إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين كتاب الرياضيات

الصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الأول

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) صـ ١٥

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ١$ ، ٢) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ ٢٠

تدريب (٢) : صـ ١٦

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٢$ ، ٢) $\lim_{س \to ١^-} م(س)$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٢$ ، ٤) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٢$

تمارين ومسائل

صـ ١٧

أ) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$ ، ب) $\lim_{س \to ٦^-} م(س) = ٢$

جـ) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ١$ ، د) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ ٢٠

هـ) $\lim_{س \to ٨^+} م(س) = -٦$ ، و) $\lim_{س \to ٨^-} م(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١} م(س) =$ لهـ

٢) أ) س $\to$ ٤ ، ب) $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) =$ لهـ

جـ) $\lim_{س \to ٤^-} ل(س)$ غير موجودة ، د) $\lim_{س \to ٤} ل(س)$ غير موجودة

هـ) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to 0^+} ن(س) = \lim_{س \to 0^-} ن(س) = ٧$

د) $ك = \{-١، ١\}$ هـ) $ك = \{-٢، ٤\}$

و) $ا \in (-١، ١) \cup \{-٢، ٢، ٣\}$ ز) $ا \in [-١، ١] \cup \{-٢، ٢، ٣\}$

ثانيًا: نظريات النهايات

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٢} (ن(س) + ه(س) \times س) = \lim_{س \to -٢} ن(س) + \lim_{س \to -٢} ه(س) \times \lim_{س \to -٢} س$

$= -٣ + ١٠ \times -٢$

$= -٣ + ٢٠ = ١٧$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ه(س)}{ن(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} ه(س)}{\lim_{س \to ١} ن(س)} = \frac{٢}{٢} = ١$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt{ن(س)} + \sqrt{ه(س)} + \lim_{س \to ١} ١٥$

$= \sqrt{٢} + \sqrt{٣ \times ٢} + ١٥$

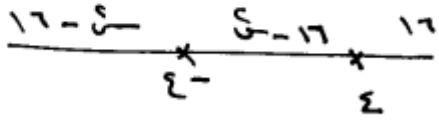
$= \sqrt{٤} + ١٥$

تدريب (٢)

١) نهـا | س − ٨ | = | ٠ − ٨ | = ٨
س ← ٠

٢) نهـا | س − ١٦ | = صفر
س ← ١٦

٣) نهـا | س٢ − ١٦ | = ٠
س ← ٤ لأن :

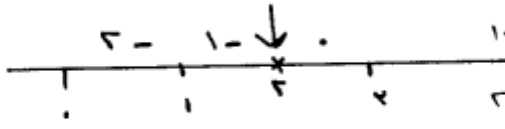


نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤+

نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤−

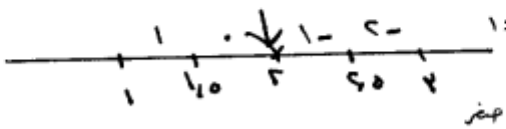
تدريب (٣)

١) نهـا [س − ٢]
س ← ١



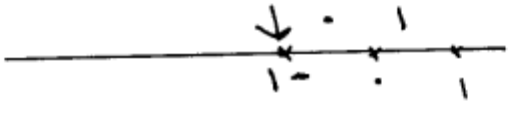
∴ غ ∉ ٣

٢) نهـا [٤ − ٢س]
س ← ١٫٥

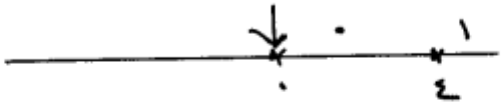


∴ غ ∈ ٣

٣) نهـا [س + ١] = ١
س ← ٠



٤) نهـا [٠٫٥ س]
س ← ٤



غ ∉ ٣ لأن

نهـا [٠٫٥ س] = ١ ، نهـا [٠٫٥ س] = صفر .
س ← ٤+ ، س ← ٤−

تدريب (٤)

أ) ١ ، ٥ ، ٣ ب) س = ٥ (٢،٣)

تدريب (٥)

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢}$ غ ٠ ٢ ٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٢}{س-٢}$ غ ٠ ٢

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{س-٥}$ غ ٠ ٢ لأن $\lim_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س-٥}$ = موجب

$\lim_{س \to ٥^-} \frac{س-٥}{س-٥}$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٧} \frac{س-٥}{س-٥} = \frac{٤٩-٥}{٤٩-٥} = \frac{٤٤}{٤٤}$

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠} م(س) =$ ضفر $\lim_{س \to ٤^+} م(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٤} م(س)$ غ ٠ ٢

تدريب (٧)

١) $\lim_{س \to ١} م(س)$ غ ٠ ٢ ٢) $\lim_{س \to ١} ل(س)$ غ ٠ ٢

٣) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ٢ل(س)) = ٨$

١) $\lim_{س \to ١^+}$ ف(س) غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+}$ ف(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ١^-}$ ف(س) = ٥

٢) $\lim_{س \to ١}$ ل(س) غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+}$ ل(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١^-}$ ل(س) = ٣

٣) $\lim_{س \to ١}$ (ف(س) + ل(س)) = ٨ لأن :

$\lim_{س \to ١^+}$ (ف(س) + ل(س)) = ٦ + ٢ = ٨ ، $\lim_{س \to ١^-}$ (ف(س) + ل(س)) = ٥ + ٣ = ٨

تمارين ومسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ن(س)) = -٦ + ٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ن(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٢} ن(س)^{٤} = \left(\lim_{س \to ٢} ن(س)\right)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{١ - ن(س)} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} (١ - ن(س))} = \sqrt{١ - ٣} = \sqrt{٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{ن(-١)}{م(-١)} = \frac{-٤}{٠} =$ غير معرف

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٤ع(س) + ن(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\frac{٥}{٢٤}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) أ) $\lim_{س \to ٥+} |س - ١٢٥| =$ غير معرف ب) $\lim_{س \to ٥-} |س - ١٢٥| =$ غير معرف

ج) $\lim_{س \to ٥} |س - ١٢| =$ غير معرف د) $\lim_{س \to ٧} |س - ٤٦| =$ غير معرف

هـ) $\lim_{س \to -٤} [س - ٢]$ غير معرف و) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س|)$ غير معرف

ز) $\lim_{س \to 0^-} \frac{|س|}{س} =$ غير موجود ح) $\lim_{س \to 1} \frac{|س-1|}{س-1}$ غير موجود

ط) $\lim_{س \to -2} \frac{س^2+3س+2}{س+2} = \lim_{س \to -2} \frac{(س+1)(س+2)}{س+2} = \lim_{س \to -2} |س+1| =$ غير موجود

٤) إذا $ب \in [6, 5]$

٥) $ب \in (-0.5, 0)$

٦) بما أن $\lim_{س \to 2} م(س)$ موجود $\Rightarrow \lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^-} م(س)$

$٩ - ٤ب = ٣$ وكذلك $٩ - ٢ = ٤ب$

$٦ = ٤ب \Leftarrow ب = \frac{٦}{٤}$

٧) ط) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2-3س+2}{س-2}$ اذا فرضنا $ص = س-2$

$\lim_{ص \to 0} ن(ص) = ١$ $س \to 2 \Rightarrow ص \to 0$

ي) $\lim_{س \to 2} (س \times ن(س)) = \lim_{س \to 2} س \times \lim_{س \to 2} ن(س) = ٢ \times ١ = ٢$

ك) ط) $\lim_{س \to 1} م(س) + \lim_{س \to 1} غ(س)$ لان النهايتين منفصلتين

$= ٠ + ٢ = ٢$

ل) $\lim_{س \to 1} م(س) \times \lim_{س \to 1} غ(س) = ١ \times ١ = ١$

م) اذا فرضنا $ص = س - ١$ $س \to ١ \Rightarrow ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to 0} ٢م(ص) + \lim_{س \to 1} غ(س) = ٤ + ٢ = ٦$

٩) $\lim_{س \to -٢} (س - ل(س)) = -١٠$

$-٢ - \lim_{س \to -٢} ل(س) = -١٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to -٣} ل(س) = -٢ + ١٠ = ٧$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ل(س)) = (\lim_{س \to -٢} ٥س)^{٢} - \lim_{س \to -٢} ٥ل(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤٢(س) + ٤ - س^{٣}) = \lim_{س \to ٢} ٤٢(س) + \lim_{س \to ٢} ٤ - س^{٣}$

$= ٣ \times ٥ + ١٦$

$= ١٥ + ١٦ = ٣١$

ثالثا : نهايات اقترانات كسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{(س+٥)} = -٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ١}{س - ٢}$ غ.م

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{١}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س - ٥}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{٥ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-(٢س - ٥)}{٥س(س-٥)(س+٥)} = \frac{-٢}{٥} \times \frac{١}{١٠} = \frac{-٢}{٥٠}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{٣س + ٣٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{٣س + ٣٤} + ٦}{\sqrt{٣س + ٣٤} + ٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س + ٣٤} + ٦)}{٣س + ٣٤ - ٣٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س + ٣٤} + ٦)}{(٣س)} = ١٢$

$$\text{ج) } \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+1} - \sqrt{1-2س^2}}{س} \times \frac{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{(س^2+1) - (1-2س^2)}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{3س^2}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})} = \frac{3}{2}$$

تدريب (٣)

$$\text{أ) } \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}} = \lim_{س \to 2^+} \sqrt{\frac{س-2}{(س-2)(س+2)}} = \lim_{س \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{س+2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س-2}}$ غير موجود لأن المقام غير معرف لـ $س$ يساوي العدد 2

تدريب (٤)

$$\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{س-1} \times \frac{\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)}{\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س+1)-8}{(س-1)\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3+3+4}$$

تمارين ومسائل

ا) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{س - ٨} = \lim_{س \to ٨} \frac{(س+١٠)(س-٨)}{س-٨}$

$= ١٨$

ب) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س} - ٢}{\frac{س}{٤} - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{\frac{١}{٢}(س-٨)}{(س-٨)} \times \frac{١}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \frac{-٢}{٤+٤+٤} = \frac{-ج}{١٢}$

د) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(٢+س)^{٢}} - \frac{١}{٤} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٢+س)^{٢}}{٤(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-٤(٣+٣س+س^{٢})}{٤(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-٣-٣س-س^{٢}}{(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س(٣+س)}{٤(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{-١ \times (٣+س)}{٤(٢+س)^{٢}}$

$= \frac{-٣}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س + ١| - ٥}{س^٢ + ٧} = \lim_{س \to -٢} \frac{٣س + ١ - ٥}{س^٢ + ٧}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س - ٤)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)} = \frac{-٦}{١٢} = -\frac{١}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س|س + ١|}{٩ - ٣س} \times \frac{٦ + س|س + ١|}{٦ + س|س + ١|}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^٤(س + ١)}{(٩ - ٣س)(٦ + س|س + ١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٣٦ - س^٤ - س^٥}{٣(٣ - س)(٦ + س|س + ١|)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(-س^٤ - ٤س - ١٢)}{٣(٣ - س)(٦ + س|س + ١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٤ + ٤س + ١٢}{٣(٦ + س|س + ١|)}$

$= \frac{٩ + ١٢ + ١٢}{٣(٦ + ٦)} = \frac{٣٣}{٣٦}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{|س^٢ - ١٠س + ٢٥|}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|(س - ٥)^٢|}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{س - ٥}{س - ٥} = ١$ ، $\lim_{س \to ٥^-} \frac{٥ - س}{س - ٥} = -١$

اذن $\lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$ غ.م

ن) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$ ع٠م لأن البسط والمقام غير معرّفان في فترة مفتوحة حولي العدد ١

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س^٣ - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢ + س + ٤)}{(س-١)(س+١)} = \frac{٦}{٢} = ٣$

د) $\lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}} = \lim_{س \to ٧^+} \sqrt{\frac{س^٢ - ٤٩}{س - ٧}} = \lim_{س \to ٧^+} \sqrt{\frac{(س-٧)(س+٧)}{(س-٧)}}$

$= \lim_{س \to ٧^+} \sqrt{س + ٧} = \sqrt{١٤}$

ه) $\lim_{س \to ٥،٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٥٢}$ لابدّ من إيجاد النهاب من جهة اليسار العدد ٥،٥

$\lim_{س \to ٥،٥^+} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٥٢} = \lim_{س \to ٥،٥^+} \frac{٢س - ٥}{(٢س-٥)(٢س+٥)} = \lim_{س \to ٥،٥^+} \frac{١}{(٢س+٥)} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to ٥،٥^-} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٥٢} = \lim_{س \to ٥،٥^-} \frac{٢س - ٤}{(٢س-٥)(٢س+٥)}$ ← ع٠م

$\therefore \lim_{س \to ٥،٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٥٢}$ ع٠م

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}} = \frac{2}{2} = 1$

٢) بما أن النهاية موجودة $\therefore$ م(٢) + ٥ = صفر $\Leftarrow$ م(٢) = -٥

$\lim_{س \to 2} [م(س) - ٢س + ٣ب] = ٧$

$م(٣) - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow -٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ١١$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow ب = ٦$

٣) بما ان النهاية موجودة اذاً

$\lim_{س \to ٣^+} م(س) = \lim_{س \to ٣^-} م(س)$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{٢-س}{٣-س} = -١ = \lim_{س \to ٣^-} هـ س^2 - ٤ = ٩هـ - ٤$

$٩هـ - ٤ = -١ \Leftarrow ٩هـ = ٣ \Leftarrow هـ = \frac{١}{٣}$

٤) لإثبات النهاية موجودة

$$\begin{array}{c|ccc} & أ & ٢أ & ٢ \\ \hline ① & أ & (أ+٢ب) & \\ \hline & أ & (أ+٢ب) & أ+٢ب+٢ \end{array}$$

$$أ + ٢أ + ٢ = ٠ \quad \cdots ①$$

$$أ + أ + ٢ب = ١$$

$$٢أ + ٢ب = ١ \quad \cdots ②$$

بحل المعادلتين ① ، ②

$$أ = ٣ \quad ، \quad ب = -\frac{٥}{٢}$$

٥) $$\lim_{س \to ٠} \frac{٨^{س} - ١}{(٢٤)^{س} - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{٨^{س} - ١}{٨^{س} - ٨^{س}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨^{س}(١ - ٨^{-س})}{(١ - ٨^{-س})} = \lim_{س \to ٠} ٨^{س} = ١$$

٦) لإثبات النهاية موجودة

$$\lim_{س \to ٠} ه(س) = \lim_{س \to ٠} ل(س)$$

$$س \to ع^{+} \qquad س \to -ع$$

$$\frac{ع^{٢} - ٧ع}{٥ع^{٣} + ٦ع + ١٨} = ع + ٥$$

$$\frac{(ع - ٢)(ع^{٢} + ٤ع + ٩)}{٢(ع^{٣} + ٣ع + ٩)} = ع + ٥$$

$$ع - ٢ = ٢ع + ١٠ \Leftarrow -ع = ١٢ \Leftarrow ع = -١٢$$

٧) النهاية غير موجودة عند الصفر لعدم

$$س^{٤} - ٥س + ٦ = ٠ \quad (س - ٢)(س - ٣) = ٠$$

$$\text{ف} \quad ٢ ، ٣$$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٤ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} = ٢ب - ٥$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)} \cdot \frac{س-١}{ق(س)-٦} = ٢ب - ٥$ بضرب البسط والمقام $\times -١$

$\frac{٤}{٨} = ٢ب - ٥ \Leftarrow \frac{١}{٢} = ٢ب - ٥ \Leftarrow ب = ١$

٩) نجد ان المماسية موجودة اذاً $د(٠) + ٥ = صفر$

$\lim_{س \to ٠} (د(س) - ٥ + ٣ب) = ٢ \Leftarrow -٥ - ٥ + ٢ب = ٢$

$٢ب = ٢ + ١٠$

$ب = ٤$

رابعًا : نهايات اقترانات مثلثية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} ٢س}{س} = ٢$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{(س - \pi)} = ١$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س} = ١$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{٢}} = ١$

تدريب (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٢س + \text{ظا}٥س}{٣س - ٤\text{ظا}س}$ نقسم بسط ومقام الكسر على س

$$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - \frac{\text{جا}٢س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{٣ - ٤\frac{\text{ظا}س}{س}} = \frac{١ - ٢ + ٥}{٣} = \frac{٤}{٣} = ١\frac{١}{٣}$$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢})}{س^٢}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢}}{س^٢} = ٢ \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س + \text{جا}٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س}$

$$= ٨ + ٤ = ١٢$$

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } س}{\frac{\pi}{2} - س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)} = ١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{2} س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} س)}{-(س - ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا} \frac{\pi}{2}(١ - س)}{(١ - س)} = \frac{\pi}{2}$

تمارين وصائل

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٨س}{س} = \frac{٨}{١}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} س + \text{ظا}٢س - \text{جا} س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (\text{قا} س + \text{ظا}٥س) = \lim_{س \to ٠} \text{قا} س + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}٥س$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٧ س^{٢} \text{ظتا}^{٢}(٥س) \text{قتا}٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٧ س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}(٥س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}٥س} = ٧ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٢٠}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - (\text{جتا}^{٢}س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٤س - \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}} - ٢\text{جا}٣س \text{جا} س$

$= -٦ \times ١ = -٦$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{س \text{ ظا} س} \times \frac{1 + \text{جتا}\, س}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س \text{ ظا} س (1 + \text{جتا}\, س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٧) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جتا}\, س}{2 س - 2\pi} = \frac{-1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س - \text{جا} س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - 2س)^2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - س)^2} \times \frac{1 + \text{جا} س}{1 + \text{جا} س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{4 (\pi - س)^2 (1 + \text{جا} س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{4 (\pi - س)^2 (1 + \text{جا} س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\pi - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\pi - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \text{جا} س}$

$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - 1}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\tan 2x + 1}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\tan 2x + 1} \times \frac{\tan 2x + 1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan 2x + 1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\tan x}$$

$$= 1 + 2 \times \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{ظا \frac{\pi}{٤}(س-١)}{س^٢-١} = \lim_{س \to ١} \frac{ظا \frac{\pi}{٤}(س-١)}{(س-١)(س+١)} = \frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٨}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٣س} \times ٣ = ١ \times ٣ = ٣$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س}{\pi - ٢س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٤س} + \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{٢س} = \frac{٣}{٤} + ١ = ١\frac{٣}{٤}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س(ظا ٣س + ظتا ٣س)}{س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{جتا ٣س} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا ٢س}{١ + جتا ٢س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{جتا ٢س + ١}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٢س - ١}{س} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا^٢ ٢س}{س(١ + جتا ٢س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{جتا ٢س + ١}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-٤جا^٢ س}{س(١ + جتا ٢س)} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س}{س^٢} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٢س - ١}{س^٢ جتا ٢س} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا^٢ ٢س}{س^٢ جتا ٢س (١ + جتا ٢س)}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{x^2-16}=\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{(x+3)}\times\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-4}$$

$$=1\times\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$$

$$=(1-1)\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\frac{1}{0}$$

$\therefore$ غير موجود

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=(1-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)}=1$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3\pi-3x)}{\sin(2\pi-2x)}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3\pi-3x)}{(3\pi-3x)}\cdot\frac{(2\pi-2x)}{\sin(2\pi-2x)}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 4x}{x+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\frac{5x}{2})\cos(\frac{-3x}{2})}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{5x}{2})}{\frac{5x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{3x}{2})}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

٢٢) $\frac{م}{ج} = \frac{٣}{١٠-٥} = ٦$ ، $م = ١٢$ ، $ب = \frac{٩}{٤} = \frac{٣^٢}{٢^٢}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢١ - ٣س)}{-٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢(١١ - س)}{-٥س} = -\frac{جا ٢س}{-٥س}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) $د$ معرّفة عند $س = ٤$ $\quad د(٤) = \frac{|٤-٤|}{٨} = صفر$

احسب نهاية

$\lim_{س \to ٤^+} د(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س-٤}{٤+س} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^-} د(س) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤-س}{٤+س} = صفر$

بما أن $\lim_{س \to ٤} د(س) = د(٤) = صفر$ ∴ $د$ متصل عند $س = ٤$

تدريب (٢)

١) $س \in ط$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

٢) $د(س) = [\![\pm س + ٥]\!]$ ، $د(س)$ متصل عند $س = ١$ ولكن غير متصل عند $س = ٢$

(ملاحظة : هناك حلول مختلفة)

تدريب (٣)

بما أن $د$ متصل ∴ $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} د(س) = د(٢)$

$٩أ - ٢ب = ٦ \quad ---①$

$٢أ + ب = ٦ \quad ---②$

بحل المعادلتين ينتج $أ = \frac{٦}{٧}$ ، $ب = -\frac{١٢}{٧}$

تدريب (٥)

$$م(س) = \begin{cases} (1+2س)س^2 & ، س \le 1 \\ 3س^2 - |س-1| & ، س > 1 \end{cases}$$

م(س) متصل عند س = 1 لأنها كثيرة حدود

م(س) متصل عند س > 1 لأنها متصلة لأنها كثيرة حدود

اكتب نص الاتصال عند س = 1

$$\text{نهـا}_{س \to 1^+} م(س) \stackrel{؟}{=} \text{نهـا}_{س \to 1^-} م(س) = م(1)$$

$$3 = 2 + 1 = 2$$

∴ م(س) متصل عند س = 1

طريقة (٢)

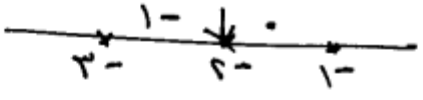
م متصل عند س = 1 لأن $\text{نهـا}_{س \to 1^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 1^-} م(س) = م(1) = 3$

ل متصل عند س = 1 لأن $\text{نهـا}_{س \to 1^+} ل(س) = \text{نهـا}_{س \to 1^-} ل(س) = ل(1) = 1$

∴ م(س) متصل عند س = 1 (نظرية ٢)

تدريب (٦)

$$م(س) = \begin{cases} (س-5)^2 \times 0 & ، س \le -1 \\ (س-5)^2 \times -1 & ، -2 < س < -1 \end{cases}$$



م(س) غير متصل عند س = -2 لأن:

$\text{نهـا}_{س \to -2^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to -2^-} م(س) = (-2-5)^2 \times -1 = +49$

م(س) متصل عند س = 5 لأن: $\text{نهـا}_{س \to 5^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 5^-} م(س) = (5-5)^2 \times 6 = 0$ ، م(5) = 0

في $\text{نهـا}_{س \to 5^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 5^-} م(س) = م(5)$

تمارين ومسائل

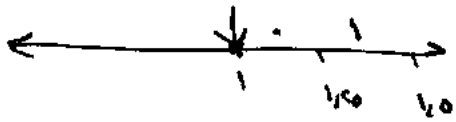
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to -٥} م(س) \neq م(٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$س = ٤$ لأن $م(٤)$ غير معرّفة

٣) $\lim_{س \to ١^+} م(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} م(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١,٥^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ١,٥$

٣) $م$ غير متصل عند $س = ١$ فإن $م(١)$ غير معرّفة

٤) $م$ غير متصل عند $س = ٢$ لأن $م(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|جتا س|}{س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ٠$.

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٢)(س+٢)}{س-٢} = \lim_{س \to ٢^+} (س+٢) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ١ - س^٣ = -٧$

$\lim_{س \to ٢^+} ل(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ل(س)$ ∴ ل غير متصل عند $س = ٢$

$ل(٢) = ٤$

٧) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

$\lim_{س \to ٢} م(س) \neq م(٢)$ ∴ م غير متصل عند $س = ٢$

٨) $ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ك(س) = ٣$

∴ $\lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجود وبالتالي ك غير متصل عند $س = ٢$

٩) بما أن ع متصل عند $س = ٢$

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{ح}{٢} + ٤$

$\frac{ح}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{ح}{٢} = ١ \Leftarrow ح = ٢$

١٠) $ل(١) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١} ل(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-١)} = ١٢$

بما أن $ل(١) \neq \lim_{س \to ١} ل(س)$ ∴ ل غير متصل عند $س = ١$

١١) $م(٢) = [٢+٤] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٦}{ب} + \sqrt{س+٥})$

$= ٣ + ٣ = ٦$

لما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

$\therefore$ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢)$

$-٣ = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٢ \times ٩ - ٤$

$= ١٤$

لما ان $\lim_{س \to ٣} م(س) = م(٣)$ $\therefore$ م متصل عندما $= ٣$.

ثانياً : الاتصال على فترة

تدريب (١)

د متصل على الفترة $(٢,٥)$ على جموعة كثيرات حدود.

د متصل على الفترة $(٥,٧)$ على جموعة كثيرات حدود.

$\because$ $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٩ = د(٣)$ ، $\lim_{س \to ٥^-} د(س) = ٩ = د(٣)$

$\therefore$ د متصل عند $س = ٣$

الجزء الذي اتصال د عند نقطة التجميع.

$\lim_{س \to ٥^+} د(س) = ٢٥$ ، $\lim_{س \to ٥^-} د(س) = ٢٥$ ، $د(٥) = ٢٥$

$\therefore$ د متصل عند $س = ٥$ وبذلك د متصل على الفترة $[٧,٣]$

$\lim_{س \to ٧^-} د(س) = ٢٧$ ، $د(٧) = ٩$ د غير متصل عند النهاية

$\therefore$ د متصل عند $س = ٧$ وعليه د متصل على الفترة $[٧,٣]$

تدريب (٢)

١) د متصل على $ح - \{٥\}$ على جموعة اقترانات لأنها متركبة ع قالب

$$\lim_{س \to ٥} د(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} = ١٠$$

عند $س = ٥$

$د(٥) = ٥ + ٥ = ١٠$

وبذلك د متصل على كامل المجال المعطى ح

تدريب (٣)

اكتب تعريف الاقتران د.

د متصل على $(١,٠ ، ١,٠)$ على جموعة كثيرات حدود.

$$د = \begin{cases} ١,٠ - س & ، س \leq ١,٠ \\ س - ١,٠ & ، س > ١,٠ \end{cases}$$

د متصل على $(١,٠ ، ٩,٠)$ على جموعة كثيرات حدود.

عند نقطة الكوّلب.

$\lim_{\substack{س \to او^+}} هـ(س) = \lim_{\substack{س \to او^+}} (س - او) = او - او = صفر$

$\lim_{\substack{س \to او^-}} هـ(س) = \lim_{\substack{س \to او^-}} (او - س) = صفر$

$هـ(او) = صفر$.

$\therefore هـ$ متصل عند $س = او$.

عند الأطراف:

$\lim_{\substack{س \to ا.و^+}} هـ(س) = او - ا.و = ٠.٩ و$ ، $هـ(ا.و) = ٠.٩ و$

$\therefore هـ$ متصل على يمين العدد ا.و .

$\lim_{\substack{س \to ٩و^-}} هـ(س) = ٩و - او = ١٨ و$ ، $هـ(٩و) = ٩و - او$

$\therefore هـ$ متصل على يسار العدد ٩ و

وعليه $هـ$ متصل على الفترة $[ا.و ، ٩و]$

تدريب (٤)

بما أن الاقتران ع متصل على الفترة $[-\pi ، \pi]$ ∴ ع متصل عند $س = .$

وعليه $\lim_{\substack{س \to .^+}} ع(س) = \lim_{\substack{س \to .^-}} ع(س) = ع(٠)$

$ب(٢+٠) = \lim_{\substack{س \to .^-}} \frac{جا ٢س}{٥س} = ٢$

$\frac{٢}{٥} ب = ٢ \Leftarrow$ ، $\boxed{ب = ١}$

$\boxed{ا = ١٠}$

تمارين ومسائل

١) $ه$ متصل على الفترة $(-٢،١)$ على صورة كثير حدود ـ

$ه$ متصل على الفترة $(١،٢)$ على صورة كثير حدود ـ

عند نقطة التحوّل

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} ه(س) = ٨$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^-} ه(س) = ٣+٥ = ٨$

$ه(١) = ٨$

$\therefore ه$ متصل عند $س = ١$

عند الأطراف :

$\text{نهـا}_{س \to -٢^+} ه(س) = ١٧$ ، $ه(-٢) = ١٧$

$\therefore ه$ متصل على مجموعة العدد -٢

$\text{نهـا}_{س \to ٢^-} ه(س) = ١٦$ ، $ه(٢) = ١٦$

$\therefore ه$ متصل على مجموعة العدد ٢

ومنه $ه$ متصل على الفترة $[-٢،٢]$

٢) أكمل تعريف الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٢س & ١ \leq س < ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٥،٨)$ والفترة $(-١٠،٥)$ على صورة كثير حدود

عند نقطة التحوّل

$\text{نهـا}_{س \to ٥^+} ل(س) = ص$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٥^-} ل(س) = ص$. $ل(٥) = ص$

$\therefore ل$ متصل عند $ص = ٥$

عند الأطراف :

$\lim_{س \to -١٠^+} (س) = ١٠ + ٢ = ٣٠$ ، $(-١٠) = ٢٠$

∴ $(س)$ متصل على يمين العدد -١٠

$\lim_{س \to ٨^-} (س) = ١٦ - ١٠ = ٦$ ، $(٨) = ٦$

∴ $(س)$ متصل على يسار العدد ٨

وعليه $(س)$ متصل على الفترة $[-١٠، ٨]$

ب) ع متصل على الفترة $(-٣، ٥٥)$ على مجموعة اقتران نسبي
معرف على مجاله

ع متصل على الفترة $(٣، ٥٥)$ على مجموعة اقتران كثير حدود.

عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٣ - ٧}{٢ - س} =$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(٢ - س)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(٣ - س)}$

$= -٢٧$

بما أن $\lim_{س \to ٣^+} ع(س) \neq \lim_{س \to ٣^-} ع(س)$ ∴ ع غير متصل عند $س = ٣$

وعليه ع متصل على $ح - \{٣\}$

ج) ل متصل على الفترة $(-٤، ٥٥)$ جذر تربيعي معرف

ل متصل على الفترة $(٤، ٥٥)$ متصل (ليس مطلقاً)
عند نقطة التحول $س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س) = ل(٤)$ ، $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س)$

∴ ل متصل عند س = ٤

ومنه ل متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$

٥) $\lim_{س \to ٤^+} ع(س) = ٨$ ، $ه(٤) = ٤$

∴ ع غير متصل عند س = ٤ من جهة اليسار

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $ه(٣) = ٥$

∴ ع غير متصل عند س = ٣ من جهة اليمين

ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$ على جموعة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

ومنه ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$

٦) ه متصل على الفترة $(٠, ٣)$ اقتران جذره معرّف على مجاله

في الفترة $(٣, ٦)$ يوجد نقطة تحوّل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ه(س) = ٢$

∴ ه غير متصل عند س = ٤

عند الطرف

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ١$ ، $ه(٠) = ١$

∴ ه متصل على يمين العدد ٠

$\lim_{س \to ٦^-} ه(س) = ٣$ ، $ه(٦) = ٣$

∴ ه متصل على يسار العدد ٦

ومنه ه متصل على الفترة $[٠, ٦] - \{٤\}$

٧) بما ان الاقتران ع متصل :

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} ع(س) = ٧$$

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معطوف : $(س-٢)$ عامل من عوامل البسط

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{س-٤} = \text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س-٢)(س + ٢ + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

٨) ع متصل على الفترة $(-\infty، ٢)$ ع لها قيمة حدية

ع متصل على الفترة $(٤، ٢)$ اقتران خطي

ع متصل على الفترة $(٤، \infty)$ اقتران نسبي معرف على مجاله.

(أي يبقى المقام $\neq ٠$) $س^٢ = ٣٦ \leftarrow س = \pm ٦$ ، $-٦ \notin (٤، \infty)$ ، $٦ \in (٤، \infty)$

عند الطرف

$$\text{بما } م(س) = ٤ \quad م(٢) = ٣ \quad \therefore م \text{ غير متصل عند } س = ٢$$

$$\text{بما } م(س) = ٣ \quad ، \text{ بما } م(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

$\therefore م$ غير متصل عند $س = ٤$

$\therefore م$ متصل على $ح - \{٢، ٤، ٦\}$

٩) في الفترة $(-\infty, 1)$ د متصل في مجموعة كثير حدود $(-1+س)$
في الفترة $(1, \infty)$ د متصل (مجموع اقترانين متصلين)

نقطة التحول $س = 1$

$\lim_{س \to 1^+} د(س) = 0$ ، $\lim_{س \to 1^-} د(س) = -1$
$س \to 1^+$ ، $س \to 1^-$

∴ د غير متصل عند $س = 1$

الاقتران:
$د(س) = -2$ ، $س \to -1^+$
$د(3) = -2$
∴ د متصل على مجموعة الأعداد -1

$د(س) = \frac{12}{5} + س^2$ ، $س \to -2^-$
$د(2) = \frac{12}{5} + 2^2$
∴ د متصل على يسار العدد 2

ومنه د متصل على الفترة $[-\infty, 1] - \{0\}$

١٠) يكون الاقترانان السببي متضادين عندما الأعداد الحقيقية
إذا كان المميز $ب^2 - 4أجـ < 0$
للحمام
$1 - 4 \times 2 \times 2 < 0$
$1 - 2أ < 0 \Leftarrow 1 < 2أ$
ضم أ التي تحقق المتباينة $أ > \frac{1}{2}$

أسئلة الوحدة

١) أ) $\lim_{س \to 0^+} ع(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to 0^-} ع(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ع(س) = ٤$

هـ) $م = \{٠، ٢\}$

و) $ن = \{٠، ٢، ٤\}$

٢) اقترن $ص = ٢س + ١$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٣$

$\lim_{ص \to ٣} م^{٢}(ص) - \lim_{س \to ١} س + ٢ = ١٦ + ١ = ١٧$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} م(س)$

$١- = ٩د - ٤$

$٩د = ٣ \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

٤) حتى تكون النهاية موجودة : $(س-٢)$ عامل من عوامل البسط

$\therefore ٤ + (٣+م)٢ + م = ٠$

$٤ + ٢م + ٦ + م = ٠$

$٣م + ١٠ = ٠ \Leftarrow م = -١٠$

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)} = ٦$$

$س^٢ - ٤س - ٥$		$س^٢ + ٤س + ٥$		$س^٢ - ٤س - ٥$
	٥		-١	

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} ٩ جتا \frac{\pi}{٥} س + ٥ = ٦$

$= -٩ + ٥ = ٦ \Leftarrow$ **$٩ = -١$**

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتا٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - جتا٢س)} \times \frac{س + جاس}{س + جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - جا^٢س}{١ - (١ - ٢جا^٢س)} \times \frac{١}{س + جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - جا^٢س}{٢جا^٢س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س + جاس}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \times ١ \times \frac{١}{٢}$

$= صفر$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{جاس} - \frac{جاس}{س} \right)$

$= \frac{١}{٠} - ١ = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = صفر$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \sin 2س}{3س} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{3س} + \frac{\sin 2س}{3س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{3س} + \lim_{س \to 0} \frac{\sin 2س}{3س} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

ج) $\lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-س)} \left(\frac{1}{ن س} - 1 \right) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{1-س} \left[\frac{1 - ن س}{ن س} \right]$

$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-س)(ن س)} \cdot \frac{(1 - ن س)}{ن س} = \frac{-1}{2}$

د) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 3س}{س - \sqrt{س+2} - 1} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س - 1 - \sqrt{س+2}}$ بالضرب بمرافق المقام

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س-1-\sqrt{س+2}} \times \frac{س - 1 + \sqrt{س+2}}{س - 1 + \sqrt{س+2}} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{س+2}]}{(س-1)^2 - (س+2)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{س+2}]}{س^2 - 2س + 1 - س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{س+2}]}{س^2 - 3س - 1}$

$= \frac{2(-1)[2 - 1 + 2]}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}^2(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} + كاس)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}} \times \frac{(\frac{1}{2} + 2)}{1} = -\frac{1}{12} \times 2 + \frac{1}{12} = -\frac{2}{12} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{6}$$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - 1}{س^2 \text{جتا}^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{-(1 - \text{جتا}^2 س)}{س^2 \text{جتا}^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2 \text{جتا}^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\text{جتا}^2 س}$

$= 2$

ج) $\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ) - \text{جتا}\frac{\pi}{2}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-2 \text{جا}(\frac{\pi}{4} + \frac{هـ}{2}) \text{جا}(-\frac{هـ}{2})}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} -2 \times \text{جا}(\frac{\pi}{4} + \frac{هـ}{2}) \times \frac{\text{جا}(-\frac{هـ}{2})}{هـ} = -2 \times \text{جا}\frac{\pi}{4} \times -\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ملاحظة: يمكنك حل السؤال أيضا باستخدام تعريف المشتقة)

د) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}3س - \text{جتا}5س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا}4س \text{جا}(-س)}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 \text{جا}4س \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}4س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= 4$

بالضرب على مقام الكسر

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ع س^2}{س} - \frac{ا \sin ب س}{س}}{\frac{ب س}{س} - \frac{ا \sin ٤ س}{س}} = \frac{1}{٤}$$

$$\frac{ع - ا}{ب - ٤} = \frac{1}{٤} \Rightarrow ب - ٤ = ٤ ا$$

$$ب = \frac{٤}{٥} \Leftarrow ٥ ب = ٤ \Leftarrow ٥ ب = -٤$$

$$\lim_{س \to ٢} ه(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س^2 - ٤|}{س - ٢}$$ اعتبر في النهاية ضد قيمة المقدار

$$\lim_{س \to ٢^+} \frac{|س^2 - ٤|}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢^-} \frac{|س^2 - ٤|}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^2}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٢)} = -٤$$

$\therefore$ ه غير متصل عند $س = ٢$

$$\lim_{س \to ٠^+} ع(س) = \lim_{س \to ٠^+} [٥ و. س + ٢] = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{١}{٢} س - ١ = \frac{١}{٢}$$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ع(س)$ غ ٢

$\therefore$ ع غير متصل عند $س = ٢$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} -٦ س - [س] = -٢$$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{٩ س^2 - ١}{|٦ س^2 + ٥ س + ١|} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{(٣ س - ١)(٣ س + ١)}{|٢ س + ١|}$$

$$= \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{(٣ س - ١)(٣ س + ١)}{-(٢ س + ١)} = -(-\frac{٣}{٢} - ١) = -٢$$

$\therefore$ ل متصل عند $س = -\frac{١}{٢}$ $\because$ ل$(-\frac{١}{٢}) = -٢$

١١) ع(س) = $\sqrt{س+١}$ متصل على الفترة (٢،١) اقترانا جذره تربيعي معرّف على مجاله.

ابحث في اتصال ع على سياء العدد ٣

$\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٣}$

ع(٣) = $\sqrt{٣+١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

بما أن $\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) ≠ ع(٣) ∴ ع غير متصل على سياء العدد ٣

وصف ع متصل على الفترة (٢،١)

١٢) هـ متصل على الفترة (-٥،١) على مجموعة كثيرة حدود.

هـ متصل على الفترة (١،٥) لأنه حاصل قسمة كثيرة حدود بافتراض جذره تربيعي معرّف على مجاله مطروح منها ١.

ابحث في اتصال هـ عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ $\sqrt{س-١}$ = ١ - ١ = ٠

$\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ س^٣ = ١

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س)

فنهايا هـ(س) = هـ(١) = ١
س→١

ومنه هـ(س) متصل عند س = ١

هـ(س) متصل على ح.

١٣) $م$ متصل على الفترة $(-٢، -١)$ على الصورة اقتران لسيني معرف على مجاله

اكتب فيما اتصال $م$ على الفترة $(-١، ١)$

يوجد نقطة تشعب عند $س = ٠$

$م$ متصل على الفترة $(-١، ٠)$ على الصورة كثير حدود

$م$ متصل على الفترة $(٠، ١)$ على الصورة كثير حدود

اكتب فيما اتصال عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) =$ لهنا ، $\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} -س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+}$

$م(٠) = ٠$ ∴ $م$ متصل عند $س = ٠$ ومنه $م$ متصل على $(-١، ١)$

عند نقطة التشعب $س = -١$

$\lim_{س \to -١^+} م(س) = \lim_{س \to -١^+} [-س] = ١$

$\lim_{س \to -١^-} م(س) = \lim_{س \to -١^-} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} (س - ١) = -٢$

∴ $م$ غير متصل عند $س = -١$

عند الطرف $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) \stackrel{؟}{=} م(-٢)$

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س^٣ - ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢^+} \frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س + ٢)} = -٣$

$م(-٢) = -٣$

∴ $م$ متصل عند $س = -٢$ من جهة اليمين

ومنه $م$ متصل على الفترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

١٤) $ل \times و = \begin{cases} 0 & ، \quad س < 1 \\ \frac{س - 1}{س + 2} & ، \quad 1 \leq س < 2 \\ 1{,}5 & ، \quad س = 2 \end{cases}$

$ل \times و$ متصل على الفترة $(1{,}0)$ لأنه كثير حدود.

$ل \times و$ متصل على الفترة $(2{,}1)$ لأنه ناتج قسمة اقترانين كثيرين مقام الكسر لا يساوي الصفر عند نقط التحول

عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^+} ل \times و = صفر$ ، $\lim_{س \to 1^-} ل \times و = صفر$ ، $ل \times و(1) = 0$

$\therefore ل \times و$ متصل عند $س = 1$

عند الأطراف

$\lim_{س \to 0^+} ل \times و = 0$ ، $ل \times و(0) = 0$ $\therefore ل \times و$ متصل لأن نهايته عند الصفر

$\lim_{س \to 2^-} ل \times و = \lim_{س \to 2^-} \frac{س - 1}{س + 2} = \frac{3}{4}$ ، $ل \times و(2) = 1{,}5$

بما أن $\lim_{س \to 2^-} ل \times و \neq ل \times و(2)$ $\therefore ل \times و$ غير متصل عند العدد 2 وعليه $ل \times و$ متصل على الفترة $[0,2)$

(١٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ب	ب	ب	ل	ج	د	ب	د	ب	ن
٢٢	$\frac{1}{2}$	١٨	$\{-\frac{3}{4}\}$	∞	٩	٥	$\{٣٫١\}$	٤	$(\frac{٢٢}{٥})$

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثانية

(التفاضل)

الوحدة الثانية : التفاضل /علمي

الفصل الأول : معدّل التغير والمشتقات

أولاً : معدّل التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٣,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = ن + ١ - ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢,١) - هـ(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٥ - (٢,١)^٢ - (٥ - ٢^٢)}{٠,١}$$

$$= \frac{-٠,٤١}{٠,١} = -٤,١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-١ - ٠}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

تدريب (٤)

$$ع = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدّل التغير $= ظا ١٣٥^\circ = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(٣) = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = هـ(٢ + هـ) - هـ(٢) = (٢ + هـ)^٢ - (٢ + هـ) - (٢^٢ - ٢)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢ = هـ^٢ + ٣هـ$

(٢) معدّل التغير $= \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + هـ^٣ + ٣هـ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = هـ + ٣$

(١٦)

تدريب (٦)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٢ - ص(٤) + ٢) - (٣ - ص(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٢ + ٢ - ٣ - ٢) - (ص(٤) - ص(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٤)

(٣) $س = ٢ - ١٫٠ = ١٫٩$

$ص = ٥ - ٠٫٦ = ٤٫٤$

النقطة $P(١٫٩ ، ٤٫٤)$

(٤) نفرض طول ضلع المربع $س$ وحدات $\Rightarrow$ مساحته $= س^٢$

معدّل التغير $= \frac{ص(٦٫١) - ص(٦)}{٠٫١} = \frac{٣٧٫٢١ - ٣٦}{٠٫١}$

$= \frac{١٫٢١}{٠٫١} = ١٢٫١$ سم^٢

(٥) معدّل التغير $= \frac{ص(٢) - ص(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{(٤ \times ٤ - ٣ ص(٢)) - (٤ \times ١ - ٣ ص(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٤ - ٣(ص(٢) - ص(-١))}{٣} = \frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{ص(٢) - ص(-١)}{٣}$

$= ٤ - ٣ \times ٥ = -١١$

(٦) أ) $\bar{ع} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (١٠٠ - ١٢٥)}{٣}$

$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) $ع = \frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن} = \frac{٦٠ ٥ن - ٥(٥ن)^٢}{٥ن}$

$= \frac{٥ن(١٢ - ٥ن)}{٥ن} = ٥(١٢ - ٥ن)$

(٧) معدّل التغير $= \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{ص^٢(٤) - ص^٢(١)}{٣}$

$= \frac{(ص(٤) - ص(١))(ص(٤) + ص(١))}{٣}$

$= \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣} \times (ص(٤) + ص(١)) = ٣ \times ٢ = ٦$

(٢)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ٢١$

معدّل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{٢١}{٧} = ١١$

٩) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = ظا\frac{٣}{٤}\pi$

$هـ(٤)-هـ(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-١٠-١٣}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

معدل التغير $= هـ(س_٢)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} = \frac{١}{٦}$ ، $س_٢^٢+س_٢ = ٦$

$س_٢^٢+س_٢-٦ = ٠$ ، $(س_٢+٣)(س_٢-٢) = ٠$

إذن $س_٢ = ٢$ ، -٣ يحل

١٢) ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً : المشتقة الأولى

التدريبيات

(١) $\text{قـ}'(-1) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{قـ}(-1+\text{هـ}) - \text{قـ}(-1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(-1+\text{هـ})^3 + 2(-1+\text{هـ}) - (-3)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}^3 - 3\text{هـ}^2 + 3\text{هـ} - 1 - 2 + 2\text{هـ} + 3}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ}^2 - 3\text{هـ} + 5)}{\text{هـ}} = 5$

٢) نفرض $5\text{هـ} = \text{ل}$ ومنه $\text{هـ} = \frac{\text{ل}}{5}$ ، ل $\to$ ٠ عندما هـ $\to$ ٠ .

$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{قـ}(0) - \text{قـ}(5\text{هـ})}{3\text{هـ}} = \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{قـ}(0) - \text{قـ}(\text{ل})}{\frac{3\text{ل}}{5}}$

$= -\frac{5}{3} \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{قـ}(\text{ل}) - \text{قـ}(0)}{\text{ل}} = -\frac{5}{3}\,\text{قـ}'(0) = -\frac{30}{3} = -10$

(٣) $\text{قـ}'(2) = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(2)}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1} - \frac{2}{3}}{\text{س} - 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{3\text{س} - 2(\text{س}+1)}{3(\text{س}+1)}}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س} - 2\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)} = \frac{1}{9}$

(٤) $\text{قـ}'(-1) = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(-1)}{\text{س} - (-1)} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 1 - (-3)}{\text{س} + 1}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 4}{\text{س} + 1} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4(\text{س}+1)}{\text{س}+1} = 4$

س = ١ نقطة تفرع

$\text{قـ}'_-(1) = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4\text{س} + 1 - 5}{\text{س} - 1}$

$= \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4(\text{س} - 1)}{\text{س} - 1} = 4$

$\text{قـ}'_+(1) = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2\text{س} + 3 - 5}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2(\text{س}-1)}{\text{س} - 1} = 2$

قـ (١) غير موجودة لأن $\text{قـ}'_-(1) \neq \text{قـ}'_+(1)$

(٤)

(٤) $\text{قَ}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{\dfrac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢}+٨} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٨}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{\dfrac{\text{ع}(\text{س}^{٢}+٨) - \text{س}(\text{ع}^{٢}+٨)}{(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{س}^{٢}+٨)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{\text{ع}\text{س}^{٢} + ٨\text{ع} - \text{س}\text{ع}^{٢} - ٨\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٨)(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{ع}-\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{\text{ع}\text{س}(\text{س}-\text{ع}) + ٨(\text{ع}-\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٨)(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{ع}-\text{س})} = \lim\limits_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \dfrac{(٨ - \text{ع}\text{س})(\text{ع}-\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٨)(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{ع}-\text{س})}$

$= \dfrac{٨ - \text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٨)^{٢}}$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\text{قَ}(٣) = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{٨ - ٥(٣+\text{هـ}) - (-٧)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{٨ - ١٥ - ٥\text{هـ} + ٧}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{-٥\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٥$

ب) $\text{قَ}(-١) = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{ق}(-١+\text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{(-١+\text{هـ})^{٣} + (-١+\text{هـ})^{٢} - ٠}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{هـ}^{٣} - ٣\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ} - ١ + ١ - ٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{هـ}^{٣} - ٢\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{هـ}(\text{هـ}^{٢} - ٢\text{هـ} + ١)}{\text{هـ}} = ١$

جـ) $\text{لَ}(٥) = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(٥)}{\text{س} - ٥} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\sqrt{\text{س}-١} - ٢}{\text{س} - ٥}$

$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\sqrt{\text{س}-١} - ٢}{\text{س} - ٥} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-١} + ٢}{\sqrt{\text{س}-١} + ٢} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\text{س} - ١ - ٤}{(\text{س}-٥)(\sqrt{\text{س}-١} + ٢)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\text{س} - ٥}{(\text{س}-٥)(\sqrt{\text{س}-١} + ٢)} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}-١} + ٢} = \dfrac{١}{٤}$

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المربع س وساحتها م(س)

فيكون م(س) = س^{٢}

$$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(١٠) = ٢ × ١٠ = ٢٠ وحدة مربعة

(٥)

ع) $ه(٠)$ ، $ه(٦)$ غير موجودة لأنه $س = ٠$ ، $س = ٦$ خطوط فقرة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$ه'(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ - ٦س}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٢)(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

$$ه'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

$ه'(٣) = ٥$ لأنه $ه'_+(٣) = ه'_-(٣) = ٥$

ه) نعيد تعريف $ه(س)$

$$ه(س) = \begin{cases} س^٤ - ٤ & س < -٢ \\ ٤ - س^٤ & -٢ \le س < ٢ \\ س^٤ - ٤ & س \ge ٢ \end{cases}$$

$$ه'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ه(س) - ه(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٤ - ٣}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س^٤ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = -٢$$

$س = ٢$ نقطة تفرع

$$ه'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^٤ - ٠}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢^-} -(٢ + س) = -٤$$

$$ه'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٤ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$ه'(٢)$ غير موجودة لأنه $ه'_+(٢) \neq ه'_-(٢)$

و) $ه'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{ه(س) - ه(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س^٢ + ٣}{س + ٢} - ١}{س + ١}$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س^٢ + ٣ - س - ٢}{س + ٢}}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - س + ١}{(س + ١)(س + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س + ١)}{(س + ١)(س + ٢)} = \frac{٣}{٤}$$

(٦)

٢) $\frac{d}{dx}$ ... $= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{2} - (x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^3 - 3x - 2x^3 + 4x}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^3(x-2) - 3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x^2+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$= 2x^2 + 3$

٥) $f'(x) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7}}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7}}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+5-x-7)}{(x-2)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7})} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7})}$

$= \frac{1}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7}} = \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

٣) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{2h}$ ← بفرض $h = -k$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \lim_{k \to 0} \frac{f(a) - f(a-k)}{2k}$

$= \frac{1}{2} f'(a) + \frac{1}{2} f'(a) = f'(a)$

٥) $\lim_{x \to 2} \frac{3f(x) - xf(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3f(x) + 3f(2) - 3f(2) - xf(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{3f(2) - xf(2)}{x - 2} + \lim_{x \to 2} \frac{3f(x) - 3f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{f(2)(3 - x)}{x - 2} - \lim_{x \to 2} \frac{3(f(x) - f(2))}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} f(2) - 3 \lim_{x \to 2} f'(x) = f(2) - 3f'(x)$

(٦)

السؤال (٢)

ه) $\frac{ص}{س} = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + ع س + س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع^{٢} + ع س + س^{٢}) = ٣ س^{٢}$

و) $\frac{ص}{س} = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع^{٣}} - \sqrt{س^{٣}}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع^{٣}} - \sqrt{س^{٣}}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع^{٣}} + \sqrt{س^{٣}}}{\sqrt{ع^{٣}} + \sqrt{س^{٣}}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع^{٣}} + \sqrt{س^{٣}})} = \frac{١}{\sqrt{٣ س^{٣}}}$

(٧) $\lim_{س \to ج} \frac{ج^٢ \ln(ج) - ٢س \ln(س)}{ج - س} = \lim_{س \to ج} \frac{ج^٢ \ln(ج) - ج^٢ \ln(س) + ج^٢ \ln(س) - ٢س \ln(س)}{ج - س}$

$= \lim_{س \to ج} \frac{ج^٢ [\ln(ج) - \ln(س)]}{ج - س} + \lim_{س \to ج} \frac{\ln(س)(ج^٢ - ٢س)}{ج - س}$

$= ج^٢ \times \frac{١}{ج} + \ln(ج)(٢ج - ٢س)$

$= ٣ج + ٢ \ln(ج)$

٤) $\lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٣ه)}{ه} = \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥) + \ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٣ه) - \ln(٥)}{ه}$

$= -\lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ + ٣ه) - \ln(٥)}{ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥)}{ه}$

نفرض $٣ه = م$ ومنه $ه = \frac{م}{٣}$ نفرض $-٢ه = ل$ ومنه $ه = -\frac{ل}{٢}$

$= -\lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{\frac{م}{٣}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٣ \lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{ل}$

$= -٣ \ln'(٥) - ٢ \ln'(٥) = -٥ \ln'(٥) = -\frac{٣}{٦}$

(٥) $\ln'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{\ln(س) - \ln(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{(س - ٩) ل(س)}{س - ٩} = ٠$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{س - ٩} \times \lim_{س \to ٩} ل(س) = ل(٩)$

(٦) نفرض طول نصف القطر (نق) والارتفاع (ع)

فيكون $ع = نق + ٢$

$م(نق) = ٢ نق^٢ ع = ٢ \pi نق^٢ (نق + ٢)$

$= ٢ \pi نق^٣ + ٤ \pi نق^٢$

$م'(٦) = \lim_{نق \to ٦} \frac{م(نق) - م(٦)}{نق - ٦} = \lim_{نق \to ٦} \frac{٢ \pi نق^٣ + ٤ \pi نق^٢ - ٦٩٦ \pi}{نق - ٦}$

$= ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{نق^٣ + ٢نق - ٤٨}{نق - ٦} = ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{(نق - ٦)(نق^٢ + ٨)}{نق - ٦} = ٧٦ \pi$

(٧) $\ln'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{٦(س + ه)^٢ - ٣(س + ه) - (٦س^٢ - ٣س)}{ه} = ٦س^٢ - ٦$

$\ln'(-٢) = ٦(-٢)^٢ = ٤٢$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون حـ(ل) = ل³

$$\text{مـ}(ج) = \lim_{ل \to ج} \frac{\text{حـ}(ل) - \text{حـ}(ج)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} \frac{ل^3 - ٨}{ل - ج}$$

$$= \lim_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^2 + ج ل + ج^2 + ٤)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} (ل^2 + ج ل + ج^2 + ٤) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نق وحدة ، حـ(نق) = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

$$\text{حَ}(\text{نق}) = \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{\text{حـ}(ع) - \text{حـ}(\text{نق})}{ع - \text{نق}} = \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{\frac{٤}{٣}\pi ع^3 - \frac{٤}{٣}\pi \text{نق}^3}{ع - \text{نق}}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{ع^3 - \text{نق}^3}{ع - \text{نق}} = \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{(ع - \text{نق})(ع^2 + \text{نق} ع + \text{نق}^2)}{ع - \text{نق}}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} (ع^2 + \text{نق} ع + \text{نق}^2) = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ \text{نق}^2 = ٤ \pi \text{نق}^2$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاق

التدريبات

(١) ١) س = ٢ نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ه(س)$

∴ ه غير متصل عند س = ٢

٢) $ه_+'(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤ - ٢س}{س}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س - ٢)}{س(س - ٢)} = -١$

$ه_-'(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

∴ ه غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لأن $ه_+'(٢) \neq ه_-'(٢)$

(٢) نبحث الاتصال عند س = ٢ لأنها نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ - ١) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{س + ٦} = \sqrt{٨} = ٣$

$\lim_{س \to ٢} ه(س)$ غير موجودة وطالما ه غير متصل عند س = ٢

∴ ه غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ حسب النظرية

$ه_+'(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{ه(س) - ه(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

تمارين ومسائل

(١) ه) ه غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لأن ه غير متصل عند س = ١

ب) نبحث الاتصال ه عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٠$ ، إذن $\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٠$

ه(٢) = صفر . ه متصل عند س = ٢ لأن $\lim_{س \to ٢} ه(س) = ه(٢)$

$$ه(س) = \begin{cases} س - ٢ & ١ \le س < ٢ \\ ٢(س - ٢) & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$$ه'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢(س-٢) - ٠}{س - ٢} = ٢$$

$$ه'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$$

ه'(٢) غير موجودة لأن $ه'_+(٢) \neq ه'_-(٢)$

ج) نعيد تعريف ل(س)

ل(س) هي قاعدة تجد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$ وحدة .

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & -١ \le س < -\frac{٣}{٤} \\ ٤ & -\frac{١}{٢} \le س < -١ \\ ٣ & ٠ \le س < -\frac{١}{٢} \\ ٢ & \frac{١}{٢} \le س < ٠ \end{cases}$$

$$\text{لله}\left(\frac{١}{٤}\right) = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{\text{لله}(س) - \text{لله}\left(\frac{١}{٤}\right)}{س - \frac{١}{٤}} = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} = ٠$$

س = -١ فقط تفرع . نبحث الاتصال عند س = -١

$\lim_{س \to -١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١} \text{لله}(س)$ غير موجودة وعليه ل غير متصل عند س = -١

ل غير قابل للاشتقاق عند س = -١ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(ج) $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ لأنها طرفا فترة .

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ٣^+} ه(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$$

$$\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٦س) = ١٥$$

$$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ١٥ \ ، \ ه(٣) = ١٥ \ . \ إذن \ ه \ متصل \ عند \ س = ٣$$

$$ه'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ٢ - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$ه'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٦س - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$$

$ه'(٣)$ غير موجودة لأن $ه'_+(٣) \neq ه'_-(٣)$

(د) نبحث اتصال $ه$ عند $س = ٩$

$$\lim_{س \to ٩} ه(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$$

$ه(٩) = ٦$ ، $ه$ متصل عند $س = ٩$ لأن $\lim_{س \to ٩} ه(س) = ه(٩) = ٦$

$$ه'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{ه(س) - ه(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)(س - ٩)} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(\sqrt{س} - ٣)^٢ (\sqrt{س} + ٣)} = \frac{١}{٦}$$

(هـ) $ه$ متصل عند $س = ١$ لأن $ه'(١)$ موجودة

$$\lim_{س \to ١^+} ه(س) = \lim_{س \to ١^-} ه(س)$$

$$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = \lim_{س \to ١^+} (أ س + ب)$$

$$١ = أ + ب \quad ومنه \quad ب = ١ - أ$$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-١ - ٢ع - (-١ - ٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ع}{ع - س} = -٢ \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = -٢$$

عندما $-١ < س < ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س > ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د'_+(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د'(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$. د متصل عند $س = ١$

(١٣)

$$\text{هـ}_-'(1) = \lim_{س \to 1^-} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} = 2$$

$$\text{هـ}_+'(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^+} \frac{س - 1}{س - 1} = 1$$

$\text{هـ}(1)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_-'(1) \neq \text{هـ}_+'(1)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} -2 & س < -1 \\ 2س & -1 \leq س < 1 \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \\ 1 & س > 1 \end{cases}$$

(٥) لبحث اتصال هـ عند $س = 2$

$$\lim_{س \to 2^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^+} (2س - س^2) = 0$$

$$\lim_{س \to 2^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^-} (س^2 - 2س) = 0$$

$\lim_{س \to 2} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(2) = 0$ ، هـ متصل عند $س = 2$

$$\text{هـ}_+'(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2س - س^2 - 0}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{س(2-س)}{س - 2} = -2$$

$$\text{هـ}_-'(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - 2س}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س(س-2)}{س - 2} = 2$$

$\text{هـ}(2)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(2) \neq \text{هـ}_-'(2)$

(٦) عندما $س = 0$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{0}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $س = 0$ ، $س = 4$ ، $\text{هـ}(س) = 5 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(4) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{5 - ع - (5 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -1$$

عندما $س > 4$ ، $\text{هـ}(س)$ متصل لأنها عند $س = 5$ لأنه اقتران نسبي

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{1}{5 - ع} - \frac{1}{5 - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{5 - س - (5 - ع)}{(5 - ع)(5 - س)} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - 5)(5 - س)(ع - س)} = \frac{1}{(5 - س)^2}$$

نبحث الاستمرارية عند نقاط التشعب

عند $س = ٠$:

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} ه(س) = \lim_{س \to ٠^-}$ صفر $=$ صفر

$\lim_{س \to ٠} ه(س)$ غير موجودة وعليه $ه$ غير متصل عند $س = ٠$.

اذن $ه(٠)$ غير موجودة .

$س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١ \neq \lim_{س \to ٤^-} ه(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} ه(س) = ١$ ، $ه(٤) = ١$. $ه$ متصل عند $س = ٤$

$ه_+(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{ه(س) - ه(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(٥ - س)(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(٥ - س)(س - ٤)} = ١$

$ه_-(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{ه(س) - ه(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٥ - س - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

اذن $ه(٤)$ غير موجودة . كما سبق

$ه(س) = \begin{cases} \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ ١ & ٠ < س < ٤ ، س = ٠,٤,٥ \\ \frac{١}{(٥ - س)} & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $ه(س) = \begin{cases} ١ & ١ \leq س < ٢ \\ ٢ - س & ٢ \leq س \leq ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

$ه(١)$ ، $ه(٤)$ غير موجودة لأن $س = ١$ ، $س = ٤$ طرفي فترة

عندما $١ < س < ٤$ ، $ه(س)$ متصل لأنه اقتران ثابت

$ه(س) = \lim_{ج \to س} \frac{ه(ج) - ه(س)}{ج - س} = \lim_{ج \to س} \frac{١ - ١}{ج - س} = ٠$

عندما $2 < س < 3$ ، $ه(س) = 2 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$ه(س) = \lim_{ج \to س} \frac{ه(ج) - ه(س)}{ج - س} = \lim_{ج \to س} \frac{2 - ج - (2 - س)}{ج - س} = \lim_{ج \to س} \frac{س - ج}{ج - س} = -1$$

عندما $3 < س < 4$

$ه(س) = س - 3$ متصل لأنه كثير حدود

$$ه(س) = \lim_{ج \to س} \frac{ه(ج) - ه(س)}{ج - س} = \lim_{ج \to س} \frac{ج - 3 - (س - 3)}{ج - س} = \lim_{ج \to س} \frac{ج - س}{ج - س} = 1$$

نقاط التقطع ، $س = 2$

$\lim_{س \to 2^-} ه(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 2^+} ه(س) = \lim_{س \to 2^+} (2 - س) = 1$

$\lim_{س \to 2} ه(س) = 1 = ه(2)$. $ه$ متصل عند $س = 2$

$$ه'_+(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{ه(س) - ه(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{3 - س - 1}{س - 2} = -1$$

$$ه'_-(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{ه(س) - ه(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{1 - 1}{س - 2} = \text{صفر}$$

$ه'(2)$ غير موجودة لأن $ه'_+(2) \neq ه'_-(2)$

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^-} ه(س) = \lim_{س \to 3^-} (2 - س) = -1$ ، $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = \lim_{س \to 3^+} (س - 3) = 0$

$\lim_{س \to 3} ه(س)$ غير موجودة ، $ه(3) = 0$. إذن $ه$ غير متصل عند $س = 3$

$$ه'_+(3) = \lim_{س \to 3^+} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^+} \frac{س - 3 - 0}{س - 3} = 1$$

$$ه'_-(3) = \lim_{س \to 3^-} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^-} \frac{2 - س - 0}{س - 3} = -1$$

$ه'(3)$ غير موجودة لأن $ه'_+(3) \neq ه'_-(3)$

$$ه'(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 2 \\ -1 & 2 < س < 3 \\ 1 & 3 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & س = 1، 2، 3، 4 \end{cases}$$

سادساً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(س) = -٨س$ ج) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٢س}$

(٢) $\frac{د}{دس}(س) = ١٠س^{٥} - ١٥س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(س) = ٥٠س^{٤} - ٤٥س^{٢}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٥٠ - ٤٥ = ٥$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٨س^{٤} - ١٠س^{٥}$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٢٠س^{٣} - ٥٠س^{٤}$

ب) ميل $س = ٤٠$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٢ + س$

$\frac{د}{دس}(١) = ١$ ، $\frac{د}{دس}(٤٠) = ١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) صفر $= ٤٠س^{٣}$

ج) صفر $= ٠$ د) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{١٦}س^{٤}$ ، $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٤}س^{٣}$

(٢) أ) $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$ ب) $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤}(٢س) = \frac{١}{٢}س$

ج) $\frac{دص}{دس} = ٤\sqrt{٢}س^{٢}$ د) $\frac{دص}{دس} = س^{٣} + س^{٢} - ١$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٢س^{٣}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = -٢$

ب) ميل $س = ٣$ ، $\frac{د}{دس}(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$\frac{د}{دس}(س) = ٢س + ٣$ ، $\frac{د}{دس}(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

ج) ميل $س = ٤٫٠$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٦ - ٤س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(س) = -٨س$ ، $\frac{د}{دس}(٤٫٠) = -٨ \times ٤٫٠ = -١٩٫٢$

د) ميل $س = -١$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٣س - ١ - (-س) = ٤س - ١$

$\frac{د}{دس}(س) = ٤$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٤$

(٤) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٦ ق(س) - ٢ ك(س)$

$\frac{د}{دس}(-٢) = ٦ ق(-٢) - ٢ ك(-٢) = ٦ \times ٤ - ٢ \times -٨ = ٣٠$

ب) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٢} ق(س) + ك(س) + ٣س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(-٢) = \frac{١}{٢} ق(-٢) + ك(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٣} + ٢س & س < ١ \end{cases}$

هـ(١) موجودة ، إذن هـ متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{-}} هـ(س)$

$٢ + ب = ٤ - ب + ٢$ ومنه ب = ٠

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٠ & س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$ لأن هـ(١) موجودة

$٤ - ٢ = ٢ + ٢ج$ ، $ج = -٦$

(٦) هـ(س) متصل عند س = ص بالفرض

$هـ(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ص \\ ل(ص) & س < ص \end{cases}$

$هـ'_{+}(ص) = ل'(ص)$ ، $هـ'_{-}(ص) = ل'(ص)$

$هـ'_{+}(ص) = ل'(ص) = هـ'_{-}(ص)$

إذن هـ قابل للاشتقاق عند س = ص و أن $هـ'(ص) = ل'(ص)$

ثانياً: قواعد الاشتقاق (٢)

التدريبات

(١) $هـ(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

---

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} - ٤)(٦) - (٦س + ١)(٢س)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٤ - ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢س - ٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$ ، $\frac{ص}{س}\Big|_{س=١} = \frac{-٦ - ٢ - ٤}{(-٣)^{٢}} = -\frac{٣٢}{٩}$

---

(٣) ١) $ص = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٤}} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٣}}$

٢) $ص = \frac{٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص = \frac{-٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر وناقش $هـ(س) = \frac{س^{٣}(٤س^{٣}) - (س^{٤} - ٣)(٣س^{٢})}{س^{٦}} = \frac{٤س^{٦} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{٤}} = ١ + \frac{٩}{س^{٤}}$

---

(٤) $ق(س)$ متصل على ح.

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

$هـ_{+}(١) = ١$ ، $هـ_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$. $هـ(١)$ غير موجودة

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

تمارين وصائل

[1] أ) $ص' = س^2(3-س^2) + (1+س^3)(2س)$

$= 3س^2 + 2س + 2س^4 = 5س^4 + 2س$

ب) $ص' = (س^3 - 2س + 1)(4) + (4س - 3)(3س^2 - 2)$

$= 4س^3 - 8س + 4 + 12س^3 - 8س - 9س^2 + 6$

$= 16س^3 - 9س^2 - 16س + 10$

ج) $ص' = \frac{(1-س)(2س^2) - س^3(-1)}{(1-س)^2} = \frac{3س^2 - 2س^3 + س^3}{(1-س)^2}$

$= \frac{3س^2 - 2س^3}{(1-س)^2}$

د) $ص' = \frac{(2س+3)(2س) - (س^2-1)(2)}{(2س+3)^2}$

$= \frac{4س^2 + 6س - 2س^2 + 2}{(2س+3)^2} = \frac{2س^2 + 6س + 2}{(2س+3)^2}$

[2] أ) $ن(س) = (س^2 + 2س)(س^2 - 3س - 6)$

$ن'(س) = (س^2 + 2س)(2س - 3) + (س^2 - 3س - 6)(2س + 2)$

$= 2س^3 - 3س^2 + 4س^2 - 6س + 2س^2 - 6س - 12س - 12$

$= 4س^3 - 3س^2 - 24س - 12$

ب) $ن'(3) = \begin{cases} (3-س)(س^2+2س) & س \leq 3 \\ (س-3)(س^2+2س) & س > 3 \end{cases} = \begin{cases} 3س^2 - س^3 - 2س^2 - 3س & ، س < 3 \\ س^3 + 2س^2 - 3س^2 - 6س & ، س > 3 \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 4س - 3 & ، س < 3 \\ 4س - 3س^2 + 3 & ، س > 3 \end{cases}$

$ن'_+(3) = 12 - 27 + 3 = -12$ ، $ن'_-(3) = 12 - 3 - 12 = 3$

$ن'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 4س - 3 & ، س < 3 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \\ 4س - 3س^2 + 3 & ، س > 3 \end{cases}$

(19)

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^2+3)(2س-2) - (س^2-2س+3)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{2س^3 - 2س^2 + 6س - 6 - 2س^3 + 4س^2 - 6س}{(س^2+3)^2} = \frac{2س^2 - 6}{(س^2+3)^2}$

د) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س(س-1)}{(س-1)(س-3)} & 3 \neq س \leq 0 \\ \frac{-(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س}{س-3} & 3 \neq س \leq 0 \\ 1 - \frac{3}{س} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{3}{(س-3)^2} & 3 \neq س \leq 0 \\ \frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

هـ(س) متصل على الفترة $[1, 0]$

$هـ(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 \neq س \leq 0 \end{cases}$

$هـ'_+(3) = \frac{1}{3}$ ، $هـ'_-(3) = -\frac{1}{3}$ ، $هـ'(3)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \\ \text{غير موجودة} & س = 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 < س \leq 0 \end{cases}$

(3) أ) $هـ'(س) = س \, ق'(س) + ق(س)$

$هـ'(2) = 2 \, ق'(2) + ق(2) = 2 \times -1 + 3 = 1$

ب) $هـ'(س) = 2س^3 \times ق'(س) + ق(س) \times 6س - 5$

$هـ'(2) = 16 \times -1 + 3 \times 12 - 5 = 19$

ج) $هـ'(س) = ق(س) + \frac{ق'(س)}{(ق(س))^2}$

$هـ'(2) = ق(2) + \frac{ق'(2)}{(ق(2))^2} = -1 + \frac{3}{9} = -\frac{6}{11}$

د) $هـ'(س) = \frac{(2ق(س))^2 \times 3ق'(س) - (6س+1)(2ق'(س))}{(2ق(س))^4}$

$هـ'(2) = \frac{(2ق(2))^2 \times 3ق'(2) - 13 \times 2ق'(2)}{(2ق(2))^4} = \frac{36 - 15ق'(2)}{6ق(2)} = \frac{18+15}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{9}$

(٤) أ) $هـ'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$ (٥٠)

$هـ'(-٢) = ل(-٢) \times ق'(-٢) + ق(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -١٢$

ب) $هـ'(س) = \frac{[ل(س)+١)\, ق'(س) - ق(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$هـ'(-٢) = \frac{[ل(-٢)+١)\, ق'(-٢) - ق(-٢) ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{٤ \times -٦ - -٣ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{١٦} = -\frac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف $هـ(س)$ حول $س = ١,٤$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٣$

$هـ'(س) = ٢س$ ، $هـ'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف $ق(س)$ حول $س = ٢$ ، $ق(س) = \frac{٣}{١ - س^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{-٣ \times -٢س}{(١-س^{٢})^{٢}}$ ، $ق'(٢) = \frac{-٦}{-٣^{٢}} = -\frac{٢}{٣}$

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-٤)(٥) - (٥س+١)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{-٣ \times ٥ - ١ \times -٢}{(-٣)^{٢}} = \frac{-٦+٢}{٩} = -\frac{٤}{٩}$

(٦) $\frac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times ق(س)) = \frac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times ق(س))$

$= (ل(س) \times م(س)) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) \times م(س))'$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ل(س) \times ق(س) \times م'(س) + م(س) \times ل'(س) \times ق(س)$

(٧) نضع $ل(س)$ بدلاً عن $م(س)$ ، $ق(س)$ في السؤال السادس ينتج

$\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣} = ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ل(س))^{٢} \cdot ل'(س)$.

(٨) $هـ(س)$ اقتران متصل عند $س = ١$، لأنه نهايا $\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٤$

(c1)

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(١) = ١٢$ ، $هـ'_{-}(١) = ١٢$ ، إذن $هـ'(١) = ١٢$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$$

(٩) نعيد تعريف $هـ(س)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \geq ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

وهو اقتران متصل على ع.

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ'(٠) = ٠$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

(١٠) $هـ$ متصل عند $س = ج$، لأنه قابل للاشتقاق عند $س = ج$

$$\lim_{س \to ج^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ج^{-}} هـ(س)$$

$$٤ - ٨ب + ج = ٤ج - ٢ب \Leftarrow ٢ب + ج = ٠ \quad ...(١)$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ج س - ب & ، س \leq ج \\ -٣ب س^{٢} + ج & ، س > ج \end{cases}$$

$هـ'(ج) = هـ'_{+}(ج)$

$$٤ج - ب = -١٢ب + ج \Leftarrow ١١ب + ٣ج = ٠ \quad ...(٢)$$

$$٣ج + ١١ب = ٠ \quad ...(٢)$$

$$ج + ٣ب = ٠ \quad ...(١) \times ٣ \text{ ثم الطرح}$$

$$٢ب = -٦ \Leftarrow ب = -٣$$

نجد $ج$ من المعادلة (١) : $ج = -٣ب = ٩ + ٢ = ١١$

ثالثاً : المشتقات العليا

التدريبات / تدريب (١) فرع (أ)

(١) أ) $ه(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦$

$ه'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $ه'(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

---

(٢) $ه(س) = \frac{ن}{١٠} س^{ن-١}$ ، $ه'(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠} س^{ن-٢}$

$ه''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$٩ س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢$ ومنه $ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{ب}$ ومنه $ب = ٦$

---

(٣) $ه(س)$ اختبر اتصاله عند $س = ٠$ لأن نهاه $ه(س) = ه(٠)$ عند $س = ٠$

$$ه(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٢} & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

$$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

١) $ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $ه'(٠) = ٠$ ، $ه(٠)$ موجودة وتساوي صفر

$ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، $ه'(٠) = ٠$ ، $ه(٠)$ موجودة وتساوي صفر

٢) $$ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

$$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

٣) $$ه''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$$

$ه''_{+}(٠) = ٦$ ، $ه''_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $ه''(٠)$ غير موجودة

تدريبات (أ) فرع (ج)

$ه(س) = س^{٦} + ١٤س^{٤} - ٣س^{٣} - ١٠س + س^{٢} + ٧$

$ه'(س) = ٦س^{٥} + ٥٦س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢س - ١٠$

$ه''(س) = ٣٠س^{٤} + ٢٢٤س^{٢} - ١٨س + ٢$

$ه''(-١) = ٣٠ + ٢٢٤ + ١٨ + ٢ = ٢٤٨$

تمارين ومسائل

(١) ١) $ص = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$ص' = ٢٤س - ٧$

٢) $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

٣) $م(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+س) & س < ٠ \\ -س(س^{٢}+س) & س > ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+س^{٢} & س < ٠ \\ -س^{٣}-س^{٢} & س > ٠ \end{cases}$

وهو اقتران متصل على ح

$م'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢س & س < ٠ \\ -٣س^{٢}-٢س & س > ٠ \end{cases}$

$م'_{+}(٠) = ٠$ ، $م'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $م'(٠) = ٠$.

$م'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢س & س < ٠ \\ -٣س^{٢}-٢س & س > ٠ \end{cases}$ ، $م''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س < ٠ \\ -٦س-٢ & س > ٠ \end{cases}$

$م''_{+}(٠) = ٢$ ، $م''_{-}(٠) = -٢$ ، إذن $م''(٠)$ غير موجودة.

$م''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٦س-٢ & س > ٠ \end{cases}$

٤) $م(س) = (س^{٢}+٣س)(٣س^{٢}) + (س^{٣}+١)(٤س+٤)$

$= ٣س^{٤} + ١٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣س^{٣} + ٤س + ٤$

$= ٥س^{٤} + ١٦س^{٣} + ٤س + ٤$

$م''(س) = ٢٠س^{٣} + ٤٨س^{٢} + ٤$

$م''(-١) \times م''(-١) = (-٢٠ + ٤٨ + ٤)(٥ - ١٦ + ٤) = ٣٠ \times ٩ = -٧٠$

(٣) $م(س) = ن س^{ن-١}$ ، $م'(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$م''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$٢٤ = ن(ن-١)(ن-٢)$ وعندما $ن - ٣ = ١$ وعندئذ $ن = ٤$

$٢٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٤!$

(٤) $ص = \frac{-٢}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٦ \times س^{٢}}{س^{٤}} = \frac{٦}{س^{٢}}$ ، $ص''' = \frac{-١٢ \times س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{-١٢}{س^{٥}}$ (٤)

(٥) $ص = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$ص' = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$

أ) $١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ ، $٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ب) إشارة $ص'$: $(٢س - ١)(س + ٢)$

$س \in (-\infty ، -٢] \cup [\frac{١}{٢} ، \infty)$

ج) إشارة $ص'$: $(٢ - س)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-٢ ، \frac{١}{٢})$

(٦) أ) $ص = ٤س^{٣} + ١٥س^{٢} - ٦$

$ص' = ١٢س^{٢} - ٩٠س^{٧}$ ، $ص'' = ٢٤س + ٦٣٠س^{٧}$

ب) $ص = ٢٩س^{٤} + ٢٠س + ص$

$ص' = ٦٩س + ٢٠$ ، $ص'' = ٦٩$

(٧) أ) $ص' (س) = ٢س - ٦$ ، $ص'' (س) = ٢$

$ص''' (س) =$ صفر ، $ص''' (\pi) =$ صفر

ب) $ص' (س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢}$

$ص'' (س) = س^{٣} - ٢س$ ، $ص'' (-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $ص' (س) = -\frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' (س) = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

$ص''' (س) = \frac{-٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦}{س^{٤}}$

$ص^{(٤)} (س) = \frac{٦ \times ٤س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{٢٤}{س^{٥}}$ ، $ص^{(٤)} (١) = ٢٤$

(٨) $هـ(س) = س^٢ ل(س) + ل(س) \times ٢س$

$هـ'(س) = س^٢ ل'(س) + ل'(س) \times ٢س + ل(س) \times ٢ + ٢س \times ل(س)$

$= س^٢ ل'(س) + ٤س ل(س) + ٢ ل(س)$

$هـ''(س) = س^٢ ل''(س) + ل''(س) \times ٢س + ٤س \times ل'(س) + ل'(س) \times ٤ + ٢ ل'(س)$

$= س^٢ ل''(س) + ٦س ل'(س) + ٦ ل'(س)$

(٩) $(ل \times ق)'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$

$[ل \times ق)''(س) = ل(س) \times ق''(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ل''(س) \times ق(س)$

$= (ل'' \times ق)(س) + ٢(ل' \times ق')(س) + (ل \times ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٢س^٣ + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٢ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٦س^٢ + ب$

$هـ'(١) = -٦$ ومنه $٦ + ب = -٦$ ... (٢)

$هـ''(س) = ١٢س$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $١٢ = ٤$

ضد معادلة (٢) : $ب = -١٨$ وضد معادلة (١) : $ح = ١٩ \Leftarrow هـ(س) = ٢س^٣ - ١٨س + ١٩$

(١١) $\frac{ل(س) ق(س) - ل(س) ق(س)}{(ق(س))^٢}$

$= \frac{ل(س) ق'(س) + ق(س) ل'(س) - (ل'(س) ق(س) + ق(س) ل(س))}{(ق(س))^٢}$

$= \frac{ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)}{(ق(س))^٢}$

(١٢) $ق(س) = ل(س) هـ(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ(س)$

$= ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل''(س) + ٢ ح$ لكن $ل \times هـ = ح$

$ل'(س) + هـ'(س) = ٠$ ، بالتعويض في المعادلة نحصل على

$ل''(س) هـ'(س) + هـ''(س) ل'(س) = ٠$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س)$

(٥٤)

١٣) $ق(س) = ٤ب س^{٣} - \frac{١٦}{س^{٢}}$

$ق'(س) = ١٢ب س^{٢} + \frac{١٦ \times ٢ س}{س^{٤}} = ١٢ب س^{٢} + \frac{٣٢}{س^{٣}}$

$ق''(س) = ٢٤ب س - \frac{٣٢ \times ٢ س^{٢}}{س^{٦}} = ٢٤ب س - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$ق''(١) = ٩٠ \quad ، \quad ٢٤ب - ٩٦ = ٩٠$

$٢٤ب = ١٨٦$ وضح $ب = ٢$

١٤) $ق(س) = ١ - ٧(م - ٣) س$

$ق'(س) = -٧(م - ٣)$

$-٧(م - ٣) < ٠ \quad ، \quad م - ٣ > ٠$ وضح $م > ٣$

سابعاً : مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $هـ(س) = ٢ جتا س + ٦$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = ٢ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٧$

(٢) $هـ(س) = س جتا س + جا س$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $هـ(س) = ظا س = \frac{١}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{-(-جا س)}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س} = ظا س ظا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{١}{ظا س}$

$هـ(س) = \frac{-جتا س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{ظا س} \times \frac{جتا س}{جا س} = -ظتا س ظتا س$

$هـ(س) = ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times -جا س}{جتا^٢ س}$

$= \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$

(٤) $هـ(س) = ظا س ظا س + ظا^٢ س$

$هـ(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

تمارين ومسائل

١) أ) $ص' = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص' = س^٢ جتا س + جا س \times ٢س$

$= س^٢ جتا س + ٢س جا س$

ج) $ص' = \frac{جتا س \cdot جا س - س \times جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص' = ظا^٢ س - ٧\sqrt{٣}$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص' = ٠$

و) $ص' = -ظتا س \cdot ظتا س - (س \times -ظتا^٢ س + ظتا س \times ١)$

$= ظتا س \cdot ظتا س + س ظتا^٢ س - ظتا س$

ز) $ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س = -ص$

$ص'' + ٦ص = -ص + ٦ص = ٥ص$

(٣) أ) $م'(س) = جا س (-جا س) + جتا س جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$م'(\frac{\pi}{٥}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $م'(س) = -جا س + جتا س$ ، $م'(س) = -جتا س - جا س$

$م'(\frac{٣\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ج) $م'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - جتا س جتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - جتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$م'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $م'(س) = س جا س ظا س + جا س$

$م'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\pi}{٨} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ) $م'(س) = \frac{جا س (جا^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}(\frac{٣}{٤} + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{\frac{٧\sqrt{٣}}{٨} - \frac{\pi}{٦}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٦} - \frac{\pi}{٩}$

(٤) أولاً : ص = جتاس

ص' = − جاس ، ص'' = − جتاس

ص + ص'' = جتاس − جتاس = ٠

ثانياً ص = جاس

ص' = جتاس ، ص'' = − جاس

ص + ص'' = جاس − جاس = ٠

(٥) P) هـ(س) = ١ − جاس

١ − جاس = ٠ وعندما جاس = ١

إذاً س = $-\frac{3}{2}\pi$ ، $\frac{\pi}{2}$

ب) هـ(س) = ظاس ظاس = $\frac{1}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

هـ(س) = ٠ إذا كان جاس = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص = P جتاس − ب جاس

$(\text{ص}')^2 + \text{ص}^2 = (\text{P جتاس} - \text{ب جاس})^2 + (\text{P جاس} + \text{ب جتاس})^2$

$= \text{P}^2\text{جتا}^2\text{س} - 2\text{P ب جتاس جاس} + \text{ب}^2\text{جا}^2\text{س} + \text{P}^2\text{جا}^2\text{س} + 2\text{P ب جاس جتاس} + \text{ب}^2\text{جتا}^2\text{س}$

$= \text{P}^2(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}) + \text{ب}^2(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})$

$= \text{P}^2 \times 1 + \text{ب}^2 \times 1 = \text{P}^2 + \text{ب}^2$.

(٧) P) ص = − قتاس ظتاس

ص' = − قتاس × − قتا²س + ظتاس (قتاس ظتاس)

= قتا³س + قتاس ظتا²س

ب) ص = س (− جاس) + جتاس − ٤ جتاس

= − س جاس − ٣ جتاس

ص'' = − س جتاس + جاس (− ١) + ٣ جاس = ٤ جاس − س جتاس

(٨) لكي تكون $ه$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$ يجب أن تكون متصلة عند $س = ٠$.

(٩)

$$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = \lim_{س \to ٠^-} ه(س) \quad \text{و} \quad ه(٠) = ب$$

$$ه(س) = \begin{cases} -جا س & س < ٠ \\ ٩ & س = ٠ \end{cases}$$

$$ه'_+(٠) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{ه(س) - ه(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا س - ١}{س}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا س - ١}{س} \times \frac{جتا س + ١}{جتا س + ١} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا^٢ س - ١}{س(جتا س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-جا^٢ س}{س(جتا س + ١)} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{-جا س}{س} \times \lim_{س \to ٠^+} \frac{جا س}{جتا س + ١}$$

$$= -١ \times ٠ = ٠$$

$$ه'_-(٠) = ٩ = ه'_+(٠) \quad \text{إذن } ٩ = ٠$$

(٩) نعيد تعريف $ه(س)$.

$$ه(س) = \begin{cases} جا س & س \geq \pi \\ -جا س & س < \pi \end{cases}$$

$$ه'_+(\pi) = \lim_{س \to \pi^+} \frac{ه(س) - ه(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س - ٠}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س}{س - \pi}$$

نفرض $س - \pi = هـ$. عندما $س \to \pi^+$ ، فإن $هـ \to ٠^+$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-جا(\pi + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-(-جا هـ)}{هـ} = ١$$

$$ه'_-(\pi) = \lim_{س \to \pi^-} \frac{ه(س) - ه(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^-} \frac{جا س - ٠}{س - \pi}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{جا(س + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{جا هـ}{هـ} = ١$$

إذن $ه'(\pi) = ١$ ، أي أن $ه$ قابلة للاشتقاق عند $س = \pi$

(١٠) $ه(س) = جتا س - \frac{١}{٢}$

$جتا س - \frac{١}{٢} = ٠$ ، $جتا س = \frac{١}{٢}$

إذن $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ثامناً : قاعدة السلسلة

التدريبات :

(١) (١) نفرض ع = س٣ − س فيكون ص = ع٦ ، ع = س٣ − س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

٢) هـ(س) = ٢ − $\frac{١}{٢ س}$ ، هـ(س) = جتا س

(هـ ○ صـ)′(س) = هـ′(صـ(س)) . صـ′(س) = (٢ − $\frac{١}{جا^{٢} س}$) × جتا س

= ٢ جتا س − ظتا س جتا س

(٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (قا س + ظا س) (قا س ظا س + قا^٢ س)

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٠}$ = ٢ (١ + ٠) (١ × ٠ + ١) = ٢

(٣) ١) هـ(س) = ٤ قا ٤س ظا ٤س

٢) هـ(س) = ٧ (س^٣ + ٢ س − ٨)^٦ (٣ س^٢ + ٢)

٣) هـ(س) = ٤ جا^٣ (س^٢) جتا (س^٢) × ٢ س = ٨ س جا^٣ (س^٢) جتا (س^٢)

(٤) نفرض الطرفين بالنسبة إلى س

هـ′(س^٣ − ١) (٣ س^٢) = − $\frac{١}{٢ س}$ − ٢ س

س^٣ − ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ′(٧) (١٢) = − $\frac{١}{٤}$ − ٤

هـ′(٧) × ١٢ = − $\frac{١٧}{٤}$ ، هـ′(٧) = − $\frac{١٧}{٤}$ × $\frac{١}{١٢}$ = − $\frac{١٧}{٤٨}$

(١) ب) $\frac{ص}{س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{-٥(س^٢+١)^٤(٢س)}{(س^٢+١)^١٠} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{(١-س^٢)^٤(٤س^٣) - س^٤(٤(١-س^٢)^٣ \times -٢س)}{(١-س^٢)^٨} = \frac{٤س^٣(١-س^٢)^٤ + ٨س^٦(١-س^٢)^٣}{(١-س^٢)^٨}$

$= \frac{٤س^٣(١-س^٢)^٣(١-س^٢+٢س^٣)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١+س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

ه) $\frac{ص}{س} = -جا(س^٢-س) \times (٢س-١) = (١-٢س) جا(س^٢-س)$

(٢) $ه(س) = ٢س - ٢$ ، $و(س) = ٣س^٢$

$(ه \circ و)'(١) = ه'(و(١)) \times و'(١)$

$= ه'(١) \times ٣ \times ٢ = ٢ \times ٣ = ٦$

$(و \circ ص)'(١) = و'(ه(١)) \cdot ه'(١) = و'(-١) \times$ صفر $=$ صفر

(٣) ب) $(ه \circ ص)'(٢) = ه'(و(٢)) \cdot و'(٢)$

$= ه'(٣) \times -٦ = ٤ \times -٦ = -٢٤$

د) $ه'(س^٢) \times ٢س = س \Rightarrow ه'(٣) \times ٢ \times ٣ = \sqrt{٣٦} = ٨\sqrt{٣}$

(٤) نفرض $ع = و(س)$ فيكون $ص = جا ع$ ، $ع = و(س)$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \cdot \frac{ع}{س} = ن جا^{ن-١} ع \times جتا ع \times و'(س)$

$= ن جا^{ن-١}(و(س)) \times جتا(و(س)) \times و'(س)$

(٥) ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \cdot \frac{ع}{س}$

$= جا^٢ ع \times (٣س^٢ - ١) = جا^٢(س^٣ - س) \times (٣س^٢ - ١)$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \cdot \frac{ل}{س} = (٢ ل + ٢) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

$= (٢\sqrt{س^٢+١} + ٢) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}} = ٢س + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢+١}}$

(٦) $ص = -جا(س + \frac{\pi}{2})$ ، $ص'' = -جتا(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + ص'' = جتا(س + \frac{\pi}{2}) - جتا(س + \frac{\pi}{2}) = صفر$

(٧) $\frac{د ص}{د س} = ظا^٢ س + ظا^٢ س ق^٢ س = ظا^٢ س (١ + ظا^٢ س)$

$= ظا^٢ س ق^٢ س = ظا^٤ س$

(٨) أ) $هـ$ اقتران فردي وقابل للاشتقاق $\Rightarrow هـ(-س) = -هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = -هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = هـ'(س)$

أي أن $هـ'(س)$ اقتران زوجي

ب) $هـ$ اقتران زوجي وقابل للاشتقاق $\Rightarrow هـ(-س) = هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = -هـ'(س)$

أي أن $هـ'(س)$ اقتران فردي

(٩) أ) $\frac{د ص}{د س} = ٢ جا ٣س جتا ٣س \times ٣ = ٣ جا ٦س$

عندما $س = \frac{\pi}{٩}$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣ جا \frac{٦\pi}{٩} = ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ب) $\frac{د ص}{د س} = ٤(س + \frac{١}{س})^٣ (١ - \frac{١}{س^٢})$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = ٤(١+١)^٣ (١-١) = صفر$

(١٠) أ) $ص' = س جا^٢(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + جا(\frac{١}{س}) \times ١$

$= -\frac{١}{س} جا^٢(\frac{١}{س}) + جا(\frac{١}{س})$

$ص'' = -\frac{١}{س} \times ٢ جا(\frac{١}{س}) جتا(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + \frac{١}{س^٢} جا^٢(\frac{١}{س}) + جا^٢(\frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^٢}$

$= \frac{٢}{س^٣} جا^٢(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س}) + \frac{١}{س^٢} جا^٢(\frac{١}{س}) - \frac{١}{س^٢} جا^٢(\frac{١}{س})$

$= \frac{٢}{س^٣} جا^٢(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س})$

(٣٣) $\quad$ د) $ص = \frac{س \times ٢ جا ٢س - جتا س}{س^{٢}} = - \frac{٢ س جا ٢س + جتا س}{س^{٢}}$

$$ص'' = - \frac{س^{٣}(٤ س جتا ٢س + ٢ جا ٢س - ٢ جا س) - (٢ س جا ٢س + جتا س) \times ٣ س^{٢}}{س^{٦}}$$

$$= \frac{-٤ س^{٣} جتا ٢س + ٤ س^{٢} جا ٢س + ٣ جا س جتا س}{س^{٦}}$$

$$= \frac{٤ س جا ٢س + ٣ جتا ٢س - ٣ جتا س}{س^{٣}}$$

(١١) $هـ(س) = جتا ٢س \times جتا س$ ، $ق(س) = جا ٢س \times جا س$

$جا ٢س = \frac{١}{٢}$ اذا كان $٢س = \frac{٥\pi}{٦}$ وعندئذ $س = \frac{٥\pi}{١٢}$

$هـ(\frac{١}{٢}) \times جتا \frac{٥\pi}{٦} = - جتا \frac{\pi}{٦} \times ٢$

$هـ(\frac{١}{٢}) \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢$

$هـ(\frac{١}{٢}) = - ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{١} = - ٤$

(١٢) $\frac{د ص}{د س} = هـ(س^{٣} + ٢س)(٢س + ٥)$

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س=١} = هـ(٣) \times ٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

(١٣) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢\sqrt{س^{٤} + ٨س}}{٤ \sqrt{٣س^{٤} + ٨س} + ٣} = \frac{٢\sqrt{س^{٤} + ٨س}}{٤ \sqrt{٣س^{٤} + ٨س} + ٣}$

(١٤) $هـ(٤س) = ٢س$

$هـ(٤ \times ١) = ٢$

$هـ(٤س) = \frac{١}{٤}$

بفرض $س = ١$ ، $هـ(٤) = \frac{١}{٤}$

(٣٣)

(١٥) $م(س) = ٣س^٤ + ٢$ ، $م'(س) = ٦س$ ، $م''(س) = ٦$

$ه(س) = ٦س$ ، $ه'(س) = ٦$ ، $ه''(س) =$ صفر

٤) $(م \circ ه)'(١) = م'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= م'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

٥) $(م \circ ه)'(ج) = م'(ه(ج)) \times ه'(ج)$

$= م'(١) \times ٦ = ٦ \times ١ \times ٦ = ٣٤$

ج) $(م \circ ه)''(س) = ((م \circ ه)'(س))'$

$= (م'(ه(س)) \times ه'(س))' = (م'(٣س^٤) \times ٦س)'$

$= (١٨س^٤ \times ٦س)' = (١٠٨س^٣)' = ٣٢٤س^٢$

$(م \circ ه)''(-١) = ٣٢٤$

د) $(م \circ ق)''(س) = ((م \circ ق)'(س))' = (م'(ق(س)) \times ق'(س))'$

$= م''(ق(س)) \times ق'(س) + ق''(س) \times م'(ق(س)) \times ق'(س)$

$= م''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تاسعاً : الاشتقاق الضمني

التدريبات

(١) ١) $٦س - ٨ص ص' = ٠$

$٨ص ص' = ٦س$ ومنه $ص' = \frac{٣}{٤} \times \frac{س}{ص}$

٢) $٢س \cdot ص' + ٢ص - ٣ص^{٢} ص' = ١ + ٢ص'$

$٢س ص' - ٣ص^{٢} ص' - ٢ص' = ١ - ٢ص$

$ص'(٢س - ٣ص^{٢} - ٢) = ١ - ٢ص$ ومنه $ص' = \frac{١ - ٢ص}{٢س - ٣ص^{٢} - ٢}$

٣) $٢س + ص' = ظا^{٢}ص \cdot ص'$

$ص'(١ - ظا^{٢}ص) = -٢س$ ومنه $ص' = \frac{٢س}{ظا^{٢}ص - ١}$

(٢) ١) $\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - جاس = ٠$ ومنه $ص' = ٢\sqrt{ص}\ جاس$

٢) $٢(س - ص)(١ - ص') - ص' = ٠$

$٢(س - ص) - ص'(٢(س - ص)) - ص' = ٠$

$ص'(٢س - ٢ص + ١) = ٢(س - ص)$ ومنه $ص' = \frac{٢(س - ص)}{٢س - ٢ص + ١}$

(٣) $-جاص ص' = ١$ ، $ص' = -\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س :

$جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$

$جاص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ ، $-\sqrt{١ - س^{٢}}$ يُهمل

$ص' = -\frac{١}{جاص} = -\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٤) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س}$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٣جتا٣ن$

$\frac{د ص}{د س} = (-جا٢ن) \times \frac{١}{٣جتا٢ن} \times ٣ = -ظا٣ن$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = -٣ظا^{٢}٣ن \times \frac{د ن}{د س} = -٣ظا^{٢}٣ن \times \frac{١}{٣جتا٢ن}$

$= -ظا^{٣}٣ن$

$\left.\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right|_{ن = \frac{\pi}{٣}} = -(-١)^{٣} = ١$

تمارین وسائل

(۱) ۴) $۳س + ۸ص \frac{دص}{دس} = ۰$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{۱}{۴} \times \frac{س}{ص}$

ن) $\frac{دص}{دس} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۲(۳س^۲ + ۴س)}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۱}{۲ص} \times \frac{۳س^۲ + ۸س}{۳س^۲ + ۴س} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۴ص(۳س^۲ + ۴س)}$

ج) $۳س^۲ + ۳ص^۲ \frac{دص}{دس} = س \frac{دص}{دس} + ص$

$\frac{دص}{دس}(۳ص^۲ - س) = ص - ۳س^۲$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ۳س^۲}{۳ص^۲ - س}$

د) $جتا(س ص)(س \frac{دص}{دس} + ص) = ۲س$

$(س \frac{دص}{دس} + ص) = \frac{۲س}{جتا(س ص)}$ ، $س \frac{دص}{دس} = \frac{۲س}{جتا(س ص)} - ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۲}{س جتا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(۲) ۴) $۳(س ص)^۲ (س \frac{دص}{دس} + ص) = ۴$

$س \frac{دص}{دس} + ص = \frac{۴}{۳(س ص)^۲}$

$س \frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳(س ص)^۲} - ص$ وضع $\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳س^۲(س ص)^۲} - \frac{ص}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{س^۲ ص^۲}) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^۲ص}{دس^۲} = \frac{۴}{۳} \times \frac{-(س^۲ \times ۲) ص \cdot \frac{دص}{دس} + ۳س^۲ ص^۲}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{س^۲ ص(۲ + س \frac{دص}{دس} + ۳ص)}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{۲س \frac{دص}{دس} + ۳ص}{س^۴ ص^۳} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

د) $۸س + ۶ص \cdot صَ = ۰$ ، $صَ = -\frac{۴}{۳} \times \frac{س}{ص}$

$صَ = -\frac{۴}{۳}(\frac{ص - س \cdot صَ}{ص^۲})$

ج) $\frac{ص}{س} = س(-حاص).ص' + جتاص$

$\frac{ص}{س}(1 + س حاص) = جتاص$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{جتاص}{1+س حاص}$

$\frac{ص''}{س^2} = \frac{(1+س حاص)(-حاص)ص' - جتاص(س جتاص.ص' + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= \frac{-(حاص)(ص')(1+س حاص) - جتاص(س ص' جتاص + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= -\frac{حاص(ص' + جتاص) + س ص'}{(1+س حاص)^2}$

د) $جتاس = \frac{ص'}{2\sqrt{ص}}$ وضع $ص' = 2\sqrt{ص}\, جتاس$

$ص'' = 2\sqrt{ص} \times -حاس + جتاس \times \frac{2ص'}{2\sqrt{ص}}$

$= -2\sqrt{ص}\, حاس + \frac{ص' جتاس}{\sqrt{ص}}$

٣) أ) $٨س ص' + ٨ص - حاص.ص' = ٠$

$ص'(٨س - حاص) = -٨ص$ وضع $ص' = \frac{-٨ص}{٨س - حاص}$

$ص' \Big|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{4}}{١ - \frac{\pi}{4} \times ٨} = \frac{-٢\pi}{١ - ٢\pi} = \frac{٤\pi}{١ - ٢\pi}$

ب) $٣س^2 - (٢س ص' + ٢ص) + ٢ص^2 . ص' = ٠$

$ص'(٣ص^2 - ٢س) = -٣س^2 + ٢ص$

$ص' = \frac{-٣س^2 + ٢ص}{٢ص^2 - ٢س}$ ، $ص' \Big|_{(١، -١)} = \frac{-٣ \times ١ - ٢}{٣ - ٢} = -٥$

ج) $\frac{ص}{٢} = ٣ - \frac{٤}{س} = \frac{٣س - ٤}{س}$ وضع $\frac{1}{ص} = \frac{س}{٣س - ٤}$

$\frac{1}{ص^2} ص' = \frac{(٣س - ٤) - س \times ٣}{(٣س - ٤)^2}$ وضع $ص' = \frac{-٨}{(٣س - ٤)^2}$

$ص' \Big|_{(٢، ٤)} = \frac{-٨}{٤^2} = -\frac{١}{٨}$

(٤) $\text{جتا}(س+ص) \times (1+ص') = ص^{٤}(-\text{جا}س) + ٢ص ص' \text{جتا}س$

$ص' \text{جتا}(س+ص) + \text{جتا}(س+ص) = ٢ص ص' \text{جتا}س - ص^{٤}\text{جا}س$

$ص'(\text{جتا}(س+ص) - ٢ص \text{جتا}س) = -\text{جتا}(س+ص) - ص^{٤}\text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{جتا}(س+ص) + ص^{٤}\text{جا}س}{٢ص \text{جتا}س - \text{جتا}(س+ص)}$$

(٥) $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$ص' = -\sqrt{\frac{ص}{س}} \times \frac{١}{\sqrt{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $\sqrt{ص} = ٠$ أي أن:

$\sqrt{س} = ٣$ أي $س = ٩$. يكون المماس أفقياً عند النقطة $(٩, ٠)$

٦) $ص' = \frac{٤}{٣}(٢س+١)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{٤}{٣\sqrt{٢س+١}}$

٧) $١ = -\text{جتا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \frac{١}{-\text{جتا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^{٢}ص$

٨) $ص \times -٢\text{جا}٢س + ص' \text{جتا}٢س = س \times ٢\text{جتا}ص \times ص' + \text{جا}٢ص$

$ص'(\text{جتا}٢س - ٢س \text{جتا}ص) = \text{جا}٢ص + ٢ص \text{جا}٢س$

$$ص' = \frac{\text{جا}٢ص + ٢ص \text{جا}٢س}{\text{جتا}٢س - ٢س \text{جتا}٢ص}$$

$ص'|_{(\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٢})} = \frac{\text{جا}\pi + ٢ \times \frac{\pi}{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جتا}\pi - ٢ \times \frac{\pi}{٢}\text{جتا}\pi} = \frac{٠ + \pi}{\frac{\pi}{٢} + ٠} = ٢$

(٩) $س ص' + ص = جتا س$

$ص' = \frac{جتا س - ص}{س}$

$ص'' = \frac{س(-حا س - ص') - (جتا س - ص)١}{س^{٢}} = \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص}{س^{٢}}$

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص}{س} + ٢ \times \frac{جتا س - ص}{س} + س ص$

$= \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص + ٢ جتا س - ٢ ص + س^{٢} ص}{س}$

بالتعويض عن $س ص$ بـ $حا س$ و $س ص'$ بـ $جتا س - ص$

$= \frac{-س^{٢} ص - س ص' + س ص' + س^{٢} ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \cdot \frac{د س}{د ن} = (\frac{١}{٤ ن})(٣ ن^{٢} + ٢) = \frac{٣}{٤} ن + \frac{١}{٢ ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د ن^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د س}{د ن} + \frac{د ن}{د س} \times \frac{-٢ \times د^{٢} س}{(د ن)^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times ٤ ن - \frac{١}{٢ ن} \times \frac{٢}{(٢ ن)^{٢}}$

$= \frac{٣}{١٦ ن} - \frac{١}{٣(٢ ن)}$

$\left| \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = ١} = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $١ + ص' = جتا ص \times ص'$

$ص'' = جتا ص \times ص' + ص' (- حا ص) \times ص'$

$(ص')^{٢} جا ص = ص'' (جتا ص - ١)$

$(ص')^{٢} = ص'' \times \frac{جتا ص - ١}{حا ص} = ص'' (ظتا ص - \overline{ظتا ص})$

(١٢) $ص' = جتا س + س ص' + ص$ ، $ص'' = - حا س + س ص'' + ص' + ص'$

$ص'' (١ - س) = ٢ ص' - حا س$ ، $ص'' = \frac{٢ ص' - حا س}{١ - س}$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص' - حا س}{١ - س} + ص = \frac{٢ ص' - حا س + ص - س ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ ص' + ١ ص - (حا س + س ص)}{١ - س} = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

لأن $ص = حا س + س ص$

مراجعة

(١) معدّل التغير $= \frac{ق(س+ص)-ق(س)}{ص}$

$= \frac{ظا(س+ص)-ظاس}{ص} = \frac{\frac{ظاس+ظاص}{١-ظاس\,ظاص}-ظاس}{ص}$

$= \frac{\frac{ظاس+ظاص-ظاس(١-ظاس\,ظاص)}{١-ظاس\,ظاص}}{ص} = \frac{ظاس+ظاص-ظاس+ظا^{٢}س\,ظاص}{ص(١-ظاس\,ظاص)}$

$= \frac{ظاص(١+ظا^{٢}س)}{ص(١-ظاس\,ظاص)} = \frac{ظاص\,قا^{٢}س}{ص(١-ظاس\,ظاص)}$

(٢) $ق'(\frac{\pi}{٤}) = نها_{ص\to٠} \frac{ق(\frac{\pi}{٤}+ص)-ق(\frac{\pi}{٤})}{ص} = نها_{ص\to٠} \frac{جا(\frac{\pi}{٤}+ص)-١}{ص}$

$= نها_{ص\to٠} \frac{جا\frac{\pi}{٤}\,جتا ص + جتا\frac{\pi}{٤}\,جا ص - ١}{ص} = نها_{ص\to٠} \frac{جتا ص - ١}{ص}$

$= نها_{ص\to٠} \frac{-٢جا^{٢}\frac{ص}{٢}}{ص} = نها_{ص\to٠} -جا\frac{ص}{٢} \times نها_{ص\to٠} جا\frac{ص}{٢} = -١ \times صفر = صفر$

(٣) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+س+١ & ٠ \le س < ١ \\ ٤س+١ & ١ \le س < ٢ \\ ٤س+٢ & ٢ \le س < ٣ \\ ٤س+٣ & س = ٣ \end{cases}$ وهو اقتران متصل على $[٠,٣]-\{٢\}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س+١ & ٠ < س < ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$ق'_{+}(١) = ٢+١ = ٣$ ، $ق'_{-}(١) = ٤$ ، إذن $ق'(١)$ غير موجودة

$ق'(٢)$ غير موجودة ، لأن $ق(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س+١ & ٠ < س \le ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠, ١, ٢, ٣ \end{cases}$

(٤٠)

(٤) د) ه'(س) = $\sqrt{٨س+٥}$ × ل'(س) + ل(س) × $\frac{١}{٢\sqrt{٨س+٥}}$

ه'(-١) = $\sqrt{٣}$ × ل'(-١) + ل(-١) × $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ = ٢ × ٢ + ١ × $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ = ٤ $\frac{١}{٤}$

ه) ه'(س) = $\frac{(س^{٢}-س)(٣ل(س)\cdot ل'(س)) - (ل(س))^{٣}(٢س-١)}{(س^{٢}-س)^{٣}}$

ه'(-١) = $\frac{٢\times٢ل(-١)\,ل'(-١) - (ل(-١))^{٢}(-٣)}{٢^{٢}}$ = $\frac{٣\times١\times٢-١\times-٣}{٤}$ = $\frac{١١}{٤}$

ج) ه(س) = ل(س) − $\frac{س ل'(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

ه(-١) = ل(-١) − $\frac{-١\,ل'(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

= ٢ − $\frac{-(٢\times٢)-١}{١}$ = ٢ + ٣ = ٥

د) ه(س) = (ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ ل(س)) × $\frac{\pi}{٣}$ ل(س)

ه(-١) = (ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ ل(-١)) × $\frac{\pi}{٣}$ ل(-١) = ($\frac{\pi}{٣}$ ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$) × ٢

= $\frac{\pi}{٣}\times٣$ = $\frac{٧\pi}{٣}$

(٥) د) ص = س ظاس + ظاس

ص' = س × ٢ظاس قا^{٢}س + ظاس + قا^{٢}س

= ٢س ظاس قا^{٢}س + ظاس + قا^{٢}س = قا^{٢}س (٢س ظاس + ١)

= ٢ظا^{٢}س (١ + ص)

ب) جتاص · $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ومنه $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{جتاص}$

نجد جتاص بدلالة س

جتا^{٢}ص + ظا^{٢}ص = ١ ، جتا^{٢}ص + س^{٢} = ١

إذن جتا^{٢}ص = ١ − س^{٢} ومنه جتاص = $\sqrt{١-س^{٢}}$ لأن ص ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$)

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{جتاص}$ = $\frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

٦) $\frac{د س}{د ن} = ٢$ ، ومنه $\frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س} = (٣ن - ٤) \times \frac{١}{٢} = ن - ٢$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

عندما ن = ٦ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١}{٢}$

٧) ل(س) = ٢ هـ(س) . ق(س) + ٢ ق(س) . هـ(س)

= ٢ ق(س) . [هـ(س) + ق(س)] = صفر

٨) هـ(س) اقترانه متصل طالما

١) هـ(س) = $\begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س \geq ٠ \end{cases}$

ب) هـ$_+$(٠) = −٤ ، هـ$_-$(٠) = ٤ وعليه هـ(٠) غير موجودة ⇐ هـ(س) = $\begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \end{cases}$

٩) ٣ ص^٢ صَ = هـ(٤س^٣ − س)(٨س − ١)

صَ = $\frac{هـ(٤س^٣ - س)(٨س - ١)}{٣ ص^٢}$

نجد ص عندما س = −١ ، ص^٣ = هـ(٥) = −٨ ومنه ص = −٢

صَ $|_{س=-١}$ = $\frac{هـ(٥)(-٩)}{(-٣)^٢}$ = $\frac{٤ \times -٩}{١٢}$ = −٣

١٠) هـ(س) = (جتا ق(س)) ق(س)

هـَ(س) = (جتا ق(س)) . قَ(س) + ق(س) (−ا ق(س)) × قَ(س)

هـَ(١) = جتا ق(١) × قَ(١) − ق(١) ا ق(١) × قَ(١)

= (جتا $\frac{\pi}{٣}$) × ٤ − صفر = $\frac{١}{٢} \times ٤$ = ٢

١١) ق(س) = ٣س^٢ + ٢ ، هـ(س) = ٦س ، ق(س) = ٦ − س

(هـ ○ ص)َ(س) = هـَ(ق(س)) . قَ(س)

(هـ ○ ص)َ(٢) = هـَ(ق(٢)) . قَ(٢) = هـَ(١٢) × ١

= ٧ × ١٢ = ٨٤

١٥) $(هـ \circ ص)''(س) = ((هـ \circ ص)'(س))'$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص''(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) \cdot ص'(س) + هـ'(ص(س)) \cdot ص''(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) \cdot ص'(٢) + هـ'(ص(٢)) \cdot ص''(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ \times ١٢ \times ١٢ + ٣٤٨ \times ٦ = ١٨٧٢$

١٦) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٢ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -٥ ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{٢}{٥}$

١٣) $\frac{د ص}{د س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٢ + ٦ = ٤$

١٤) $جتاص \cdot ص' = قا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{قا^٢ س}{جتاص}$

$جتاص \times ص' + ص'(-جاص) \cdot ص' = قا س قا س ظا س$

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س ظا س$

باستبدال جاص بـ ظا س

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س$ جاص بالقسمة على جتاص

$ص'' - (ص')^٢ ظاص = قا^٢ س ظاص$

ظاص $(قا^٢ س + (ص')^٢) = ص''$. اذن ظاص $= \frac{ص''}{قا^٢ س + (ص')^٢}$

١٥) $هـ'(٣س - ١)(٣) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{س^٢}{٢}$

$هـ(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{س^٢} - \frac{س^٣}{٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤} - \frac{٨}{٣}) = \frac{١}{٣}(-\frac{٢٩}{١٢}) = -\frac{٢٩}{٣٦}$

١٦) $- جاص \cdot ص' - (س ص' + ص) = ٢$

$- جاص \cdot ص'' + ص'(- جتاص \cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' جاص + (ص')^٢ جتاص + س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س + جاص) + ص'(٢ + ص' جتاص) = ٠$

(٤٣)

(١٧) $ص = أ جتا س + ب جا س$

$(ص)^٢ + ص_١^٢ = أ^٢ جتا^٢ س + ب^٢ جا^٢ س + ٢أ ب جا س جتا س$

$+ أ^٢ جا^٢ س + ب^٢ جتا^٢ س - ٢أ ب جا س جتا س$

$= جتا^٢ س (أ^٢ + ب^٢) + جا^٢ س (أ^٢ + ب^٢)$

$= (أ^٢ + ب^٢)(جتا^٢ س + جا^٢ س) = أ^٢ + ب^٢$

(١٨) $٣ص^٢ ص_١ = هـ(س^٣ - س)(٤س - ١)$

عندما $س = ٠$ يكون $ص^٢ = هـ(٠) = -٨$ ومنه $ص = -٢$

$٣(-٢)^٢ ص_١ |_{س=٠} = هـ(٠) \times ٨$.

$١٢ ص_١ |_{س=٠} = ٤ \times ٨$ ، $ص_١ |_{س=٠} = \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٨}{٣}$

(١٩) أ) $هـ(س) = ٣س^٢ - ٢س$ ، $هـ'(س) = ٦س - ٢$ ، $هـ''(س) = ٦$

$ق(س) = ٦س + ١$ ، $ق'(س) = ٦$

$(هـ \circ ق)'(١) = هـ'(ق(١)) \cdot ق'(١)$

$= هـ'(٤) \times ٨ = ٢٢ \times ٨ = ١٧٦$

ب) $(هـ \circ ق)''(س) = ((هـ \circ ق)'(س))' = (هـ'(ق(س)) \cdot ق(س))'$

$= هـ''(ق(س)) \cdot ق'(س) + ق(س) (هـ''(س) \cdot ق(س))$

$(هـ \circ ق)''(١) = هـ''(ق(١)) \cdot ق'(١) + ق(١) (هـ''(ق(١)) \cdot ق(١))$

$= هـ''(٤) \times ٦ + ٨ (هـ''(٤) \times ٨)$

$= ٢٢ \times ٦ + ٨ \times ٦ \times ٨ = ٦٤٢$

(٢٠) أ) $س = ٠$ ب) $س = -١٩٠٫٦$ ج)

(٢١) أ) جـ ب) ب ج) د د) أ

هـ) ب و) د ز) جـ

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

(تطبيقات التفاضل)

تطبيقات هندسية

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$ص = ل(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= \left| ص' \right|_{س=١} = \left| \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}} \right|_{س=١} = \frac{١}{٢\times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$ص = ل(س) = \frac{٤}{س}$ ، $ق(س) = س$

يتقاطعان عندما $ل(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{٤}{س} = س \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

ميل المماس لـ $ل(س)$ $= \left| ل'(س) \right|_{س=-٢} = \left| \frac{-٤}{س^٢} \right|_{س=-٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

ميل المماس لـ $ق(س)$ $= \left| ق'(س) \right|_{س=-٢} = ١$

وحيث أن $ق(-٢) \times ق(-٢) = -١ \times ١ = -١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$ف(س) = جا س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس = المشتقة $= ف'(س) = جتا س$

جا $س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، \pi ، ٢\pi$

$ف(٠) = ٠$ ، $ف(\pi) = ٠$ ، $ف(٢\pi) = ٠$

$ف'(٠) = ١$ ، $ف'(\pi) = -١$ ، $ف'(٢\pi) = ١$

∴ المماس والقاطع عند $س = \frac{\pi}{٢}$ هما نفسهما

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$ف(س) = ج س^٣ + د س^٢ + هـ س + ٢$ ، ميل المماس $= ف'(س) = ٣ج س^٢ + ٢د س + هـ$

$ف'(١) = ظا ١٣٥°$

$٣ج + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٥ج + ٢د = -١ \Leftarrow ج = \frac{-١}{٥} = -٠.٢$

تدريب (٥) ص ١٦٥

$f(x) = 5 - x^2$ ، النقطة (٣، ٠) لا تقع على منحنى $f(x)$

افرض أن النقطة (x_1, y_1) تقع على منحنى $f(x) \Leftarrow y_1 = 5 - x_1^2$

ميل المماس عند $(x_1, y_1) = f'(x_1) = -2x_1$

معادلة المماس: $y - 0 = -2x_1(x - 3)$

$f(x_1) = y_1 \Leftarrow y_1 = 5 - x_1^2 = -2x_1(x_1 - 3)$

$5 - x_1^2 = -2x_1^2 + 6x_1 \Leftarrow x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \Leftarrow (x_1 - 1)(x_1 - 5) = 0$

$x_1 = 1$ أو $x_1 = 5$

نقطة المماس الأولى (١، ٤) ومعادلة المماس الأولى: $y - 4 = -2(x - 1)$

" " الثانية (٥، -٢١) " " الثانية: $y + 21 = -10(x - 5)$

تمارين ومسائل
ص ١٦٦

١) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، $f'(x) = 2x + 6$

ميل المماس عند $(1, 12) = f'(1) = 8$

٢) $f(x) = x^3$ يتقاطع مع المستقيم $y = x + 6$ عندما

$f(x) = y \Leftarrow x^3 = x + 6 \Leftarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftarrow x = 2$

ميل المماس $= f'(2) = 3(2)^2 = 12$

معادلة المماس: $y - 8 = 12(x - 2)$
عند $(2, 8)$

٣) $f(x) = x^2 - 3x + 3$ ، $f'(x) = 2x - 3$

ميل المماس $= f'(x) = \tan\frac{3\pi}{4} \Leftarrow 2x - 3 = -1 \Leftarrow 2x = 2 \Leftarrow x = 1$

النقطة $(1, 1)$

٤) $(y - 4)^2 = x + 2 \Leftarrow 2(y - 4) \times \frac{dy}{dx} = 1 \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 8}$

ميل المنحنى = ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{1}{2y - 8} = \frac{1}{2} \Leftarrow 2y = 6 \Leftarrow y = 3$

$\therefore$ النقطة $(-1, 3)$

٥) $ق(س) = س^٤ - ٤س + ٣$ ، $ق'(س) = ٢س - ٤$ ، ميل المماس $= -٢$

ميل المماس المتناظر مع $س_١ = ق'(س_١) = -٢ \Leftarrow ٢س_١ - ٤ = -٢ \Leftarrow س_١ = ١$

$(١، ٠)$

معادلة المماس: $ص - ٠ = -٢(س - ١) \Leftarrow ص = -٢س + ٢$

٦) $ق(س) = \frac{١}{س^٢}$ عند $(١، ٢)$ ، $ق'(س) = \frac{-٢}{س^٣}$

ميل المماس $= ق'(١) = -٢$ ، ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

معادلة المماس: $ص - ٢ = -٢(س - ١)$

معادلة العمودي: $ص - ٢ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

٧) $ق(س) = س^٣ + ب س + جـ$ عند $(٠، ٢)$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ + ب$

$ق(١) = ٢ \Leftarrow \boxed{جـ = ٢}$

$ق'(١) =$ ميل المستقيم $= ١ \Leftarrow ق'(١) = ب = ١ \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

٨) $ق(س) = \frac{س^٣}{٣}$ ، معادلة المستقيم $٢س - ص + جـ = ٠$ ، $ق'(س) = \frac{س^٢}{٣}$ ، $ص = ٢$

$ق'(س_١) = ص \Leftarrow \frac{س^٢}{٣} = ٢ \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$ق(١) = ص_{س=١} \Leftarrow \frac{١}{٣} = ٢ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = -\frac{٥}{٣}}$

$ق(-١) = ص_{س=-١} \Leftarrow ٢ = -٢ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

٩) العلاقة $س = ص^٢ - ٤ص$ تقاطع مع محور الصادات عندما $س = ٠$

$ص^٢ - ٤ص = ٠ \Leftarrow ص(ص - ٤) = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٤$

النقطة الأولى $(٠، ٠)$ ، النقطة الثانية $(٠، ٤)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= ١ = ٢ص \cdot ص' - ٤ص' \Leftarrow ص' = \frac{١}{٤ - ٢ص}$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٤}(س - ٠)$

معادلة المماس الثانية:

$ص - ٤ = \frac{١}{٤} \times س$

١٠) العلاقة $ص^2 + ٦ص = س^3 + ٢س - ٢$ ، $ص^2 + ٦ص + ٩ = س^3 + ٢س + ٧$

$(ص+٣)^2 = (س+١)^3 + ٦$

$(ص+٣)^2 = (س+١)^3 + (\sqrt{٦})^2$

العلاقة تمثل معادلة دائرة مركزها $(-١، -٣)$ ونصف قطرها $\sqrt{٦}$

١١) $ق(س) = ٣ظتا س + ق\sqrt{٣}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ ، النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٥)$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = ٥ - ٣ظتا \frac{\pi}{٤} + ق\sqrt{٣} = ٥ - ٣ + ق\sqrt{٣} = ق\sqrt{٣} + ٢$

$ق'(س) = ٣قتا^2 س + ق\sqrt{٣} ظا س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٣(\sqrt{٢})^2 + ق\sqrt{٣} = ٦ + ق\sqrt{٣}$

ميل المماس $= ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٦ + ق\sqrt{٣}$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٦ + ق\sqrt{٣}}$

معادلة المماس: $ص - ٥ = (٦ + ق\sqrt{٣})(س - \frac{\pi}{٤})$

معادلة العمودي: $ص - ٥ = \frac{-١}{٦ + ق\sqrt{٣}}(س - \frac{\pi}{٤})$

١٢) منحنى $ص = ق(س)$ يمر بالنقطة $(١، ٢)$ ومنحنى $ق'(س) = س^3 - \frac{٣}{٢}س^2 + \frac{٣}{٢}$

$ق(س) = \frac{١}{٤}س^4 - \frac{١}{٢}س^3 + \frac{٣}{٤}س^2 + ج$

$٢ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤} + ج \Rightarrow ج = ١$

$ق(س) = \frac{١}{٤}س^4 - \frac{١}{٢}س^3 + \frac{٣}{٤}س^2 + ١$

ميل المماس $= ق'(١) = ١ - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} = ١$

معادلة المماس: $ص - ٢ = ١(س - ١)$

$ص = س + ١$

١٣) ميل المماس $= ق'(٤) = \frac{\sqrt{٢٥}}{٢}|_{س=٤} = \frac{٥}{٢}$ ، معادلة المماس: $ص - ٣ = \frac{٥}{٢}(س - ٤)$

$ص = \frac{٥}{٢}س - ٧$

المماس يقطع السينات عندما $ص = ٠ \Rightarrow س = \frac{١٤}{٥}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times \frac{١٤}{٥} \times ٧ = \frac{٤٩}{٥}$ وحدات مربعة

١٤) ميل المماس عند $(٢، ١) = ق'(١) = ٢س$ عندما $س = ١ = ٢$ ، ميل العمودي عند $(٢، ١) = -\frac{١}{٢}$

معادلة المماس: $ص - ٢ = ٢(س - ١) \Rightarrow ص = ٢س$ تقطع محور السينات عند $س = ٠$

معادلة العمودي: $ص - ٢ = -\frac{١}{٢}(س - ١) \Rightarrow ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{٥}{٢}$ تقطع محور السينات عند $س = ٥$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$ وحدات مربعة

تطبيقات فيزيائية

تدريب (١) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ٤ جا٣ن - ٥ جتا٣ن$

$ف(\frac{\pi}{٢}) = ٤ جا\frac{\pi}{٢} - ٥ جتا\frac{\pi}{٢} = ٤ - ٠ = ٤$ متر

$ف'(ن) = ١٢ جتا٣ن + ١٥ جا٣ن \Leftarrow ف'(\frac{\pi}{٢}) = ١٢ جتا\frac{\pi}{٢} + ١٥ جا\frac{\pi}{٢} = ٠ + ١٥ = ١٥$ م/ث

$ف''(ن) = -٣٦ جا٣ن + ٤٥ جتا٣ن \Leftarrow ف''(\frac{\pi}{٢}) = -٣٦ جا\frac{\pi}{٢} + ٤٥ جتا\frac{\pi}{٢} = -٣٦ + ٠ = -٣٦$ م/ث^٢

تدريب (٢) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ن^٣ - ٩ن^٢ + ١٥ن$ ، $ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥ = ٠ \Leftarrow ٣(ن-١)(ن-٥) = ٠$

$ن = ١$ ث ، $ن = ٥$ ث

$ف''(ن) = ٦ن - ١٨ \Leftarrow ف''(١) = ٦ - ١٨ = -١٢$ م/ث^٢ ، $ف''(٥) = ٣٠ - ١٨ = ١٢$ م/ث^٢

تدريب (٣) ص ١٧٠ :

$ف(ن) = ٥٠ن - ٥ن^٢ \Leftarrow ف'(ن) = ٥٠ - ١٠ن \Leftarrow ع(ن) = -٥٥ \Leftarrow ١٠ن = ٥٥$

$\Leftarrow ن = ٨$ ث ، أي بعد ٨ ثوانٍ يكون الجرم على ارتفاع أقصى

$ف(٨) + ل = ٠ \Leftarrow ٥٠ - ٣٢٠ + ل = ٠ \Leftarrow ل = ٢٧٠$ م ارتفاع البرج

تمارين ومسائل ص ١٧١

١) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٣$

٢) $ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Leftarrow ع(١) = ٩$ م/ث

٣) $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Leftarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

$ت(ن) = ف'(ن) = ٦ن - ١٢ \Leftarrow ت(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ت(٣) = ٦$ م/ث^٢

٤) $ف(ن) = ٢ جا(\frac{\pi}{٦}ن) + \frac{\pi}{٣}ن$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢ \times \frac{\pi}{٦} جتا\frac{\pi}{٦}ن + \frac{\pi}{٣} = جتا\frac{\pi}{٦}ن + \frac{\pi}{٣} \Leftarrow \frac{\pi}{٣} = -جتا\frac{\pi}{٦}ن$

$ن = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ت(ن) = ف''(ن) = -جتا\frac{\pi}{٦}ن \Leftarrow ت(\frac{\pi}{٣}) = -جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{٢}$ م/ث^٢

٥) $ف(ن) = ٦,٩ن - ٤,٩ن^٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٦,٩ - ٩,٨ن \Leftarrow ع(ن) = ٠ \Leftarrow ن = \frac{٦,٩}{٩,٨} = ٢$ ث

$ف(٢) = ٦,٩ \times ٢ - ٤,٩ \times ٤ = ١٣,٨ - ١٩,٦ = -٥,٨$ م

$ت(ن) = ف''(ن) = -٩,٨$ م/ث^٢

ج) $ع(٤) = ٦,٩ - ٩,٨ \times ٤ = -٦,٩$ م/ث

د) $ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢ \Leftarrow ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن \Leftarrow ف'(ن) = ٠ \Leftarrow ن = ٤$ ث

$ع(٨) = -١٢٨$ ، $ع(٠) = ١٢٨$ ، $ع(٤) = ٠$

هـ) $ت(ن) = ف''(ن) = -٣٢$ قدم/ث^٢ ، $ع(٠) = ١٢٨$ قدم/ث

و) $ع(٧,٥) = ١٢٨ - ٣٢ \times ٧,٥ = ٤$ قدم/ث ، $ف(٧,٥) = ١٢٨ \times ٧,٥ - ١٦ \times ٥٦,٢٥ = ٥٦$ قدم

ه) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(ن) = ٨٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٨٠ ⇒ ١٦(ن − ١)(ن − ٥) = ٠

ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(١) = ٦٤ قدم/ث ، ع(٥) = −٦٤ قدم/ث

و) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ١٠/٤

ف(١٠/٤) = ٩٦ × ١٠/٤ − ١٦ × (١٠/٤)² = ٢٠٤ قدم

ز) ف(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٠ ⇒ ن = ٦ ثانية

ح) ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(٦) = −٩٦ قدم/ث

ط) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ثانية ، أقصى ارتفاع = ف(٣) = ١٤٤ قدم

ي) ف(٦) = ٠ ⇒ ١٤٤ − ١٦(٣ − ك)² = ٠ ⇒ (٣ − ك)² = ٩ ⇒ ٣ − ك = ±٣

⇒ ك = ٦ ثانية

ك) ف(ن) = ١٤٤ − ١٦(ن − ٣)² ⇒ أقصى ارتفاع = ١٤٤ قدم

ل) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ف″(ن) = −٣٢ ⇒ التسارع = ٣٢ قدم/ث²

م) ف(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٠ ⇒ ن = ٦ ثانية

ن) ع(٦) = −٩٦ قدم/ث

س) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

ع) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

ف) ن = √(٩ + ٢٤٠) / ٤ = ٣ + ٢√٦٠ ث

ص) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ثانية ، زمن الصعود + زمن الهبوط = ٦ ث

ق) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ث ، ف(٣) = ١٤٤ − ١٦(٣ − ٣)² = ١٤٤ قدم

ر) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ، ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(٣) = ٩٦ − ٣٢(٣) = −٩٦ قدم/ث

ش) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ف″(ن) = −٣٢ ⇒ التسارع = ٣٢ قدم/ث²

ت) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

ث) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

خ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

ذ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

ض) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

ظ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

غ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

المعدلات المرتبطة بالزمن

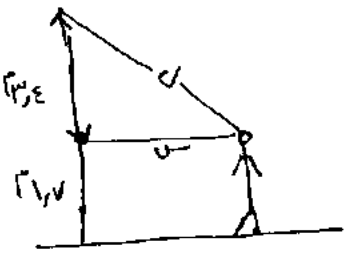
تدريب (١) صـ١٧٥ :

$\frac{ds}{dt} = -10$ سم/ث ،

ا) $ح = \frac{4}{3}\pi نق^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 4\pi نق^2 \cdot \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{نق=10} = 4\times\pi\times10^2\times(-10) = -4000\pi$ سم^3/ث

ب) $م = 4\pi نق^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 8\pi نق \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{نق=5} = 8\times\pi\times5\times(-10) = -400\pi$ سم^2/ث

تدريب (٢) صـ١٧٩ :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3} = ؟$

$ل = \sqrt{س^2 + (3,4)^2} \Rightarrow \frac{dل}{dt} = \frac{س \times \frac{ds}{dt}}{\sqrt{س^2 + (3,4)^2}}$

$\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3} = \frac{3\times2}{\sqrt{9+(3,4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{20,56}}$ م/ث

تدريب (٣) صـ١٧٧

$\frac{dθ}{dt} = 0,2$ د/ث

ا) $م = \frac{1}{2} \times 64 \times جا\theta \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 32 جتا\theta \times \frac{dθ}{dt}$

$\left|\frac{dم}{dt}\right| = 32\times جتا60° \times 0,2 = 3,2$ سم^2/ث

$\theta = 60°$

ب) $\left|\frac{dم}{dt}\right| = 32\times جتا120° \times 0,2 = -3,2$ سم^2/ث

$\theta = 120°$

تمرين (١) صـ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -1000$ سم/ث حيث :

$ح = س^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 3س^2 \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=10} = 3\times100\times(-1000) = -300000$ سم^3/ث

$م = 6س^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 12س \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{س=12} = 12\times12\times(-1000) = -144000$ سم^2/ث

تمرين (٥) صـ ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2}$ م/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{s=3} = ?$

$s^2 + h^2 = 25 \Rightarrow h = \sqrt{25 - s^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-s}{\sqrt{25-s^2}} \times \frac{ds}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}$ م/ث

٣) تدريب (٣) :

$\frac{dV}{dt} = 12\ \text{سم}^3/\text{ث}$ ، $\left|\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = ?$

$\frac{r}{h} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{r}{16} = \frac{3}{8}$

$r = 6\frac{1}{2}$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times \frac{9}{4} h^3 = \frac{3\pi}{12} h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12 = \frac{\pi}{4} \times 16 \times \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{48}{16\pi} = \frac{3}{\pi}$ سم/ث $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2\pi}$ سم/ث

$\frac{dV}{dt} = 12\pi$ سم^3/ث $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = ?$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \times 2rh \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow 12\pi = \frac{2\pi}{3} \times 6 \times 4 \times \frac{dr}{dt}$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{12\pi \times 3}{2\pi \times 6 \times 4} = \frac{3}{4}$ سم/ث

تدريب (٤) :

$\frac{dA}{dt} = 32$ كم/ساعة ، $\frac{ds}{dt} = 40$ كم/ساعة

$\left|\frac{dL}{dt}\right|$ ، $\frac{dL}{dt} = ?$

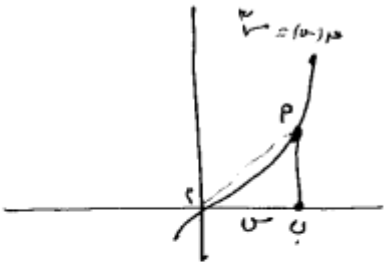
$s = 8$ كم ، $h = 6$ كم

$L = \sqrt{s^2 + h^2 - 2sh\cos\theta} = \sqrt{s^2 + h^2 + sh}$

$\frac{dL}{dt} = \frac{2s\frac{ds}{dt} + 2h\frac{dh}{dt} + s\frac{dh}{dt} + h\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2 + h^2 + sh}}$

$\left|\frac{dL}{dt}\right| = \frac{2 \times 8 \times 40 + 2 \times 6 \times 32 + 8 \times 32 + 6 \times 40}{2\sqrt{64 + 36 + 48}}$

تمرين (5)



$\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{س=3\\ن=1ث}} = ؟$

$ص = \frac{1}{2} \times س \times س^3 = \frac{1}{2} س^4$

$\frac{dy}{dt} = 4س^3 \frac{ds}{dt}$ ، ن = 1 ث طبعًا س = 2 سم

$\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{س=2\\ن=1ث}} = 4 \times 8 \times 2 = 64$ سم/ث

تمرين (6)

$\frac{dل}{dن} = 10$ سم/ث ، $\left|\frac{dخ}{dن}\right|_{ن=\frac{\pi}{6}} = ؟$

$ل = 8$ جتا $ن \Rightarrow ل = 0 \Leftarrow 8$ جتا $ن = 0 \Rightarrow \frac{dل}{dن} = 0 \Rightarrow \frac{dخ}{dن} = 0$

$خ = \sqrt{ل^2 + 8^2 - 2 \times ل \times 8 \times$ جتا $ن}$

$\frac{dخ}{dن} = \frac{ل \times \frac{dل}{dن} - 8 \times \frac{dل}{dن} \times$ جتا $ن$

$\left|\frac{dخ}{dن}\right|_{ن=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{100 - 80 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \times 10}{\sqrt{100 - 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{10\sqrt{37}}{\sqrt{100 - 40\sqrt{3}}}$ سم/ث

تمرين (7)

$\frac{dس}{dن} = 4$ سم/ث ، $\left|\frac{dص}{dن}\right|_{س=10} = ؟$

$ص = 100 - س^2$

$\frac{dص}{dن} = -2س \frac{dس}{dن} \Rightarrow \left|\frac{dص}{dن}\right|_{\substack{س=10\\ن=1ث}} = -20 \times 4 = -80$ سم/ث

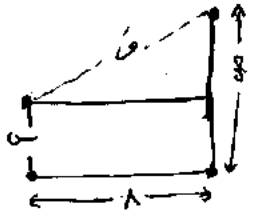
تمرين (8)

$\frac{dس}{dن} = 3$ سم/ث ، $\left|\frac{dم}{dن}\right|_{س=10} = ؟$

$م = 4س^2 - س^3$

$\frac{dم}{dن} = 8س \frac{dس}{dن} - 3س^2 \frac{dس}{dن} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dن}\right|_{\substack{س=10\\ن=1ث}} = (80 - 300) \times 3 = -660$ سم/ث

تمرين (٩) :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\frac{dx}{dt} = 1$ م/ث ، $\left|\frac{dف}{dt}\right| =$ المطلوب

$ف = \sqrt{(ص - 6)^2 + 64}$

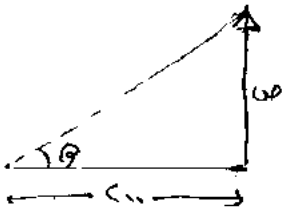
$\frac{dف}{dt} = \frac{2(ص - 6)\left(\frac{dص}{dt} - \frac{dس}{dt}\right)}{2\sqrt{(ص - 6)^2 + 64}}$

$\frac{dف}{dt} = \frac{(8 - 2)(2 - 1)}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{6}{10} = 0.6$ م/ث

$س = \frac{dس}{dt} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ م

$ص = \frac{dص}{dt} \times 3 = 2 \times 3 = 6$ م

تمرين (٦) :



$\frac{dص}{dt} = 100$ م/ث ، $\left|\frac{dθ}{dt}\right| =$ المطلوب عندما $ص = 400$

$ظا θ = \frac{ص}{100}$

$قا^2 θ \frac{dθ}{dt} = \frac{1}{100} \frac{dص}{dt}$

$\frac{dθ}{dt} \times 5 = \frac{1}{100} \times 100 = \frac{1}{5}$

$\frac{dθ}{dt} = \frac{1}{10}$ راديان/ث

$قا^2 θ = ظا^2 θ + 1$

$ظا θ = \frac{400}{100} = 4$

$قا^2 θ = 16 + 1 = 17$

النقط الحرجة

تدريب (١)

$ق(س) = س^3 - 12س + 1$; $س \in [-3, 3]$

$ق'(س) = 3س^2 - 12$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$

$ق(س)$ غير موجودة عند $س = \pm 3$

$س \in (-3, 3)$: $ق'(س) = 0$

∴ النقط الحرجة هي

$(-3, 10)$ ، $(3, 8)$ ، $(-2, 17)$ ، $(2, -10)$

تدريب (٢)

$ق(س) = جتاس - جا^2 س$ ، $س \in [0, \pi]$

$ق'(س) = -جاس - 2جاس جتاس$: $س \in (0, \pi)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow -جاس(1 + 2جتاس) = 0 \Leftarrow جاس = 0$ ، $جتاس = -\frac{1}{2}$

$س = \pi$ ، $س = \frac{2\pi}{3}$

$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$ ، π

النقط الحرجة $(0, 1)$ ، $(\pi, 0)$ ، $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{4})$ ، $(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{4})$

تدريب (٣)

$ق(س) = \sqrt[3]{س^4 - 4}$: $س \in [-2, 2]$

$ق'(س) = \frac{4}{3} س (س^4 - 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4س}{3\sqrt[3]{(س^4 - 4)^2}}$

$ق'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$

$ق(س)$ غير موجودة عندما $س^4 - 4 = 0$ ، $س = \pm\sqrt{2}$

∴ النقط الحرجة $(-\sqrt{2}, \sqrt[3]{-4})$ ، $(0, \sqrt[3]{-4})$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt[3]{-4})$

تدريب (٤)

$ق(س) = |س^2 - 2س|$ ، $س \in [-1, 4]$

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س & ، س \leq 0 \\ -س^2 + 2س & ، 0 < س \leq 2 \\ س^2 - 2س & ، 2 < س \leq 4 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س - 2 & ، س < 0 \\ -2س + 2 & ، 0 < س < 2 \\ 2س - 2 & ، 2 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 0 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

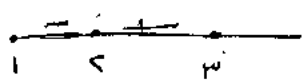
$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

لأن $ق(0^+) \neq ق(0^-)$

كذلك عند أطراف الفترة عند $س = -1$ ، 4

∴ النقط الحرجة هي

$(-1, 3)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(2, 0)$ ، $(4, 8)$



تمرين (1)

ه) $ق(س) = |س^3 - 3س + 1|$ ، $س \in [-2, 2]$

$ق(س) = |س^3 - 3س + 1| \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 3$

$ق'(س) = 0 \Rightarrow 3س^2 - 3 = 0 \Rightarrow س = \pm 1$

$ق(-2) = |-8 + 6 + 1| = 1$

$ق(-1) = |-1 + 3 + 1| = 3$

$ق(1) = |1 - 3 + 1| = 1$

$ق(2) = |8 - 6 + 1| = 3$

∴ النقط الحرجة هي $(-2, 1)$ ، $(-1, 3)$ ، $(1, 1)$ ، $(2, 3)$

د) $ق(س) = |س^2 - 4|$ ، $س \in [-3, 3]$

$ق(س) = |س^2 - 4| \Rightarrow ق'(س) = 2س$

$ق'(س) = 0 \Rightarrow 2س = 0 \Rightarrow س = 0$

$ق(-3) = |9 - 4| = 5$

$ق(0) = |0 - 4| = 4$

$ق(3) = |9 - 4| = 5$

∴ النقط الحرجة هي $(-3, 5)$ ، $(0, 4)$ ، $(3, 5)$

ج) $ق(س) = \begin{cases} س^3 - س & ، -1 \leq س \leq 2 \\ 3س - س^3 & ، 2 < س \leq 3 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 1 & ، -1 < س < 2 \\ 3 - 3س^2 & ، 2 < س < 3 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Rightarrow س = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $س = 1$

$ق(-1) = 0$ ، $ق(1) = 2$ ، $ق(3) = -18$

∴ النقط الحرجة هي $(-1, 0)$ ، $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}})$ ، $(1, 2)$ ، $(3, -18)$

ب) $ق(س) = |جتاس|$ ، $س \in [0, 2\pi]$

$ق(س) = |جتاس| = \begin{cases} جتاس & ، 0 \leq س \leq \frac{\pi}{2} \\ -جتاس & ، \frac{\pi}{2} < س \leq \frac{3\pi}{2} \\ جتاس & ، \frac{3\pi}{2} < س \leq 2\pi \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -جاس & ، 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ جاس & ، \frac{\pi}{2} < س < \frac{3\pi}{2} \\ -جاس & ، \frac{3\pi}{2} < س < 2\pi \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Rightarrow س = 0$ ، $س = \pi$ ، $س = 2\pi$ غير موجودة

$ق(0) = 1$ ، $ق(\pi) = 1$ ، $ق(2\pi) = 1$

∴ النقط الحرجة هي $(0, 1)$ ، $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ، $(\pi, 1)$ ، $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ، $(2\pi, 1)$

أ) $ق(س) = \begin{cases} 2س + 1 & ، -1 \leq س \leq 1 \\ -س^2 + 4 & ، 1 < س \leq 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2 & ، -1 < س < 1 \\ -2س & ، 1 < س < 2 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Rightarrow س = 0$ ، $س = 1$ غير موجودة

$ق(-1) = -1$ ، $ق(0) = 1$ ، $ق(1) = 3$ ، $ق(2) = 0$

∴ النقط الحرجة هي $(-1, -1)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 3)$ ، $(2, 0)$

(2)

تعويض (٥):

$ق(س) = س^3 + أ س^2 + ب س + ٤$ له نقطة حرجة عند $س = -1 ، ٣$

$ق'(س) = ٣س^2 + ٢أ س + ب$

$ق'(-1) = ٠ \Leftarrow ٣ - ٢أ + ب = ٠ \Leftarrow -٢أ + ب = -٣$

$ق'(٣) = ٠ \Leftarrow ٢٧ + ٦أ + ب = ٠ \Leftarrow ٦أ + ب = -٢٧$

$٨أ = -٢٤ \Leftarrow أ = -٣ ، ب = -٩$

تمرين (٣)

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = -٣ ، س = ٠$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -٣ ، س = ٣$

$\therefore$ النقط الحرجة $(-٣ ، ق(-٣))$ ، $(-٢ ، ق(-٢))$ ، $(٠ ، ق(٠))$ ، $(٣ ، ق(٣))$

تمرين (٤)

$ق(س) = \frac{س^3 - ١}{س^3 + ١} \Leftarrow ق'(س) = \frac{(س^3 + ١)(٣س^2) - (س^3 - ١)(٣س^2)}{(س^3 + ١)^2} = \frac{(٣س^2)(س^3 + ١ - س^3 + ١)}{(س^3 + ١)^2}$

$ق'(س) = \frac{٦س^2}{(س^3 + ١)^2} \Leftarrow ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٦س^2 = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^3 + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$ لا ينتمي لمجال

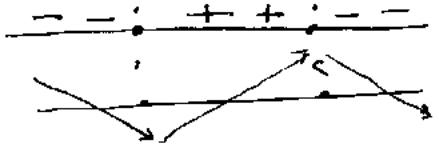
النقطة الحرجة $(٠ ، ١)$

التزايد والتناقص

تدريب (١)

$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 9س + 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 6س - 9 \Rightarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow 3(س+1)(س-3) = 0$

$س = -1 \quad ، \quad س = 3$

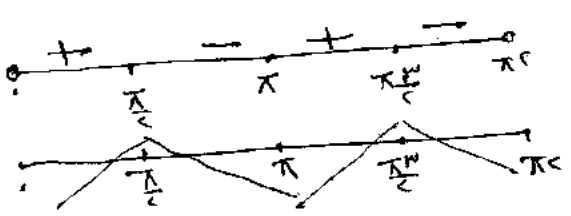


ومنها الاقتران $ق(س)$ متزايد في الفترة $[-1, 3]$ ومتناقص في $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

تدريب (٢):

$ق(س) = جا^2 س \ ، \ س \in [0, 2\pi] \Rightarrow ق'(س) = 2 جاس \ جتاس \ ، \ س \in (0, 2\pi)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 2 جاس \ جتاس = 0 \Leftarrow جاس = 0 \ ، \ جتاس = 0 \Leftarrow س = 0 \ ، \ \pi \ ، \ \frac{\pi}{2} \ ، \ \frac{3\pi}{2}$

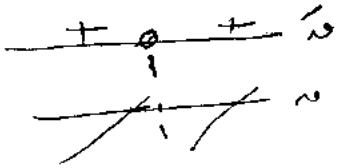


$ق$ متزايد في $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

$ق$ متناقص في $[\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

تدريب (٣):

$ق(س) = \sqrt[3]{س - 1} \Rightarrow ق'(س) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(س-1)^2}}$



$ق(س)$ متزايد في $ح$

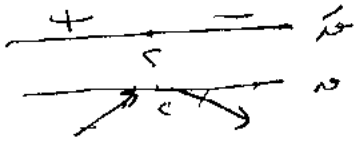
تمارين ومسائل

(١)

ب) $ق(س) = 4س - س^2 \Rightarrow ق'(س) = 4 - 2س = 0 \Leftarrow س = 2$

$ق(س)$ متزايد في $(-\infty, 2]$

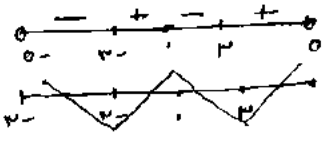
$ق(س)$ متناقص في $[2, \infty)$



ب) $ق(س) = |س^2 - 9|$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، \ -3 < س < 0 \\ -2س & ، \ 0 < س < 3 \\ 2س & ، \ 3 < س < 5 \end{cases} \Leftarrow ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، \ -3 \leq س \leq 0 \\ -2س & ، \ 0 \leq س \leq 3 \\ 2س & ، \ 3 \leq س \leq 5 \end{cases}$

ليس لها حل

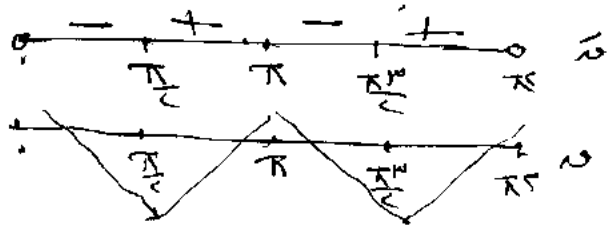


$ق(س)$ متزايد في $[-3, 0] \cup [3, 5]$

$ق(س)$ متناقص في $[-5, -3] \cup [0, 3]$

ق(س) = جتا٢س ⟸ ق'(س) = −٢ جا٢س = −٢ جاس جتاس = ٠

ق'(س) = ٠ ⟸ −٢ جاس جتاس = ٠ ⟸ جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، π ، π/٢ ، ٣π/٢

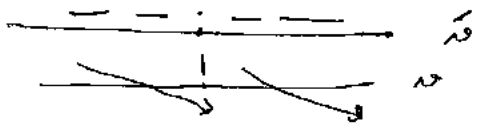


ق متزايدة [٠ ، π/٢] ∪ [٣π/٢ ، ٢π]

ق متناقصة [π/٢ ، π] ∪ [π ، ٣π/٢]

ق(س) = (١ − س)^٣ ⟸ ق'(س) = ٣(١ − س)^٢ ⟸ ق'(س) = ٠ ⟸ س = ١

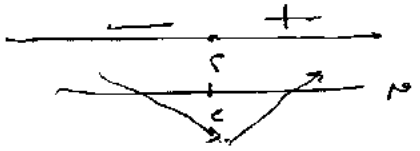
ق متناقصة في ح



ق(س) = (٢ − س)^٤ ⟸ ق'(س) = −٤ (٢ − س)^٣ ⟸ ق'(س) = ٠ ⟸ س = ٢

ق متزايدة في]−∞ ، ٢]

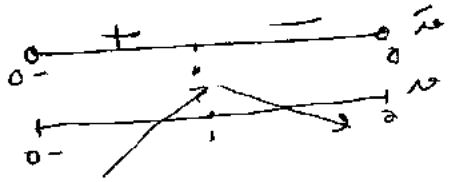
ق متناقصة في [٢ ، ∞[



ق(س) = √(٢٥ − س^٢) ⟸ ق'(س) = −س / √(٢٥ − س^٢) ⟸ ق'(س) = ٠ ⟸ س = ٠

ق متزايدة في]−٥ ، ٠]

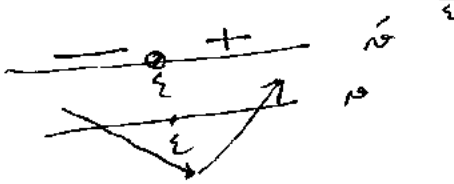
ق متناقصة في [٠ ، ٥[



ق(س) = ∛((س − ٤)^٢) = (س − ٤)^(٢/٣) ⟸ ق'(س) = (٢/٣)(س − ٤)^(−١/٣) = ٢ / (٣ ∛(س − ٤)) ⟸ ق'(س) غير معرفة عندما س = ٤

ق متناقصة في]−∞ ، ٤]

ق متزايدة في [٤ ، ∞[

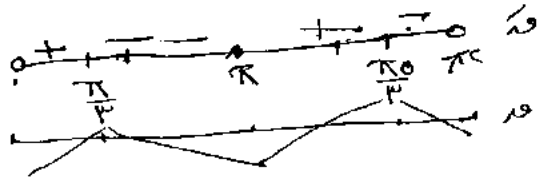


ق(س) = جتاس − ½ جتا٢س ⟸ ق'(س) = −جاس + جا٢س = −جاس + ٢ جاس جتاس = جاس (٢ جتاس − ١)

ق'(س) = ٠ ⟸ جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، π ⟸ جتاس = ½ ⟸ س = π/٣ ، ٥π/٣

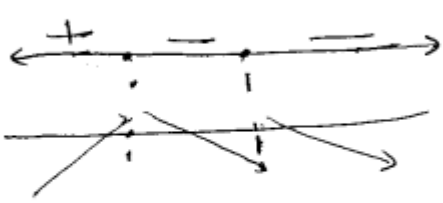
ق متزايدة في [٠ ، π/٣] ∪ [٥π/٣ ، ٢π]

ق متناقصة في [π/٣ ، ٥π/٣]



ب) $ق(س) = \begin{cases} 3-س^2 ، & س \leq 1 \\ \frac{س}{س^2} ، & س > 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -2س ، & س \leq 1 \\ \frac{-2}{س^3} ، & س > 1 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

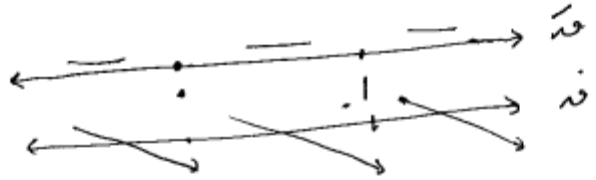


$ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, 0]$

$ق(س)$ متناقصة في $[0, \infty)$

ج) $ق(س) = \begin{cases} 4-س^3 ، & س < 1 \\ \frac{3}{س} ، & س \geq 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -3س^2 ، & س < 1 \\ \frac{-3}{س^2} ، & س \geq 1 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

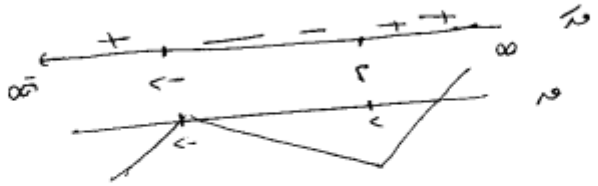


$ق(س)$ متناقصة في $ح$

الفترتين

د) $ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$ق(س)$ متناقصة في $[-2, 2]$

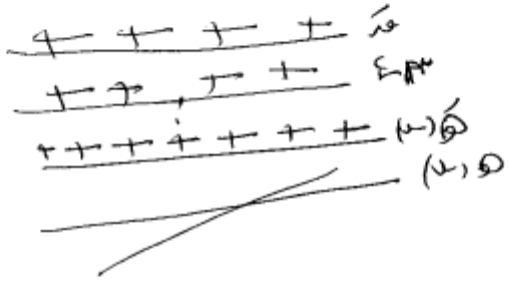


هـ) $ك(س) = ق(س) + س^3$

$ك'(س) = ق'(س) + 3س^2$

بما أن $ك'(س) > 0$

$\therefore$ $ك(س)$ متزايدة في $[-9, 9]$



تدريب (١)

$م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2$ ، $س \in [-1, 5]$

$م'(س) = 3س^2 - 12س + 9 = 0 \Rightarrow$ ح $م'(س) = 0$ عند $س = 3$ ، $س = 1$

$م'(س) = 3(س^2 - 4س + 3) = 3(س - 3)(س - 1) = 0$

$س$	-1		3	5
$م'(س)$		$+$	0	$-$
$م(س)$	-18	↗	2	↘

$\therefore$ القيمة العظمى المطلقة $= 2$ عند $س = 3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -18$ عند $س = -1$

تدريب (٢)

$م(س) = |س^2 - 4|$ ، $س \in [-3, 4]$

$$م(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & \text{إذا } س \leq -2 \text{ أو } س \geq 2 \\ -س^2 + 4 & \text{إذا } -2 < س < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ح'(س) = \begin{cases} 2س & \text{إذا } س < -2 \text{ أو } س > 2 \\ -2س & \text{إذا } -2 < س < 2 \end{cases}$$

ح'(س) غير موجودة عند $س = \pm 2$

ح'(س) $= 0 \Leftarrow س = 0$

$س$	-3		-2		2	4
$م'(س)$	$-$	$-$	غير موجودة	$+$	0	$-$
$م(س)$	5	↘	0	↗	4	↘

القيمة العظمى المطلقة $= 5$ عند $س = -3$

القيمة الصغرى المطلقة $= 0$ عند $س = \pm 2$

تدريب (٣)

$م(س) = س^4 - 4س^3 + 1$ ، $س \in [-3, 4]$

$م'(س) = 4س^3 - 12س^2 = 0 \Rightarrow$ ح $م'(س) = 0$ عند $س = 3$ ، $س = 0$

$س$	-3		0	3	4
$م'(س)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$م(س)$	136	↘	1	↗	-26

القيمة العظمى المطلقة $= 136$ عند $س = -3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -26$ عند $س = 3$

تدريب (٤)

$م(س) = س + 2\cos س$ ، $س \in [0, 2\pi]$ ، ح $م(س) = 1 + 2\cos س = 0$

$\cos س = -\frac{1}{2} \Rightarrow س = \frac{2\pi}{3}$ حيث $س \in [0, 2\pi]$

$س$	0		$\frac{2\pi}{3}$	2π
$م'(س)$	$+$	$+$	0	$+$
$م(س)$	2	↗	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	↗

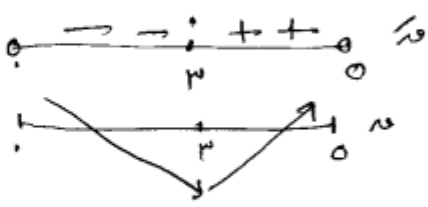
القيمة العظمى المطلقة $= 2\pi$ عند $س = 2\pi$

القيمة الصغرى المطلقة $= 0$ عند $س = 0$

تمارين ومسائل

أ) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9 \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12س + 9$

$م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = 1$ أو $س = 3$



للاقتران $م$ عند $س = 1$: قيمة صغرى محلية

$م(1) = 4$

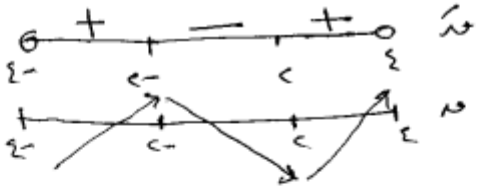
للاقتران $م$ عند $س = 3$: قيمة صغرى محلية وهي مطلقة

$م(3) = 0$

قيمة عظمى مطلقة عند $س = 0$ هي $م(0) = 4$

ب) $م(س) = س^3 - 12س \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = \pm 2$

للاقتران $م(س)$:



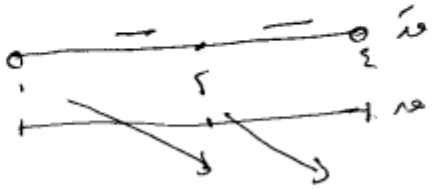
قيمة عظمى محلية عند $س = -2$ هي $م(-2) = 16$

$=$ صغرى محلية عند $س = 2$ هي $م(2) = -16$

$=$ مطلقة في $[-2, 4]$

$=$ عظمى $= 16$

ج) $م(س) = (س - 2)^3 \Rightarrow م'(س) = 3(س - 2)^2 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = 2$



للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $س = 0$ هي $م(0) = 8$

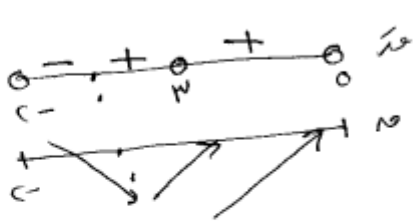
$=$ صغرى $=$ عند $س = 4$ هي $م(4) = -8$

د) $م(س) = \begin{cases} 3س + 1 & ، 0 \leq س \leq 3 \\ 4س - 2 & ، 3 < س \leq 4 \end{cases} \Rightarrow م'(س) = \begin{cases} 3 & ، 0 < س < 3 \\ 4 & ، 3 < س < 4 \end{cases}$

غير موجود عند $س = 3$

$م'(س) = 0 \Leftarrow 0 = 0$

للاقتران $م(س)$:

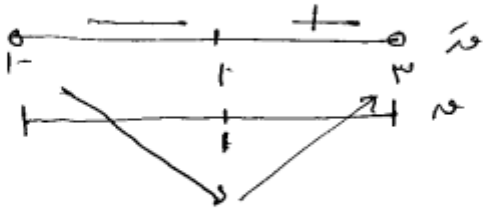


قيمة صغرى محلية عند $س = 0$ هي $م(0) = 1$ وهي مطلقة

قيمة عظمى مطلقة عند $س = 4$ هي $م(4) = 14$

ه) $م(س) = |(س-1)^3| = \begin{cases} (1-س)^3 & ، س < 1 \\ (س-1)^3 & ، س \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow م'(س) = \begin{cases} -3(1-س)^2 & ، س < 1 \\ 3(س-1)^2 & ، س > 1 \end{cases}$

للاقتران $م(س)$:

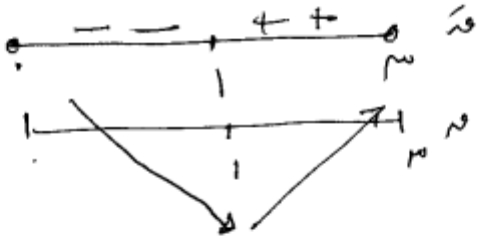


قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $م(1) = 0$ وهي مطلقة
فيمة عظمى مطلقة هي (8)

و) $م(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3 ; س \in [0, 3]$

$م'(س) = س^3 - س^2 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftarrow س^2(س-1) = 0 \Leftarrow س = 0 , 1$

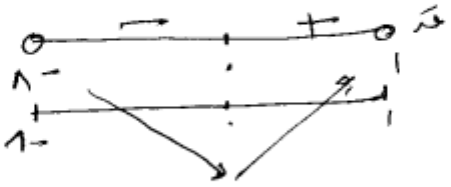
للاقتران $م(س)$:



قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $م(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$
= صغرى مطلقة هي $\frac{1}{12}-$
= عظمى مطلقة هي $م(3) = \frac{27}{4} - 9 = \frac{-45}{4}$

ز) $م(س) = \sqrt[3]{س^2} , [-8, 1]$

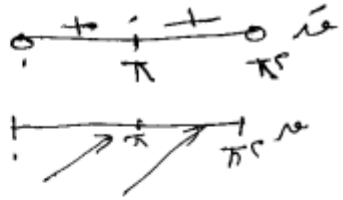
$م'(س) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$



للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 0$
= مطلقة هي $م(0) = 0$
قيمة عظمى مطلقة هي $م(-8) = 4$

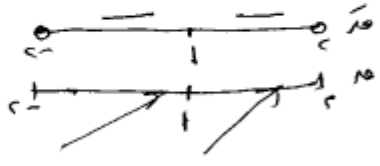
ح) $م(س) = س + جاس \Rightarrow م'(س) = 1 + جتاس \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftarrow جتاس = -1 \Leftarrow س = \pi$



قيمة صغرى للاقتران $م(س)$
عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 0$
قيمة عظمى مطلقة للاقتران $م(س)$
عندما $س = 2\pi$ لأن $م(2\pi) = 2\pi$

ط) $م(س) = (1-س)^3 , س \in [-2, 2] \Rightarrow م'(س) = 3(1-س)^2 \Leftarrow م'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

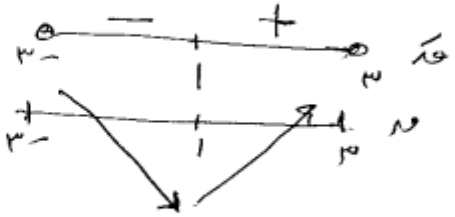
للاقتران $م(س)$:



قيمة عظمى مطلقة هي $م(-2) = 27$
صغرى مطلقة هي $م(2) = -1$

ي) $د(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-3, 3]$

$د'(س) = 3(1-س)^2$ ⟸ $د'(س) = 0$ ⟸ $س = 1$

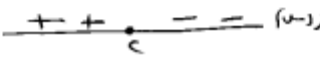


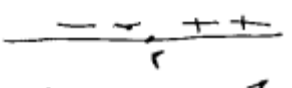
الاقتران $د(س)$:

قيمة صغرى محلية هي $د(1) = 0$ وطرفه

قيمة عظمى مطلقة هي $د(-3) = 256$

ج) $هـ(س) = (1 - د(س))^3$ ⟸ $و(س) = 3د'(س)(1-د(س))^2$ ⟸ $و(-1) = 0$ ، $د'(-1) = 0$ ⟸ $س = -1$ ، $س = 2$

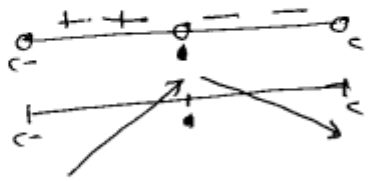




الاقتران $هـ(س)$ قيمة صغرى محلية

عند $س = ب$ هي $هـ(ب) = (1 - د(ب))^3 = (1-3)^3 = (-2)^3 = -8$

م) مجموعة قيم $س$ التي عندها نقطة حرجة للاقتران $د(س)$ هي $\{-2, 0, 2\}$



ن) الاقتران متزايد في الفترة $[-2, 0]$

ومتناقص في $[0, 2]$

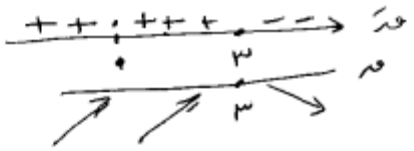
ح) الاقتران فيه قيمة عظمى محلية عند $س = 0$

ع) $د$ الاقتران نقطة حرجة عند $س = 0$ ، $س = 3$ وهي $(0, د(0))$ ، $(3, د(3))$

ن) معنى الاقتران متزايد في $(-\infty, 3]$

ومتناقص في $[3, \infty)$

ح) الاقتران فيه قيمة عظمى محلية عند $س = 3$



التقعر

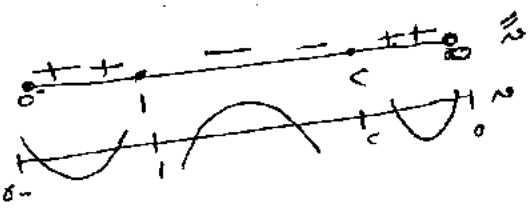
تدريب (١)

$$\text{ه}(س) = س^4 - 6س^3 + 24س^2 + 5 \quad ، \quad [-5, 5]$$

$$\text{ه}'(س) = 4س^3 - 18س^2 + 48س \Leftarrow \text{ه}''(س) = 12س^2 - 36س + 48$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow 12(س^2 - 3س + 2) = 0 \Leftarrow (س-1)(س-2) = 0 \Leftarrow س = 1 ، س = 2$$

الاقتران مقعر للأعلى في الفترات
$[-5, 1]$ و $[2, 5]$



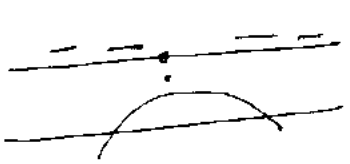
الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $[1, 2]$

تدريب (٢) :

$$\text{ه}(س) = س^{\frac{4}{3}} \Leftarrow \text{ه}'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow \text{ه}''(س) = \frac{4}{9}س^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{ه}''(س) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{س^{\frac{2}{3}}} \Leftarrow \text{ه}''(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0$$

الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $(-\infty, \infty)$

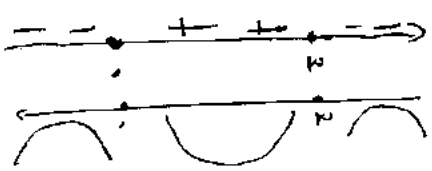


تدريب (٣) :

$$\text{ه}(س) = س^4 - 6س^3 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 4س^3 - 18س^2 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 12س^2 - 36س$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow (12س)(س-3) = 0 \Leftarrow س = 0 ، س = 3$$

للاقتران نقطتي انعطاف هما
$(0, 0)$ ، $(3, -81)$



تدريب (٤) :

$$\text{ه}(س) = س^3 - 12س + 3 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 3س^2 - 12 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 6س$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow س = 0 \Leftarrow \text{ه}'(0) = -12 \quad \text{و} \quad \text{ه}(0) = 3$$

$$\text{ه}''(س) < 0 \text{ عندما } س < 0 \quad \text{و} \quad \text{ه}''(س) > 0 \text{ عندما } س > 0$$

$\therefore$ يوجد نقطة انعطاف عندما $س = 0$

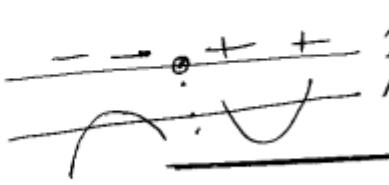
تمارين ومسائل

أ) $ق(س) = س + \frac{4}{س}$ ⇐ $ق'(س) = 1 - \frac{4}{س^2}$ ⇐ $ق''(س) = \frac{8}{س^3} = \frac{8}{س^3}$

$ق'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$ ⇐ $ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

مقعر لأعلى في $(0, \infty)$ ، مقعر لأسفل في $(-\infty, 0)$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأسفل في $(-\infty, 0)$

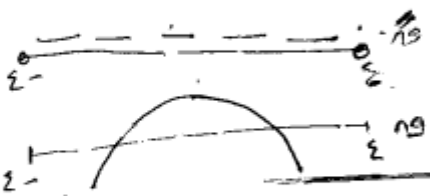


ب) $ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{16 - س^2}}$

$ق''(س) = \frac{-\sqrt{16 - س^2} + س \times \frac{س}{\sqrt{16 - س^2}}}{16 - س^2} = \frac{-\frac{16 - س^2}{\sqrt{16 - س^2}} - \frac{س^2}{\sqrt{16 - س^2}}}{16 - س^2} = \frac{-16 + س^2 - س^2}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}}$

$ق''(س) = \frac{-16}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}}$ ⇐ $ق''(س) = 0$

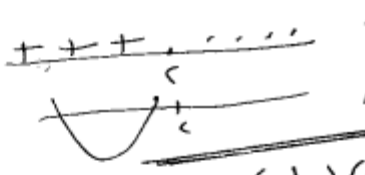
متخذا $ق(س)$ مقعر لأسفل في $[-4, 4]$



جـ) $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، \ س < 1 \\ 5 - س & ، \ 1 \le س \le 2 \end{cases}$ ⇐ $ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، \ س < 1 \\ -1 & ، \ 1 < س < 2 \end{cases}$

⇐ $ق''(س) = \begin{cases} 2 & ، \ س < 1 \\ 0 & ، \ 1 < س < 2 \end{cases}$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $(-\infty, 2)$

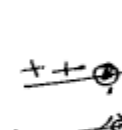


$ق(س) = \left(\frac{1}{س} - 1\right)^2$ ⇐ $ق'(س) = 2\left(\frac{1}{س} - 1\right)\left(\frac{-1}{س^2}\right) = 2\left(\frac{1}{س^3} - \frac{1}{س^2}\right)$

$ق''(س) = 2\left(\frac{-3س^2}{س^6} + \frac{2س}{س^4}\right)$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $س = 0$ ، $س = \frac{3}{2}$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

مقعر لأسفل في $\left(0, \frac{3}{2}\right]$



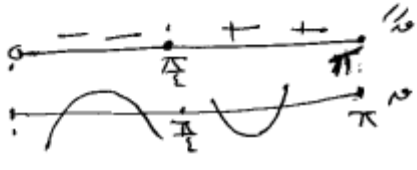
د) $ق(س) = جتاس - جاس + 1$

$ق'(س) = -جاس - جتاس$ ⇐ $ق''(س) = -جتاس + جاس$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $جاس = جتاس$

$س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ $\notin (0, 2\pi)$

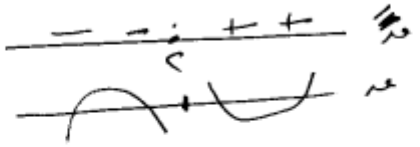
متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

مقعر لأسفل في $\left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$



ج) $ق(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 12س + 9 \Rightarrow ق''(س) = 6س - 12$

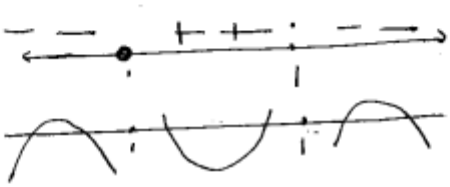
$ق''(س) = 0 \Leftarrow س = 2$



للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 2$ وهي $(2، 4)$

د) $ق(س) = س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{5}{3} س^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} \Leftarrow ق''(س) = \frac{10}{9} س^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{9} س^{-\frac{4}{3}}$

$ق''(س) = 0 \Leftarrow \frac{10}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^4}} = 0 \Leftarrow س = -1$



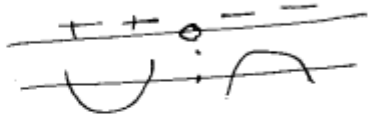
نختبر الاقتران $ق(س)$: نقطتا انعطاف عند $س = 0$ ، $س = -1$

وهي: $(0، 0)$ ، $(-1، 0.5)$

مقعر للأعلى في $[0، 1]$

مقعر للأسفل في $(-\infty، -1]$ ، $[1، \infty)$

هـ) $ق(س) = س^{\frac{3}{5}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{3}{5} س^{-\frac{2}{5}} \Leftarrow ق''(س) = -\frac{6}{25} س^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25} \times \frac{1}{\sqrt[5]{س^7}}$



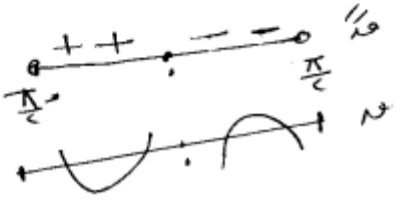
مقعر لما لا نهاية سالبا $(-\infty، 0]$

مقعر للأعلى $[0، \infty)$

نقطة انعطاف عند $س = 0$ هي $(0، 0)$

و) $ق(س) = س - ظا س \Rightarrow ق'(س) = 1 - قا^2 س \Leftarrow ق''(س) = -2 قا^2 س ظا س = -2 \frac{جا س}{جتا^3 س}$

للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ وهي $(0، 0)$



ز) $ق(س) = جا س - جتا س \Rightarrow ق'(س) = جتا س + جا س \Leftarrow ق''(س) = 0 \Leftarrow جا س = -جتا س$

$س = \frac{3\pi}{4} ، \frac{7\pi}{4}$

$ق''(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0 \Leftarrow$

$\therefore$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = \frac{3\pi}{4}$

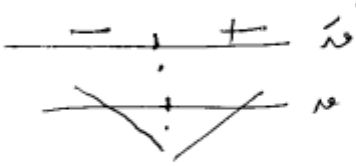
$ق''(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{7\pi}{4}$

ب) $م(س) = س^4 \Rightarrow م'(س) = 4س^3 \Rightarrow م'(س) = 12س^2$

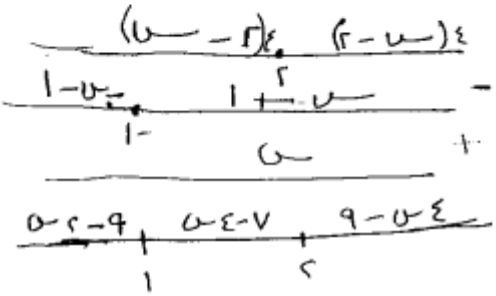
$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $م'(1) = -$ تفشل ونرجع إلى اختبار المشتقة الأولى

للاقتران يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = 0$



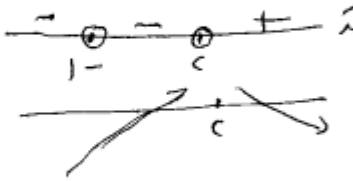
ج) $م(س) = |س - 1| + |س + 1| + س$

$$م(س) = \begin{cases} 3س - 9 & س \leq -1 \\ -س + 7 & -1 < س \leq 2 \\ 3س - 9 & س > 2 \end{cases}$$



$$م'(س) = \begin{cases} 3 & س < -1 \\ -1 & -1 < س < 2 \\ 3 & س > 2 \end{cases}$$ غير موجود عند $س = -1$، 2

$$\Rightarrow م'(س) = \begin{cases} 0 & س < -1 \\ 1 & -1 < س < 2 \\ 0 & س > 2 \end{cases}$$



يفشل اختبار المشتقة الأولى ونرجع إلى اختبار المشتقة الثانية

∴ للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = 2$

د) $م(س) = س + \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $م'(س) = 1 - \frac{س^2 + 1}{(س^2 - 1)^2}$ ، $م'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm\sqrt{2}$

$$\frac{س^4 - 2س^2 - 3}{(س^2 - 1)^2} = 0 \Leftarrow س = \pm\sqrt{3}$$

$م''(س) = \frac{6س}{(س^2 - 1)^3}$ ، $م''(\sqrt{3}) = \frac{6\sqrt{3}}{(2)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$

∴ قيمة صغرى محلية عند $س = \sqrt{3}$

هـ) $م(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ، $م'(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$ ، $م''(س) = 6أ س + 2ب$

$م(1) = أ + ب + جـ + د = 5$ ---①

$م(2) = 8أ + 4ب + 2جـ + د = 10$ ---②

$م'(2) = 12أ + 4ب + جـ = 3$ ---③

$م''(2) = 12أ + 2ب = 0$ ---④

$\Rightarrow$ ② − ① $\Rightarrow 7أ + 3ب + جـ = 5$ ---⑤

⑤ − ③ $\Rightarrow -5أ - ب = 2 \Rightarrow ب = -5أ - 2$

④ $\Rightarrow 12أ + 2(-5أ - 2) = 0 \Rightarrow 2أ = 4 \Rightarrow \boxed{أ = 2}$

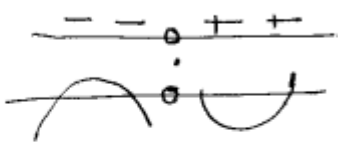
$\boxed{ب = -12}$

$\boxed{جـ = 30}$

$\boxed{د = -19}$

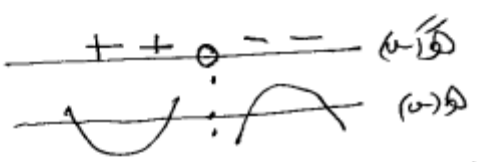
ومنه $م(س) = 2س^3 - 12س^2 + 30س - 19$

٥) $ق(س) = \frac{1}{س^2}$ ⇒ $ق'(س) = \frac{-2}{س^3}$ ، $ق''(س) = \frac{6}{س^4}$



مختار ق(س) مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
" " " للأسفل في $(-\infty, 0)$
لا يوجد له نقطة انعطاف لان ق(س) غير معرف عند س = ٠
وغير متصل عند س = ٠

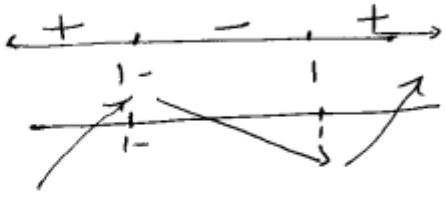
$ك(س) = س^{\frac{1}{3}}$ ⇐ $ك'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}}$ ، $ك''(س) = -\frac{2}{9} س^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^5}}$



مختار ك(س) مقعر للأسفل في $[0, \infty)$
" " " للأعلى في $(-\infty, 0]$
للاقتران نقطة انعطاف عند س = ٠ ومتصل عند س = ٠

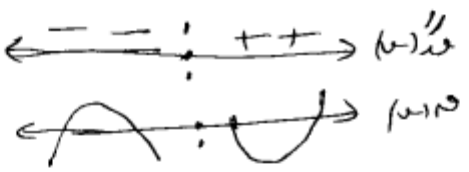
٦) أ) ق(س) متزايد في $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ق(س) متناقص في $[-1, 1]$

ب) ق'(س) = ٠ ⇐ س = ± ١



١) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = -١
" " " صغرى محلية عند س = ١

٢) ق(-١) = ٠ ، ق''(-١) < ٠ ⇐ ق(-١) قيمة عظمى محلية
ق(١) = ٠ ، ق''(١) > ٠ ⇐ ق(١) = صغرى محلية

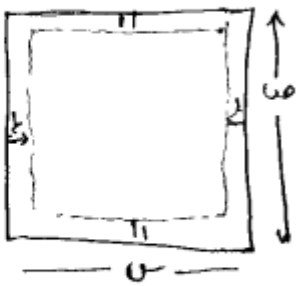


د) مختار ق(س) مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
" " " للأسفل في $(-\infty, 0]$

ج) للاقتران نقطة انعطاف عند س = ٠ وهي (٠، ق(٠))

تطبيقات القيم العظمى

تدريب (٢):



$م = س \times ص = 128 \Leftarrow ص = \frac{128}{س}$

$م = (س-4)(ص-3) = س ص - 3س - 4ص + 12$

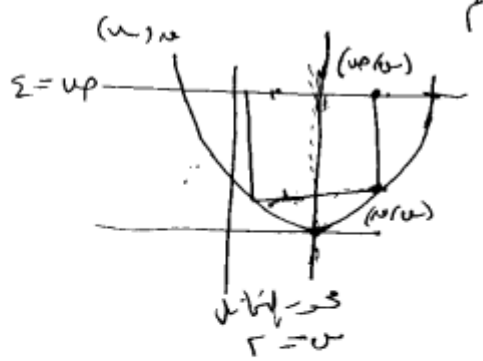
$م = 128 - 3س - \frac{512}{س}$

$م' = 0 \Leftarrow 3 - \frac{512}{س^2} = 0 \Leftarrow س^2 = 64 \Leftarrow س = 8$

$م'' = \frac{1024}{س^3} \Leftarrow م''|_{س=8} = \frac{1024}{512} = 2 > 0$

∴ أكبر مساحة تكون عندما $س = 8$ سم، $ص = 16$ سم

تدريب (٣):



$م = 2(س-2)(ص-ص)$

$م = 2(س-2)(4 - (س^2 - 4س + 4))$

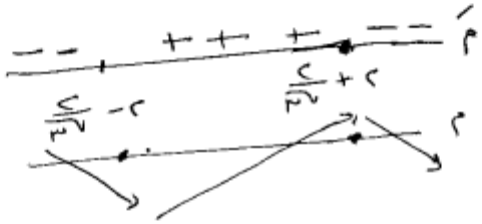
$م = 2(س-2)(4س - س^2)$

$م = 2(6س^2 - س^3 - 8س)$

$م' = 2(12س - 3س^2 - 8) = -2(3س^2 - 12س + 8) = 0 \Leftarrow س = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما

$س = (2 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ سم



تدريب (٤):

$م = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times جا\theta = 32 جا\theta$

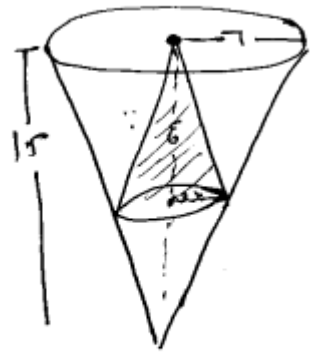
$م' = 32 جتا\theta = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$م'' = -32 جا\theta$

$م''|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = -32 < 0 \Leftarrow$ أكبر مساحة للمثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

أي عندما المثلث قائم الزاوية

تدريب (5) :



من التشابه

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$

$١٢\,\text{نق} = ٦(١٢ - ع)$

$٢\,\text{نق} = ١٢ - ع$

$ع = ١٢ - ٢\,\text{نق}$

$ح = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^{٢}\,ع$

$ح = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^{٢}(١٢ - ٢\,\text{نق})$

$ح = \frac{٢\pi}{٣}(٦\,\text{نق}^{٢} - \text{نق}^{٣})$

$ح' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢\,\text{نق} - ٣\,\text{نق}^{٢}) \Rightarrow ح' = ٠ \Leftarrow \text{نق}(٤ - \text{نق})(٣\pi) = ٠ \Rightarrow \text{نق} = ٠ \text{ ، نق} = ٤$

$ع = ١٢ - ٢\,\text{نق}$ ، عندما نق = ٠ ⇐ ع = ١٢

عندما نق = ٤ ⇐ ع = ٤

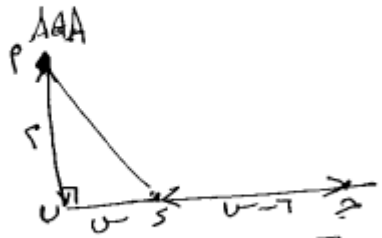
$ح'' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢ - ٦\,\text{نق}) = ٤\pi(٢ - \text{نق})$

$ح''(٠) = ٨\pi > ٠$ ∴ قيمة صغرى

$ح''(٤) = -٨\pi < ٠$ ، قيمة عظمى ، نق = ٤ ، ع = ٤

∴ أكبر حجم $= ح(٤) = \frac{٢\pi}{٣}(٤)^{٣}(٦ - ٤) = \frac{٦٤}{٣}\pi$ م^{٣}

تدريب (6)



$ل = ١٠٠٠٠ + ٥٤٠٠٠ \sqrt{س^{٢} + ٤}$

$ل = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣(٦ - س))$

$ل(س) = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣س - ١٨)$ ؛ $س \in [٠ ، ٦]$

$ل' = ١٠٠٠٠ \left(\frac{٥ \times ٢س}{٢\sqrt{س^{٢} + ٤}} + ٣\right)$

$ل'(س) = ٠ \Leftarrow \frac{٥س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = -٣$

$٢٥س^{٢} = ٩(س^{٢} + ٤)$

$١٦س^{٢} = ٣٦ \Rightarrow س^{٢} = \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{٤}$

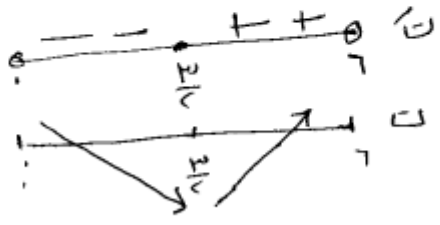
$س = \frac{٣}{٢}$ ؛ $س = -\frac{٣}{٢}$ مرفوض

$ل = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{\frac{٩}{٤} + ٤} + ٣(٦ - \frac{٣}{٢}))$

$= ١٠٠٠٠ (\frac{٢٥}{٢} + \frac{٩}{٢}) = ١٠٠٠٠ \times ١٧ = ١٧٠٠٠٠$ جنيه

∴ أقل تكلفة ممكنة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وأكبر تكلفة ممكنة عندما $س = ٦$

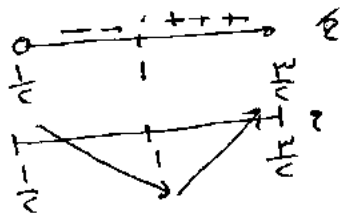


تمارین و مسائل

تمرین (۱) صفحه ۲۱۵

$$ع = س + \frac{۱}{س} = \frac{س^۲ + ۱}{س} \; ; \; س \in [\frac{۱}{۲} / \frac{۳}{۲}]$$

$$ع' = ۱ - \frac{۱}{س^۲} \Rightarrow ع' = ۰ \Leftarrow \frac{س^۲ - ۱}{س^۲} = ۰ \Leftarrow س = ۱ \; ، \; س = -۱ \notin$$



$$ع(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

$$ع(۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$ع(\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۱۳}{۶}$$

∴ اکسترمم مطلق عبارتست از: $\frac{۱}{۲}$ = مینیمم مطلق ، $\frac{۱۳}{۶}$ = ماکزیمم مطلق

ب) $ع = ۲\pi نعم^۲ + ۲\pi نعم \Rightarrow ۸\pi = ۲\pi نعم^۲ + ۲\pi نعم$

$$۲\pi نعم^۲ + ۲\pi نعم - ۸\pi = ۰$$

$$\pi نعم^۲ + \pi نعم - ۴\pi = ۰$$

$$\pi نعم^۲ + \pi نعم - \frac{۱۰۰۰}{نعم} \times ۴\pi = ۰$$

$$م = ۲\pi نعم^۲ + \frac{۴۰۰۰\pi}{نعم}$$

$$م' = ۴\pi نعم - \frac{۴۰۰۰\pi}{نعم^۲} = ۰ \Leftarrow ۴\pi نعم^۳ - ۴۰۰۰\pi = ۰$$

$$نعم^۳ = ۱۰۰۰ \Leftarrow نعم = ۱۰ \; سم$$

اعمال تکلیف عبارتست از: $۲\pi نعم^۲ + ۲\pi نعم \times ۱۰ = ۶۰\pi$

$$م'' = ۴\pi + \frac{۸۰۰۰\pi}{نعم^۳} = ۱۲\pi > ۰$$

$$م = ۲\pi \times ۱۰^۲ + \frac{۲۰۰۰\pi}{۱۰} = ۶۰\pi$$

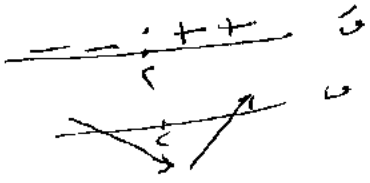
$$ح = \pi نعم^۲ نع = \pi \times ۱۰^۲ \times ۱۰ = ۱۰۰\pi \; سم^۳$$

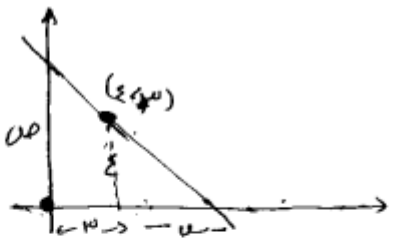
ج) $ف = \sqrt{(س-۱۸)^۲ + ص^۲} = \sqrt{(س-۱۸)^۲ + ۴س}$

$$ف' = \frac{۲(س-۱۸) + ۴}{۲\sqrt{(س-۱۸)^۲ + ۴س}} = ۰$$

$$۲س - ۳۶ + ۴ = ۰ \Leftarrow ۲س - ۳۲ = ۰ \Leftarrow س = ۱۶$$

اقل بعد ممکن عبارتست از: $ف(۱۶) = \sqrt{(۱۶-۱۸)^۲ + ۴(۱۶)} = \sqrt{۴ + ۶۴} = \sqrt{۶۸}$





مقارنات بنسب

$$\frac{ص}{س+٣} = \frac{٤}{٣} \Rightarrow ص = \frac{٤}{٣}(س+٣)$$

$$ح = \frac{١}{٢} \times (س+٣) \times ص$$

$$ح = \frac{١}{٢} \times (س+٣) \times \frac{٤}{٣}(س+٣)$$

$$ح = \frac{٢}{٣}(س+٣)^{٢}$$

$$م = \frac{ح}{س} = \frac{\frac{٢}{٣}(س+٣)^{٢}}{س}$$

$$م = \frac{٢}{٣}\left(س + ٦ + \frac{٩}{س}\right)$$

$$م' = \frac{٢}{٣}\left(١ - \frac{٩}{س^{٢}}\right) \Rightarrow م' = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Rightarrow س = ٣ \quad (-٣ \notin)$$

$$م'' = \frac{١٨}{س^{٣}} \Rightarrow م''(٣) = \frac{١٨}{٢٧} = \frac{٢}{٣} > ٠$$

∴ المقدار أصغر ما يمكن عندما $س = ٣$ ، $ص = ٧$ ← المستقيم يمر بالنقطة $(٦،٠)$ و النقطة $(٤،٣)$

ميل المستقيم $= \frac{٤-٠}{٣-٦} = -\frac{٤}{٣}$

معادلة المستقيم $ص - ٠ = -\frac{٤}{٣}(س - ٦) \Rightarrow ص = -\frac{٤}{٣}س + ٨$

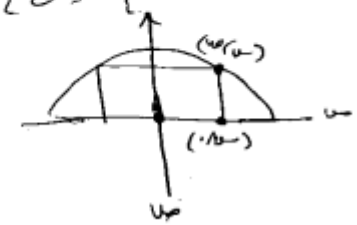
٥) $ح = \frac{١}{٢} \times ص \times س \times جا\theta \Rightarrow ح = \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٥ \times جا\theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{٣}$ ← $ح = \frac{٢٥}{٤}\sqrt{٣}$ متر

$ح' = ٠ \Leftarrow جتا\theta = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$ أكبر ما يمكن عندما $\theta \in (٠، \frac{\pi}{٢})$

$ح = \frac{٢٥}{٤} جا\theta$ ← $ح$ تتزايد عندما $\theta \in (٠، \frac{\pi}{٢})$ ← $ح' = \frac{٢٥}{٤} جتا\theta$

$ح' = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$ ← $ح'' = -\frac{٢٥}{٤} جا\theta$ ← $ح''(\frac{\pi}{٢}) = -\frac{٢٥}{٤} < ٠$

$\theta = \frac{\pi}{٢} = ٥٤°$



٦) $ص = ٨ - س$ ، $ع = ٢١ - ٤س$

$ح = ٢\pi س ص$

$ح = ٢\pi س(٨ - س)$

$ح = ١٦\pi س - ٢\pi س^{٢}$

$ح' = ١٦\pi - ٤\pi س$

$ح' = ٠ \Leftarrow س = ٤$

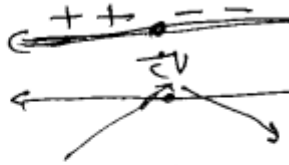
$ع = ٢١ - ٤(٤) = ٥$

$ح'' = -٤\pi$

$ح''(٤) = -٤\pi < ٠$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما $س = ٤$

$ح = ٢\pi(٤)(٥) = ٤٠\pi$ وحدة مكعبة



٧) $ع = ١٢ - ٤س$

عندما $س = ٢$ ← $ع = ٤$

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^{٢} ع$

$ح = \frac{١}{٣}\pi(٢)^{٢}(٤) = \frac{١٦}{٣}\pi$ سم^{٣}

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^{٢}(١٢ - ٤س)$

$ح = ٤\pi س^{٢} - \frac{١}{٣}\pi س^{٣}$

$ح' = ٨\pi س - \pi س^{٢}$

$ح' = ٠ \Leftarrow س = ٨$

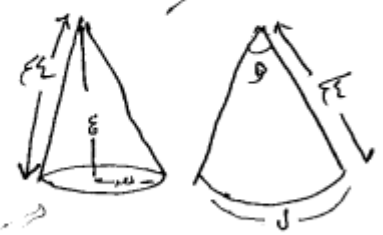
$ع = ١٢ - ٤(٨) = -٢٠$ مرفوض

$ح'' = ٨\pi - ٢\pi س$

$ح''(٨) = -٨\pi < ٠$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما $س = ٨$

$ح = \frac{١}{٣}\pi(٨)^{٢}(٤) = \frac{٢٥٦}{٣}\pi$ سم^{٣}



٨) $ع = ٨ جتا\theta$ ، $ف = ٨ جا\theta$

$ح(\theta) = \frac{١}{٣}\pi ف^{٢} ع$

$ح(\theta) = \frac{١}{٣}\pi(٨ جا\theta)^{٢}(٨ جتا\theta)$

$ح(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi جا^{٢}\theta جتا\theta$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi(جا^{٢}\theta(-جا\theta) + جتا\theta(٢ جا\theta جتا\theta))$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi(-جا^{٣}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta جا\theta)$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi جا\theta(-جا^{٢}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta)$

$ح'(\theta) = ٠ \Leftarrow \theta = ٠$ مرفوض ، $-جا^{٢}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta = ٠$

$-جا^{٢}\theta + ٢(١ - جا^{٢}\theta) = ٠$

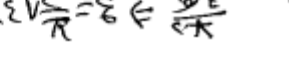
$-جا^{٢}\theta + ٢ - ٢ جا^{٢}\theta = ٠$

$-٣ جا^{٢}\theta = -٢$

$جا^{٢}\theta = \frac{٢}{٣}$

$جا\theta = \sqrt{\frac{٢}{٣}}$

$\theta = ٥٤.٧°$



∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = ٥٤.٧°$

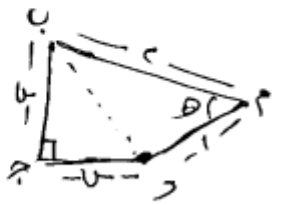
٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ١٥٠ س − ٠,١ س² − ٥٠ س − ٢٠٠

ر(س) = ١٥٠ س − ٠,١ س² − ٢٠٠ ⇐ ر′(س) = ١٥٠ − ٠,٢ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠,٢ = ١٥٠٠ / ٢ = ٧٥٠

ر″ = −٠,٢ < ٠ ⇐ ر(٧٥٠) قيمة عظمى

الربح يمكن سنوياً عندما س = ٧٥٠ قطعة



٩) م = ½ × ٢ × ١ × جتاهـ + ½ × ٢ × ٢ × جاهـ

م = جتاهـ + جاهـ

م = جاهـ − جتاهـ + ٥/٤ ، ٠ < هـ < ٣٦٠

م′(هـ) = جتاهـ + جاهـ

م′(هـ) = ٠ ⇐ جتاهـ = −جاهـ ⇐ هـ = ٣π/٤

م″(هـ) = −جاهـ + جتاهـ ⇐ م″(٣π/٤) = −√٢/٢ + √٢/٢ = −√٢ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تكون عندما هـ = ٣π/٤ = ١٣٥°

١٠) م = ٢ × (٤ + س)/٢ × (٤ − س) = (س + ٤)(٤ − س)

م(س) = (س + ٤)(٤ − س) ∴ −٤ ≤ س ≤ ٤

م′(س) = (س + ٤)(−١) + (٤ − س)(١)

م′(س) = −٢س

م″(س) = −٢

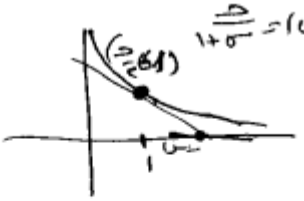
م′(س) = ٠ ⇐ −٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ، ص = ١٦

م″(٠) = −٢ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تكون عندما س = ٠

وهي م(٠) = (٤)(٤) = ١٦ وحدة مربعة.

أسئلة الوحدة



١) ميل المماس = $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = \left|\frac{-١}{(١+س)^{٢}}\right|_{س=١} = \frac{-١}{٤}$

معادلة المماس هي: $ص - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}(س - ١) \Rightarrow ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{٣}{٤}$

المماس يقطع محور الصادات عندما $س = ٠ \Rightarrow ص = \frac{٣}{٤}$

المماس يقطع محور السينات عندما $ص = ٠ \Rightarrow س = ٣$

$م = \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة

٢) $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جتا ن \Rightarrow ف'(ن) = \frac{١}{٢} - ٢ حتا ن جتا ن$

$ف'(ن) = \frac{١}{٢} - جتا ٢ن \Rightarrow ف'(ن) = ٠ \Rightarrow جتا ٢ن = \frac{١}{٢} \Rightarrow ٢ن = \frac{\pi}{٣} \Rightarrow ن = \frac{\pi}{٦}$

$ن = \frac{٥\pi}{٦} = ١٥٠° \Rightarrow ٢ن = \frac{٥\pi}{٣} = ٣٠٠° \Rightarrow ن = \frac{٥\pi}{١٢}$

$ف''(ن) = -٢ جتا ٢ن$

$ف''(\frac{\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{\pi}{٦} = -٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

$ف''(\frac{٥\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{٥\pi}{٦} = -٢ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

٣) $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٣} - ٧٢س} \Rightarrow ق'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٧٢}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣} - ٧٢س)^{٢}}}$

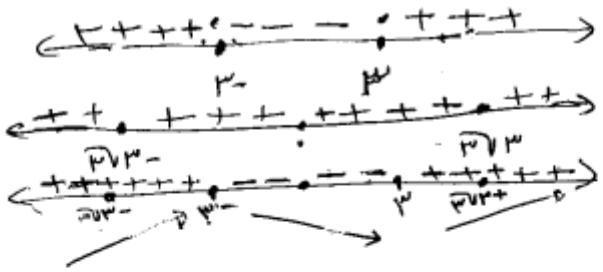
$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣\sqrt{٣}$

$ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = ٠ ، س = \pm ٣\sqrt{٣}$

٥) $ق(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

٦) فترات التزايد هي: $(-\infty ، -٣] ، [٣ ، \infty)$

فترة التناقص هي: $[-٣ ، ٣]$



٧) للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = -٣$

قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

٨) $ق(س) = ٢س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ٤$ ، $ق'(س) = ٦س^{٢} + ٢ب س + جـ$ ، $ق''(س) = ١٢س + ٢ب$

$ق(٠) = ٥ \Rightarrow \boxed{جـ = ٥}$

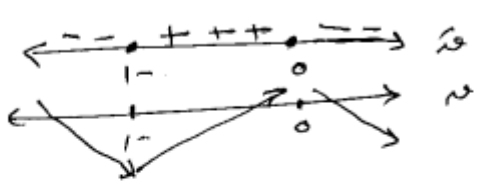
$ق'(١) = -٩ \Rightarrow ٦ + ٢ب + ٥ = -٩ \Rightarrow ب = -١٠$

$ق'(٢) = ٢٤ - ٢٠ + ٥ = ٩$

$ق(١) = ٢ - ١٠ + ٥ + ٤ = ١$ إذن $(١ ، ق(١))$ نقطة تماس $\Leftarrow (١ ، ٠)$ نقطة تماس

ومنه $أ = ١$ ، $ب = -٦$ ، $جـ = ٠ \Rightarrow ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$

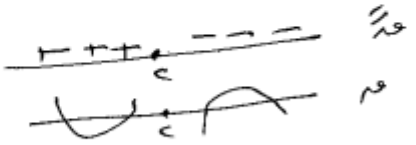
س٣) النقط الحرجة هي التي $ق'(س) = 0$ أو $ق'(س)$ غير معرفة
$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = -1$ أو $س = 5$ وهي $(-1، ق(-1))$ ، $(5، ق(5))$



ب) الاقتران $ق$ متزايد في $[-1، 5]$
$\Leftarrow$ $ق$ متناقصاً في $(-\infty، -1] \cup [5، \infty)$

ج) الاقتران $ق$ له قيمة عظمى محلية عندما $س = 5$
$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ قيمة صغرى محلية عندما $س = -1$

د) الاقتران $ق$ له نقطة انعطاف عندما $س = 2$
$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ مقعر للأسفل في $[2، \infty)$



هـ) الاقتران $ق$ له نقطة انعطاف عندما $س = 2$

س٤: $ق(س) = \begin{cases} ج س^2 + 5س + 6 & ، س \leq 1 \\ د س + ب & ، 1 < س < 3 \\ ج س^2 + 5س + 6 & ، س \geq 3 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ج س^2 + 5س + 6 & ، س \leq 1 \\ م & ، 1 < س < 3 \\ ج س^2 + 5س + 6 & ، س \geq 3 \end{cases}$

$س = 1$ ، $ق$ غير موجودة

أ) الاقتران $ق$ له نقطة حرجة في $\{-1، 0، 1، 3\}$

ب) $ق$ متزايد في $[0، 3]$
$\Leftarrow$ متناقصاً في $[-1، 0]$

ج) الاقتران $ق$ له قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$

د) $ق(0) = 0 \Leftarrow ج = 0$

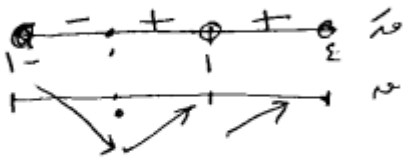
$ق(3) = 9 ج + 3 ب + 6 = 27 ج + 3 ب + 6 \Leftarrow 3 ب = 1 - 24 ج$

$ق(1) = ج + 5 + 6 = ج + ب + 6 \Leftarrow ب = 1 - ج$

$3 ب = 1 - 24 ج$

$3 - 3 ج = 1 - 24 ج \Leftarrow 21 ج = -2 \Leftarrow ج = -\frac{2}{21}$

$ب = 1 + \frac{2}{21} = \frac{23}{21}$



س٥) من التشابه: $\frac{ص}{8} = \frac{س}{10} \Leftarrow ص = \frac{4}{5} س$

$\frac{ع}{6} = \frac{8 - س}{10} \Leftarrow ع = \frac{3}{5}(8 - س)$

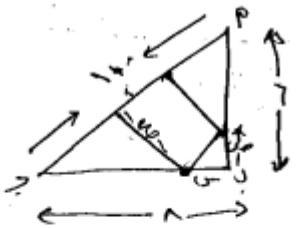
$ح = ص \times ع \times ل = \frac{4}{5} س \times \frac{3}{5}(8 - س) \times 6 = \frac{72}{25} س (8 - س)$

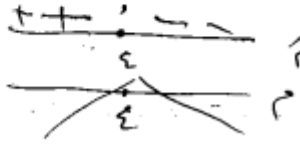
$ح = \frac{72}{25}(8س - س^2)$

$ح' = \frac{72}{25}(8 - 2س) = 0 \Leftarrow س = 4$

$ح'' = \frac{72}{25}(-2) < 0$ ، $ح$ له قيمة عظمى عندما $س = 4$

$\therefore$ أكبر حجم $= \frac{72}{25} \times 4 \times 4 \times 6 = \frac{2304}{25}$ سم^3





رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
الرمز	ج	د	ب	د	ب	د	د	ج	ل	د	ج