دورة 2017 الأولى:

السؤال الثالث:

① اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$.

② تحقق أن المستوي الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S.

الحل:

❶ $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=R^2$

$$\boxed{\Rightarrow S: x^2+y^2+z^2=3}$$

❷ **تكرورية هامة : حتى المستوي يمس الكرة يجب ان نبرهن ان البعد بين مركز الكرة و المستوي يساوي نصف قطر الكرة**

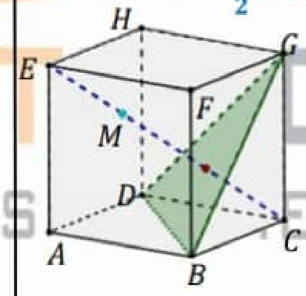
$$dist\,(O,P)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}=R$$

فالمستوي يمس للكرة

المسألة الأولى:

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2. نتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث: $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ، $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$



والمطلوب:

① اكتب معادلة المستوي (GBD).

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

③ جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

④ جد احداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

⑤ أثبت تعامد المستقيمين $(EC),(HM)$.

الحل:

❶ $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0)$

$D(0,2,0) E(0,0,2), F(2,0,2)$

$, G(2,2,2), H(0,2,2)$

$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)\ \ \overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$

نلاحظ ان الشعاعين غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow\ B,G,D$ تعين مستويا

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ **ناظم المستوي** (GBD) **بالتالي:**

$\vec{n}\perp\overrightarrow{GB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0$

$\Rightarrow -2b-2c=0\Rightarrow b=-c\quad ...(1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{GD}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GD}=0$

$\Rightarrow -2a-2c=0\Rightarrow a=-c\quad ...(2)$

بفرض $c=-1$ **بالتالي** $b=1, a=1$ **ومنه** $\vec{n}(1,1,-1)$ **والمستوي يمر من** $B(2,0,0)$

$1(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0$

$$\Rightarrow \boxed{(GBD): x+y-z-2=0}$$

❷ **المستقيم مار من** $E(0,0,2)$ **وشعاع توجيهه** $\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$ **بالتالي:**

$$(EC):\begin{cases}x=2t\\ y=2t\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=-2t+2\end{cases}$$

❸ **نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم** (EC) **في معادلة المستوي** (GBD):

$$2t+2t+2t-2-2=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

نعوض قيمة ال $t=\frac{2}{3}$ **في معادلة المسقيم** (EC)

$$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$$

4 بفرض $M(x,y,z)$ بالتالي:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

$$\Rightarrow (x,y,z-2)=\frac{1}{3}(2,2,-2)$$

$$\Rightarrow (x,y,z-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

5 $\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{EC}$$

فالمستقيمين $(EC),(HM)$ متعامدين.

دورة 2017 الثانية

السؤال الثاني:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d',d

$$d':\begin{cases}x=s\\y=-3s-3\;;s\in\mathbb{R}\\z=-s+1\end{cases}$$

$$d:\begin{cases}x=t+1\\y=-3t+2\;;t\in\mathbb{R}\\z=-3t+3\end{cases}$$

وهل المستقيمان d',d يقعان في مستوي واحد؟

علل إجابتك.

الحل:

$\vec{u}=(1,-3,-3)$ شعاع توجيه d و

$\vec{v}(1,-3,-1)$ شعاع توجيه d'

مستقلا خطياً ، لأن مركباتهما غير متناسبة،

وبالتالي d,d' غير متوازيين فهما إما متقاطعين

أو متخالفين. نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}t+1=s\\-3t+2=-3s-3\\-3t+3=-s+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t-s=-1 & (1)\\t-s=\frac{5}{3} & (2)\\3t-s=2 & (3)\end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) والمعادلة (2)

فجملة المعادلات متناقضة وليس لها حلول.

بالتالي المستقيمان d,d' متخالفان ولا يقعان في

مستو واحد.

السؤال الرابع:

تأمل في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقطتين: $A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة $[AB]$.

الحل:

لتكن H منتصف $[AB]$ فيكون

$H\left(\frac{3}{2},-1,1\right)$ $\overrightarrow{BA}(1,2,0)$ فيكون:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

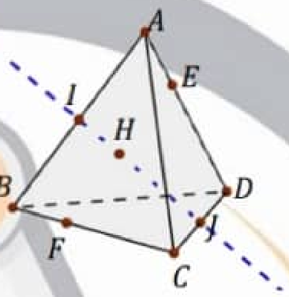
$$1\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y+1)+0(z-1)=0$$

$$x+2y-\frac{3}{2}+2=0$$

$$\Rightarrow 2x+4y+1=0$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ رباعي وجوه، a عدد حقيقي. I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB],[CD]$ و E,F نقطتان تحققان العلاقتين $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$. اثبت أن I,J,H تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$$

$\Leftarrow$ $(E,1)$ مركز أبعاد متناسبة لـ

$$(A,1-a)\ (D,a)$$

$$\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$$

$\Leftarrow$ F مركز أبعاد متناسبة لـ

$$(B,1-a)\ (C,a)$$

وبما أن H منتصف $[EF]$ بالتالي H مركز أبعاد متناسبة لـ $(E,1)\ (F,1)$

فحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـلنقاط:

$$(A,1-a)\ (B,1-a)\ (C,a)\ (D,a)$$

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,a)\ (C,a)$

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1-a)\ (B,1-a)$

بالتالي حسب الخاصة التجميعية النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(I,2a)\ (I,2-2a)$$

فأن النقاط I,J,H تقع على استقامة واحدة

دورة 2018 الأولى

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي P الذي معادلته: $P: x+2y+z-1=0$ والمطلوب:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P، ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

$$dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1(1)+2(-2)+0-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

الكرة مركزها A

ونصف قطرها لان المستوي يمس الكرة

$R=dist(A,p)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ معادلتها:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{16}{6}$$

ترقبوا ملفات الدورات مع الحل بنفس الصيغة من دورة 2017 الى دورة 2022)

انضموا الى قناتي التلغرام (بكالوريا رياضيات مع الأستاذ احمد تكروري)

وترقبوا الجلسة الامتحانية (الجلسة التكرورية)

المسألة الثانية:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $C(4,0,0)$ $B(1,2,1)$ $A(1,1,0)$ والمطلوب:

① أثبت أن النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.

② أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة: $x+3y-3z-4=0$

③ ليكن المستويان Q,P معادلتهما:

$$P: x+2y-z-4=0$$
$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

④ ما هي نقطة تقاطع المستويات $(ABC),Q,P$؟

⑤ احسب بعد A عن المستقيم d.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$ $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$

الشعاعين مستقلان خطياً والنقاط ليست على استقامة واحدة (تعين مستوياً).

❷ نعوض إحداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$:

$A: 1(1)+3(1)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow A\in(ABC)$

$B: 1(1)+3(2)-3(1)-4=0 \Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow B\in(ABC)$

$C: (4)+3(0)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow C\in(ABC)$

بالتالي معادلة المستوي (ABC) هي:

$$\boxed{x+3y-3z-4=0}$$

❸ يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقق معادلتيهما:

$P:\ t-2+6-y-4=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

$Q:\ 2t-4+9-2t-5=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

إذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q,P

❹ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي (ABC) نجد:

$$t-2+9-3t-4=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

ط2: يمكن الحل ع غاوس

❺ بفرض A' المسقط القائم لـ $A(1,1,0)$ على d وبالتالي

$\vec{u}(1,0,1)$ $\overrightarrow{AA'}(t-3,2,t)$ $A'(t-2,3,t)$

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Rightarrow t-3+t=0$$
$$\Rightarrow A'\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$
$$\Rightarrow AA'=\sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

دورة 2018 الثانية:

السؤال الثاني:

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$

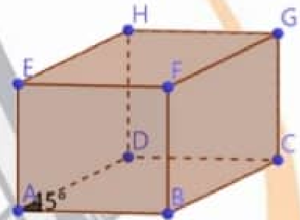
وقياس الزاوية $D\hat{A}B = 45°$

والنقطة I منتصف $[EF]$ والمطلوب:

① احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

② عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$



الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos DAB$

$= 2 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

❷ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$

حسب علاقة شال ومنه M تنطبق على I.

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$C(4,0,0)$ $B(1,0,-1)$ $A(2,1,3)$

$E(1,-1,1)$ $D(0,4,0)$

① جد $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$

② أثبت أن النقاط E, D, C ليست على استقامة واحدة

③ أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE).

④ اكتب معادلة المستوي (CDE).

⑤ احسب بعد B عن المستوي (CDE).

⑥ اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

الحل:

❶ $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$ $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$

$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$

❷ الشعاعين $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، فالنقاط E, D, C ليست على استقامة واحدة.

❸ $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 4 - 4 + 0 = 0$

❸ $\Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$

❸ $\Rightarrow \overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$

ومنه المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDE)

❹ المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$ وناظمه بالتالي $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$:

$$a(x - x_c) + b(y - y_c) + c(z - z_c) = 0$$

$$-1(x-4) - 1(y-0) - 4(z-0) = 0$$

$$-x - y - 4z + 4 = 0$$

$$x + y + 4z - 4 = 0$$

❺ $dist(B; (CDE)) = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \frac{|1 + 0 - 4 - 4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$

الكرة S مركزها B و $r = dist[B; (CDE)]$ معادلتها:

$$S: (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2 = r^2$$

$$S: (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$$

الرياضيات – الجزء الثاني

دورة 2019 الأولى:

السؤال الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ ،$B(0,1,1)$ والمطلوب:

① اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$

② أثبت أن المستقيمين $d,(AB)$ متعامدان.

الحل:

❶

$$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + b_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad d:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

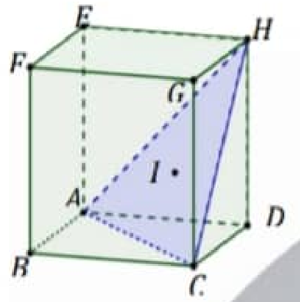
$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$,$\vec{u}(2,2,1)$

$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = -1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 0$

$\Leftarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ فالمستقيمين $d,(AB)$ متعامدين.

المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب:



① اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A,C,H,F,D.

② اكتب معادلة المستوي (ACH)

③ أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$P: -2x + 2y - 2z = 0$

يوازي المستوي (ACH)

④ بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F,I,D على استقامة واحدة.

⑤ اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

الحل:

❶ $A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$ $H(0,1,1)$

❷ $\overrightarrow{AH}(0,1,1)$ $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ACH)

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ (1)

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0$

$\Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow c = -b$ (2)

بفرض $b=-1$ بالتالي $c=1\,,a=1$

ومنه $\vec{n}(1,-1,1)$ والمستوي يمر من

$A(0,0,0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(ACH): x-y+z=0$$

3 $\vec{n}_{ACH}(1,-1,1)\ \vec{n}_p(-2,2,-2)$

$\vec{n}_P=-2\vec{n}_{ACH}$ شعاعي الناظمين مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة فالمستوين متوازيين

4 مركز ثقل المثلث ACH هو:

$$I\left(\frac{x_A+x_C+x_H}{3},\frac{y_A+y_C+y_H}{3},\frac{z_A+z_C+z_H}{3}\right)$$

$$I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DF}(1,-1,1)\,,\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نلاحظ $\overrightarrow{DF}=3\,\overrightarrow{DI}$ فالشعاعان $\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً. والنقاط F,I,D على استقامة واحدة.

5 الكرة مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ معادلتها:

$$S: (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$

$$S: (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$$

$$dist(\Omega,(ACH))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$$

فالمستوي (ACH) يمس الكرة S.

دورة 2019 الثانية:

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان: $A(2,1,-2)$ $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 3x-y-3z-8=0$$

① أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

الحل:

1 $\vec{n}_P(3,-1,-3)\ \ \overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$\Rightarrow \vec{n}_P=-\overrightarrow{AB}$$

الشعاعان مرتبطان خطياً ومنه المستقيم (AB) يعامد المستوي P

1 $A(2,1,-2)\ \ \overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$(AB):\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB):\begin{cases}x=2-3t\\y=1+t\quad ;t\in\mathbb{R}\\z=-2+3t\end{cases}$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوي

$$3(2-3t)-(1+t)-3(-2+3t)-8=0$$

$$6-9t-1-t+6-9t-8$$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{19}$$

نعوض في معادلات (AB) فنجد:

$$A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},\frac{-29}{19}\right)$$

المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$، والمستويات:

$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q: x + y + z - 1 = 0$

$R: x - z - 1 = 0$

① أثبت أن المستويين Q,P متقاطعان بفصل مشترك Δ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

② تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

③ أثبت أن المستويات P,Q,R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.

④ استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

الحل:

❶ $\vec{n}_P(2,-1,2)$ $\vec{n}_Q(1,1,1)$ المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ مستقلان خطياً والمستويان Q,P متقاطعان بفصل مشترك، لكتابة الفصل المشترك نجمع معادلتي المستويين

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow x = -z + 1$$

نعوض في المعادلة الثانية نجد:

$$-z + 1 + y + z - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

نفرض $z = t$ بالتالي $x = -t + 1$ ومنه:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

❷ $\vec{u}_\Delta(-1,0,1)$ ، $\vec{n}_R(1,0,-1)$

$\vec{u}_\Delta = -\vec{n}_R$ فالشعاعان $\vec{u}_\Delta,\vec{n}_R$ مرتبطان خطياً والمستوي R يعامد Δ

نعوض احداثيات A في معادلة R نجد:

$$1 - 0 - 1 = 0$$

محققة ومنه المستوي R يمر بالنقطة A.

❸ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R نجد:

$$1 - t - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0$$

بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة $I(1,0,0)$

❹ النقطة A تنتمي للمستوي R العمودي على المستقيم Δ ويتقاطع معه في النقطة A بالتالي:

$$dist(A,\Delta) = AI = \sqrt{0 + 4 + 0} = 2$$

دورة 2020 الأولى:

السؤال الثاني:

نتأمل المستويين

$P_2: x + y - z = 0$

$P_1: 2x - y + z + 1 = 0$

والمطلوب:

① تيقن أن المستويين متعامدين.

② اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

الحل:

❶ $\vec{n}_1(2,-1,1)$ ، $\vec{n}_2(1,1,-1)$

$$\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 2 - 1 - 1 = 0$$

شعاع الناظمين متعامدين بالتالي P_2,P_1 متعامدان.

❷

$$\begin{aligned} P_1&: 2x - y + z + 1 = 0 \\ P_2&: x + y - z = 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

نفرض $z=t$ ونعوض في المعادلة الثانية نجد

بالتالي: $y=t+\frac{1}{3}$

$$\Delta:\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=t+\frac{1}{3} \;;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقاط:

$A(1,0,0)\ B(4,3,-3)\ C(-1,1,2)\ D(0,0,1)$

المطلوب:

① أثبت أن $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

② أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

③ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(C,\gamma)\ (B,\beta)\ (A,\alpha)$ حيث γ,β,α أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AC}(-2,1,2)\ \overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما متناسبة.

❷ ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$(-1,0,1)=a(3,3,-3)+b(-2,1,2)$$

$$\Rightarrow(-1,0,1)=(3a-2b,3a+b,-3a+2b)$$

$$\begin{cases} 3a-2b=-1 \\ 3a+b=0 \\ -3a+2b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 3a-2b=-1 & (1) \\ -3a-b=0 & (2) \\ -3a+2b=1 & (3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$-3b=-1\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

نعوض في (2):

$$-3a-\frac{1}{3}\Rightarrow a=-\frac{1}{9}$$

نعوض في (2) نجد:

$$3\left(-\frac{1}{9}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)=1\Rightarrow 1=1$$

محققة وبالتالي

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

اي أن $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

❸

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{9}\overrightarrow{AC}$$

نضرب الطرفين ب 9

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -9\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC}$$

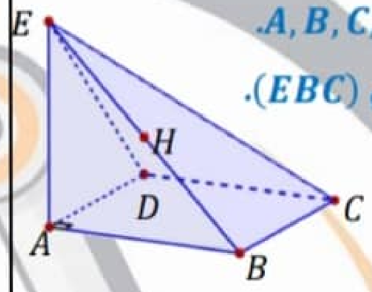
$$\Rightarrow 9\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 7\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

اي أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة للنقاط $(A,7)\ (B,-1)\ (C,3)$

المسألة الأولى:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع، طول ضلعه 3، $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$، نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



① عين إحداثيات A, B, C, D, E.

② جد معادلة المستوي (EBC).

③ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

④ استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC).

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$.

الحل:

❶ $A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$ $C(3,3,0)$ $D(0,3,0)$ $E(0,0,3)$

❷ $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$ $\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على المستوي (EBC)

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{EC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3c = 0 \\ 3a + 3b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

بفرض $c = 1$ بالتالي $b = 0, a = 1$ ومنه $\vec{n}(1,0,1)$ والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0) + 0(y-0) + 1(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(EBC): x + z - 3 = 0}$$

❸ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u} = \vec{n}(1,0,1)$ ويمر من $A(0,0,0)$

$$d: \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

❹ $E(0,0,3)$, $B(3,0,0) \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فإن المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow A' = H$$

❺ المثلث EBC قائم في B و $EB =$

$$\|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, BC = 3$$

بالتالي :

$$AH = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$S_{EBC} = \frac{EB \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times BC}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{EBC} \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2} \times 3}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

طريقة ثانية:

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{ABCD}\times EA\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 3\times 3\times 3\right)=\frac{9}{2}$$

دورة 2020 الثانية:

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

المطلوب:

① أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

② اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل:

❶ نعوض $A(1,1,-2)$ في
$P: 2x+y-3z+2=0$
نجد: $2(1)+1(1)-3(-2)+2=11\neq 0$
ومنه $A\notin P$

❷ بما أن المستويين Q,P متوازيين فإن $\vec{n}_P(2,1,-3)=\vec{n}_Q$ والمستوي مار من $A(1,1,-2)$

$$Q: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$Q: 2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{Q: 2x+y-3z-9=0}$$

التمرين الثالث:

المستقيمان d,d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\quad ;s\in\mathbb{R}\\ z=3s-2\end{cases}$$
$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

① أثبت أن d,d' متقاطعان، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع.

② جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d,d'

الحل:

❶ $\vec{u}(1,2,-1)$ شعاع موجه للمستقيم d و $\vec{u'}(2,1,3)$ شعاع موجه للمستقيم d'

$\vec{v},\vec{u}$ مستقلان خطياً لعدم تناسب المركبات

ومنه المستقيمان d,d' غير متوازيين،

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{cases}t+2=2s-1 & (1)\\ 2t+1=s-2 & (2)\\ -t=3s-2 & (3)\end{cases}$$

من (1) و (3) بالجمع نجد أن: $s=1$ وبالتعويض في (1) نجد أن $t=-1$ بتعويض هاتين القيمتين في المعادلة (2) نجد

$-2+1=1-2$ محققة ومنه المستقيمان d,d' متقاطعان ويقعان في مستو واحد.

نجد نقطة التقاطع هي $I(1,-1,1)$

② $\vec{u}(1,2,-1)$ $\vec{u'}(2,1,3)$ ولنفرض ناظم المستوي المطلوب $\vec{n}(a,b,c)$

إن كلاً من الشعاعين $\vec{n},\overrightarrow{AB}$ يوازي ناظم المستوي بالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u}=0 \Rightarrow a+2b-c=0$$
$$\vec{n}.\vec{u'}=0 \Rightarrow 2a+b+3c=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} 3a+6b-3c=0 \\ 2a+b+3c=0 \end{matrix} \Rightarrow \text{بالجمع}$$
$$\Rightarrow 5a+7b=0 \Rightarrow a=-\frac{7}{5}b$$

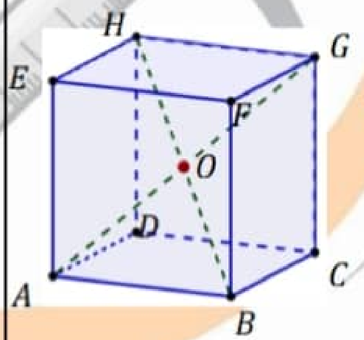
نفرض $b=-5 \Rightarrow a=7$ نعوض في المعادلة الأولى نجد $c=-3$ ومنه

$$\vec{n}(7,-5,-3)$$

والمستوي مار بالنقطة $(1,-1,1)$ بالتالي:

$$7(x-1)-5(y+1)-3(z-1)=0$$
$$\Rightarrow Q: 7x-5y-3z-9=0$$

المسألة الأولى:



مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2، O نقطة تقاطع القطرين $[HB],[AG]$

نختار المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

① جد إحداثيات O,H,G,B,A

② أعط معادلة المستوي (GOB)

③ احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos GOB$

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

⑤ أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

⑥ جد الأعداد الحقيقية α,β,γ لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

الحل:

① $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,2,0)$

$D(0,2,0)$ $E(0,0,2)$ $F(2,0,2)$

$G(2,2,2)$ $H(0,2,2)$ $O(1,1,1)$

② $\overrightarrow{OG}(1,1,1)$ $\overrightarrow{OB}(1,-1,1)$ وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GOB) بالتالي:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OG}=0$$
$$\Rightarrow a+b+c=0 \quad (1)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OB}=0$$
$$\Rightarrow a-b-c=0 \quad (2)$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$2a=0 \Rightarrow a=0$$

نعوض في (1) نجد

$$c=-b$$

بفرض $b=1$ بالتالي $c=-1$ ومنه

$$\vec{n}(0,1,-1)$$

والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$0(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{(GBD): y-z=0}$$

③ $\overrightarrow{OG}(1,1,1)$, $\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$

الرياضيات – الجزء الثاني

$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = 1 - 1 - 1 = -1$

$$\Rightarrow \cos GOB = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\|.\|\overrightarrow{OG}\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

4 المستقيم (DC) مار من $D(0,2,0)$ وشعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$ بالتالي:

$$(EC): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

5 $\vec{n}(0,1,-1),\ \overrightarrow{DC}(2,0,0) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0 + 0 + 0 = 0$

الشعاعين متعامدين بالتالي المستقيم يوازي المستوي.

6

$\overrightarrow{DA}(0,-2,0)\ \overrightarrow{DB}(2,-2,0)\ \overrightarrow{DC}(2,0,0)$

$\overrightarrow{DA} = a\,\overrightarrow{DB} + b\,\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow (0,-2,0) = a(2,-2,0) + b(2,0,0)$

$(0,-2,0) = (2a+2b-2a,0)$

$$\begin{cases} 2a+2b = 0 \\ -2a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a\ (1) \\ a = 1\ \ (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد $a = 1, b = -1$ بالتالي:

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1)\ (B,-1)\ (A,1)$

ومنه $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$

طريقة ثانية: بحسب خاصة متوازي الأضلاع في الوجه $ABCD$ نجد:

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1)(B,-1)\ (A,1)$

ومنه $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$

دورة 2021 الأولى:

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $D(6,2,5)\ C(5,0,5)\ B(1,-2,1)\ A(2,0,1)$ والمطلوب:

① أثبت أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

① جد العددين الحقيقيين β, α بحيث $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد.

الحل:

1 الشعاعين $\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)\ \overrightarrow{AC}(3,0,4)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2 $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow (4,2,4) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,0,4)$

$(4,2,4) = (-\alpha+3\beta, -2\alpha, 4\beta)$

$$-\alpha+3\beta=4$$
$$-2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=-1$$
$$4\beta=4 \Rightarrow \beta=1$$

نعوض $\alpha=-1, \beta=1$ في المعادلة الأولى

نجد $1+3=4$ محققة

بالتالي: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ والأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً والنقاط D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد.

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $D(3,1,1)$ $C(-3,4,-1)$ $B(2,1,1)$ $A(-1,2,3)$

والمطلوب:

① جد $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمان $(AC), (AB)$ متعامدان.

② أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC).

④ احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

④ بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2)$ $(B,-1)$ $(A,1)$ أثبت أن المستقيمين $(CG), (AB)$ متوازيان.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$ $\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6-2+8=0$$

الشعاعان متعامدان فالمستقيمان $(AC), (AB)$ متعامدان.

❷ $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-4+8-4=0$, $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=6-4-2=0$

بالتالي الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) والمستوي مار من $B(2,1,1)$ ومنه:

$$2(x-2)+4(y-1)+1(z-1)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x+4y+z-9=0}$$

❸ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}(2,4,1)$ ويمر من $D(3,1,1)$

$$d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \ ;t\in\mathbb{R} \\ z=ct+z_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=4t+1 \ ;t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases}$$

❹

$$dist(D,(ABC))=\frac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|2(3)+4(1)+1-9|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$S_{ABC}=\frac{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}{2}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{14}\times2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2\times7\times2\times3}=2\sqrt{21}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times2\sqrt{21}\times\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{4}{3}$$

❺ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2)(B,-1)(A,1)$ بالتالي:

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{GC}$$

الشعاعين $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{GC}$ مرتبطين خطياً فالمستقيمين $(AB),(CG)$ متوازيان

طريقة ثانية: نوجد احداثيات G ثم مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CG}$ ثم نثبت الارتباط الخطي لهما.

دورة 2021 الثانية:

السؤال الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(2,1,2)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$

① احسب بعد A عن المستوي P.

② اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

① $dist(A,P)=\frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$

② مركز الكرة A ونصف قطرها هو بعد A عن P:

$R=dist(A,P)=1$ ومعادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1}$$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(1,3,0)\ B(0,6,0)\ N(0,0,3)\ M(0,6,2)$

والمطلوب:

① اكتب معادلة المستوي (AMN).

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN).

③ أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BA]$

الحل:

① $O(0,0,0)\ A(1,3,0)$

$B(0,6,0)\ N(0,0,3)\ M(0,6,2)$

$\overrightarrow{AN}(-1,-3,3)\ \overrightarrow{AM}(-1,3,2)$ وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AMN) بالتالي:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$$
$$\Rightarrow -a+3b+2c=0 \qquad (1)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AN}=0$$
$$\Rightarrow -a-3b+3c=0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-2a+5c=0\Rightarrow a=\frac{5}{2}c$$

بفرض $c=2$ بالتالي $a=5$ نعوض في (1) نجد

$$b=\frac{1}{3}$$

للتخلص من الكسور نضرب المركبات بـ 3 ومنه

$\vec{n}(15,1,6)$ والمستوي يمر من $N(0,0,3)$

$$15(x-0)+1(y-0)+6(z-3)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{(AMN):\ 15x+y+6z-18=0}$$

② المستقيم Δ مار من $O(0,0,0)$

ويقبل $\vec{n}(15,1,6)$ شعاع توجيهه له بالتالي:

$$(EC):\begin{cases} x=15t \\ y=t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=6t \end{cases}$$

③ المستوي مار من $(0,6,1)$ منتصف $[BM]$

وناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{BM}(0,0,2)$ معادلته:

$$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{z-1=0}$$

دورة 2022 الأولى:

السؤال الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$ والمطلوب:

① احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $\cos BAC$

② إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$

الحل:

① $\overrightarrow{AB}(-2,1,0),\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2,1,0).(-2,0,1)$$
$$=4+0+0=4$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+0^2}$$
$$=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+(0)^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos BAC$$

$$\Rightarrow \cos BAC=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

② نفرض G مركز ابعاد متناسبة للنقاط

A,B,C وكل واحدة مثقلة ب 3

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$
$$\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\Rightarrow \|6\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{AB}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|$$
$$=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\|$$

مجموعة نقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{1}{6}$

احمد تكروري رياضيات · @Ahmad_Tkrory · احمد تكروري · 099 444 60 57

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,1,2)$

والمستويين $P: x-y+2z-1=0$ و $Q: 2x+y+z+1=0$ والمطلوب:

① أثبت أن المستويين Q, P متقاطعان بفصل مشترك d.

② اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

③ اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين Q, P

④ جد احداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R.

⑤ احسب بعد A عن المستقيم d.

⑥ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

الحل:

❶ الشعاعان $\vec{n}_Q(2,1,1)$, $\vec{n}_P(1,-1,2)$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويات P, Q متقاطعان بفصل مشترك d.

❷ نحل المعادلتين حل مشترك:

$$P: x-y+2z-1=0 \quad (1)$$
$$Q: 2x+y+z+1=0 \quad (2)$$

بالجمع نجد

$$3x+3z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

نعوض في (2) نجد:

$$-2z+y+z+1=0 \Rightarrow \boxed{y=z-1}$$

نضع $z=t$ وبالتالي: $x=-t, y=t-1$ ومنه:

$$d: \begin{cases} x=-t \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

❸ لدينا $\vec{n}_P(1,-1,2)$, $\vec{n}_Q(2,1,1)$ ولنفرض $\vec{n}_R(a,b,c)$

$$\begin{cases} \vec{n}_R.\vec{n}_P=0 \\ \vec{n}_R.\vec{n}_Q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+2c=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow 3a+3c=0 \Rightarrow a=-c$$

بفرض $c=-1$ وبالتالي $a=1, b=-1$ ومنه $\vec{n}_R(1,-1,-1)$ والمستوي R المار بالنقطة $A(1,1,2)$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow (x-1)-(y-1)-(z-2)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{R: x-y-z+2=0}$$

❹ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي R نجد:

$$-t-t+1-t+2=0 \Rightarrow -3t+3=0$$
$$\Rightarrow t=1 \Rightarrow B(-1,0,1)$$

❺ النقطة A تنتمي للمستوي R العمود على d بالتالي النقطة $B(-1,0,1)$ هي مسقط A على d بالتالي:

$$dist(A,d)=AB$$
$$=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

مركز الكرة $A(1,1,2)$ ونصف قطرها هو بعد A عن Q:

$$R=dist(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|2(1)+1+2+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

معادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$$

دورة 2022 الثانية:

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ $B(1,-1,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S؟

الحل:

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A, B بالتالي:

$$MA=MB \Rightarrow MA^2=MB^2$$

$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$$
$$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

$$x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1$$
$$=x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-2z+1$$

$$2x-4y+4z-1=0$$

$$\Rightarrow x+2y-4z-3=0$$

مجموعة النقاط S هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(2,-2,2)$ $B(1,1,0)$ $C(1,0,1)$ $D(0,0,1)$ والمطلوب:

① أثبت أن النقاط B, C, D لا تقع على استقامة واحدة.

② أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)

③ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD).

④ عين احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).

⑤ اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً فيها

الحل:

① $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ $\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$

الشعاعين $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ مستقلان خطياً ومنه فإن النقاط B, C, D لا تقع على استقامة واحدة.

② نعوض إحداثيات النقاط في معادلة المستوي

$$x+3y-3z-4=0$$

$$1+0-1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow B\in(BCD)$$
$$0+1-1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow C\in(BCD)$$
$$0+1-1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow D\in(BCD)$$

بالتالي $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

3 المستقيم Δ مار من $A(2,-2,2)$ ويقبل $\vec{n}(0,1,1)$ شعاع توجيهه له:

$$\Delta:\begin{cases} x = 2 \\ y = t - 2 \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

4 النقطة K هي نقطة تقاطع Δ مع المستوي (BCD) بالتالي نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي (BCD) فنجد:

$$t - 2 + t + 2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

5 مركز الكرة هو منتصف $[AD]$ ومنه

$$I\left(1, -1, \tfrac{3}{2}\right)$$

نصف قطر الكرة هو AD بالتالي

$$R = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$