

(اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : احسب كلاً مما يأتي :

$$\int_0^{\ln 2} e^x (1 - e^x)^3 dx \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \quad \textcircled{1}$$

السؤال الثاني : حل في R المعادلة : $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G , I منتصف $[AD]$, J منتصف $[BC]$

أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2, -1, 0)$ والمستوي P

الذي معادلته $2x + y - 2z + 9 = 0$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : أثبت أن $\ln x \leq x - 1$ أيًا يكن $x > 0$. باختيار $x = e^{\frac{1}{3}}$ و $x = e^{-\frac{1}{3}}$, احصر e .

التمرين الثاني : أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, u_0 = 0 \text{ متزايدة تماماً}$$

التمرين الثالث : احسب قيمة r إذا علمت أن :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

التمرين الرابع : حل في C المعادلة : $z^2 - (1 + 2i)z + 3 + 3i = 0$

ثالثاً - حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = 2x - 1 + \ln \frac{x}{1+x}$

(1) أثبت أن المستقيم $y = 2x - 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

(2) ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C , وارسم كل مقارب وجدته, ثم ارسم C .

(3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5.

المسألة الثانية : يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6, نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التوالي

دون إعادة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين :

(1) عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

(2) احسب التوقع الرياضي $E(X)$, والتباين $V(X)$.

انتهت الأسئلة

(حلول اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30 لكل سؤال)

السؤال الأول : احسب كلا مما يأتي :

$$\int_0^{\ln 2} e^x (1-e^x)^3 dx \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} = t : \lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\int_0^{\ln 2} -(-e^x)(1-e^x)^3 dx = \left[-\frac{1}{4}(1-e^x)^4 \right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{4}(1-2)^4 = -\frac{1}{4}$$

السؤال الثاني : حل في R المعادلة : $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

$$3^{2x} - 3 \times 3^x + 2 = 0 \Rightarrow (3^x - 1)(3^x - 2) = 0$$

$$3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = 2 \Rightarrow x \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G , I منتصف $[AD]$, J منتصف $[BC]$

أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

بما أن I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A, I) و (D, I)

بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, J) و (C, J)

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, I) و (B, J) و (C, J) و (D, I)

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2)$ و $(J, 2)$

إذن I و J و G تقع على استقامة واحدة . (النقطة G تقع في منتصف $[IJ]$)

(حلول اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2, -1, 0)$ والمستوي P

$$2x + y - 2z + 9 = 0$$

الذي معادلته $2x + y - 2z + 9 = 0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

بعد المركز عن المستوي المماس يساوي نصف قطر الكرة :

$$r = \text{dist}(A, P) = \frac{|(2)(2) + (1)(-1) + (-2)(0) + 9|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$$
 معادلة الكرة المطلوبة :

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70 لكل تمرين)

التمرين الأول : أثبت أن $\ln x \leq x - 1$, أيًا يكن $x > 0$. باختيار $x = e^{\frac{1}{3}}$ و $x = e^{-\frac{1}{3}}$, احصر e

المتراجحة تكافئ : $\ln x - x + 1 \leq 0$

ليكن التابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \ln x - x + 1$

وهو اشتقاقي على I ومشتقه : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

بما أن $x > 0$ فإن إشارة المشتق تماثل إشارة المقدار $1-x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ حيث $f(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 $-$
$f(x)$		\nearrow	0 \searrow

من جدول الاطراد نستنتج أنه أيًا تكن $x > 0$ فإن : $f(x) \leq 0$

ومنه : $\ln x - x + 1 \leq 0$, إذن $\ln x \leq x - 1$

$$\ln e^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{64}{27} \leq e$$

$$\ln e^{-\frac{1}{3}} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{3}} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow e \leq \frac{27}{8}$$

$$\frac{64}{27} \leq e \leq \frac{27}{8} \text{ : إذن}$$

3 الصفحة

(حلول اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)

التمرين الثاني : أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, u_0 = 0 \text{ متزايدة تماماً}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n^2} - u_n$$

بما أن $1+u_n^2 > u_n^2$ (تابع الجذر التربيعي متزايد) فإن $\sqrt{1+u_n^2} > u_n$

وبالتالي : $\sqrt{1+u_n^2} - u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

التمرين الثالث : احسب قيمة r إذا علمت أن :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

شرط الحل : $0 \leq r \leq 4$

$$\frac{(4-r)! r!}{4!} = \frac{(5-r)! r!}{5!} + \frac{(6-r)! r!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5 \times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$1 = \frac{(5-r)}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30}$$

$$30 = 6(5-r) + (30 - 11r + r^2)$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0 \Rightarrow (r-15)(r-2) = 0$$

الحل المقبول : $r = 2$

التمرين الرابع : حل في C المعادلة : $z^2 - (1+2i)z + 3+3i = 0$

طريقة أولى : $\Delta = (1+2i)^2 - 4(3+3i) = -3 + 4i - 12 - 12i$

$$\Delta = -15 - 8i = (1)^2 + (4i)^2 - 2(1)(4i) = (1-4i)^2$$

(أو نحسب الجذور التربيعية لـ Δ بالشكل الجبري)

$$z_1 = \frac{1+2i-1+4i}{2} = 3i, \quad z_2 = \frac{1+2i+1-4i}{2} = 1-i$$

(حلول اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)

طريقة ثانية : (مهارية)

$$\left. \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3 + 3i = 3i(1-i) \\ z_1 + z_2 &= 1 + 2i = 3i + 1 - i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

ملاحظة : يمكن الحل بالاعتماد على طريقة الاتمام إلى مربع كامل .

ثالثاً - حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = 2x - 1 + \ln \frac{x}{1+x}$$

1) أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

2) ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C , وارسم كل مقارب وجدته, ثم ارسم C .

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5.

$$1) \text{ تابع الفرق : } f(x) - y = \ln \frac{x}{1+x}$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \text{ وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \ln 1 = 0$$

إذن : المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$\text{أياً تكن } x > 0 \text{ فإن } x < 1+x \text{ ومنه } \frac{x}{1+x} < 1 \text{ وبالتالي } f(x) - y = \ln \frac{x}{1+x} < \ln 1 = 0$$

إذن : الخط C يقع دوماً تحت المقارب Δ .

2) f مستمر واشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

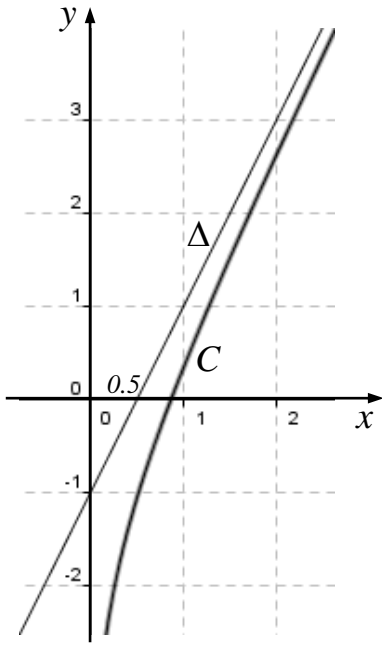
إذن محور الترتيب الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C .

$$f'(x) = 2 + \left(\frac{x}{1+x} \right)' \cdot \frac{1+x}{x} = 2 + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{x} = 2 + \frac{1}{x+x^2}$$

أياً تكن $x > 0$ فإن $x + x^2 > 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$

الصفحة 5

(حلول اختبار 1 - ص 207 جزء ثاني)



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

f مستمر و متزايد تماماً على $]0, +\infty[$

ولأن $0 \in f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α من $]0, +\infty[$.

لدينا : $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0.3 > 0$

أيضاً : $f(0.5) = -\ln 3 \approx -1.1 < 0$

ولأن $0.5 < \alpha < 1$ فإن $f(1) \times f(0.5) < 0$

المسألة الثانية : يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 , نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التوالي دون إعادة .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين :

(1) عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي .

(2) احسب التوقع الرياضي $E(X)$, والتباين $V(X)$.

(1) مجموعة قيم X هي : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

عدد طرائق سحب بطاقتين على التوالي دون إعادة : $P_6^2 = 6 \times 5 = 30$

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

(2) التوقع : $E(X) = \frac{1}{30}(1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 2) \Rightarrow E(X) = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$

$E(X^2) = \frac{1}{30}(1 \times 10 + 4 \times 8 + 9 \times 6 + 16 \times 4 + 25 \times 2) \Rightarrow E(X^2) = \frac{210}{30} = 7$

التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7 - \frac{49}{9} \Rightarrow V(X) = \frac{14}{9}$

(اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}$$

① أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ② أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط (C) .

السؤال الثاني : نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

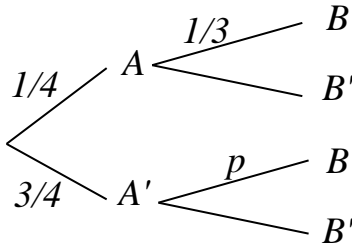
(1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أيًا كان العدد الطبيعي n .

(2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة .

السؤال الثالث : ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية

معروضة بالمخطط الشجري المجاور .

كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً .



السؤال الرابع : نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقاط $A(1, 5, 4)$ و $B(10, 4, 3)$ و $C(4, 3, 5)$ و $D(0, 4, 5)$

(1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

(2) بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوى واحد .

(3) استنتج أن D هي مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A, α) و (B, β) و (C, γ)

حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة : $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 1}$ عند $+\infty$

ثم أعط عدداً حقيقياً α يحقق الشرط : إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9, 3.1[$

التمرين الثاني : أثبت أنه أيًا كانت x من $]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$

التمرين الثالث :

① حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$

② في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i} \text{ . بين أن } z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_A = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

التمرين الرابع : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها .

ثالثاً - حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

(1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل . وادرس وضع (C) بالنسبة إليه .

(2) ارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم (C) .

(3) بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$

واستنتج أن α تحقق المعادلة : $\alpha = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$

(4) احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

(5) استنتج مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

المسألة الثانية : لدينا n صندوقاً u_1, u_2, \dots, u_n حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء وكل من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2

ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا , نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

(1) احسب $P(R_1)$.

(2) أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$

(3) أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$.

(4) نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{4}$

a . أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k \geq 1}$ هندسية . عين أساسها وحدها الأول .

b . اكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k .

انتهت الأسئلة

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30 لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعروف على $[0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}$$

① أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

② أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط (C) .

① لدينا : $f(x) = x + 4 \frac{1 - \cos x}{x^2} = x + 4 \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = x + 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$

بما أن $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

② تابع الفرق : $f(x) - x = 2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

أياً يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $0 \leq \sin^2 \frac{x}{2} \leq 1$

في حالة $x \neq 0$ يكون : $0 \leq \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فحسب مبرهنة الاطاعة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 0$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

إذن : المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط (C) في جوار $+\infty$.

السؤال الثاني : نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

(1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

(2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة .

(1) نبرهن بالتدرج صحة الخاصة $E(n) : \langle 0 \leq u_n \leq 4 \rangle$

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $0 \leq u_n \leq 4$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

لننتقل من الخاصة $E(n)$ بإضافة 12 لأطرافها ثم نجذر تربيعياً

$$12 \leq 12 + u_n \leq 16$$

$$\text{ومنه } 2\sqrt{3} \leq \sqrt{12 + u_n} \leq 4$$

وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ومنه $E(n+1)$ صحيحة

إذن $E(n)$ صحيحة أيماً كان العدد الطبيعي n .

(2) نفترض $Q(n)$ الخاصة : $\langle u_{n+1} > u_n \rangle$

(1) الخاصة $Q(0)$ صحيحة لأن : $u_1 > u_0$ حيث $\sqrt{13} > 1$

(2) نفترض أن $Q(n)$ صحيحة أي : $u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $Q(n+1)$ أي لنبرهن أن $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$12 + u_{n+1} > 12 + u_n$$

ولأن تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً فإن : $\sqrt{12 + u_{n+1}} > \sqrt{12 + u_n}$

أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$ ومنه $Q(n+1)$ صحيحة

إذن $Q(n)$ صحيحة أيماً كان العدد الطبيعي n .

أي أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة .

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{12 + u_n} - u_n = \frac{12 + u_n - u_n^2}{\sqrt{12 + u_n} + u_n} = \frac{(4 - u_n)(3 + u_n)}{\sqrt{12 + u_n} + u_n} : \text{طريقة ثانية}$$

بما أن $u_n \geq 0$ فإن حدود المتتالية موجبة فالمقام موجب .

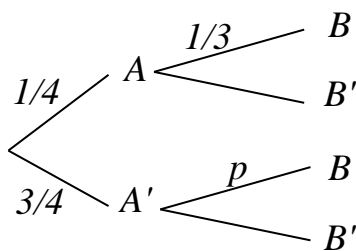
إشارة الكسر تماثل إشارة البسط $12 + u_n - u_n^2$ الذي ينعدم عند $u_n = 4$ أو $u_n = -3$

وبالتالي أياً كان $0 \leq u_n \leq 4$ فإن $12 + u_n - u_n^2 \geq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة .

- دراسة إشارة البسط بشكل آخر : بما أن $u_n \geq 0$ فإن $3 + u_n \geq 3 > 0$

أيضاً : $u_n \leq 4$ ومنه $-u_n \geq -4$ وبالتالي $4 - u_n \geq 0$ إذن : $(4 - u_n)(3 + u_n) \geq 0$



السؤال الثالث : ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية

معروضة بالمخطط الشجري المجاور .

كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً .

- طريقة أولى : بما أن الحدثان A و B مستقلين احتمالياً فإن : $P(B \setminus A) = P(B)$

$$P(B \setminus A) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times p \Rightarrow \frac{3}{4}p = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

- طريقة ثانية : بما أن A و B مستقلين احتمالياً فإن A' و B مستقلين احتمالياً وبالتالي :

$$P(B \setminus A) = P(B) = P(B \setminus A') \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

- طريقة ثالثة : (إنطلاقاً من شرط الاستقلال الاحتمالي واستخدام القوانين)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A) \cdot P(B \setminus A) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B)$$

$$P(B \setminus A) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$P(B \setminus A) = P(A) \cdot P(B \setminus A) + P(A') \cdot P(B \setminus A')$$

$$P(B \setminus A)[1 - P(A)] = P(A') \cdot P(B \setminus A')$$

$$P(B \setminus A) = P(B \setminus A') \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

السؤال الرابع : نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوى واحد .

3) استنتج أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A, α) و (B, β) و (C, γ)

حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

1) لدينا : الشعاعان $\vec{AB}(9, -1, -1)$ و $\vec{AC}(3, -2, 1)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بما أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستويًا وليكن \mathcal{P} .

انتماء D للمستوي \mathcal{P} يكافئ وجود عددين حقيقيين a و b يحققان :

$$\vec{AD}(-1, -1, 1) : \text{حيث } \vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = -1 & \dots(1) \\ -a - 2b = -1 & \dots(2) \\ -a + b = 1 & \dots(3) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (3) نجد : $3b = 2$ ومنه $b = \frac{2}{3}$ نعوض في (3) فنجد : $a = -\frac{1}{3}$

إن : $(a, b) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ حل مشترك لجملتي المعادلتين (2) و (3)

وهذا الحل يحقق المعادلة (1) لأن $-3 + 2 = -1$

إذن النقاط A و B و C و D تقع في مستوى واحد \mathcal{P} .

3) وجدنا أن $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ وبالتالي D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$$(A, \alpha) \text{ و } (B, \beta) \text{ و } (C, \gamma) \text{ أي } (A, 1 - a - b) \text{ و } \left(B, -\frac{1}{3}\right) \text{ و } \left(C, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{ومنّه : } \alpha = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ و } \gamma = \frac{2}{3} \text{ و } \beta = -\frac{1}{3}$$

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70 لكل تمرين)

التمرين الأول : أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة : $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$

ثم أعط عددًا حقيقيًا α يحقق الشرط : إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9, 3.1[$

$$\text{إن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

ينتمي $f(x)$ إلى المجال $]2.9, 3.1[$ الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.1

إذا وفقط إذا تحققت المتراجحة : $|f(x) - 3| < 0.1 \dots (1)$

$$\text{حيث : } f(x) - 3 = \frac{3x+4}{x+1} - 3 = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{المتراجحة (1) تكافئ } \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{10} \text{ ومنه : } |x+1| > 10$$

ولما كانت النهاية تحسب عند $+\infty$, نفرض $x > -1$

وبالتالي $x+1 > 10$ ومنه : $x > 9$ لذا يمكن أخذ $\alpha = 9$ أو أي عدد أكبر من 9 .

التمرين الثاني : أثبت أنه أيًا كانت x من $]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$

$$\text{المتراجحة تكافئ : } \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) \leq 0$$

ليكن التابع f المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

وهو اشتقاقي على I ومشتقه :

إشارة المشتق تماثل إشارة البسط $-x$ الذي يندعم عند $x=0$ حيث $f(0)=0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗ 0 ↘	

من جدول الاطراد نستنتج أنه أيًا تكن $x > -1$ فإن $f(x) \leq 0$ ومنه $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$

التمرين الثالث :

① حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$$

② في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين

$$z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_A = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

بين أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}$, واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

① بطريقة المميز :

$$\Delta = 4(1 - \sqrt{3})^2 - 4 \times 8 = 4(-4 - 2\sqrt{3})$$

$$\Delta = -4(4 + 2\sqrt{3}) = -4(1 + \sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3})}{2} = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$$

$$z_2 = \frac{2(1 - \sqrt{3}) - 2i(1 + \sqrt{3})}{2} = (1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i$$

* ملاحظة : يمكن الحل بالإتمام إلى مربع كامل .

② لدينا : $\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A^2}{z_A \cdot z_A} = \frac{z_A^2}{|z_A|^2}$ حيث :

$$z_A^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)i - (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$z_A^2 = (2\sqrt{3})(2) + 2(3 - 1)i = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$|z_A|^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 8$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i} : \text{ إذن}$$

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

$$\text{وجدنا : } z_A^2 = |z_A|^2 e^{\frac{\pi}{6}i} = 8e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\text{إما : } z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i} \text{ , أو : } z_A = 2\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)i}$$

ولأن $A(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$ تقع في الربع الأول فالحل المقبول $z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

$$\text{إذن : } \arg(z_A) = \frac{\pi}{12}$$

من المساواة بين الشكل الأسّي والشكل الجبري : $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i} = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$

$$\text{نكتب : } 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$

$$\text{نستنتج أن : } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ و } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الرابع : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم

خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخصصين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها .

- طريقة أولى : عدد اللجان التي يمكن تأليفها من الأشخاص الخمسة يساوي : $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

عدد اللجان التي يجتمع فيها الشخصين المتخصصين معاً يساوي : $3 \times 3! = 18$

(توضيح : ثلاثة حالات للمتخصصين وشخص من الباقي وتبادلها ثلاثة)

عدد اللجان المطلوب : $60 - 18 = 42$

- طريقة ثانية : نرمز لمجموعة الأشخاص بالرمز $S = \{a, b, c, d, e\}$ حيث a و b متخصصان

بفرض A مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S \setminus \{a\}$ فيكون : $n(A) = P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

بفرض B مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S \setminus \{b\}$ فيكون : $n(B) = P_4^3 = 24$

$A \cap B$ هي مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S \setminus \{a, b\}$ فيكون : $n(A \cap B) = 3! = 6$

عدد اللجان المطلوب : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 + 24 - 6 = 42$

المسألة الأولى : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1 (ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع (C) بالنسبة إليه .

2 (ارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم (C) .

3 (بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$

$$\alpha = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$$

4 (احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

5 (استنتج مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

1 (f مستمر واشتقاقي على R .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 ; n \in \mathbb{N} \text{ ولما كانت}$$

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = (x+1)e^{-x}(2-x-1)$$

$$f'(x) = (x+1)(1-x)e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$$

إشارة المشتق تماثل إشارة $1-x^2$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \left(x = -1 : f(-1) = 0 \text{ , } x = 1 : f(1) = \frac{4}{e} \right)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0		

محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط (C) في جوار $+\infty$

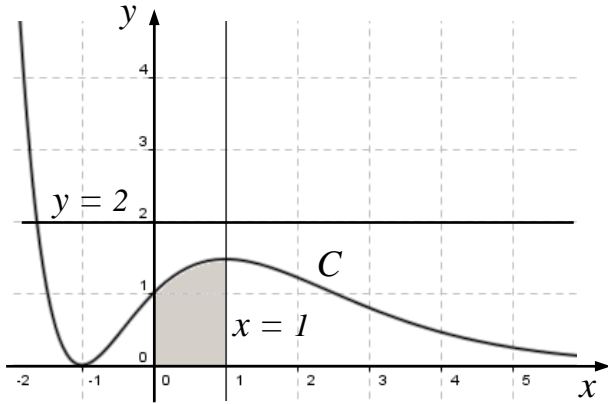
(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

الوضع النسبي : $f(x) - y = f(x)$

من جدول التغيرات نلاحظ أنه أيا كانت x من $R \setminus \{-1\}$ كان $f(x) > 0$

وبالتالي الخط C يقع دوماً فوق مقاربه

ويشتركان بالنقطة $(-1, 0)$



2 (الرسم : لدينا $f(-1)=0$ قيمة صغرى محلياً

و $f(1)=\frac{4}{e}$ قيمة كبرى محلياً .

ولدينا $f(0)=1$.

3 f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -1]$

و $2 \in f(]-\infty, -1]) = [0, +\infty[$

فالمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α في المجال $]-\infty, -1]$

ولما كان $2 \notin f(]-1, +\infty[) =]0, \frac{4}{e}[$

فليس للمعادلة $f(x)=2$ حلول في $]-1, +\infty[$

(أو : من الرسم نجد أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ يقطع الخط البياني C بنقطة وحيدة)

إذن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=2$.

لدينا : $f(-1)=0$ و $f(-2)=e^2$

ولأن : $0 \leq 2 \leq e^2$ أي $f(-1) \leq f(\alpha) \leq f(-2)$ فإن $\alpha \in [-2, -1]$

$$(\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2 \Rightarrow (\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha} \Rightarrow |\alpha+1| = \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$$

وبما أن $\alpha \leq -1$ فإن : $\alpha+1 = -\sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$ ومنه $\alpha = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$

4 (من الرسم نجد أن الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0, 1]$)

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx$$
 فالمساحة المطلوبة :

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

$$\begin{array}{l|l} u(x) = (x+1)^2 & v'(x) = e^{-x} \\ \hline u'(x) = 2(x+1) & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

$$A = \left[-(x+1)^2 e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 2(x+1)e^{-x} dx$$

$$A = \left[-4e^{-1} + 1 \right] + \int_0^1 2(x+1)e^{-x} dx \quad \dots (1)$$

$$I = \int_0^1 2(x+1)e^{-x} dx$$

$$\begin{array}{l|l} u_1(x) = 2(x+1) & v_1'(x) = e^{-x} \\ \hline u_1'(x) = 2 & v_1(x) = -e^{-x} \end{array}$$

$$I = \left[-2(x+1)e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$I = \left[-4e^{-1} + 2 \right] + \left[-2e^{-x} \right]_0^1$$

$$I = \left[-4e^{-1} + 2 \right] + \left[-2e^{-1} + 2 \right]$$

$$I = -6e^{-1} + 4$$

$$A = -4e^{-1} + 1 - 6e^{-1} + 4 = 5 - \frac{10}{e} = \frac{5}{e}(e-2)$$

5) التابع $g(x) = \ln(f(x))$ معرف عندما $f(x) > 0$

وحسب جدول تغيرات f تتحقق هذه المتراجحة في حال $x \neq -1$

أي مجموعة تعريف g هي $R \setminus \{-1\}$

ويكتب بالشكل : $g(x) = \ln \left[(x+1)^2 e^{-x} \right] = \ln(x+1)^2 + \ln e^{-x} = \ln(x+1)^2 - x$

$$g(x) = -x \Rightarrow \ln(x+1)^2 - x = -x \Rightarrow \ln(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 1$$

إما : $x_1 = 0$, أو : $x_2 = -2$

المسألة الثانية : لدينا n صندوقاً u_1, u_2, \dots, u_n حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة

حمراء وكل من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2

ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا , نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

(1) احسب $P(R_1)$.

(2) أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$

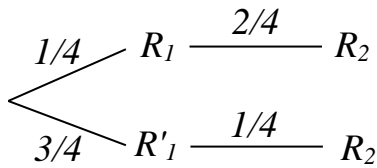
(3) أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$.

(4) نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{4}$

a . أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k \geq 1}$ هندسية . عين أساسها وحدها الأول .

b . اكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k .

(1) $P(R_1) = \frac{1}{4}$

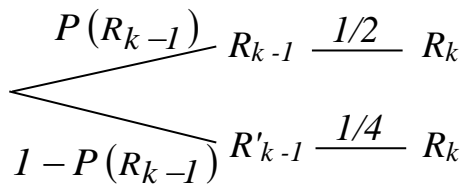


(2) حسب المخطط الشجري الموضح جانباً نكتب :

$$P(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$$



(3) في الحالة العامة عندما $k \geq 2$ لدينا المخطط الشجري :

$$P(R_k) = P(R_{k-1}) \times \frac{1}{2} + [1 - P(R_{k-1})] \times \frac{1}{4}$$

ومنه :

$$P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$$

(حلول اختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

$$: x_k = P(R_k) - \frac{1}{3} \text{ لدينا (4$$

. a

$$x_{k+1} = P(R_{k+1}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}P(R_k) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}P(R_k) - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \left[P(R_k) - \frac{1}{3} \right]$$

وبالتالي : $x_{k+1} = \frac{1}{4}x_k$ فالمتتالية $(x_k)_{k \geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

$$x_1 = P(R_1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \text{ : حدها الأول :}$$

. b

$$x_k = x_1 (q)^{k-1} = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1}$$

$$x_k = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k \text{ : إذن}$$

$$P(R_k) = \frac{1}{3} + x_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k$$

(انتهت حلول الاختبار 2 - ص 208 جزء ثاني)

(اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في R ثم بين أن $\alpha \in]-1, 0[$

السؤال الثاني : حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعروف بالصيغة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |x|$

احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (2)

السؤال الرابع : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء . عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة , وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين .

يسحب اللاعب كرتين على التوالي دون إعادة . ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط ؟

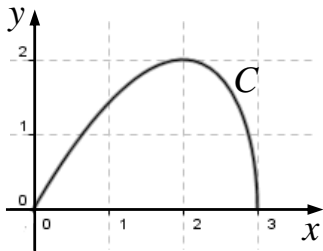
ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفتان كما يأتي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n} .$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان .

التمرين الثاني : في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع



المعرف على المجال $[0, 3]$ بالصيغة : $f(x) = x\sqrt{3-x}$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً S .

(1) ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوى عمودي على محور الفواصل

ويمر بالنقطة $I(x, 0)$ في حالة $x \in]0, 3[$ ؟

(2) عين $A(x)$, مساحة هذا المقطع بدلالة x , ثم استنتج V حجم المجسم S .

التمرين الثالث : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$, لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$

(1) اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عين (\mathcal{E}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .

(3) عين (\mathcal{F}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

التمرين الرابع : (نفس المسألة الثانية من النموذج الوزاري الرابع)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D, ABC)

ثالثاً - حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين . وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها .

2) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e^2}$.

المسألة الثانية : يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء . إذا صد ضربة الجزاء n

فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 , وإذا لم يصد ضربة الجزاء n

فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 .

نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 .

ليكن A_n الحدث " يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n "

1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$.

2. استنتج أن $P(A_2)=0.74$.

3. نعرف $p_n = P(A_n)$: $\textcircled{1}$ برهن أن : $p_{n+1} = 0.2 p_n + 0.6$

$\textcircled{2}$ نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$ بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية

أساسها 0.2 , استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

انتهت الأسئلة

① الصفحة

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في R ثم بين أن $\alpha \in]-1, 0[$

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x^3 + x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ومشتقه و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على R ولأن $0 \in f(R) = R$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ أي للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في R .

ولما كان $f(-1) = -1 < 0$ و $f(0) = 1 > 0$ أي $f(-1) \times f(0) < 0$ كان $\alpha \in]-1, 0[$

السؤال الثاني : حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

المعادلة $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ من الشكل $y' = ay + b$ وحلها من الشكل $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

إذن حلها : $y = k e^{\frac{x}{2}} + 1$ حيث $k \in R$

وبما أن حلها f يحقق $f(-1) = 2$ فإن $2 = k e^{\frac{-1}{2}} + 1$ ومنه $k = e^{\frac{1}{2}}$

إذن : $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 1$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |x|$

احسب النهايتين : ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 - |x|^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + |x|} = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)}$$

② الصفحة

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

$$x > 0 : f(x) = \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + 1}} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{2} = 1$$

$$x < 0 : f(x) = -\frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + 1}} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{2}{2} = -1$$

السؤال الرابع : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء . عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة , وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التوالي دون إعادة . ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط ؟

ينال اللاعب نقطة واحدة فقط في حال سحب كرة سوداء وكرة بيضاء

$$2 \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \right) = \frac{15}{28} : \text{الاحتمال المطلوب يساوي}$$

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفتان كما يأتي :

$$. \text{ أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان . } v_n = u_n + \frac{1}{4n} \text{ و } u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2 - 2n-1}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)} \right) - \left(u_n + \frac{1}{4n} \right)$$

الصفحة 3

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

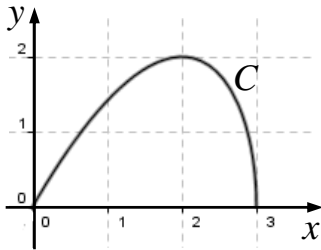
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{-1}{4n(n+1)} \\ &= \frac{2n - 2n - 1}{4n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

إذن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متناقصة تماماً

$$v_n - u_n = \frac{1}{4n} : \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

مما سبق نستنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n \geq 1}, (u_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان .



التمرين الثاني : في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع f

المعرف على المجال $[0, 3]$ بالصيغة : $f(x) = x\sqrt{3-x}$

عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل

يولد مجسماً دورانياً S .

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوى عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x, 0)$

في حالة $x \in]0, 3[$ ؟

② عين $A(x)$, مساحة هذا المقطع بدلالة x , ثم استنتج V حجم المجسم S .

① المقطع دائرة نصف قطرها $r = x\sqrt{3-x}$

② مساحة المقطع : $A(x) = \pi r^2 = \pi(3x^2 - x^3)$

$$V = \int_0^3 A(x) dx = \pi \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx$$

الحجم :

$$V = \pi \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \pi \left[(3)^3 \left(1 - \frac{3}{4} \right) - (0) \right] = \frac{27\pi}{4}$$

التمرين الثالث : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$, لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$

1) اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عين (\mathcal{E}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .

3) عين (F) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

$$1) \text{ بفرض : } z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ عندئذ : } z = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = \frac{\sqrt{3}i}{-i^2}$$

$$\text{الشكل الجبري : } z = \sqrt{3}i \text{ , الشكل الأسّي : } z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن : $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في A .

(أو : لأن z تخيلي بحث فالمثلث ABC قائم في A)

$$\text{نضع } u = \frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$$

2) تنتمي M إلى (\mathcal{E}) إذا فقط إذا كان $M = B$ أو $\arg(u) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$

وهذا يكافئ $M = B$ أو الزاوية الموجهة للشعاعين \vec{BM} و \vec{CM} تساوي $\pm \frac{\pi}{2}$

فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة $[BC]$ تحت زاوية قائمة باستثناء B

إذن : (\mathcal{E}) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ محذوفة منها النقطة B .

3) تنتمي M إلى (F) إذا فقط إذا كان $M = B$ أو $\arg(u) = 0 (\pi)$

وهذا يكافئ $M = B$ أو $(\vec{BM}, \vec{CM}) \in \{0, \pi\}$

مما يعني أن الشعاعين \vec{BM} و \vec{CM} مرتبطان خطياً

أي النقطة M تقع على المستقيم (BC) ومختلفة عن B . إذن $(F) = (BC) \setminus \{B\}$

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

- طريقة ثانية لحل الطلبين الثاني والثالث : بفرض $z_M = x + y i$

$$\text{نكتب : } u = \frac{z_M - z_C}{z_M - z_B} = \frac{(x - 3\sqrt{3}) + (y - 1)i}{(x - \sqrt{3}) + (y + 1)i} \quad (\text{بضرب البسط والمقام بمرافق المقام})$$

$$u = \frac{[(x - 3\sqrt{3}) + (y - 1)i] \cdot [(x - \sqrt{3}) - (y + 1)i]}{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$u = \frac{(x - 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + (y - 1)(y + 1)}{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \frac{-(x - 3\sqrt{3})(y + 1) + (y - 1)(x - \sqrt{3})}{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} i$$

$$u = \frac{x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 8}{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \frac{-2x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}}{(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} i$$

(2) يكون u تخيلياً بحتاً في حال : $x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 8 = 0$ بشرط $(x, y) \neq (\sqrt{3}, -1)$

$$\text{ومنه : } x^2 - 4\sqrt{3}x + (2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 + y^2 + 8 = 0$$

$$\text{أي : } (x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$$

إذن : (ε) هي الدائرة التي مركزها $(2\sqrt{3}, 0)$ ونصف قطرها 2 باستثناء النقطة $B(\sqrt{3}, -1)$ منها .

(3) يكون u حقيقياً في حال : $-2x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$ بشرط $(x, y) \neq (\sqrt{3}, -1)$

إذن : (F) هي المستقيم الذي معادلته $x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$ باستثناء النقطة $B(\sqrt{3}, -1)$ منه .

التمرين الرابع : (نفس المسألة الثانية من النموذج الوزاري الرابع)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D, ABC)

$$1) \text{ لدينا : } \vec{AB}(1,2,4): AB^2 = (1)^2 + (2)^2 + (4)^2 = 21$$

$$\vec{AC}(2,1,-1): AC^2 = (2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 = 6$$

$$\vec{BC}(1,-1,-5): BC^2 = (1)^2 + (-1)^2 + (-5)^2 = 27$$

نلاحظ أن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

$$\text{مساحته : } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{21} \times \sqrt{6} \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

$$2) \text{ لدينا : } \vec{n} \cdot \vec{AB} = (2)(1) + (-3)(2) + (1)(4) = 2 - 6 + 4 = 0 \text{ ومنه : } \vec{n} \perp \vec{AB}$$

$$\text{أيضاً : } \vec{n} \cdot \vec{AC} = (2)(2) + (-3)(1) + (1)(-1) = 4 - 3 - 1 = 0 \text{ ومنه : } \vec{n} \perp \vec{AC}$$

إذن : الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC .

معادلة المستوي (ABC) :

$$2x - 3y + z - 1 = 0 \text{ ومنه : } 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$$

$$3) h = \text{dist}(D, (ABC)) = \frac{|(2)(-4) + (-3)(2) + (1)(1) - 1|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}}$$

$$\text{ومنه : } h = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \text{ ويمثل ارتفاع رباعي الوجوه } (D, ABC)$$

$$\text{حجم رباعي الوجوه : } V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

$$\text{ومنه : } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{14} = 7$$

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[e, +\infty[\cup]0, e]$ وفق :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين . وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها .

2) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e^2}$.

1) f مستمر واشتقاقي على كل من المجالين $]0, e[$ و $]e, +\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$	\parallel	$+$	0
			$-$

• عند الصفر لدينا حالة عدم تعيين من النمط $0 \times \infty$ في المقام

لذا نكتب : $x(1 - \ln x) = x - x \ln x$

لما كان : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0^+$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

إذن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C .

• بما أن $\lim_{x \rightarrow e^-} x(1 - \ln x) = 0^+$ فإن : $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow e^+} x(1 - \ln x) = 0^-$ فإن : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$

إذن المستقيم الذي معادلته $x = e$ مقارب شاقولي للخط C .

• بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

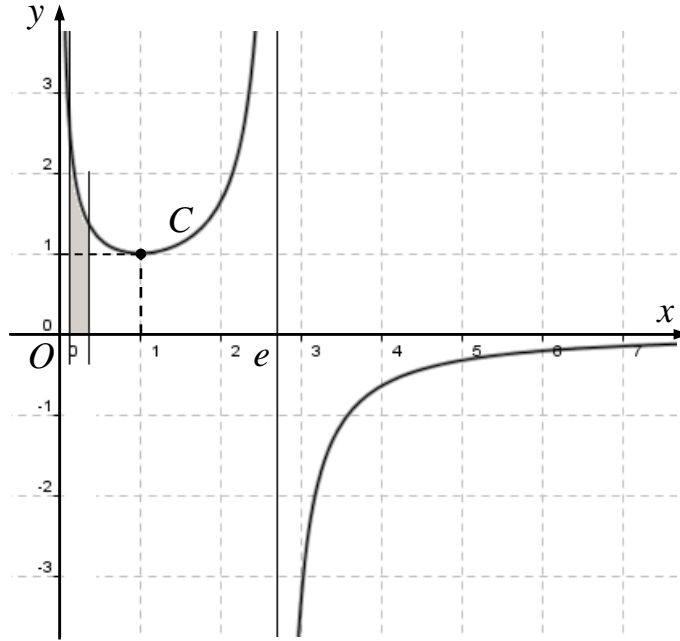
$$f'(x) = \frac{-(1 - \ln x) - \left(-\frac{1}{x}\right)x}{[x(1 - \ln x)]^2} = \frac{\ln x}{[x(1 - \ln x)]^2}$$

إشارة المشتق تماثل إشارة البسط $\ln x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ حيث $f(1) = 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

للتابع قيمة حدية محلية تساوي 1 يبلغها التابع عند $x = 1$ وهي قيمة صغرى محلياً

(2) الرسم :



(3) المساحة : $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$

حيث F التابع الأصلي للتابع : $f(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$ على المجال $I = \left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$

ولأن $1 - \ln x > 0$ على المجال I فإن : $F(x) = -\ln(1 - \ln x)$

ومنه : $F\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(1 + 1) = -\ln 2$ و $F\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(1 + 2) = -\ln 3$

إذن : $A = -\ln 2 + \ln 3 \Rightarrow A = \ln \frac{3}{2}$

المسألة الثانية : يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء . إذا صد ضربة الجزاء n

فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 , وإذا لم يصد ضربة الجزاء n

فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 .

نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 .

ليكن الحدث " A_n يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n "

1 . احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$.

2 . استنتج أن $P(A_2)=0.74$.

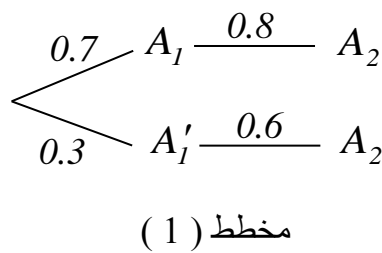
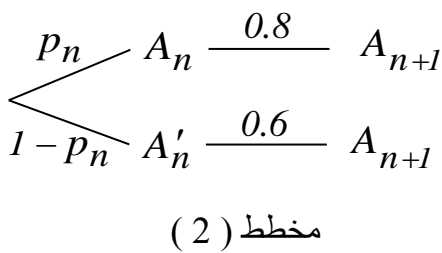
3 . نعرف $p_n = P(A_n)$:

① برهن أن : $p_{n+1} = 0.2 p_n + 0.6$

② نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$

بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2

استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.



1 . حسب معطيات المسألة : $P(A_2|A_1)=0.8$ و $P(A_2|A_1')=0.6$

2 . حسب المخطط (1) : $P(A_2)=0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 \Rightarrow P(A_2)=0.74$

أو باستخدام القوانين :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1' \cap A_2)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(A_1') \cdot P(A_2|A_1')$$

$$P(A_2) = 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 = 0.74$$

(حلول اختبار 3 - ص 210 جزء ثاني)

3. ① حسب المخطط (2) :

$$p_{n+1} = 0.8 p_n + 0.6 (1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = 0.2 p_n + 0.6$$

② لدينا $u_n = p_n - 0.75$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75 = 0.2 p_n + 0.6 - 0.75$$

$$u_{n+1} = 0.2 p_n - 0.15 = 0.2 (p_n - 0.75)$$

$$u_{n+1} = 0.2 u_n = q u_n$$

إذن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = 0.2$

$$u_1 = p_1 - 0.75 = 0.70 - 0.75 = -0.05 \quad \text{حدها الأول :}$$

$$\text{وبالتالي : } u_n = u_1 (q)^{n-1}$$

$$\text{ومنه : } u_n = -0.05 (0.2)^{n-1} = -0.25 (0.2)^n$$

$$p_n = 0.75 + u_n = 0.75 - 0.25 (0.2)^n$$

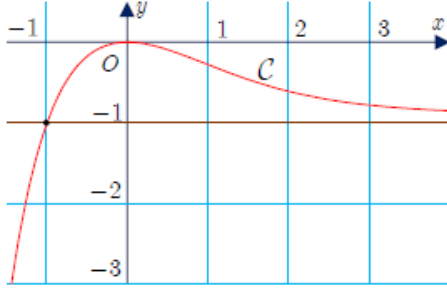
$$\text{بما أن } -1 < q = 0.2 < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0.2)^n = 0$$

$$\text{ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0.75$$

(انتهت حلول الاختبار 3 - ص 208 جزء ثاني)

(اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (40° لكل سؤال)



السؤال الأول : في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f

من خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

① ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟

وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

② يقبل f قيمةً حديةً محلياً . عينها وعين نوعها .

③ في حالة عدد حقيقي k , عين بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.

السؤال الثاني : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

① ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S ؟

② ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5

وأصغر من 500 ؟

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(3, -2, 2)$ و $B(6, 1, 5)$ و $C(6, -2, -1)$ و $D(0, 4, -1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية : ① المثلث ABC قائم .

② المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) . ③ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$.

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x \cdot e^{-x}$

① احسب $\int_0^{\ln 3} f(x) dx$ ② أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

التمرين الثاني : المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق :

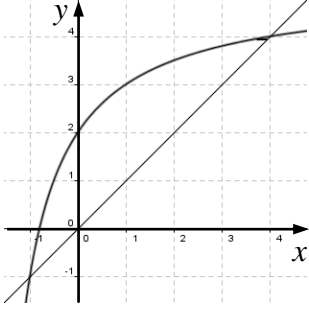
$$L' : \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}, s \in R \quad \text{و} \quad L : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in R$$

① أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

② أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L' .

التمرين الثالث : نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

① باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3



② ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وتقاربها .

③ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$

1 . بين أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2 . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n .

التمرين الرابع : نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية : $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$

و $d = 3$ بالترتيب . والمطلوب :

① ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

③ أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.

ثالثاً - حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

① أثبت $f(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$ يكتب بالشكل :

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = -2x \ln x$

أثبت أنه عندما $x > 1$ يكون $f(x) - g(x) = x f'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_g و C_f .

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0, +\infty[$

① بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y = x f'(x_0) - g(x_0)$

② ادرس تقاطع المماس T مع محور الترتيب , ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس T للمنحني C_f عند نقطة فاصلتها x_0

المسألة الثانية : نتأمل صندوقين . يحتوي الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 1, 2, 3

ويحتوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد 2, 3, 4, 5

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

① اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

② ليكن A الحدث إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم (3)

وليكن B الحدث مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علل إجابتك .

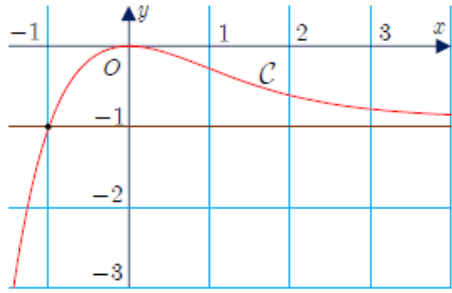
③ نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه .

1 الصفحة

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

أولاً - أجب عن الأسئلة الآتية : (40° لكل سؤال)



السؤال الأول : في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f

من خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

① ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟

وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

② يقبل f قيمةً حديةً محلياً . عينها وعين نوعها .

③ في حالة عدد حقيقي k , عين بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.

① المستقيم d الذي معادلته : $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

في حال $x \in]-\infty, -1[$ يكون C تحت المقارب d .

في حال $x \in]-1, +\infty[$ يكون C فوق المقارب d .

ويشترك C و d بالنقطة $(-1, -1)$.

② إن : الصفر قيمة كبرى محلياً يبلغها التابع عند $x = 0$.

③ عندما $k \in]-\infty, -1] \cup \{0\}$ يكون للمعادلة حل واحد .

عندما $k \in]-1, 0[$ يكون للمعادلة حلين مختلفين .

عندما $k \in]0, +\infty[$ ليس للمعادلة حلول .

السؤال الثاني : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

① ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S ؟

② ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها

من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

① عدد الأعداد المختلفة يساوي : $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

② الأحاد (5) يتم اختياره بطريقة واحدة والمئات (2 أو 3) يتم اختياره بطريقتين

والعشرات يتم اختياره بأربعة طرائق , وبالتالي عدد الأعداد يساوي : $1 \times 4 \times 2 = 8$

طريقة ثانية : مجموعة الأعداد التي تحقق المطلوب هي :

$n(A) = 8$, وعددتها : $A = \{235, 265, 275, 295, 325, 365, 375, 395\}$

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(3, -2, 2)$ و $B(6, 1, 5)$ و $C(6, -2, -1)$ و $D(0, 4, -1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية :

- ① المثلث ABC قائم .
- ② المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
- ③ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$.

① لدينا : $\vec{AB}(3, 3, 3): AB^2 = (3)^2 + (3)^2 + (3)^2 = 27$

$\vec{AC}(3, 0, -3): AC^2 = (3)^2 + (0)^2 + (-3)^2 = 18$

$\vec{BC}(0, -3, -6): BC^2 = (0)^2 + (-3)^2 + (-6)^2 = 45$

نلاحظ أن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

فالمقولة صحيحة .

② لدينا : $\vec{AD}(-3, 6, -3)$

وبالتالي $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = (-3)(3) + (6)(3) + (-3)(3) = -9 + 18 - 9 = 0$ ومنه : $\vec{AD} \perp \vec{AB}$

أيضاً $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = (-3)(3) + (6)(0) + (-3)(-3) = -9 + 0 + 9 = 0$ ومنه : $\vec{AD} \perp \vec{AC}$

إذن الشعاع \vec{AD} ناظم على المستوي (ABC)

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

فالمقولة صحيحة .

③ حجم رباعي الوجوه : $V = \frac{1}{3} S(ABC) \cdot AD$

حيث : $S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

أيضاً : $AD^2 = (-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2 = 54 \Rightarrow AD = 3\sqrt{6}$

وبالتالي : $V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27$

فالمقولة خاطئة .

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

ثانياً - حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x \cdot e^{-x}$

$$\textcircled{1} \text{ احسب } \int_0^{\ln 3} f(x) dx$$

② أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

$$\textcircled{1} \text{ نكامل بالتجزئة : } I = \int_0^{\ln 3} x \cdot e^{-x} dx$$

$u(x) = x$	$v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$	$v(x) = -e^{-x}$

$$I = [-x \cdot e^{-x}]_0^{\ln 3} + \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx$$

$$I = [-\ln 3 \times e^{-\ln 3} + 0] + [-e^{-x}]_0^{\ln 3}$$

$$I = \left[-\frac{1}{3} \ln 3\right] + \left[-\frac{1}{3} + 1\right] = \frac{1}{3}(2 - \ln 3)$$

$$y' + y = (x \cdot e^{-x})' + x \cdot e^{-x} = e^{-x} - x \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} = e^{-x} \quad \textcircled{2}$$

التمرين الثاني : المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق :

$$L': \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}, s \in R \quad \text{و} \quad L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in R$$

① أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

② أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L' .

① نحل جملة معادلاتهما حلاً مشتركاً :

$$\begin{cases} -1 = 4 - 5s \Rightarrow s = 1 \quad \dots (1) \\ 1 - t = 3 - 2s \quad \dots (2) \\ 1 - 2t = -1 + 2s \quad \dots (3) \end{cases}$$

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

نعوض (1) في (2) فنجد : $t=0$

وبالتالي $(t,s)=(0,1)$ حل لجملة المعادلتين (1) و (2)

نعوض هذا الحل في (3) فنجد : $1-0=-1+2 \Rightarrow 1=1$

وبالتالي هذا الحل هو أيضاً حل لـ (3)

فالمستقيمين L و L' متقاطعين في النقطة $A(-1,1,1)$.

② لدينا $\vec{u}(0,-1,-2)$ شعاع موجه للمستقيم L , و $\vec{u}'(-5,-2,2)$ شعاع موجه للمستقيم L' .

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي المحدد بالمستقيمين L و L' , عندئذٍ :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -b - 2c = 0 \Rightarrow b = -2c \quad \dots (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}' = 0 \Rightarrow -5a - 2b + 2c = 0 \quad \dots (2)$$

نفترض $c=1$ وبالتعويض في (1) نجد : $b=-2$

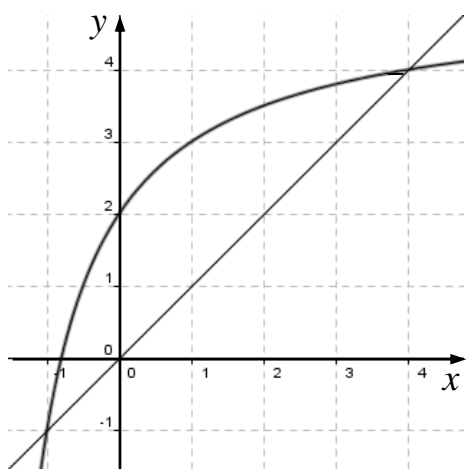
$$-5a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{5}$$

إذن : $\vec{n}\left(\frac{6}{5}, -2, 1\right)$ والنقطة $A(-1,1,1)$ من المستوي المطلوب فمعادلته :

$$6x - 10y + 5z + 11 = 0 \quad \text{ومنه} \quad \frac{6}{5}(x+1) - 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

* ملاحظة : يوجد طرائق أخرى لإيجاد معادلة المستوي .

التمرين الثالث : نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$



① باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب

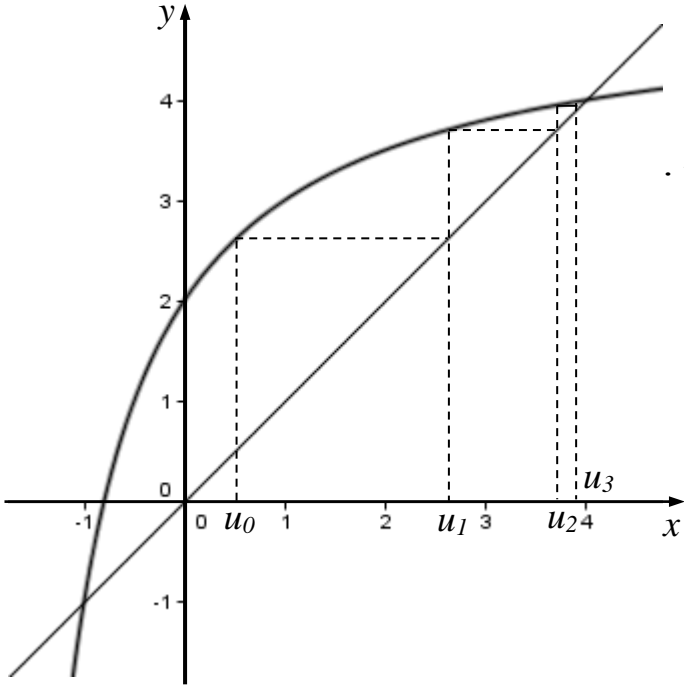
الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

② ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وتقاربها .

③ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$

1 . بين أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2 . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n , وعين نهاية المتتالية u_n .



1 التمثيل .

2 نلاحظ أن حدود المتتالية تزداد

لذا نؤمن أنها متتالية متزايدة وتتقارب من العدد 4 .

3 1 .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4}{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{5u_n + 4 + u_n + 2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

إذن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{0.5 - 4}{0.5 + 1} = -\frac{7}{3}$$

$$v_n = v_0 q^n = -\frac{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n . 2$$

لدينا $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$ ومنه $v_n \cdot u_n + v_n = u_n - 4$ وبالتالي $4 + v_n = (1 - v_n)u_n$

$$u_n = \frac{4 + v_n}{1 - v_n} = \frac{4 - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 + \frac{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{12 - 7 \left(\frac{1}{6}\right)^n}{3 + 7 \left(\frac{1}{6}\right)^n} : \text{ إذن}$$

وبما أن $-1 < \frac{1}{6} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{12}{3} = 4 \text{ إذن}$$

⑥ الصفحة

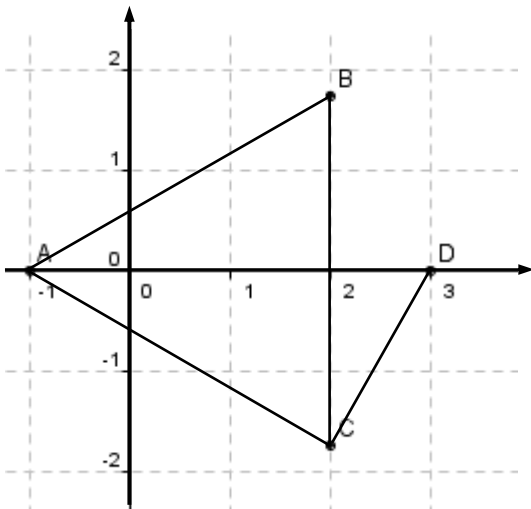
(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

التمرين الرابع : نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية : $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$ و $d = 3$ بالترتيب . والمطلوب :

① ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

③ أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.



$$AB = |b - a| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3} \quad ①$$

$$BC = |c - b| = |0 - 2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |c - a| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$$

نلاحظ أن $AB = BC = AC$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}} = i\sqrt{3} \quad ②$$

ومنه : $\arg \frac{a-c}{d-c} = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ فالمثلث DAC قائم في C .

$$\frac{-a + 2b + 2c}{-1 + 2 + 2} = \frac{1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3}}{3} = 3 = d \quad ③$$

إذن : D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.

المسألة الأولى :

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

① أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل : $f(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = -2x \ln x$

أثبت أنه عندما $x > 1$ يكون $f(x) - g(x) = x f'(x)$

واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0, +\infty[$

① بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y = x f'(x_0) - g(x_0)$

② ادرس تقاطع المماس T مع محور الترتيب , ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس T للمنحني C_f

عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

أولاً :

① $f(x) = (\sqrt{x})^2 \left[\ln(\sqrt{x})^2 \right]^2 = (\sqrt{x})^2 \left[2 \ln(\sqrt{x}) \right]^2$

إذن : $f(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$

② التابع f مستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{u \rightarrow 0} (u \ln u) = 0$ = $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \ln \sqrt{x})$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4(0)^2 = 0$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2(\ln x) \times \frac{1}{x} x = (\ln x + 2) \ln x$$

إشارة المشتق تماثل إشارة كثير الحدود $t^2 + 2t$ حيث $t = \ln x$

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

ينعدم المشتق عندما : $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$: $\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

أو : $f(1) = 0$: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$		

ثانياً : لدينا : $g(x) = -2x \ln x$

$$x f'(x) = x [(\ln x)^2 + 2 \ln x] = x (\ln x)^2 + 2x \ln x$$

ومنه : $f(x) - g(x) = x f'(x)$

عندما $x > 1$ فإن $f'(x) > 0$ على المجال $]1, +\infty[$ وبالتالي : $x f'(x) > 0$

ومنه : $f(x) - g(x) > 0$

إذن C_f يقع دوماً فوق C_g على المجال $]1, +\infty[$

ثالثاً : لدينا x_0 من $]0, +\infty[$

① معادلة المماس T للمنحني C_f في x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \dots (1)$$

حسب ما سبق : $f(x_0) - g(x_0) = x_0 f'(x_0)$

ومنه : $f(x_0) - x_0 f'(x_0) = g(x_0)$

نعوض في (1) فنجد : $y = x f'(x_0) + g(x_0)$

② التقاطع : $y_0 = g(x_0) = -2x_0 \ln x_0$ حيث $x_0 > 0$

وبالتالي المماس T يقطع محور الترتيب بالنقطة $(0, -2x_0 \ln x_0)$

يتم إنشاء المماس T برسم مستقيم يمر من النقطتين $(0, -2x_0 \ln x_0)$ و $(x_0, x_0 (\ln x_0)^2)$

المسألة الثانية : نتأمل صندوقين . يحتوي الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 1 , 2 , 3

ويحتوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد 2 , 3 , 4 , 5

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

① اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

② ليكن A الحدث إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم (3)

وليكن B الحدث مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علل إجابتك .

③ نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه .

① ننظم جدولاً لفضاء العينة :

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

② لدينا : $A = \{(1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)\}$ ومنه $n(A) = 6$

ولدينا : $B = \{(1,5), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$ ومنه $n(B) = 6$

وبالتالي : $A \cap B = \{(3,3), (3,4), (3,5)\}$ ومنه $n(A \cap B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ لما كان } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

إذن الحدثان A و B مستقلان احتمالياً

(حلول اختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)

3) مجموعة قيم المتحول العشوائي : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

بالاستعانة بجدول فضاء العينة نكتب جدول القانون الاحتمالي الآتي :

x	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع :

$$E(X) = \frac{1}{12}(3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 2 + 8 \times 1) \Rightarrow E(X) = \frac{66}{12} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{12}(9 \times 1 + 16 \times 2 + 25 \times 3 + 36 \times 3 + 49 \times 2 + 64 \times 1) \Rightarrow E(X^2) = \frac{386}{12}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{386}{12} - \frac{121}{4} \Rightarrow V(X) = \frac{23}{12} \quad \text{التباين :}$$

(انتهت حلول الاختبار 4 - ص 212 جزء ثاني)