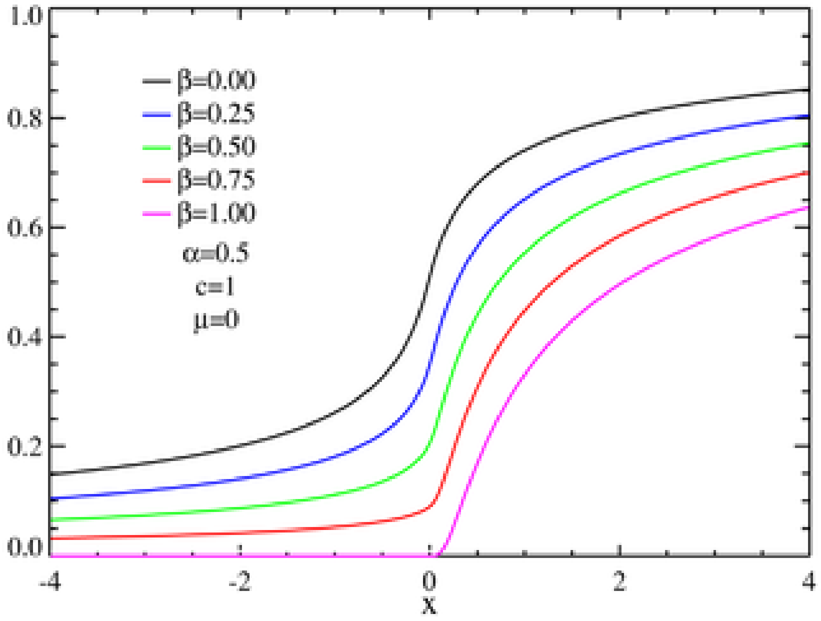
المحاضرة الثالثة

السنة الرابعة – إحصاء رياضي

توزعات مستقرة



Stationary Distributions

التوزيع الأسي المتناظر:

بفرض X متغير عشوائي أسي متناظر دالة كثافته تعطى بالشكل:

$$\boxed{f(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}\;;x\in\mathbb{R}}$$

لنوجد الدالة المميزة له:

$$\psi_X(t)=Ee^{itx}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}\,dx$$

$$=\frac{\lambda}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{itx}e^{\lambda x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}e^{itx}e^{-\lambda x}\,dx\right]$$

$$=\frac{\lambda}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(\lambda+it)x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-(\lambda-it)x}\,dx\right]$$

$$=\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{\lambda+it}+\frac{1}{\lambda-it}\right]=\frac{\lambda}{2}\left[\frac{\lambda-it+\lambda+it}{\lambda^2+t^2}\right]$$

$$=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \psi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}}$$

وهي الدالة المميزة للتوزيع الأسي المتناظر.

واضح من هذه الدالة بأن قانون التوزيع الأسي المتناظر غير قابل للقسمة بشكل لانهائي لأنه لا يمكن إيجاد n متغير عشوائي مستقل يحقق الشرط المطلوب.

ملاحظة: من التحويل العكسي لفورييه نجد أن:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi_X(t)\, dt$$

وذلك عندما تكون $\psi_X(t)$ دالة كمولة.

مثال: يمكن استنتاج الدالة المميزة لمتغير عشوائي كوشي بالوسيط λ ، من المعلوم ان دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي كوشي تعطى بالشكل:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \quad ; x \in \mathbb{R}$$

وبما أن الدالة المميزة للتوزيع الأسي المتناظر كمولة:

$$\psi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$$

فنجد أن:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi_X(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}\, dt$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}\, dt$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}\, dt$$

وبالتالي كما هو معلوم الدالة المميزة لكوشي هي:

$$\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{-\lambda|t|}}$$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نستطيع إيجاد n متغير عشوائي مستقل $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim k\left(\frac{\lambda}{n}\right)$، **أي أن توزيع كو شي من جديد قابل للقسمة بشكل لا متناهي.**

تمرين: بفرض Z متغير عشوائي بواسوني مركب، اثبت أنه قسوم بشكل غير منتهي.

القانون البواسوني هو قانون قابل للقسمة بشكل لانهائي لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نستطيع إيجاد n متغير عشوائي مستقل $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ ، لدينا الدالة المميزة لبواسون:

$$\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}}$$

واستنتجنا من محاضرة سابقة أن الدالة المميزة لمتغير بواسوني مركب:

$$\psi_Z(t) = \varphi\big(\,\psi_X(t)\big)$$

$$= e^{\lambda(\,\psi_X(t)-1)} = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(\,\psi_X(t)-1)}\right)^n = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

وبالتالي العلاقة التالية محققة:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

أي أن القانون البواسوني لمتغير مركب قسوم بشكل لامتناهي.

المتجهات العشوائية:

إذا كان لدينا $X \in \mathbb{R}^d$، فإن X متجه عشوائي يكتب بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \quad or \quad X = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_d)'$$

وبالتالي يكون:

$$|X|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = x'x$$

وبالتالي يمكن أن نعرف:

$$x'y = (x_1, x_2, \dots, x_d) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i = \langle x, y \rangle$$

ولنعرف الفضاء L_d^p بالشكل التالي:

$$L_d^p = \{\omega \in \Omega; \mathrm{X}(\omega) = \left(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_d(\omega)\right); E|X|^p < \infty\}$$

في حال كانت $p = 1$ يكون:

$$X \in L_d^1 \; ; E(X) = (EX_1, EX_2, \dots, EX_d)$$

ندعو $P_{X_1}, P_{X_2}, \dots, P_{X_d}$ بالقوانين الاحتمالية الهامشـــية للمتجه X، وفي حال المركبات مستقلة فيكون الشرط التالي محقق:

$$P_X = P_{X_1}.P_{X_2}.\dots.P_{X_d}$$

وذلك في حال المتغيرات العشوائية منقطعة.

أما في حال المتغيرات مستمرة فإن كثافة أي مركبة من هذه المركبات ولتكن X_k تعطى بالصيغة التالية:

$$h(x_k) = \frac{g_{X_k(u)}}{\int_{\mathbb{R}} g_{X_k(u)} du}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا X و Y متغيرات عشـــوائيان كمولان تربيعياً (أي أن: $X, Y \in L_d^2$)، عندئذ التباين المشترك لهذين المتغيرين هو:

$$cov(X,Y) = E\,(X - EX)(Y - EY) = EXY - \; EXEY$$

وفي حال X=Y يكون:

$$cov(X,Y) = var(X)$$

ومن المعروف أيضاً أن الارتباط:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

تعميم في حالة المتجهات العشوائية:

بفرض $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$ متجه عشـــوائي بحيث أن $X \in L_d^2$ أي أنه كمول تربيعياً، عندئذ مصفوفة التغاير لـ X ونرمز لها ب $k(X)$ تعطى بالعلاقة:

$$k(X)=E\left((X-EX)(X-EX)^{'}\right)=E\left(X\acute{X}\right)-EX.E\acute{X}$$

وفي حال كانت مركبات المتجه مستقلة فإن مصفوفة التغاير ستأخذ الشكل:

$$k(X)=\begin{bmatrix} V(X_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V(X_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V(X_1) \end{bmatrix}$$

ومن أجل ذلك لنأخذ المتجه $X=(X_1,X_2)$ نجد أن:

$$k(X)=E\left((X-EX)(X-EX)^{'}\right)$$

$$=E\left[\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \end{pmatrix}\right)^{'}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix} X_1-EX_1 \\ X_2-EX_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1-EX_1 & X_2-EX_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix} (X_1-EX_1)(X_1-EX_1) & (X_1-EX_1)(X_2-EX_2) \\ (X_2-EX_2)(X_1-EX_1) & (X_2-EX_2)(X_2-EX_2) \end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{pmatrix} E(X_1-EX_1)(X_1-EX_1) & E\,(X_1-EX_1)(X_2-EX_2) \\ E(X_2-EX_2)(X_1-EX_1) & E\,(X_2-EX_2)(X_2-EX_2) \end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) \end{bmatrix}$$

بعض خصائص التغاير والتباين:

$$1-\quad k(aX)=a^2\,k(X);a\ real\ number$$

$$2-\quad k(X+a)=k(X)\ ;\ \mathbb{R}^d$$

$$3-\quad \acute{k}(X)=K(X)$$

$$4-\quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^d:\acute{\lambda}\,k(X)\lambda\geq 0$$

البرهان 4: نفرض أن $EX=0$ عندئذ:

$$\acute{\lambda}\,k(X)\lambda=\acute{\lambda}\,E\big(X\acute{X}\big)\lambda=E\big(\acute{\lambda}\,\lambda\,\acute{X}X\big)=E(|\lambda|^2|X|^2)\geq 0$$

$$5-\quad k(MX)=M\,k(X)\acute{M}$$

البرهان 5: نفرض أن $EX=0$ عندئذ:

$$k(MX)=E(MX\,(M\acute{X}))=E\left(MX\,(\acute{M}\acute{X})\right)$$

$$=E(M(X\acute{X})\,\acute{M})=M\,E(X\acute{X})\,\acute{M}$$

$$=M\,k(X)\acute{M}$$

مبرهنة: بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان من L_d^2 عندئذ:

$$k(X+Y)=k(X)+k(Y)$$

وفي حال كون d=1 يكون:

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$