إعداد/ عواطف الجهني

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

اليوم

التاريخ

الحصة

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية

logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية

logarithmic inequality

المعادلات اللوغارتمية في حياتنا

يعتبر مقياس ريختر واحد من أهم الطرق لقياس قيمة الزلازل ، وهو مقياس يعتمد على التشوهات الذبذبية للراسم المرتبط بعتلة تتحرك مع تحرك الأرض وترسم على خرائط خاصة بشكل نموذجي تسمى "السيسموغراف" الذكر وتحسب حسب المعادلة
الذكر وتحسب حسب المعادلة (Log E = 11,4 + 1, 5 M) ، حيث أن (E) هو الطاقة المتحررة ، أما (M) فهو قيمة مقياس ريختر ، والرمز (Log) يعني اللوغاريتم الرياضي .

يستخدم علماء الآثار اللوغاريتمات لتحديد عمر القطع الأثرية ، مثل العظام وغيرها من الألياف ، وتصل إلى 50000 سنة

لماذا؟

تقاس شدة الأعاصير بمقياس يدعى فوجيتا Fujita) ، ويرمز إليه بالرمز F ، ويصنف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F - 0 إلى F - 6 بحسب : سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (70) والتي تعطى بالمعادلة

$$w = 93 \log_{10} d + 65$$

حيث تمثل له المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل ، وبحسب طول مساره ، وعرضه وقدرته التدميرية ، والفئة F - 6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرا .

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة .

مقياس ريختر:

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتَصوَر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

المُعَادَلَةُ اللُّوغَارِيتْمِيَّة

Logarithmic Equation

$$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$$

AWATEF ALJOHANI

تعريف المفردة

المعادلة اللوغاريتمية: هي معادلة تحتوي على لوغاريتم واحد أو أكثر.

مثـــال

المعادلات $\log_2 x = 3$, $\log_9(x^2 - 15) = \log_3 2x$ أمثلة على معادلات لوغاريتمية.

حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة، ثم تحقق من صحة حلّك.

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

التحقق:

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلِّك:

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

خصائص اللوغارتمات

خاصية المساواة في اللوغارتمات	$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y$
خاصية الضرب في اللوغارتمات	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
خاصية القسمة في اللوغارتمات	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b x^m = m \log_b x$

AWATEF ALJOHANI

حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x-9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x-9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x-12)(x+3) = 0$	حلّل
$x+3=0$ أو $x-12=0$	خاصية الضرب الصفري
$x=-3$ ، $x=12$	حُل كل معادلة

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة
يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \ngtr 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًّا للمعادلة.

حُلّ المعادلة، ثم تحقق من صحة حلك.

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

9) $5\log_2 x = \log_2 32$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(10 $3 \log_2 x = \log_2 8$

معاً للقمة

المُتَبايِنَةُ اللُّوغَارِيتْمِيَّة

Logarithmic Inequality

$$\log_2\left(x^2-1\right)<1$$

AWATEF ALJOHANI

معاً للقمة

تعريف المفردة

المتباينة اللوغاريتمية: هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر.

مثـــــال

المتباينة $log_4 x > 3$ مثال على متباينة لوغاريتمية.

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$ ، $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

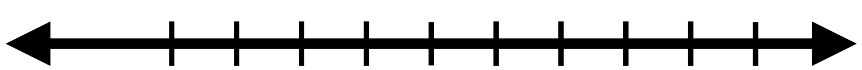
تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

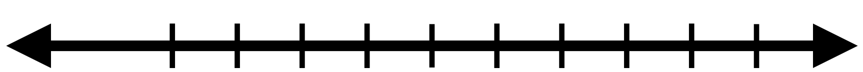
حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$





أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 4)

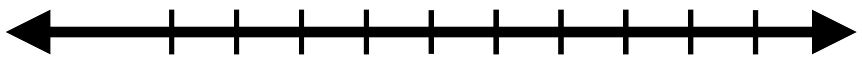
إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية :
عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرَّفًا.

17) $\log_5 x > 3$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 4)

18) $\log_8 x \leq -2$



يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلِّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

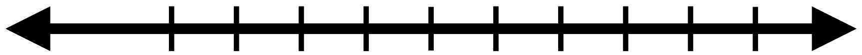
الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (x + 4) \leq \log_5 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.



أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(23 $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

(24 $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

ريم	لينا
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \geq 2^{-2}$	$x \leq 2^{-2}$
$x \geq \frac{1}{4}$	$0 < x \leq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

AWATEF ALJOHANI

الواجب

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلِّك:

(7 $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

(8 $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

الواجب

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 4)

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$