنّ α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعينها.

$\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)$ ، $\overrightarrow{AB} = (3,3,-3)$ ، $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{3}$ ومنه $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً

$\overrightarrow{AD} = (-1,0,1)$ ، منه : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\ \overrightarrow{AC}$

$$(-1,0,1) = \alpha(3,3,-3) + \beta(-2,1,2)$$

$$\begin{cases} -1 = 3\alpha - 2\beta & ..(1) \\ 0 = 3\alpha + \beta & ..(2) \\ 1 = -3\alpha + & ..(3) \end{cases}$$

من (2) : $-3\alpha = \beta$ نعوض في (1) فنجد : $-1 = 3\alpha + 6\alpha$

يعطي : $\beta = \frac{1}{3}$ ، $\alpha = \frac{-1}{9}$ نعوض في (3) فنجد : $1 = -3\times\frac{-1}{9} - 2\times\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ محققة

منه : $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً ، D مركز أبعاد متناسبة للنقط $(A, 1-\alpha-\beta), (B,\alpha), (C,\beta)$

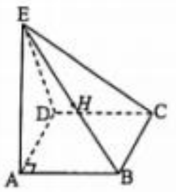
بالتالي : $\left(A,\frac{7}{9}\right), \left(B,\frac{-1}{9}\right), \left(C,\frac{1}{3}\right)$

المسألة الأولى:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E ، قاعدته مربع طول ضلعه 3 ،

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$.

نختار المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:



1) عين إحداثيات A , B , C , D , E

2) جد معادلة المستوي (EBC).

3) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4) استنتج أنّ H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5) احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$.

١) $A(0,0,0), B(3,0,0), C(3,3,0), D(0,3,0), E(0,0,3)$

٢) $\overrightarrow{BE} = (-3,0,3)$, $\overrightarrow{CE} = (-3,-3,3)$ ، $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$ مستقلان خطياً

نفرض $\vec{n} = (a,b,c)$ هو الشعاع الناظم للمستوي (BEC) ، منه : $\overrightarrow{BE}.\vec{n} = 0$, $\vec{n}.\overrightarrow{CE} = 0$

$(a,b,c).(-3,0,3) = 0 \Rightarrow -3a + 3c = 0$ ، منه $a = c \ ..(1)$

$(a,b,c).(-3,-3,3) = 0$ منه : $-3a - 3b + 3c = 0 \ ..(2)$

ومن (1) نعوض في (2) $-3a - 3b + 3a = 0$ ، منه : $b = 0$ وبالتالي : $\vec{n} = (a,0,a)$

من أجل $a = 1$ يعطي $\vec{n} = (1,0,1)$ ، $(BEC): x + z + d = 0$

نعوض احداثيات B فنجد : $d = -3$ ، $(BEC): x + z - 3 = 0$

٣) الشعاع الموجه للمستقيم (d) هو $\vec{n} = (1,0,1)$

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; t \in R$$

٤) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة (BEC)

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية فنجد $M\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ ، وهي المسقط القائم لـ A على المستوي (BEC)

نوجد احداثيات H حسب قانون منتصف قطعة مستقيمة ، $x_H = \frac{x_B + x_E}{2}$, $y_H = \frac{y_B + y_E}{2}$, $z_H = \frac{z_B + z_E}{2}$

منه : $H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ وهي ذاتها $M\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

٥) نعتبر قاعدة الهرم المثلث القائم (ABC) و ارتفاع الهرم $h = [AE]$

حجم الهرم : $V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times h$ ، منه : $V = \frac{1}{3} \times \frac{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]-2,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب :

1) أثبت أن f تابع فردي.

2) ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.

3) اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$، واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$.

١) أياً كانت $x\in]-2,2[$ كانت $-x\in]-2,2[$ الشرط الأول محقق

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=\ln(-x+2)-\ln(2+x)$$

$f(x)=\ln(x+2)-\ln(2-x)$ ، منه $-f(x)=-\ln(x+2)+\ln(2-x)$

منه نجد : $f(-x)=-f(x)$ ، فالتابع $f(x)$ تابع فردي

٢) $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$ ، $x=2$ مقارب شاقولي

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}=\frac{2-x+x+2}{4-x^2}=\frac{4}{4-x^2}>0$$

x	0	2
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

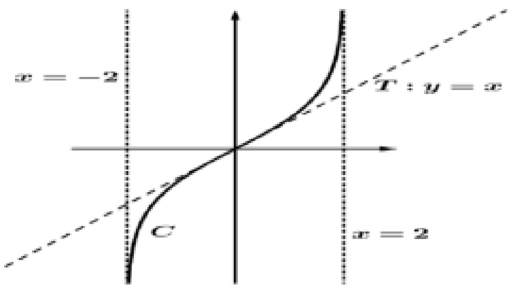
٣) المماس : $T: y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ، $f(0)=0,f'(0)=1$ منه : $T: y=x$

القيمة التقريبية : $f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a)$ ، باعتبار $a=0$, $h=0.1$

منه : $f(0.1)\approx f(0)+(0.1).f'(0)=0.1$

٤) باعتبار $f(x)$ تابع فردي فإن $O(0,0)$ مركز تناظر لـ C ، نرسم C على المجال $[0,2[$

ثم نرسم نظيره بالنسبة لـ $O(0,0)$ على $]-2,0[$



٥) $f(x)=\ln(x+2)-\ln(2-x)$ ، $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$

منه : $g(x)=-f(x)$ بالتالي C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

الدورة الثانية ــ ٢٠٢٠

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2020

الرياضيات: (الفرع العلمي) الدورة الثانية الإضافية

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C . المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- دل على القيم الحدّية للتابع f مبيّناً نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- جد حلول المتراجحة $f'(x)>0$.

السؤال الثاني:

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 5 , 4 , 3 , 2 , 1 ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة.

والمطلوب: 1- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب.

2- كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي.

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. المطلوب:

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$.

2) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P:2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$. المطلوب:

1) أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P .

2) اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P .

السؤال الخامس: نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-\sin x$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 2- أثبت أن التابع f متزايد.

ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجةً لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن العدد العقدي $w=\dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب:

1- بيّن أنّ $|w|=1$ ، ثمّ اكتب العدد w بالشكل الأسي.

2- ليكن z عدد عقدي ما أثبت أنّ $Z=\dfrac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. المطلوب:

1- عين التابع المشتقّ f' للتابع f .

2- نرمز بالرمز g إلى التابع المعرّف على $J=]1,+\infty[$ وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$ ، أثبت أن g اشتقاقي على J، ثمّ احسب $g'(x)$ على J.

ــ يتبع في الصفحة الثانية

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2020

الرياضيات: (الفرع العلمي) الدورة الثانية الإضافية

الصفحة الثانية

التمرين الثالث:

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d':\begin{cases} x = 2s-1 \\ y = s-2 \\ z = 3s-2 \end{cases} \;, s\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad d:\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases} \;, t\in\mathbb{R}$$

المطلوب: 1) أثبت أنّ d و d' متقاطعان، ثم عيّن إحداثيات I نقطة التقاطع.

2) جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d و d' .

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \ldots\ldots + \frac{n}{e^n}$. المطلوب:

1) أثبت أنّ $n \leq 2^n$ أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

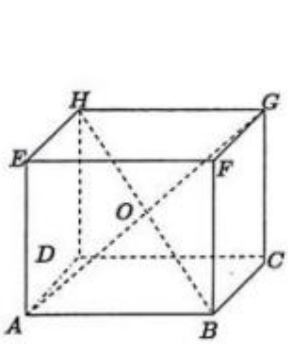
2) استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 ،

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.



نختار المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. والمطلوب:

1) جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O .

2) أعط معادلة للمستوي (GOB).

3) احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5) أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB) .

6) جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ والمطلوب :

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

3) اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

4) في معلم متجانس ارسمّ الخط C .

5) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع: $g(x)=\frac{1-x+\ln x}{x}$.

– انتهت الأسئلة –

ملاحظة : يمنع استعمال الآلات الحاسبة والجداول اللوغاريتمية

حلول الدورة الثانية ـ ٢٠٢٠

السؤال الأول:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C . المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- دل على القيم الحدّية للتابع f مبيّناً نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- جد حلول المتراجحة $f'(x)>0$.

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

٢) $f(4)=6$ قيمة كبرى محلياً ، $f(0)=2$ قيمة صغرى محلياً

٣) حل وحيد

٤) حلول : $f'(x)>0$ هي : $S =]0\,,4[$

السؤال الثاني:

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 5 , 4 , 3 , 2 , 1 ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة.

والمطلوب: 1-كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب.

2-كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي.

١) $5\times 5 = 25$ س

٢) المجموع فردي إذا كانت كرة مرقمة بعدد زوجي وكرة مرقمة بعدد فردي (عدد التباديل 2) منه : $3\times 2\times 2 = 12$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. المطلوب:

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$.

2) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

١) $g(x) = f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$ نجد : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty$ (عدم تعيين)

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ وبالتالي Δ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

٢) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2} > 0$ ومنه : $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ وبالتالي C يقع Δ

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$. المطلوب:

1) أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P .

2) اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P .

١) نعوض احداثيات A في معادلة P فنجد : $2+1+6+2 \neq 0$ ومنه : A لا تنتمي إلى المستوي

٢) لدينا $\vec{n}_Q = \vec{n}_P = (2\,,1\,,-3)$ بالتالي معادلة $Q: 2x+y-3z+d=0$

بتعويض احداثيات A في معادلة Q نجد : $2+1+6+d=0$ ومنه : $Q: 2x+y-3z-9=0$

السؤال الخامس: نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-\sin x$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. 2- أثبت أن التابع f متزايد.

١) $-1 \le -sinx \le +1$ يعطي : $x-1 \le x-sinx \le x+1$

باعتبار $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

٢) لدينا $f'(x) = 1-\cos x \ge 0$ أياً كانت $x \in R$ فالتابع متزايد على المجال $[0,+\infty[$

<u>ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية:</u> (80 درجةً لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب:

1- بيّن أنّ $|w|=1$ ، ثمّ اكتب العدد w بالشكل الأسي.

2- ليكن z عدد عقدي ما أثبت أنّ $Z=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي.

١) $|w| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right|.\left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right| \Rightarrow |w| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|}\left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times 1 = 1$

نفرض $z_1 = -\sqrt{2}$ ومنه $z_1 = \sqrt{2}e^{\pi i}$ ونفرض $z_2 = 1+i$ منه : $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

بالتالي : $w = \frac{z_1}{z_2}e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{3i\pi}{4}}.e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعطي : $w = e^{\frac{13i\pi}{12}}$

٢) $\bar{Z} = \frac{\bar{z}-z\bar{w}}{1-\bar{w}}$ وباعتبار $|w|=1$ فإن $\bar{w}=\frac{1}{w}$ ومنه : $\bar{Z} = \frac{\bar{z}-\frac{z}{w}}{1-\frac{1}{w}} = \frac{\frac{\bar{z}w-z}{w}}{\frac{w-1}{w}} = \frac{-(z-\bar{z}w)}{-(1-w)}$

منه : $\bar{Z} = \frac{z-\bar{z}w}{1-w} = Z$ وبالتالي Z حقيقي بحت

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$. المطلوب:

1- عين التابع المشتقّ f' للتابع f .

2- نرمز بالرمز g إلى التابع المعرّف على $J=]1,+\infty[$ وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$ ، أثبت أن g اشتقاقي على J، ثمّ احسب $g'(x)$ على J.

١) $f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$

٢) بما أن كل من $\sqrt{x}$ و $f(x)$ معرف واشتقاقي على المجال J فإن $g(x) = f(\sqrt{x})$ معرف واشتقاقي على J

نعلم أن : $g'(x) = (\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})$ ومنه : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

التمرين الثالث:

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\y=s-2\\z=3s-2\end{cases}\ ,\ s\in\mathbb{R}\quad و \quad d:\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

المطلوب: 1) أثبت أنّ d و d' متقاطعان، ثم عيّن إحداثيات I نقطة التقاطع.

2) جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d و d' .

١) لدينا $\vec{u}=(1,2,-1)$ هو الشعاع الموجه لـ d و $\overrightarrow{u'}=(2,1,3)$ هو الشعاع الموجه لـ d'

نلاحظ أن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ مستقلان خطياً ومنه d,d' اما متقاطعان أو متخالفان

بالحل المشترك نجد في المعادلة الأولى : $t=2s-3$ ونجد في الثانية : $2t=s-3$ وفي الثالثة : $t=-3s+2$

نعوض الأولى في الثانية فنجد : $4s-6=s-3$ ومنه $s=1$ و $t=-1$

نعوض قيمتي t و s في الثالثة : فنجد : $-1=-3+2$ (المعادلة محققة) فالمستقيمان متقاطعان

نعوض قيمة t في معادلات d فنجد : $I(1,-1,1)$

٢) نفرض $\vec{n}=(a,b,c)$ هو الناظم على المستوي فيكون : $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{u'}=0$

$(1,2,-1)(a,b,c)=0$ منه : $a+2b-c=0$ يعطي $a=-2b+c\ ...(1)$

$(2,1,3)(a,b,c)=0$ منه : $2a+b+3c=0\ ...(2)$

نعوض (1) في (2) فنجد : $-4b+2c+b+3c=0$ ومنه : $b=\frac{5}{3}c$

من أجل $c=3$ نجد $b=5$ و $a=-7$ فتصبح معادلة المستوي : $P:\ -7x+5y+3z+d=0$

نعوض احداثيات I فنجد : $-7-5+3+d=0$ منه : $d=9$ وبالتالي : $P:\ -7x+5y+3z+9=0$

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+.......+\frac{n}{e^n}$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ $n\leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq1$.

2) استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

١) من أجل $n=1$ نجد : $E(1):1\leq2^1$ فالقضية $E(1)$ صحيحة

نفترض صحة القضية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

$n\leq2^n\Rightarrow 2n\leq2.2^n\Rightarrow 2n\leq2^{n+1}$ وباعتبار $n+1\leq2n$ أياً كان $1\leq n$

فإن $n+1\leq2n\leq2^{n+1}$ وبالتالي : $n+1\leq2^{n+1}$ فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

٢) من الطلب الأول نجد : $\frac{2}{e}\geq\frac{1}{e}\ ,\ (\frac{2}{e})^2\geq\frac{2}{e^2}\ ,\ (\frac{2}{e})^3\geq\frac{3}{e^3}\ ,\ ......\ ,\ (\frac{2}{e})^n\geq\frac{n}{e^n}$

منه نجد : $u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}\leq S_n=\frac{2}{e}+(\frac{2}{e})^2+(\frac{2}{e})^3+\cdots+\left(\frac{2}{e}\right)^n$

S_n هي مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{e}$ ، منه : $S_n = \frac{2}{e} \times \frac{1-(\frac{2}{e})^n}{1-\frac{2}{e}} = \frac{2}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$

$$-\left(\frac{2}{e}\right)^n < 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{2}{e}\right)^n < 1 \Rightarrow \frac{2}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right] < \frac{2}{e-2} \Rightarrow S_n < \frac{2}{e-2}$$

منه : $u_n \le S_n < \frac{2}{e-2} \Rightarrow u_n < \frac{2}{e-2}$ ، فالعدد $\frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية u_n

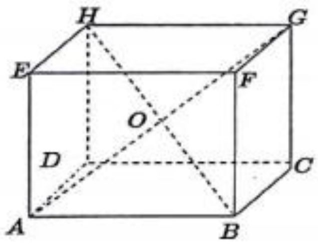
٣) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}+\frac{n+1}{e^{n+1}}$ ومنه : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

فالمتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{2}{e-2}$ فهي متقاربة من العدد $\frac{2}{e-2}$

المسألة الأولى: مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 ،

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. والمطلوب:



1) جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O .

2) أعط معادلة للمستوي (GOB) .

3) احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5) أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6) جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

١) $A(0,0,0), B(2,0,0), G(2,2,2), H(0,2,2)$ وباعتبار O منتصف $[AG]$ فإن $O(1,1,1)$

٢) تعطى معادلة المستوي P بالشكل العام : $P: ax+by+cz+d=0$

نعوض احداثيات B في المعادلة فنجد : $d = -2a \ldots (1)$

نعوض احداثيات O في المعادلة فنجد : $a+b+c+d=0 \ldots (2)$

نعوض احداثيات G في المعادلة فنجد : $2a+2b+2c+d=0 \ldots (3)$

نعوض (1) في (2) فنجد : $a = b+c \ldots (4)$ ، نعوض (1) في (3) فنجد : $b=-c \ldots (5)$

نعوض (5) في (4) فنجد : $a=0$ ومن (1) نجد : $d=0$

من أجل $b=1$ نجد : $c=-1$ وبالتالي تصبح معالة المستوي $P: y-z=0$

٣) $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = (1,1,1).(1,-1,-1) = 1-1-1 = -1$ ، نعلم $\widehat{GOB} = (\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{OB}\|.COS(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OB})$ يعطي : $COS(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$

٤) $D(0,2,0), C(2,2,0)$ ومنه : $\overrightarrow{DC} = (2,0,0)$ وبالتالي : $(DC): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \quad ; t \in R \\ z = 0 \end{cases}$

٥) لدينا $\overrightarrow{DC}.\vec{n}_p = (2,0,0)(0,1,-1) = 0$ ومنه (DC) إما يوازي المستوي أو محتوى فيه

نعوض التمثيلات الوسيطية لـ (DC) في معادلة المستوي فنجد : $2-0 \neq 0$ غير محققة

فالمستقيم غير محتوى في المستوي وبالتالي (DC) يوازي المستوي P

٦) لدينا $\overrightarrow{AD} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (2,2,0)$, $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$ ، نكتب $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$(0,2,0) = a(2,0,0) + b(2,2,0)$ فنجد : $\begin{cases} 2a + 2b = 0 \dots (1) \\ 2b = 2 \dots (2) \\ 0 = 0 \dots (3) \end{cases}$

من (2) نجد : $b = 1$ نعوض في (1) نجد : $a = -1$ والمعادلة الثالثة محققة

فالنقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقط $(A, 1 - a - b), (B, a), (C, b)$ ومنه : $(A, 1), (B, -1), (C, 1)$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب :

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

3) اثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.

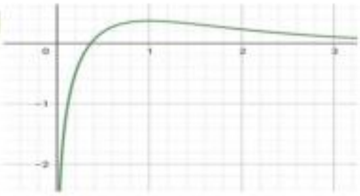
4) في معلم متجانس ارسمّ الخط C .

5) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع: $g(x) = \frac{1 - x + \ln x}{x}$.

١) حسب المبرهنة $\lim_{x \to +\infty} (\frac{lnx}{x}) = 0$ يعطي $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، $y = 0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$f(x) = \frac{1}{x}(1 + lnx)$ منه : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty(1 - \infty) = -\infty$ ، $x = 0$ مقارب شاقولي

٢) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1 - lnx}{x^2} = \frac{-lnx}{x^2}$ ، $f'(x) = 0$ عندما $x = 1$ ، يعطي $f(1) = 1$ قيمة كبرى محلياً



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

٣) $f(x)$ متزايد تماماً على $]0,1[$ فهو متزايد تماماً على $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

لدينا $ln3 \approx 1.1$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{ln(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}} = 3 - 3ln3 < 0$

$ln2 \approx 0.7$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{ln(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 2 - 2ln2 > 0$ ومنه $f\left(\frac{1}{3}\right) . f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بالتالي $f(x) = 0$ لها حل وحيد على المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

٥) $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} - 1 = f(x) - 1$ ومنه : C_g ناتج عن C_f وفق انسحاب الشعاع $\vec{u} = (0, -1)$

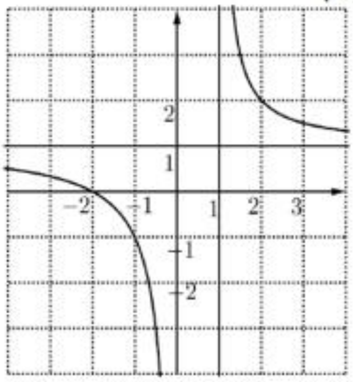
انـتـهى حل الـدورة الثانية ٢٠٢٠

مـع تـحيـات الـمدرس سام عـلـي حـمـدان / هاتف : 0994 168 878

الدورة الأولى ٢٠٢١

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: **(40 درجة لكل سؤال)**

السؤال الأول:



نتأمل الخط البياني C المعرف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ **والمطلوب:**

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي ومعادلة كل مقارب شاقولي لـ C.

3) جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$.

4) جد حل المعادلة $f(x)=0$.

السؤال الثاني: جد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور $(x+\frac{1}{x^2})^{12}$.

السؤال الثالث: احسب العدد: $I=\int\limits_0^3 (2-|2-x|)dx$.

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$ **والمطلوب:**

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

السؤال الخامس:

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$ **والمطلوب:**

عين العددين الحقيقيين a و b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f.

السؤال السادس:

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر ، نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي ، نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها ، **والمطلوب:**

1) اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X=0)$.

2) احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني - 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ وفق $v_n=u_n+6$

المطلوب:

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية ، عين أساسها واحسب v_0 ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

2) نعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ وفق: $w_n=\ln(v_n)$ ، أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حسابية واحسب w_0

ثم احسب المجموع $S=w_0+w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$.

التمرين الثاني:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية

$a=8$ و $b=-4+4i$ و $c=-4i$ على الترتيب ، **والمطلوب:**

1) احسب العدد $\dfrac{b-c}{a-c}$ ، واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

3) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً.

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-4+\ln(\dfrac{x}{x+1})$ **المطلوب:**

1) أثبت أن f تابع متزايد تماماً على I ، واستنتج $f(I)$.

2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d.

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ **والمطلوب:**

1) جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

3) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC).

4) احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5) بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ **والمطلوب:**

1) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2) أثبت أن $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

4) ارسم C في معلم متجانس.

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x)=(x-1)^2e^x$.

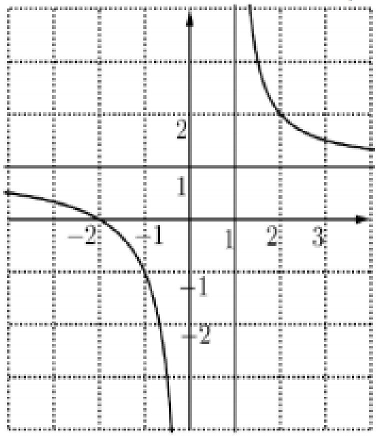
6) استنتج مجموعة تعريف التابع: $h(x)=\ln(f(x))$.

========================

حلول الدورة الأولى ٢٠٢١

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:



نتأمل الخط البياني C المعرف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ والمطلوب:

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي ومعادلة كل مقارب شاقولي لـ C.

3) جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$.

4) جد حل المعادلة $f(x)=0$.

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

٢) $y = 1$ مقارب أفقي ، $x = 0$ مقارب شاقولي ، $x = 1$ مقارب شاقولي

٣) التابع متناقص تماماً على كامل مجموعة تعريفه ومنه حلول : $f'(x) < 0$ هي : $S =]-\infty\,,0[\cup]1,+\infty[$

٤) المعادلة : $f(x) = 0$ لها حل وحيد هو: $x = -2$

السؤال الثاني: جد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور $(x+\frac{1}{x^2})^{12}$.

صيغة الحد ذي الدليل r في المنشور $(a+b)^n$ هي : $T_r = \binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$ ولدينا المنشور : $(x+\frac{1}{x^2})^{12}$

يعطي : $T_r = \binom{12}{r}(x)^{12-r}(\frac{1}{x^2})^r = \binom{12}{r}x^{12-r}x^{-2r} = \binom{12}{r}x^{12-3r}$

الحد الثابت المستقل عن x يحقق $12-3r=0$ ومنه $r=4$ يعطي : $T_r = \binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$

السؤال الثالث: احسب العدد: $I = \int_0^3 (2-|2-x|)dx$.

ندرس الاشارة :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$	
$2-x$	$+$ 0 $-$	
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$-2+x$

نحسب : $I = \int_0^3(2-|2-x|)dx = \int_0^2 2-(2-x)\,dx + \int_2^3 2-(-2+x)dx$

يعطي : $I = \int_0^2 x\,dx + \int_2^3(4-x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 2+12-\frac{9}{2}-8+2 = 8-\frac{9}{2} = \frac{7}{2}$

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$ **والمطلوب:**

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

١) لدينا $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(3,0,4)$ حيث : $\frac{-1}{3}\neq\frac{0}{4}$ ومنه $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً

٢) $\overrightarrow{AD}=(4,2,4)$ ومنه : $(4,2,4)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,0,4)$

يعطي : $\begin{cases} 4=-\alpha+3\beta & ..(1)\\ 2=-2\alpha & ..(2)\\ 4=4\beta & ..(3)\end{cases}$ من (2) و (3) نجد : $\beta=1$, $\alpha=-1$ نعوض القيمتان في (1)

$4=-(-1)+3(1)$ محققة وهذا يعطي : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً وبالتالي النقط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد

السؤال الخامس:

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$ **والمطلوب:**

عين العددين الحقيقيين a و b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f.

لدينا : $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع $f(-1)=0$ ونعلم أن : $\frac{a-b+1}{-2}=0\Rightarrow b=1+a\ ..(1)$ أي

$f'(-1)=0$ ، حيث : $f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$ ومنه : $f'(-1)=\frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{(-2)^2}$

منه : $\frac{4a-2b-a+b-1}{4}=0\Rightarrow b=-1+3a\ ..(2)$ ، نعوض (1) في (2) فنجد : $1+a=-1+3a$

يعطي $a=1$ وبالتالي $b=2$ ومنه : $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$

السؤال السادس:

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر ، نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي ، نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها ، **والمطلوب:**

1) اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X=0)$.

2) احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه.

قيم المتحول العشوائي X : $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ ، تجربة برنولية حيث $n=5,\ p=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3},k=0$

ثانون التجربة البرنولية : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$ ومنه : $P(X=0)=\binom{5}{0}(\frac{2}{3})^0.(\frac{1}{3})^5=\frac{1}{243}$

التوقع الرياضي : $E(X)=np=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ ، التباين : $V(X)=npq=5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$

التمرين الأول: لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق $v_n = u_n + 6$

المطلوب:

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية ، عين أساسها واحسب v_0 ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

2) نعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق: $w_n = \ln(v_n)$ ، أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب w_0

ثم احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$.

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

منه v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0 = u_o + 6 = 8$ وحدها العام : $v_n = v_0 . q^n = 8.(\frac{1}{2})^n$

لدينا : $\omega_n = ln(v_n)$ و $\omega_{n+1} = ln(v_{n+1}) = ln\left(\frac{1}{2}v_n\right)$

يعطي : $\omega_{n+1} - \omega_n = ln\left(\frac{1}{2}v_n\right) - ln(v_n) = ln\left(\frac{\frac{1}{2}v_n}{v_n}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right)$

منه : $\omega_{n+1} - \omega_n = -ln\,2$ ومنه : ω_n حسابية أساسها : أساسها $r = -ln\,2$

لدينا : $\omega_0 = ln(v_0) = ln(8) = 3ln(2)$

ومنه : $\omega_5 = ln(v_5) = ln\left(8.(\frac{1}{2})^5\right) \Rightarrow \omega_5 = ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\,ln\,4 = -2\,ln\,2$

مجموع حدود متتالية حسابية : $S = \frac{n(a+l)}{2}$ ومنه : $S = \frac{6(3ln(2)-2\,ln(2))}{2} = 3ln(2)$

التمرين الثاني:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = 8$ و $b = -4+4i$ و $c = -4i$ على الترتيب ، **والمطلوب:**

1) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ ، واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً.

١) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{4i(i+2)}{4(i+2)} = i \Rightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA}$

$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = 1$ ومنه : $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين رأسه C

٢) بتطبيق الصيغة العامة للدوران نجد : $d - o = e^{\frac{\pi i}{4}}(a - o) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 8 \Rightarrow d = 4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$

٣) باعتبار المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين فإن كان $ACBE$ متوازي أضلاع بديهياً سيصبح $ACBE$ مربع

حسب علاقة متوازي الأضلاع : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ ومنه : $c - a = b - e \Rightarrow e = a + b - c$

يعطي : $e = 8 - 4 + 4i + 4i = 4 + 8i$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-4+\ln(\frac{x}{x+1})$ **المطلوب:**

1) أثبت أن f تابع متزايد تماماً على I ، واستنتج $f(I)$.

2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d.

١) لدينا : $f(x) = x - 4 + ln(x) - ln(x + 1)$

ومنه : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{x+1-x}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$ ومنه : $f(x)$ متزايد تماماً على المجال I

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

ومنه : $f(I) = f(]\lim_{x\to 0} f(x) , \lim_{x\to+\infty} f(x)[) =]-\infty, +\infty[$

٢) نأخذ تابع جديد : $g(x) = f(x) - y_\Delta = ln(\frac{x}{x+1})$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ومنه Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$

نعلم أن $\frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < ln1 = 0$ ومنه : $g(x) < 0$ وبالتالي C يقع تحت Δ

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ **والمطلوب:**

1) جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

3) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC).

4) احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5) بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

١) لدينا $\overrightarrow{AB} = (3,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,2,-4)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 - 2 + 8 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$

٢) لدينا $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 6 - 4 - 2 = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -4 + 8 - 4 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ و $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً باعتبار هما متعامدان فالشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)

معادلة المستوي $(ABC): 2x + 4y + z + d = 0$ نعوض احداثيات B في المعادلة

فنجد : $4 + 4 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -9$ يعطي : $(ABC): 2x + 4y + z - 9 = 0$

٣) الشعاع الموجه لـ d هو $\vec{n}$ ومنه : $d : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in R$

٤) حسب قانون بعد نقطة عن مستوي : $dist(D, ABC) = \frac{|ax_D+by_D+cz_D|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|6+4+1-9|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$

المثلث ABC قائم في A : $S_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{9+1+4}\times\sqrt{4+4+16}}{2} = \frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}$

الهرم $D - ABC$: قاعدته : ABC وارتفاعه : $h = dist(D, ABC)$

منه حجم الهرم $D - ABC$ هو : $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{21} \times \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$

٥) لدينا : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{GC}$ ومنه : $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{GC}$ مرتبطان خطياً

فالمستقيمان (BA) و (GC) متوازيان

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ **والمطلوب:**

1) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2) أثبت أن $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

4) ارسم C في معلم متجانس.

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x) = (x-1)^2 e^x$.

6) استنتج مجموعة تعريف التابع: $h(x) = \ln(f(x))$.

١) لدينا $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$ يعطي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ منه : $y = 0$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$

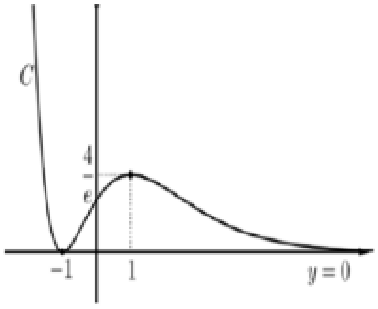
٢) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + (2x + 2)e^{-x}$

يعطي : $f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x - 1 + 2x + 2) = e^{-x}(1 - x^2)$

٣) $f'(x) = 0$ تكافئ $1 - x^2 = 0$ عندما $x = 1$ و $x = -1$ ، اشارة $f'(x)$ من اشارة $(1 - x^2)$

حيث : $f(1) = \frac{4}{e}$ قيمة كبرى محلياً و $f(-1) = 0$ قيمة صغرى محلياً

٤) C يقطع محور التراتيب عندما $x = 0$ ومنه : $f(0) = 1$



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

٥) لدينا : $g(x) = (x-1)^2 e^x = (-x+1)^2 e^x$ ومنه : $g(x) = f(-x)$

وبالتالي C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب

٦) من خلال جدول تغيرات $f(x)$ نلاحظ أن $f(x) > 0$ أياً كانت $x \in R\setminus\{-1\}$

منه : $h(x) = ln(f(x))$ معرف على المجال $R\setminus\{-1\}$

نهاية حلول امتحان الدورة الأولى عام 2021

اعداد وتنسيق المدرس سام علي حمدان

ماجستير تخصصي بالرياضيات

دورات تعليمية للشهادات وطلبة الجامعات / طرطوس - الدريكيش

0994 168 878

الدورة الثانية ٢٠٢١

أولاً : أجب عن خمسة اسئلة فقط مما يلي (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : عيّن قيمة n التي تحقق المعادلة التالية : $P_{n+3}^{3} = 16\binom{n+2}{2}$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P : 2x + y - 2z - 4 = 0$

١) احسب بعد A عن المستوي P

٢) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

السؤال الثالث : احسب التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

السؤال الرابع : تأمل جدول تغيرات التابع $f(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ خطه البياني C

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

١) احسب كل من $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

٢) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٣) دل على القيمة المحلية وبيّن نوعها

٤) جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق : $f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب لـ C في جوار $-\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

السؤال السادس : يحتوي صندوق على كرات حمراء وبيضاء ، عدد الحمراء ثلاثة اضعاف البيضاء

١) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون ؟

٢) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الاعادة ، نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة. اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.

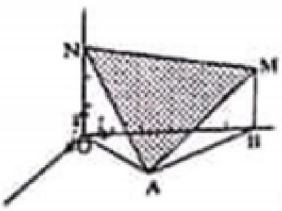
ثانياً : حل التمارين الثلاثة التالية : (70 درجة لكل من الأول والثاني ، 60 درجة للتمرين الثاني)

التمرين الأول : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق: $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$

١) أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

٣) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim_{x\to\infty} u_n$



التمرين الثاني : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$

١) اكتب معادلة المستوي (AMN)

٢) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

٣) أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

التمرين الثالث : ليكن التابع $f(x)$ المعرف على R وفق : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$

أولاً : احسب قيمة كل من $a\,,b$ إذا علمت أن $f(-1) = e$ قيمة حدية للتابع.

ثانياً : لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = \Lambda e^{-x}$ ، عيّن قيمة Λ إذا علمت أن $f(x) = (x+2)e^{-x}$ حلاً لها.

ثالثاً : حل المسألتين التاليتين (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z) = z^3 - 2(a+i\sqrt{3})z^2 - 4(a-i\sqrt{3})z + 8$ حيث $a \in R$

١) احسب العدد a لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$

٢) بفرض $a = 1$ ، جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (Z-2)Q(z)$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

ثانياً : لتكن $A\,,B\,,C$ نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب :

$a = 2\ ,b = 1 + i\sqrt{3}\ ,c = -1 + i\sqrt{3}$ والمطلوب :

a) أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

عيّن a', b', c' التي تمثلها نقاط المستوي A', B', C'

المسألة الثانية :

ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = e^{-x}(1 + lnx)$

والتابع $g(x)$ المعرف على I وفق : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - lnx$ والمطلوب :

١) ادرس تغيرات $g(x)$ ونظم جدولاً بها .

٢) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ، ثم تحقق أن $\alpha = 1$

٣) جد نهايات التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه

٤) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

٥) مستفيداً من تغيرات $g(x)$ ادرس تغيرات $f(x)$ ونظم جدولاً بها

٦) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C_f

========================

انتـهـت الأسـئـلـة

حلول الدورة الثانية ٢٠٢١

السؤال الأول : عيّن قيمة n التي تحقق المعادلة التالية : $P_{n+3}^{3} = 16\binom{n+2}{2}$

شرط الحل : $n+2 \geq 2$ و $n+3 \geq 3$ ومنه : شرط الحل : $n \geq 0$

باستخدام قانوني التراتيب والتوافيق : $(n+3)(n+2)(n+1) = 8(n+2)(n+1)$ ، $(n+2)(n+1) \neq 0$

نقسم طرفي المعادلة على $(n+2)(n+1)$ يعطي : $(n+3) = 8$ ومنه : $n = 5$ مقبول

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P : 2x + y - 2z - 4 = 0$

١) احسب بعد A عن المستوي P

٢) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

حسب قانون بعد نقطة عن مستوي : $dist(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4+1-4-4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{3} = 1$

نصف قطر الكرة $R = dist(A,P) = 1$ ، معادلة الكرة : $(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2$

معادلة الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $R = 1$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$

السؤال الثالث : احسب التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

تكامل بالتجزئة :

$u = x$	$v' = \sin x$
$u' = 1$	$v = -\cos x$

ومنه : $I = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \, dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = 0 + 0 + 1 - 0 = 1$

السؤال الرابع : تأمل جدول تغيرات التابع $f(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ خطه البياني C

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

١) احسب كل من $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

٢) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

٣) دل على القيمة المحلية وبيّن نوعها

٤) جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

١) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، معادلة المقارب الأفقي : $y = 0$

٢) حل وحيد

٣) $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة كبرى محلياً

٤) حلول المتراجحة $f'(x) > 0$: $S =]0, 1[$

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $]-\infty , 0[$ وفق : $f(x) = \frac{2x^2+cos^2x}{x}$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب لـ C في جوار $-\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

نأخذ $g(x)$ حيث : $g(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2+cos^2x}{x} - 2x = \frac{2x^2+cos^2x-2x^2}{x} = \frac{cos^2x}{x}$

نحسب نهاية $g(x)$ حسب الاحاطة : $0 \leq cos^2x \leq 1$ وباعتبار $x < 0$ يعطي : $0 \geq \frac{cos^2x}{x} \geq \frac{1}{x}$

نعلم أن $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}) = 0$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ وبالتالي : Δ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

وباعتبار $0 \leq cos^2x$ و $x < 0$ فإن $g(x) < 0$ ومنه C يقع تحت Δ

السؤال السادس : يحتوي صندوق على كرات حمراء وبيضاء ، عدد الحمراء ثلاثة اضعاف البيضاء

١) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون ؟

٢) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الاعادة ، نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة. اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.

نفرض عدد الكرات البيضاء هو n فيكون عدد الكرات الحمراء هو $3n$ ومجموع الكرات $4n$

احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون : $P = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$ ، قيم المتحول العشوائي X : $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

عندما $X = 0$ (حمراء ، حمراء ، حمراء) : $P(X = 0) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

عندما $X = 1$ (بيضاء ، حمراء ، حمراء) : $P(X = 1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{27}{64}$ (عدد التباديل 3)

عندما $X = 2$ (بيضاء ، بيضاء ، حمراء) : $P(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{9}{64}$ (عدد التباديل 3)

عندما $X = 3$ (بيضاء ، بيضاء ، بيضاء) : $P(X = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

X	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

التمرين الأول : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وفق: $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$

١) أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

٣) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وجد $\lim_{x\to\infty} u_n$

نضع القضية : $E(n) : 2 \leq u_n \leq 3$

من أجل $n = 0$ نجد أن : $u_1 = (u_0 - 2)^2 + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$

ومنه : $3 \geq 2.25 = \frac{9}{4} = 2 \leq u_1$ ومنه : $E(0)$ صحيحة

نفترض صحة القضية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

$$2 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 0 \leq u_n - 2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$

منه : $2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$ ، وبالتالي : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

فالقضية : $E(n+1)$ صحيحة أياً كانت $n+1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً كانت n

۲) $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)^2 + 2 - u_n = u_n{}^2 - 5u_n + 6 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

نعلم أن : $2 \leq u_n \leq 3$ أي أن : $u_n - 2 \geq 0$, $u_n - 3 \leq 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0$ فالمتتالية u_n متناقصة .

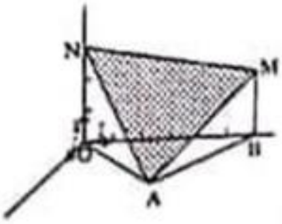
وجدنا أن المتتالية u_n متناقصة وهي محدودة بالأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة من العدد 2

المتتالية u_n معرفة بالتدريج ، لحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث $f(x) = u_{n+1}$

منه : $(x-2)^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$

إما : $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ مرفوض لأن u_n متناقصة و $u_0 = \frac{5}{2} = 2.5$

أو : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ مقبول ، يعطي $\lim_{x\to\infty} u_n = 2$



التمرين الثاني : : في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$

۱) اكتب معادلة المستوي (AMN)

۲) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

۳) أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

لدينا $\overrightarrow{AN} = (-1,-3,3)$, $\overrightarrow{AM} = (-1,3,2)$ ، $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ مستقلان خطياً

نفرض $\vec{n} = (a,b,c)$ هو الشعاع الناظم على المستوي (AMN) يعطي : $\overrightarrow{AN}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

ومنه : $(-1,-3,3)(a,b,c) = 0 \Rightarrow -a - 3b + 3c = 0 \Rightarrow a = -3b + 3c \; \ldots.(1)$

و : $(-1,3,2)(a,b,c) = 0 \Rightarrow -a + 3b + 2c = 0 \Rightarrow a = 3b + 2c \; \ldots.(2)$

نعوض (1) في (2) فنجد : $-3b + 3c = 3b + 2c \Rightarrow c = 6b$ ومن أجل $b = 1$

نجد أن $c = 6$ نعوض قيمة كل من b, c في (2) فنجد أن $a = 3(1) + 2(6) = 15$

يعطي الشعاع الناظم على المستوي (AMN) هو : $\vec{n} = (15,1,6)$

معادلة المستوي $(AMN): 15x + y + 6z + d = 0$ نعوض احداثيات N في المعادلة

نجد أن : $18 + d = 0 \Rightarrow d = -18$ وبالتالي : $(AMN): 15x + y + 6z - 18 = 0$

الشعاع الموجه للمستقيم Δ هو : $\vec{n} = (15,1,6)$ ومنه : $t \in R$: $\Delta: \begin{cases} x = 15t \\ y = t \\ z = 6t \end{cases}$

لكتابة معادلة ε المستوي المحوري لـ $[BM]$ نوجد احداثيات H منتصف $[BM]$

حيث : $z_H = \frac{z_B + z_M}{2}$, $y_H = \frac{y_B + y_M}{2}$, $x_H = \frac{x_B + x_M}{2}$ ومنه : $H(0,6,1)$

الشعاع الناظم لـ ε هو : $\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{BM} = (0,0,2)$ ومنه : $\varepsilon : 2Z + d = 0$

ومن خلال تعويض احداثيات H في المعادلة نجد أن : $d = -2$ ومنه : $\varepsilon : 2Z - 2 = 0 \Rightarrow \varepsilon : z - 1 = 0$

التمرين الثالث : ليكن التابع $f(x)$ المعرف على R وفق : $f(x) = (ax + b)e^{-x}$

أولاً : احسب قيمة كل من a , b إذا علمت أن $f(-1) = e$ قيمة حدية للتابع.

ثانياً : لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = ke^{-x}$ ، عيّن قيمة k إذا علمت أن $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ حلاً لها.

ثالثاً : حل المسألتين التاليتين (100 درجة لكل مسألة)

أولاً : $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = e^{-x}(a - ax - b)$ ، نعلم أن $f'(-1) = 0$

ومنه : $e^{1}(a + a - b) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a \quad \dots(1)$

نعلم أيضاً : $f(-1) = e$ ومنه : $e = (-a + b)e^{1} \Rightarrow -a + b = 1 \Rightarrow b = 1 + a \dots(2)$

نعوض (1) في (2) فنجد أن $2a = 1 + a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$

ثانياً: $f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 2) \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(-1 - x)$

نحسب : $f'(x) + f(x) = e^{-x}(-1 - x) + (x + 2)e^{-x} = e^{-x}(-1 - x + x + 2)$

ومنه : $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ ولدينا فرضاً : $y' + y = ke^{-x} \Rightarrow f'(x) + f(x) = ke^{-x}$

يعطي : $ke^{-x} = e^{-x} \Rightarrow k = 1$

المسألة الأولى :

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z) = z^3 - 2(a + i\sqrt{3})z^2 - 4(a - i\sqrt{3})z + 8$ حيث $a \in R$

١) احسب العدد a لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$

٢) بفرض $a = 1$ ، جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (Z - 2)Q(z)$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

ثانياً : لتكن A , B , C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب :

$a = 2 \,, b = 1 + i\sqrt{3} \,, c = -1 + i\sqrt{3}$ والمطلوب :

a) أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

عيّن a' , b' , c' التي تمثلها نقاط المستوي A' , B' , C'

أولاً : $P(2) = 0 \Rightarrow (2)^3 - 2(a + i\sqrt{3})(2)^2 - 4(a - i\sqrt{3})(2) + 8 = 0$

منه : $8 - 8a - 8i\sqrt{3} - 8a + 8i\sqrt{3} + 8 = 0 \Rightarrow 16 - 16a = 0 \Rightarrow 16a = 16 \Rightarrow a = 1$

ومنه : $P(z) = z^3 + (-2 - 2i\sqrt{3})z^2 + (-4 + 4i\sqrt{3})z + 8 \quad ...(1)$

نفرض : $Q(z) = bz^2 + cz + d$ حيث : $P(z) = (Z - 2)(bz^2 + cz + d)$

بالنشر : $P(z) = bz^3 + cz^2 + dz - 2bz^2 - 2cz - 2d$

ومنه : $P(z) = bz^3 + z^2(c - 2b) + z(d - 2c) - 2d \quad ...(2)$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد : $b = 1 \,, -2d = 8 \Rightarrow d = -4$

ونجد : $c - 2b = -2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow c - 2 = -2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow c = -2i\sqrt{3}$

أيضاً : $d - 2c = -4 + 4i\sqrt{3} = -4 - 2c = -4 + 4i\sqrt{3} \Rightarrow c = -2i\sqrt{3}$

يعطي : $Q(z) = z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4$ وحلول $P(z) = 0$ هي : $(Z - 2)Q(z) = 0$

إما : $Z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$ أو $Q(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$ عن طريق المميز نجد أن $\Delta = 4$

ومنه : $z_1 = \frac{2i\sqrt{3}+2}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = \frac{2i\sqrt{3}-2}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

ثانياً : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ و نجد أيضاً : $\frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = 1$

ومنه : $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ فالمثلث ABC متساوي الساقين ومنفرج الزاوية رأسه B حيث $\hat{B} = \frac{2\pi}{3}$

التناظر بالنسبة لمحور الفواصل $z' = \bar{z}$ ومنه : $a' = \bar{a} = 2 \,, b' = \bar{b} = 1 - i\sqrt{3} \,, c' = \bar{c} = -1 - i\sqrt{3}$

المسألة الثانية :

ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = e^{-x}(1 + lnx)$

والتابع $g(x)$ المعرف على I وفق : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - lnx$ والمطلوب :

١) ادرس تغيرات $g(x)$ ونظم جدولاً بها .

٢) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً a ، ثم تحقق أن $a = 1$

٣) جد نهايات التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفه

٤) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

٥) مستفيداً من تغيرات $g(x)$ ادرس تغيرات $f(x)$ ونظم جدولاً بها

٦) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C_f

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 - 1 - (+\infty) = -\infty$ و $\lim_{x\to0^+} g(x) = \frac{1}{0^+} - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

المشتق : $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2} < 0$ حيث $g'(x) < 0$ أياً كانت $x \in I$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

$g(x)$ تابع مستمر ومتناقص تماماً على I حيث $g(I) = R$ و باعتبار $g(1) = 0$

ومنه : $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً هو $(a = 1)$ أياً كانت $x \in I$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1 \times (1 - \infty) = -\infty$ و لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \times (1 + \infty) = 0 \times \infty$ (حالة عدم تعيين)

نغير شكل $f(x)$: $f(x) = e^{-x} + e^{-x}.lnx = e^{-x} + \frac{lnx}{e^x}$ ومنه : $f(x) = e^{-x} + \left(\frac{lnx}{x} \times \frac{x}{e^x}\right)$

يعطي : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + (0 \times 0) = 0$

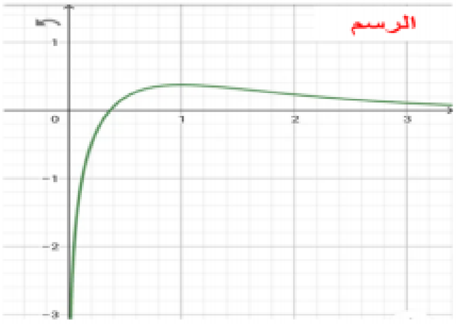
المشتق : $f'(x) = -e^{-x}(1 + lnx) + \left(\frac{1}{x} \times e^{-x}\right) = e^{-x}(\frac{1}{x} - 1 - lnx)$ ومنه : $f'(x) = e^{-x}.g(x)$

يعطي : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ وبالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ باعتبار $e^x > 0$ أياً كانت $x \in R$

$f'(x) > 0$ عندما $g(x) > 0$ عندما $x \in]0,1[$ و $f'(x) < 0$ عندما $g(x) < 0$ عندما $x \in]1,+\infty[$

$f'(x) = 0$ عندما $g(x) = 0$ عندما تكون $x = 1$ ومنه : $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة كبرى محلياً

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



نـهـايـة حـلـول الـدورة الـثـانـيـة عـام 2021

اعداد وتنسيق المدرس سام علي حمدان

ماجستير تخصصي بالرياضيات

دورات تعليمية للشهادات وطلبة الجامعات / طرطوس - الدريكيش

0994 168 878

الدورة الأولى ٢٠٢٢

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢٢

الرياضيات: (الفرع العلمي) (الدورة الأولى)

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال).

السؤال الأول: تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ خطه البياني C.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+2$

المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C .

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

4- ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

السؤال الثاني: في معلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(0,0,1)$. **المطلوب:**

1- احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:
$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

السؤال الثالث: صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق، ثمّ نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق، ثمّ نسحب مجدداً كرة من الصندوق.

الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون ، الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون.

المطلوب: 1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2.

2- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء؟

السؤال الرابع: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

المطلوب: أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $d: y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$.

السؤال الخامس: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الست الآتية بأحد العددين $+1$ أو -1 . **المطلوب:**

1- بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة.

2- بفرض X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الستة بعد ملئها، عيّن مجموعة قيم X .

3- بكم طريقة يمكن ملء الخانات الستة ليكون مجموع الأعداد فيها يساوي الصفر.

السؤال السادس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$ **والمطلوب:**

عيّن العددين a و b ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0)=4$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأوّل والثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول : نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وفق: $u_0=\frac{5}{2}$, $u_{n+1}=u_n^2-4u_n+6$ **المطلوب:**

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $2\leq u_n\leq 3$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

2- أثبت أنّ $u_{n+1}-u_n=(u_n-3)(u_n-2)$.

3- استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

4- بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢٢

الرياضيات: (الفرع العلمي) (الدورة الأولى)

الصفحة الثانية

التمرين الثاني: ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$، المطلوب:

1- أثبت أنّ f مستمر عند الصفر.

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسّر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.

3- بيّن أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته.

4- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

التمرين الثالث:

جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $\omega=-3+4i$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P وQ : $P: x-y+2z-1=0$ ، $Q: 2x+y+z+1=0$ والمطلوب:

1- أثبت أنّ المستويين P وQ متقاطعان بفصل مشترك d.

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

3- اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P وQ.

4- جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R.

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^{-2x}+2x-2$. المطلوب :

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- بيّن أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ .

3- ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها، ثمّ بيّن أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1,0]$.

4- ارسم Δ و C ، ثمّ احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x=1$.

5- استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g: x\mapsto -e^{2x}+2x+2$.

– انتهت الأسئلة –

حلول الدورة الأولى ٢٠٢٢

السؤال الأول: تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ خطه البياني C.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+2$

المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

4- ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

٢) $y = 2$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ ، $x = 1$ مقارب شاقولي

٣) المعادلة : $f(x) = 0$ لها حلان مختلفان

٤) حلول : $f'(x) < 0$ هي : $S =]-\infty, 1[\cup]1,2[$

السؤال الثاني: في معلّم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(0,0,1)$. المطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلّث ABC، عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة: $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

١) $\overrightarrow{AC} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2,1,0)$ منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4+0+0 = 4$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.COS(\widehat{BAC})$ يعطي : $4 = \sqrt{5}\times\sqrt{5}\times COS(\widehat{BAC})$ ، منه : $COS(\widehat{BAC}) = \frac{4}{5}$

٢) $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$ منه : $\|6\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ يعطي : $\|\overrightarrow{MG}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{6} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

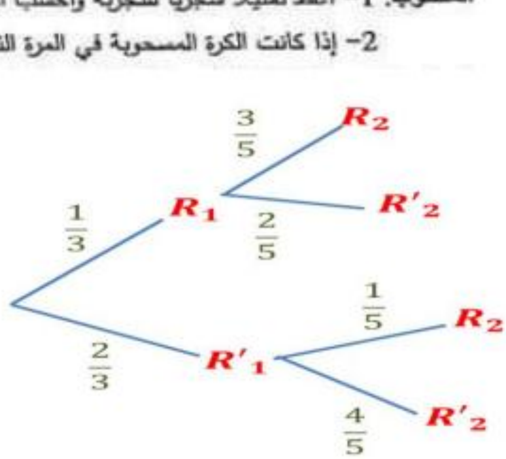
مجموعة النقط M هي كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{5}}{6}$

السؤال الثالث: صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق، ثمّ نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق، ثمّ نسحب مجدداً كرة من الصندوق.

الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون ، الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون.

المطلوب: 1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2.

2- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء؟



$$P(R_2) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

$$P(R'_1\,|\,R_2) = \frac{P(R'_1\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

السؤال الرابع: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x + 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

المطلوب: أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $d : y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$.

$g(x) = f(x) - y_d = \frac{sinx}{\sqrt{x}}$ ، نعلم أن : $-1 \le sinx \le 1$ يعطي : $\frac{-1}{\sqrt{x}} \le \frac{sinx}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$ ، منه : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{sinx}{\sqrt{x}}\right) = 0$ حسب مبرهنة الاحاطة

بالتالي : $d : y = x + 1$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

السؤال الخامس: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الست الآتية بأحد العددين 1+ أو 1- . **المطلوب:**

1- بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة.

2- بفرض X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الستة بعد ملئها، عيّن مجموعة قيم X .

3- بكم طريقة يمكن ملء الخانات الستة ليكون مجموع الأعداد فيها يساوي الصفر.

١) عدد طرائق ملئ الخانات : $n^r = 2^6 = 64$

٢) مجموعة قيم X : $X = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

٣) يكون المجموع صفراً إذا وضعنا الرقم 1+ في ثلاث خانات من أصل ستة : $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

السؤال السادس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$ **والمطلوب:**

عيّن العددين a و b ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0) = 4$.

$(0,3) \in C \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow 3 = b$

$f'(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2}$ ، لدينا : $f'(0) = 4$ يعطي : $4 = a - b$ ، منه : $a = 7$

التمرين الأول : نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ وفق: $u_0 = \frac{5}{2}$ ، $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$ **المطلوب:**

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $2 \le u_n \le 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2- أثبت أنّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$.

3- استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

4- بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

١) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ معرف واشتقاقي على المجال $[0, +\infty[$ ، حيث $f(x) = f(u_n)$

$f'(x) = 2x - 4 \ge 0$ أياً كانت $x \in [2, +\infty[$ ومنه : $f'(x) \ge 0$ على المجال $[2,3]$

يعطي $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $[2,3]$

من أجل $n = 0$ نجد : $u_1 = \frac{25}{4} - 10 + 6 = \frac{9}{4}$ منه : $E(0): 2 \le u_1 = \frac{9}{4} \le 3$

منه $E(0)$ صحيحة ، نفترض صحة القضية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$

بالاستفادة من تزايد $f(x)$ على المجال $[2,3]$ نجد : $f(2) \le f(u_n) \le f(3)$

منه نجد : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$ فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

٢) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6$

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

٣) من الطلب الأول وجدنا $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

منه : $u_n - 3 \leq 0$ و $u_n - 2 \geq 0$

منه : $(u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0$

يعطي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فالمتتالية متناقصة

٤) وجدنا أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى بالعدد 2 فهي متقاربة من العدد 2

لحساب نهاية المتتالية نحل المعادلة $f(x) = x$ والتي تكافئ $x^2 - 5x + 6 = 0$

إما $x = 3$ مرفوض أو $x = 2$ مقبول لأن $u_0 = \frac{5}{2}$ والمتتالية متناقصة ومنه : $\lim_{n\to\infty}(u_n) = 2$

<u>التمرين الثاني:</u> ليكن f تابعاً معرفاً على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - \ln x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$. المطلوب:

1- أثبت أنّ f مستمر عند الصفر.

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسّر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.

3- بيّن أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته.

4- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

١) نعلم $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ منه : $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x - \ln x}\right) = 0$

يعطي $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ وبالتالي $f(x)$ مستمر عند الصفر

٢) $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x(x - \ln x)} = \frac{1}{x - \ln x}$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ ، منه $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر حيث $f'(0) = 0$

C الخط البياني للتابع $f(x)$ يقبل مماساً أفقياً في النقطة $(0, 0)$ معادلته : $y = 0$

٣) $f(x) = \frac{x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}$ ، لما كانت $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ يعطي : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

منه $y = 1$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$

٤) $f'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x - x + 1}{(x - \ln x)^2} = \frac{-\ln x + 1}{(x - \ln x)^2}$ ، $f'(1) = 1$ ، $f(1) = 1$

معادلة المماس : $T: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ ، منه معادلة المماس : $T: y = x$

(1.1) قريبة من العدد 1 لذلك نعوض في معادلة المماس T فنجد : $y = 1.1$ منه : $f(1.1) \approx 1.1$

التمرين الثالث:

جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $\omega = -3+4i$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$$

نفرض العدد العقدي $u = x + iy$ حيث $u^2 = \omega$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \Rightarrow x^2 - y^2 = -3 \quad ...(1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad ...(2) \\ 2xy = b \Rightarrow 2xy = 4 \quad ...(3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية نجد : $2x^2 = 2$ منه $x^2 = 1$ يعطي : إما $x_1 = 1 \ , \ x_2 = -1$

عندما $x_1 = 1$ نجد من المعادلة الثالثة $y_1 = 2$ منه : $u_1 = 1 + 2i$

عندما $x_2 = -1$ نجد من المعادلة الثالثة $y_2 = -2$ منه : $u_2 = -1 - 2i$

لحل المعادلة $z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$ نستخدم المميز Δ

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 4\left(i + \frac{3}{4}\right) = 4(1-1+2i) - 4i - 3 = -3+4i$$

نجد أن : $\Delta = \omega \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{\omega}$

منه : $z_1 = \frac{-2-2i+1+2i}{2} = \frac{-1}{2}$ ، $z_2 = \frac{-2-2i-1-2i}{2} = \frac{-3}{2} - 2i$

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P و Q : $\begin{matrix} P: x-y+2z-1=0 \\ Q: 2x+y+z+1=0 \end{matrix}$ والمطلوب:

1- أثبت أنّ المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك d.

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

3- اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P و Q.

4- جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R.

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q .

١) $\overrightarrow{n_P} = (1,-1,2) , \overrightarrow{n_Q} = (2,1,1)$ ، $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$ المركبات غير متناسبة

الشعاعين $\overrightarrow{n_P} , \overrightarrow{n_Q}$ مستقلان خطياً فالمستويان متقاطعان بفصل مشترك

٢) بجمع معادلتي المستويين نجد : $3x + 3z = 0$ منه $x = -z$

نفرض $z = t$ نجد : $x = -t$ ، نعوض في معادلة المستوي Q فنجد : $y = t - 1$

$$(d): \begin{cases} x = -t \\ y = t - 1 \ ; \ t \in R \\ z = t \end{cases}$$

٣) المستوي R يعامد المستويين $Q\,,P$ وبالتالي المستقيم (d) يعامد المستوي R

الشعاع الناظم للمستوي R هو ذاته الشعاع الموجه لـ (d) ، منه : $\overrightarrow{n_R} = (-1,1,1)$

معادلة المستوي : $R:\ -x+y+z+d=0$ ، نعوض احداثيات A في المعادلة

فنجد : $d=-2$ وبالتالي معادلة المستوي : $R:\ -x+y+z-2=0$

٤) نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم (d) في معادلة المستوي R

نجد : $t+t-1+t-2=0$ منه : $t=1$

يعطي : $x=-1\,,y=0\,,z=1$ منه نجد : $B(-1,0,1)$

٥) (d) يعامد المستوي R و $B\in(d)$, $A\in R\ ,\ B\in R$ منه (d) يعامد (AB)

منه : B المسقط القائم لـ A على (d) بالتالي بعد A عن (d) يساوي $\|\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)$ ، يعطي $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

٦) $r = dist(A,Q) = \frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

معادلة الكرة : $S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^{-2x}+2x-2$. **المطلوب :**

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- بيّن أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ .

3- ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها، ثمّ بيّن أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1,0]$.

4- ارسم Δ و C ، ثمّ احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x=1$.

5- استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g:x\mapsto -e^{2x}+2x+2$.

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[\,e^{-2x}(1+2xe^{2x})-2\,] = +\infty$

٢) $h(x)=f(x)-y_\Delta = e^{-2x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ ، Δ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

$h(x)=e^{-2x}>0$ أياً كانت $x\in R$ ، منه C يقع فوق Δ دائماً

٣) $f'(x)=-2e^{-2x}+2$ ، منه $f'(x)=0$ عندما $e^{-2x}=1$ عندما $x=0$ ، $f(0)=-1$

$f'(x)>0$ عندما $x>0$ ، $f'(x)<0$ عندما $x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $-$	0	$+$ $+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)$ متناص تماماً على المجال $]-\infty,0]$ ، حيث $f(]-\infty,0]) = [-1,+\infty[$

$0 \in [-1,+\infty[$ ، منه $f(x)=0$ لها حل وحيد على المجال $]-\infty,0]$

$f(x)$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ ، حيث $f(]0,+\infty[) =]-1,+\infty[$

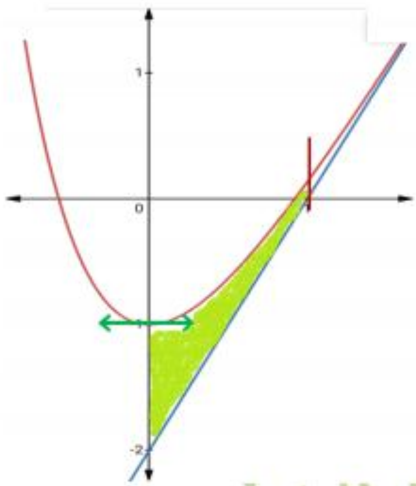
$0 \in]-1,+\infty[$ ، منه $f(x)=0$ لها حل وحيد على المجال $]0,+\infty[$

بالتالي : $f(x)=0$ لها حلان مختلفان في R ، $f(0)=-1<0 \;,\; f(-1)=e^2-4>0$

منه نجد : $f(0)\times f(-1)<0$ وبالتالي أحد حلول المعادلة $f(x)=0$ يقع ضمن المجال $[-1,0]$

٤) لرسم Δ : نفرض $x=0$ منه $y=-2$ منه $A(0,-2)$

نفرض $x=1$ منه $y=0$ منه $B(1,0)$



مساحة السطح المحصور : $f(x)>y_\Delta$ على المجال $[0,1]$

$$S = \int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,dx = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$S = \frac{-e^{-2}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-1}{2e^2}+\frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2e^2}$$

٥) $g(x) = -[e^{-2(-x)}+2(-x)-2]$ ، $g(x) = -f(-x)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمبدأ الاحداثيات $o(0,0)$

انتهى حل الدورة الأولى ٢٠٢٢

اعداد وتنسيق المدرس سام علي حمدان

ماجستير تخصصي بالرياضيات

دورات تعليمية للشهادات وطلبة الجامعات / طرطوس - الدريكيش

0994 168 878

الدورة الثانية ٢٠٢٢

الاسم :
الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢٢

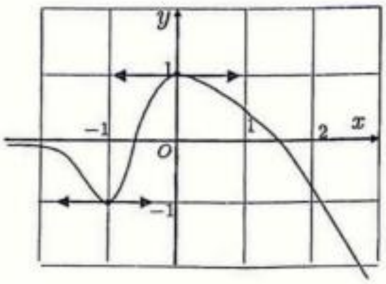
الرياضيات:

(الفرع العلمي– الدورة الثانية)

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:



نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

المطلوب:

1- جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.

3- اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

4- عيّن القيم الحديّة للتابع f مبيّناً نوع كلّ منها.

السؤال الثاني: في معلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$. **المطلوب:**

أعط معادلةً للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA = MB$ وما طبيعة المجموعة S.

السؤال الثالث: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = \ln(2+\sin x)$. **المطلوب:**

1- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$.

2- استنتج $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$.

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \ln(x)+\ln(y)=\ln(6) \\ \ln(x+y)=\ln(5) \end{cases}$$

السؤال الخامس: ليكن $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ و $J=\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4}\,dx$ **والمطلوب:**

احسب I ثمّ $I+J$ واستنتج J.

السؤال السادس: لتكن C دائرة مركزها O ، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة، لتكن $S=\{A_1,A_2,\dots,A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار. **والمطلوب:**

1- ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟

2- ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟

3- كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأوّل والثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$$

والمطلوب:

1- أثبت أنّ $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية متناقصة .

2- استنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متجاورتان.

3- أثبت أنّ $u_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$ ، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

الرقم:
المدّة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢٢

(الفرع العلمي- الدورة الثانية)

الرياضيات:

الصفحة الثانية

التمرين الثاني: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

1- جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3 = 1$ ، واكتبه بالشكل الجبري.

2- إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $\omega = \dfrac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$.

a) أثبت أنّ $|\omega| = 1$.

b) من أجل $\beta = 1$ ، أثبت أنّ: $\omega^{12} = 1$.

3- عيّن مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أنّ $|z - 2 + i| = 5$.

التمرين الثالث:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة، واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة ، ونعرّف المتحولين العشوائيين X و Y كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة.

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين. **والمطلوب:**

1- اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.

2- اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

3- اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X , Y)، أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً؟ لماذا؟

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$. **والمطلوب:**

1- تحقّق أنّ النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة.

2- أثبت أنّ: $y + z - 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (BCD) .

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD).

4- عيّن إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).

5- اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = (1-x)e^x - 1$. **والمطلوب:**

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أنّ $g(x) \le 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2- تحقق أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$ ، ثمّ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

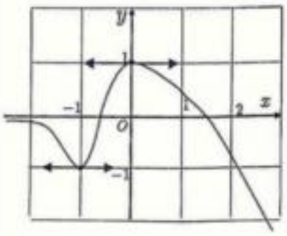
3- اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم T ، ثمّ ارسم C الخط البياني للتابع f.

====================

حلـول الدورة الثانية ٢٠٢٢

السؤال الأول:



نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.

3- اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

4- عيّن القيم الحديّة للتابع f مبيّناً نوع كلّ منها.

١) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

٢) $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

٣) حلول : $f'(x) > 0$ هي : $S =]-1\,,0[$

٤) $f(-1) = -1$ قيمة صغرى محلياً ، $f(0) = 1$ قيمة كبرى محلياً محلياً

السؤال الثاني: في معلّم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$. **المطلوب:**

أعط معادلةً للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA = MB$ وما طبيعة المجموعة S.

$MA = MB$ يكافئ $MA^2 = MB^2$

منه : $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$

$$-2y + 1 + 2z + 1 = -2x + 1 + 2y + 1 - 2z + 1$$

$S:\ 2x - 4y + 4z - 1 = 0$ وهي معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال الثالث: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = \ln(2+\sin x)$. **المطلوب:**

1- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$.

2- استنتج $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(2+\sin x) - \ln(2)}{x}$.

١) $g(x)$ اشتقاقي على R مشتقه : س $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ ، $g'(0) = \dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$

٢) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(2+\sin x) - \ln 2}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ ، بما أن $g(x)$ اشتقاقي عند الصفر

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(2+\sin x) - \ln 2}{x} = g'(0) = \dfrac{1}{2}$ حسب تعريف المشتق

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(6) \\ \ln(x+y) = \ln(5) \end{cases}$$

الجملة معرفة عندما $y > 0 \ , \ x > 0$ ، $ln(xy) = ln(6) \dots (1)$ و $ln(x+y) = ln(5) \dots (2)$

منه : $xy = 6 \dots (1)$ و $x + y = 5 \dots (2)$

من $(2) \dots x = -y + 5$ نعوض في (1) فنجد : $-y^2 + 5y = 6$

منه : $y^2 - 5y + 6 = 0$ يعطي : $(y-2)(y-3) = 0$

إما : $y = 2$ و $x = 3$ أو $y = 3$ و $x = 2$ الحلان مقبولان

السؤال الخامس: ليكن $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4} dx$ والمطلوب:

احسب I ثمّ $I + J$ واستنتج J .

$$I = \int_0^1 \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4} dx \Rightarrow I = \frac{1}{4} \ [\ ln(1+x^4) \ ]_0^1 = \frac{1}{4} ln(2)$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^7 + x^3}{1+x^4} dx = \int_0^1 \frac{x^3 (1+x^4)}{1+x^4} dx = \int_0^1 x^3 \ dx \Rightarrow I + J = [\frac{1}{4} \ x^4 \ ]_0^1 = \frac{1}{4}$$

منه : $J = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} ln(2)$

السؤال السادس: لتكن C دائرة مركزها O ، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة، لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار. والمطلوب:

1- ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟

2- ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟

3- كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

١) $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$

٢) $\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

٣) عدد المستطيلات يساوي عدد المجموعات الجزئية ذات القطرين $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

والمطلوب:

1- أثبت أنّ $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية متناقصة .

2- استنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان.

3- أثبت أنّ $u_n = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{5^n})$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

١) $u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$

منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$ فالمتتالية u_n متزايدة

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ ، منه : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 5^{n+1}}{(5^{n+1})(2^{n+1})} < 0$ ، فالمتتالية v_n متناقصة

٢) من الطلب السابق وجدنا u_n متزايدة ، v_n متناقصة فالشرط الأول محقق

$v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$ ومنه : $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

نهاية فرق المتتاليتان هو الصفر فالشرط الثاني محقق وبالتالي المتتاليتان متجاورتان

٣) u_n مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ عدد حدودها n وقيمة حدها الأول $\frac{1}{5}$

$$u_n = \frac{1}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$-1 < q = \frac{1}{5} < 1$ ومنه : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ يعطي : $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}$

وجدنا $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{4}$

التمرين الثاني: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

1- جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3 = 1$ ، واكتبه بالشكل الجبري.

2- إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $\omega = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$.

a) أثبت أنّ $|\omega| = 1$.

b) من أجل $\beta = 1$ ، أثبت أنّ: $\omega^{12} = 1$.

3- عيّن مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أنّ $|z - 2 + i| = 5$.

١) نفرض $j = re^{i\theta}$ ومنه : $j^3 = r^3 . e^{3i\theta}$ عندئذ $j^3 = 1$ تكافئ $r^3 . e^{3i\theta} = e^{0i}$

منه $r^3 = 1$ و $3\theta = 0 + 2\pi k$

$r = 1$ و $\theta = \frac{2\pi k}{3}$ حيث k عدد صحيح

من أجل $k = 0$ تصبح $\theta = 0$ ومنه : $j_1 = e^{0i} = 1$

من أجل $k = 1$ تصبح $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ومنه : $j_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل $k = 2$ تصبح $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ومنه : $j_3 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

٢) $\omega = \frac{i(-i\beta + \sqrt{3})}{-i\beta + \sqrt{3}} = i$ منه : $|\omega| = |i| = 1$

$$\omega^{12} = i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$$

٣) بفرض $a = 2 - i$ العدد العقدي الممثل للنقطة A عندئذ :

$|z - 2 + i| = 5$ تكافئ $|z - a| = 5$ ومنه : $[AM] = 5$

مجموعة النقط $M(Z)$ هي دائرة مركزها $A(2, -1)$ ونصف قطرها $R = 5$

التمرين الثالث:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة، واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة ، ونعرّف المتحولين العشوائيين X و Y كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة.

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين. **والمطلوب:**

1- اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.

2- اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

3- اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X , Y)، أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً؟ لماذا؟

١) $X = \{1,2\}$ ، $P(X=2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{2}{3}$

X	1	2
$P(X=k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

٢) $Y = \{1,2,3\}$ ، $P(Y=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{3}$

$P(Y=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{3}$

$P(Y=3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{3}$

Y	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

٣)

X \ Y	1	2	3	قانون Y
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
قانون X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$P((X=1)\cap(Y=1)) = 0$ و $P(X=1).P(Y=1) = \frac{2}{9}$

$P((X=1)\cap(Y=1)) \neq P(X=1).P(Y=1)$ ، منه X , Y غير مستقلان احتمالياً

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$. والمطلوب:

1- تحقّق أنّ النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة.

2- أثبت أنّ: $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD) .

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD).

4- عيّن إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).

5- اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها.

١) $\overrightarrow{DC} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{BC} = (0,-1,1)$ ، $\frac{-1}{0} \neq \frac{0}{1}$ المركبات غير متناسبة

الشعاعين $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ مستقلان خطياً ، فالنقط D , C , B لا تقع على استقامة واحدة

٢) نعوض احداثيات B في معادلة المستوي : $1 + 0 - 1 = 0$ محققة

نعوض احداثيات C في معادلة المستوي : $0 + 1 - 1 = 0$ محققة

نعوض احداثيات D في معادلة المستوي : $0 + 1 - 1 = 0$ محققة

D , C , B جميعها تقع على المستوي وبالتالي معادلة المستوي $(BCD): y + z - 1 = 0$

٣) الشعاع الموجه للمستقيم Δ هو ذاته الناظم على المستوي (BCD) منه : $\vec{u} = \vec{n} = (0,1,1)$

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = t - 2 \; ; t \in R \\ z = t + 2 \end{cases}$$

٤) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي (BCD) فنجد :

$t - 2 + t + 2 - 1 = 0$ منه : $t = \frac{1}{2}$ ، منه $K(2, \frac{-3}{2}, \frac{5}{2})$

٥) بفرض N منتصف $[AD]$ منه : $N(1,-1,\frac{3}{2})$ ، $\overrightarrow{DN} = (1,-1,\frac{1}{2})$

$R = \|\overrightarrow{DN}\| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ ، N مركز الكرة

معادلة الكرة : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = (1-x)e^x - 1$. والمطلوب:

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أنّ $g(x) \le 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2- تحقق أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$ ، ثمّ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم T ، ثمّ ارسم C الخط البياني للتابع f.

١) $g(x)$ اشتقاقي على R مشتقه : $g'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -xe^x$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $-x$ لأن $e^x > 0$ ، $g'(x) = 0$ عندما $x = 0$ حيث $g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$ $+$	0	$-$ $-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول اطراد $g(x)$ نجد : $g(x) \le 0$ أياً كانت $x \in R$

٢) $f(x)$ اشتقاقي على مجموعة تعريفه $f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{e^x(1-x)-1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$

باعتبار $1 - x > 0$ على المجال $]-\infty,1[$ ، فإن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

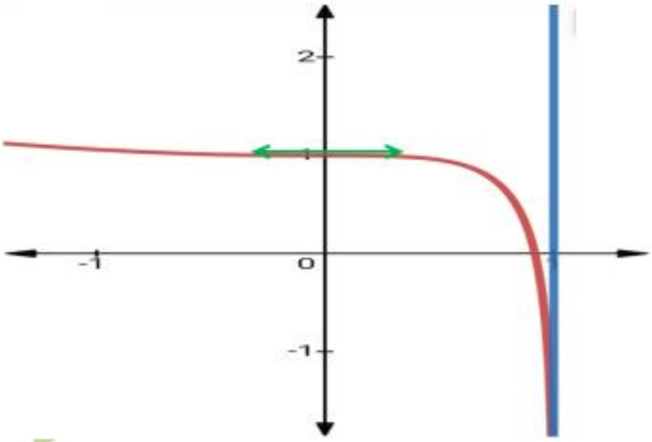
منه $f'(x) \leq 0$ ، $f'(x) = 0$ تكافئ $g(x) = 0$ عندما $x = 0$ يعطي : $f(0) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

٣) معادلة المماس : $T : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ، $f(0) = 1 , f'(0) = 0$

المماس أفقي معادلته : $T : y = 1$



انتهى حل الدورة الثانية ٢٠٢٢

اعداد وتنسيق المدرس سام علي حمدان

ماجستير تخصصي بالرياضيات

دورات تعليمية للشهادات وطلبة الجامعات / طرطوس - الدريكيش

0994 168 878