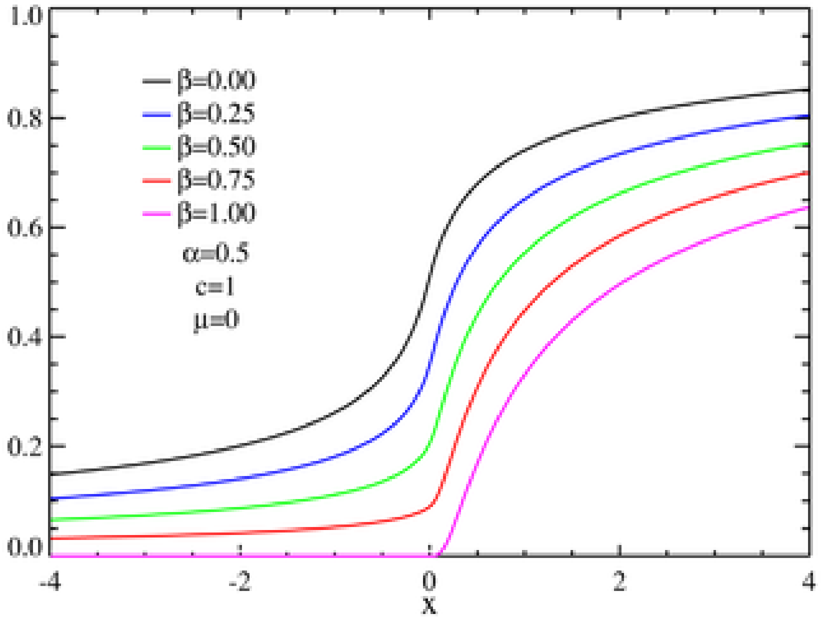
المحاضرة الخامسة

السنة الرابعة ــ إحصاء رياضي

توزعات مستقرة



Stationary Distributions

تمرين:

بفرض أن X, Y متغيران عشوائيان مستقلان لهما نفس التوزيع الاحتمالي ولهما عزماً من المرتبة الثانية، وبفرض أن $X - Y$ و $X + Y$ مستقلان عن بعضهما، اثبت أن القانون الاحتمالي لهما هو حتماً القانون الطبيعي.

الاثبات:

في حال كان $V(X) = 0$ فإن P_X هو قياس ديراك.

أما في حال $V(X) \neq 0$ فنثبت أن P_X له التوزيع الطبيعي كما يلي:

نفرض بغض النظر عن التعميم أن: $EX = 0 \quad , \quad V(X) = 1$ ونأخذ:

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{V(X)}}$$

ولدينا ضمن الفرض أن X,Y متغيران عشوائيان مستقلان عندئذ:

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \, . \, \psi_Y(t) = \left(\psi_X(t)\right)^2$$

$$\psi_{X-Y}(t) = \psi_X(t) \, . \, \psi_Y(t) = \psi_X(t) . \psi_X(-t)$$

ومن الفرض لدينا ايضاً: $X - Y$ و $X + Y$ مستقلان عندئذ:

$$2X = (X + Y) + (X - Y)$$

نوجد الدالة المميزة للطرفين:

$$\psi_{2X}(t) = \psi_{X+Y}(t)\ .\ \psi_{X-Y}(t) = \left(\psi_X(t)\right)^3 . \psi_X(-t)$$

بعد ذلك، من أجل أن نعرف $\ln \psi_X(t)$ يجب أن نبين أن $\psi_X(t)$ لا ينعدم،

من أجل ذلك نفرض جدلاً أن $\psi_X(t_0) = 0$ لأجل كل t_0 اختيارية، عندئذ

يكون $\psi_X\left(\frac{t_0}{2}\right) = 0$ وايضاً $\psi_X\left(\frac{t_0}{2^2}\right) = 0$ وهكذا إلى أن نجد أن

$\psi_X\left(\frac{t_0}{2^n}\right) = 0$ عندما $n \to \infty$ (حيث $\psi_X(t)$ دالة مستمرة كونها دالة

مميزة)، وبالتالي من أجل n كبيرة بشكل كافي نجد أن: $\psi_X(0) = 0$ وهذا

يتناقض لكون $\psi_X(0) = 1$، عندئذ يمكن أن نعرف دالة جديدة:

$$\psi\,(t) = \ln \psi_X(t)$$

واذا برهنا أن $\psi\,(t) = \frac{-t^2}{2}$ نصل إلى المطلوب.

من أجل ذلك نبدأ بما يلي:

$$\psi(2t) = \ln \psi_X(2t) = \ln \psi_X^3(t) \,.\, \psi_X(-t)$$
$$= 3\ln \psi_X(t) + \ln \psi_X(-t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\psi(2t) = 3\ln \psi_X(t) + \ln \psi_X(-t) \quad \dots (*)}}$$

الآن لنثبت أن $\psi_X(t) = \psi_X(-t)$ أي أن $\psi(t) = \psi(-t)$ وفقاً للخطوات التالية :

نعرف الدالة :

$$\delta(t) = \psi(t) - \psi(-t)$$
$$\Rightarrow \delta(2t) = \psi(2t) - \psi(-2t) = 2\psi(t) - 2\psi(-t)$$
$$= 2\big(\psi(t) - \psi(-t)\big) = 2\delta(t)$$
$$\Longrightarrow \delta(2t) = 2\delta(t) \quad ; t \in \mathbb{R} \quad \dots (1)$$

وبما أنه لدينا بالفرض $EX^2 = 1$ عندئذ $\psi_X(t)$ قابلة للاشتقاق أي أن: $\acute{\psi}_X(0) = 0$، وأيضاً $\acute{\acute{\psi}}_X(0) = -1$ مع العلم أن $\psi_X^{(r)}(0) = i^r EX^r$ ومنه نستنتج أن:

$$\acute{\psi}(t) = \frac{\acute{\psi}_X(t)}{\psi_X(t)} \Rightarrow \acute{\psi}(0) = \frac{\acute{\psi}_X(0)}{\psi_X(0)} = 0 \,; \mathrm{EX} = 0$$

$$\Longrightarrow \acute{\delta}(t) = \acute{\psi}(t) - \acute{\psi}(-t)$$

حيث أن $\delta(0) = 0$, $\acute{\delta}(0) = 0$ وبتقسيم العلاقة (1) على t نجد:

$$\frac{\delta(2t)}{t} = \frac{2\delta(t)}{t} \Longrightarrow \frac{\delta(2t)}{2t} = \frac{2\delta(t)}{2t} = \frac{\delta(t)}{t}$$

بفرض $2t = \tau$ نجد أن:

$$\frac{\delta(\tau)}{\tau} = \frac{\delta(\tau/2)}{\tau/2}$$

وبالتكرار نجد:

$$\frac{\delta(\tau)}{\tau} = \frac{\delta(\tau/2)}{\tau/2} = \cdots = \frac{\delta(\tau/2^n)}{\tau/2^n}$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta(\tau/2^n)}{\tau/2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \acute{\delta}(0) = 0$$

$$\forall t \neq 0; \frac{\delta(t)}{t} = 0 \Longrightarrow \delta(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \psi(t) = \psi(-t)$$

حسب $(*)$ نجد:

$$\psi(2t) = 4\psi(t)$$

$$\frac{\psi(2t)}{(2t)^2} = \frac{\psi(t)}{t^2} \Longrightarrow \frac{\psi(t)}{t^2} = \frac{\psi\left({}^{t}/_{2}\right)}{{t^2}/{2^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\psi\left({}^{t}/_{2^n}\right)}{{t^2}/{2^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\psi''(0)$$

وذلك لأن n كبيرة بقدر كافي أي $\tau = \frac{t}{2^n}$ صـــغيرة بقدر كافي، عندئذ لننشــــر $\psi(t)$:

$$\psi(\tau) = \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!}\tau + \frac{\psi''(0)}{2!}\tau^2 + O(\tau^2)$$

نقسم الطرفين على τ^2 فنجد أن:

$$\frac{\psi(\tau)}{\tau^2} = \frac{0}{\tau^2} + \frac{0}{\tau^2} + \frac{\psi''(0)}{2}$$

أي أن:

$$\frac{\psi(t)}{t^2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \psi(t) = \frac{-t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \psi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}} \quad ; \psi(t) = \ln \psi_X(t)$$

مبرهنة:

إن الدالة المميزة لمتجه غاوصي $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$ تعطى بالصيغة التالية:

$$\psi_X(t) = e^{i\acute{t}m - \frac{1}{2}\acute{t}kt} \quad ; t \in \mathbb{R}^d$$

حيث أن:

$$E(X) = (EX_1, EX_2, \dots, EX_d)' = (m_1, m_2, \dots, m_d)'$$

$$k = \left(k_{jk}\right)_{(d*d)}$$

$$\psi_X(t) = E e^{i\langle t,x\rangle}$$

مبرهنة:

إذا كان $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$ متجه عشوائي بقيم في $\mathbb{R}^d$ بمتوسط $m = (m_1, m_2, \dots, m_d)'$ ومصفوفة التغاير k وكان:

$$\psi_X(t) = e^{i\acute{t}m - \frac{1}{2}\acute{t}kt} \quad ; t \in \mathbb{R}^d$$

عندئذ يكون X متجه غاوصي.

د. هادية طهماز