وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الأول: تحليل الدوال

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education
يوزع مجانًا ولا يباع
١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Precalculus

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

1-1 تدريبات إعادة التعليم

الدّوال

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية على مجموعة الأعداد النسبية **Q**، وغير النسبية **I**، والأعداد الصحيحة **Z**، والأعداد الكلية **W**، والأعداد الطبيعية **N**.

الصفة المميزة للمجموعة هي إحدى طرق وصف المجموعة، وفيها نختار متغيرًا ونكتب خصائصه، ونبيّن إلى أي مجموعة ينتمي.

والفترة طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة، وفيها نستعمل أقواسًا مغلقة إذا كانت أطراف الفترة تنتمي إلى المجموعة، وأقواسًا مفتوحة إذا كانت أطراف الفترة لا تنتمي إليها. ونستعمل ∞ للتعبير عن المالانهاية الموجبة، و$-\infty$ للتعبير عن المالانهاية السالبة.

مثال **اكتب المجموعة $x > 18$ باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة.**

تتضمن المجموعة كلّ الأعداد التي هي أكبر من 18.

الصفة المميزة: $\{x \mid x > 18, x \in \mathbf{R}\}$

الخط العمودي | يعني "حيث"، والرمز $\in$ يعني ينتمي إلى، وتقرأ العبارة: مجموعة الأعداد x حيث x أكبر من 18 و x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

رمز الفترة: $(18, \infty)$

استعملنا الأقواس المفتوحة؛ لأن 18 ليس عنصرًا في المجموعة، و ∞ للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

تمارين

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{17, 18, 19, 20, \ldots\}$

2) $x \leq -2$

3) $x > -8.8$

4) $5 < x < 15$

5) $x < -11$ أو $x \geq 1$

6) $\{\ldots, -10, -9, -8, -7\}$

1-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدّوال

تمييز الدّوال العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر من مجموعة مثل B. وتحتوي المجموعة A على المدخلات أو عناصر **المجال**، في حين تحتوي المجموعة B على المخرجات أو عناصر **المدى**. **والدالة f** من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر واحد فقط y من B. ولإيجاد قيمة الدالة عند نقطة a في مجالها، ضع a مكان المتغير المستقل، ثم أوجد الناتج.

مثال 1 أوجد قيمة كلّ من الدالتين الآتيتين:

a) إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$، فأوجد $f(-2)$

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$ الدالة الأصلية

$f(-2) = 4(-2)^3 + 6(-2)^2 + 3(-2)$ عوض -2 مكان x

$= -32 + 24 - 6 = -14$ بسِّط

b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1\,, x \le 4 \\ 3x\,, 4 < x < 10 \\ 2x^2 - 15\,, x \ge 10 \end{cases}$، فأوجد $g(6)$ و $g(10)$

بما أن 6 واقعة بين 4 و 10، فإننا نستعمل القاعدة $g(x) = 3x$، لذا $g(6) = 3(6) = 18$

وبما أن 10 تنتمي إلى المجموعة $x \ge 10$، فإن $g(10) = 2(10)^2 - 15 = 185$

مثال 2 حدِّد مجال الدالة $f(x) = \dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$

إذا كان مقام العبارة $\dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$ يساوي صفرًا، فإنها غير معرفة. وبحلِّ المعادلة $x^2 - 6x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال وهي $x = 0$، و $x = 6$. أي أن المجال هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 6\,, x \in \mathbf{R}\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, \infty)$

تمارين

أوجد قيمة كلّ دالة مما يأتي:

1) إذا كانت $f(x) = 5x^2 - 4x - 6$، فأوجد قيمة $f(3)$.

2) إذا كانت $h(x) = 9x^9 - 4x^4 + 3x - 2$ ، فأوجد قيمة $h(t)$.

3) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} x + 45, & x \le -1 \\ 81 - x, & x > -1 \end{cases}$، فأوجد $g(-5)$, $g(36)$.

4) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & x < 3 \\ 2x + 10, & 3 \le x < 8 \\ 42, & x \ge 8 \end{cases}$، فأوجد قيم $f(3), f(8.5)$.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات حل المسألة

الدّوال

1) **مناخ:** يبيّن الجدول الآتي متوسط درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجَّلة في إحدى المدن.

درجات الحرارة العظمى والصغرى (°F)		
الشهر	العظمى	الصغرى
يناير	91	84
مارس	100	84
مايو	108	95
يونيو	117	97
أكتوبر	106	95
ديسمبر	93	86

a) اكتب العلاقة على صورة أزواج مرتبة.

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) حدِّد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

2) **غزلان:** تمثِّل الدالة الآتية أعداد الغزلان خلال 5 سنوات $f(d) = -3d^4 + 43d^3 - 185d^2 + 350d - 59$ أوجد قيمة كل من $f(3)$ و $f(5)$، اللتين تمثّلان أعداد الغزلان في السنتين الثالثة والخامسة.

3) **خدمات:** يتقاضى مطعم 15% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، إذا كانت تكلفتها أقلّ من 50 ريالًا. ويتقاضى 18% من تكلفة الوجبة إذا كانت تكلفتها 50 ريالًا وأقل من 100 ريال. و 20% إذا كانت تكلفتها 100 ريال أو أكثر، اكتب دالة متعددة التعريف تصف التكلفة الكلية التي على أحد زبائن المطعم دفعها بدلالة وجبة كلفتها c.

4) **شحن:** يبيِّن الجدول الآتي تكلفة توصيل بضاعة، وتعتمد الأجرة على الثمن الإجمالي للمشتريات.

الثمن الإجمالي (ريال)	تكلفة التوصيل (ريال)
0 ولغاية 300	8
أكثر من 300 ولغاية 600	15
أكثر من 600 ولغاية 1000	20
أكثر من 1000	مجانًا

a) اكتب دالة متعددة التعريف تصف أجرة التوصيل c بدلالة الثمن الإجمالي للمشتريات t.

b) اكتب مجال الدالة ومداها.

5) **مصعد:** بدأ مصعد فيه 12 شخصًا، بالهبوط من الدور الثامن، وكان ينزل عند كل دور شخص واحد، فإذا كان للعمارة دوران تحت مستوى الأرض و 8 أدوار فوق المستوى. ويُعبِّر عن عدد الأشخاص المتبقي في المصعد بِـ $f(\ell) = \ell + 4$ حيث ℓ رقم الدور، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب مجالًا مناسبًا باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.

b) اكتب مدى الدالة.

1-1 التدريبات الإثرائية

معدل التغير

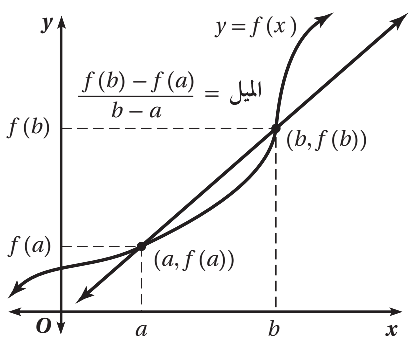
معدل التغير: تتغير الدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$، بمقدار $f(b) - f(a)$. ويُعَرّف متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$

بالمقدار $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

أوجد التغير ومتوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين القيمتين المعطاتين في كل من السؤالين الآتيين:

1) $f(x) = 3x - 4$ من $x = 3$ إلى $x = 8$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 10$، من $x = 2$ إلى $x = 4$



متوسط معدل التغير بين $x = a$ و $x = b$ يمثّل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ على منحنى الدالة f كما هو مبين في الشكل المجاور.

3) أيهما أكبر: متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ بين 0 و 1 أم بين 4 و 5؟

4) أيّ الدّوال الآتية $f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^3$ لها أكبر متوسط معدل تغير بين 2 و 3؟

5) أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ في كل فترة من الفترات الآتية:

a) $a = 1$ إلى $b = 1.1$ **b)** $a = 1$ إلى $b = 1.01$ **c)** $a = 1$ إلى $b = 1.001$

d) ما القيمة التي يقترب منها متوسط معدل التغير عندما تقترب قيمة b من 1؟

تُسمى القيمة التي أوجدتها في التمرين **5d** معدل التغير اللحظي للدالة، وله أهمية كبيرة في علم التفاضل والتكامل.

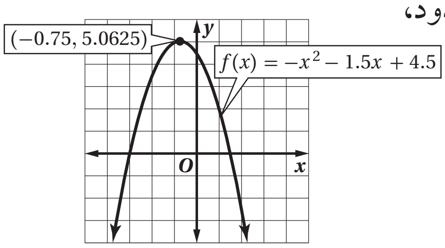
6) أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = 3x^2$ عندما تقترب x من 3.

1-2 تدريبات إعادة التعليم

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال إذا نظرت إلى منحنى الدالة، فإنه يمكنك تحديد مجالها ومداها، وتقدير المقطعين x , y. تسمى المقاطع x لمنحنى دالة بأصفار هذه الدالة؛ لأن قيمة الدالة عند كلّ منها تساوي صفرًا.

مثال **استعمل التمثيل البياني للدالة f لإيجاد مجالها ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.**



يدل السهمان اللذان على المنحنى على استمراريته من اليسار ومن اليمين دون حدود، لذا فإن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

لا تزيد قيم الدالة على 5.0625 أو $f(-0.75)$، لذا فإن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي 5.0625

أي أنَّ المدى: $\{y \mid y \leq 5.0625, y \in \mathbf{R}\}$

التقدير من التمثيل البياني: المقطع y هو الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المنحنى المحور y، ويُقدَّر بـ 4.5، وبالمثل فإن المقطعين x للدالة أو صفري الدالة هما الإحداثيان x للنقطتين اللتين يقطع المنحنى عندهما المحور x، ويبدو أنهما عند 3− و 1.5

الحل جبريًّا: لإيجاد المقطع y جبريًّا، أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = -(0)^2 - 1.5(0) + 4.5 = 4.5$$

ولإيجاد أصفار الدالة جبريًّا ضع $f(x) = 0$، ثم حلّ المعادلة بالنسبة إلى x

$$-x^2 - 1.5x + 4.5 = 0$$

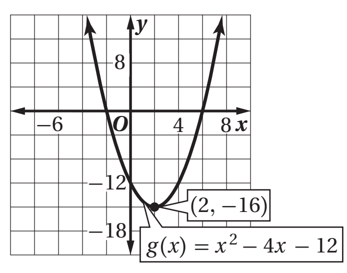
$$-1(x + 3)(x - 1.5) = 0$$

$$x = -3 \text{ أو } x = 1.5$$

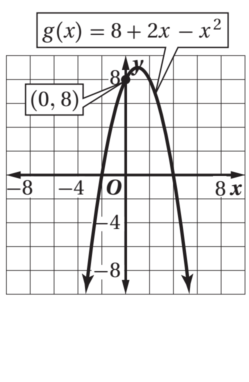
تمارين

استعمل التمثيل البياني للدالة g لإيجاد مجال الدالة ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.

1)



2)



1-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

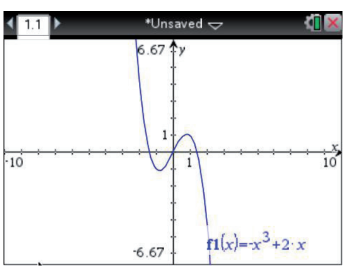
تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تماثل المنحنيات يوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول المحور x أو المحور y **محور تماثل**. ويوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول نقطة الأصل **نقطة تماثل**.

متماثل بالنسبة إلى...	الوصف	الاختبار الجبري
المحور x	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
المحور y	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
نقطة الأصل	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x ، و $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.

تسمى الدّوال المتماثلة حول المحور y دوالّ **زوجية**، وفيها يكون $f(-x) = f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة. وتسمى الدّوال المتماثلة حول نقطة الأصل دوالّ **فردية**، وفيها يكون $f(-x) = -f(x)$.

مثال **استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = -x^3 + 2x$ بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.**



يتضح من التمثيل أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

التحقق جبريًّا: $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -f(x)$

إذن فالدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

تمارين

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلّ دالة من الدّوال الآتية، ثم حلّل منحناها؛ لتحدد ما إذا كانت زوجية أو فردية أو غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

1) $f(x) = 4x^3 + 1$

2) $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

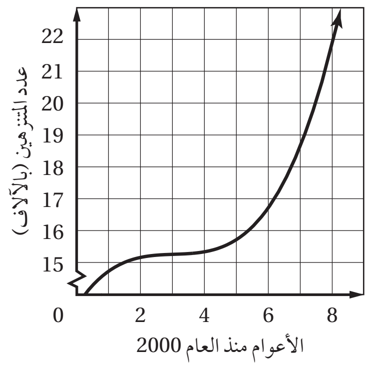
3) $g(x) = \frac{5}{x^4}$

4) $g(x) = x^3 - 6x$

1-2 تدريبات حل المسألة

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

1) متنـزّه : إذا كان العـدد السـنوي للمتنزِّهـين في أحـد المتنزَّهات من عام 2000 إلى عام 2008 يُعبّر عنه بالمعادلة $v(x) = 0.05x^3 - 0.51x^2 + 1.81x + 13.35$، حيث x عدد الأعوام منذ عام 2000.

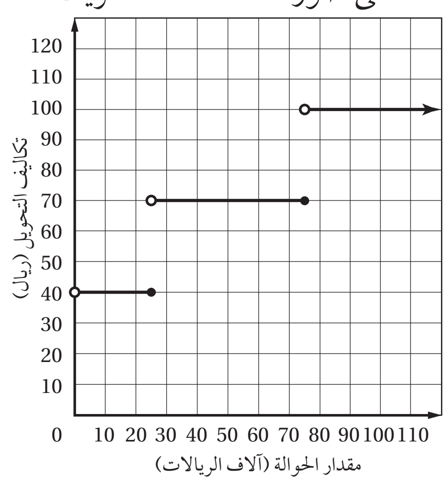


a) اعتـمادًا على التمثيل البياني، قدّر عدد المتنزِّهين عام 2006.

b) أوجد العدد التقريبي للمتنزِّهين عام 2006 جبريًّا.

c) في أي عـام زاد عـدد المتنزِّهـين عـلى 20000 أول مرة؟

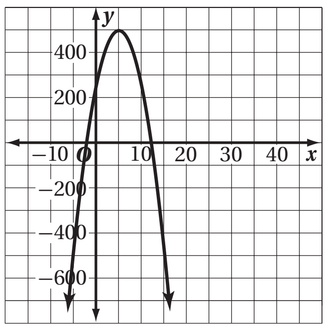
2) حوالات: يبيِّن الشكل الآتي تكاليف الحوالات النقدية والمعطاة على صورة دالة متعددة التعريف.



a) اكتب مجال الدالة ومداها.

b) قدّر تكاليف تحويـل 245 ألف ريال بالاعتماد على التمثيل البياني أعلاه.

3) صناعة : أطلق نموذج صاروخ وتمثِّل الدالة: $y = -10x^2 + 100x + 250$ العلاقة بين ارتفاع الصاروخ عن الأرض (y) بالأقدام بعد (x) ثانية.

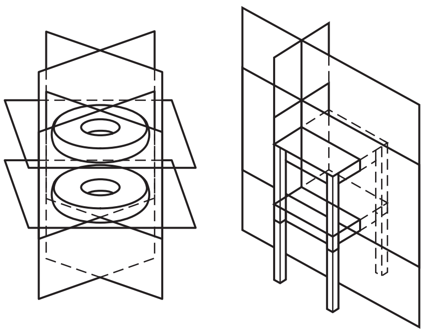


a) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

1-2 التدريبات الإثرائية

تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد



تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد: يوجد تماثل للأجسام الثلاثية الأبعاد كما هو الحال في الأشكال الثنائية الأبعاد.

إذا قطع مستوى مجسمًا، وكان كل من جزأي المجسم صورة مرآة للجزء الآخر، فإن المستوى يُسمى مستوى تماثل للمجسم. وقد يكون للمجسم عددٌ منتهٍ، أو غيرُ منتهٍ من مستويات التماثل. ففي الشكل المجاور، يوجد للكرسي مستوى تماثل واحد، في حين يوجد لقطعة الحلوى عدد غير منتهٍ من مستويات التماثل رُسِمَ ثلاثة منها.

حدِّد عدد مستويات التماثل لكل مجسم مما يأتي، ثم صفها.

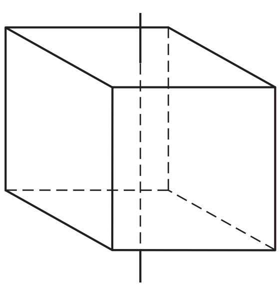
1) طوبة على شكل متوازي مستطيلات.

2) كرة تنس.

3) علبة عصير أسطوانية الشكل.

4) هرم قاعدته مربع.

5) مكعب.



يوجد كذلك تماثل دوراني للمجسمات. فمثلًا في الشكل المجاور، المحور المرسوم خلال المكعب يمثِّل محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة؛ لأنه يمكن تدوير المكعب حوله إلى أربعة أوضاع مختلفة متطابقة.

6) كم محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة للمكعب؟ استعمل مكعب الأرقام لتحدد محاور التماثل.

1-3 تدريبات إعادة التعليم

الاتصال والنهايات

الاتصال تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقَّقت الشروط الآتية:

1) $f(x)$ معرفة عند c؛ أي أن $f(c)$ موجودة.

2) تقترب $f(x)$ من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي أنّ $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.

3) القيمة التي تقترب منها $f(x)$ من جهتي c هي $f(c)$؛ أي أنّ، $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

ويكون للدّوال غير المتصلة ثلاثة أنواع من عدم الاتصال، وهي: عدم الاتصال اللانهائي، وعدم الاتصال القفزي، وعدم الاتصال القابل للإزالة.

مثال **حـدِّد مـا إذا كانت كلّ من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باسـتعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال هل هو: لا نهائي أم قفزي، أم قابل للإزالة؟**

a) $f(x) = 2|x| + 3; x = 2$

(1) $f(2) = 7$، أي أن $f(2)$ موجودة.

(2) كوّن جدولًا يبيّن قيم $f(x)$ عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

x	$y = f(x)$
1.9	6.8
1.99	6.98
1.999	6.998

x	$y = f(x)$
2.1	7.2
2.01	7.02
2.001	7.002

يبيِّن الجدولان أن y تقترب من 7 عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$.

(3)

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 7$ ؛ إذن الدالة متصلة عند $x = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}; x = 1$

الدالة غير معرفة عند $x = 1$ ؛ لأنها تجعل المقام صفرًا.

يبيِّن الجدولان أنه عندما تقترب قيم x من العدد 1 من اليسار، تتناقص قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون سالبة. وعندما تقترب قيم x من 1 من اليمين، تتزايد قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون موجبة.

x	$y = f(x)$
0.9	−9.5
0.99	−99.5
0.999	−999.5

x	$y = f(x)$
1.1	10.5
1.01	100.5
1.001	1000.5

وعليه، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$.

تمارين

حـدِّد مـا إذا كانت كلّ دالة مـن الدالتين الآتيتين متصلة عند قيمـة x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باسـتعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال، هل هو: لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

1) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 2 \\ x - 1, & x \le 2 \end{cases}$ ؛ $x = 2$

2) $f(x) = x^2 + 5x + 3; x = 4$

1-3 تدريبات إعادة التعليم
(تتمة)

الاتصال والنهايات

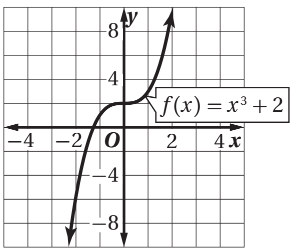
سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة يصف سلوك طرفي التمثيل البياني مسار المنحنى عند طرفيه، أو ماذا يحدث لقيم $f(x)$ عندما تتزايد أو تتناقص قيم x بلا حدود. ويمكنك استعمال مفهوم النهاية لوصف سلوك طرفي التمثيل.

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليسار (عندما تتناقص قيم x السالبة بلا حدود): $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليمين (عندما تتزايد قيم x الموجبة بلا حدود): $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

قد تؤول قيم $f(x)$ إلى سالب ما لانهاية أو موجب ما لا نهاية أو إلى قيمة محددة.

مثال **استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 + 2$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.**



عندما تتناقص x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي سالب ما لا نهاية: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

عندما تتزايد قيم x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي موجب ما لانهاية: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم $|x|$.

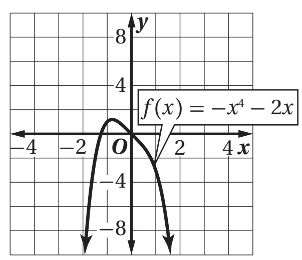
x	-1000	-100	-10	0	10	100	1000
$y = f(x)$	-999999998	-999998	-998	2	1002	1000002	1000000002

عندما $x \longrightarrow -\infty$، فإن $f(x) \longrightarrow -\infty$. وعندما $x \longrightarrow \infty$، فإن $f(x) \longrightarrow \infty$.

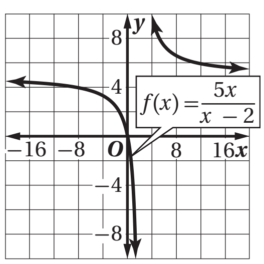
تمارين:

استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا:

(1



(2



1-3 تدريبات حل المسألة

الاتصال والنهايات

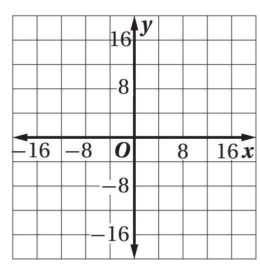
1) إسكان: إذا كانت نسبة الذين يملكون منازل في إحدى الدول يُعبر عنها بالقاعدة:
$h(x) = -0.0009x^4 - 0.09x^3 + 1.54x^2 - 4.12x + 47.37$,
حيث x عدد العقود منذ 1900، فاستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $h(x)$ على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا، ثم صف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

2) هندسة: يُعبّر عن ارتفاع متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وحجمه 250 وحدة مكعبة بالقاعدة: $f(x) = \frac{250}{x^2}$، حيث x طول ضلع القاعدة.

a) تحقق إن كانت الدالة متصلة عند $x = 5$، وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

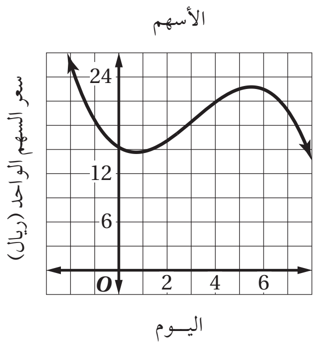
b) هل الدالة متصلة على $(-\infty, +\infty)$؟ برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت غير متصلة فوضِّح إجابتك، وحدِّد نوع عدم الاتصال، هل هو لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من إجابتك في الفرع **b**.



3) رحلة: إذا كانت تكلفة الشخص الواحد في رحلة جماعية يُعبَّر عنها بالقاعدة $f(x) = \frac{600}{x+25}$، حيث x عدد المشتركين، فمثّل الدالة على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم عيِّن نقاط عدم الاتصال وصفها بالاعتماد على التمثيل البياني.

4) أسهم: إذا كان معدل سعر السهم الواحد لإحدى الشركات بعد x يوم من عرضها في السوق يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = -0.15x^3 + 1.4x^2 - 1.8x + 15.29$.



استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.

1-3 التدريبات الإثرائية

قراءة الرياضيات

اقرأ: يُستعمل التعريف الآتي للاتصال في كتب الرياضيات الجامعية. لاحظ أن المؤلف يبدأ بتوضيح رموز الفترات المختلفة. على الرغم من وجود عدد كبير من الرموز القياسية المتفق عليها عالميًّا، إلا أنه جرت العادة أن يوضح مؤلفو الكتب هذه الرموز التي يريدونها.

في هذا الكتاب تسمى المجموعة S مجال الدالة، وعادة ما تكون فترة. وتحقق إحدى المتباينات الأربع الآتية: $a < x < b, a \le x < b, a < x \le b, a \le x \le b$. وفي هذه المتباينات يكون $a \le b$. وتكافئ هذه المتباينات الفترات $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$، على الترتيب.

تسمى (a, b) فترة مفتوحة، والفترتان $[a, b)$ و $(a, b]$ نصف مفتوحة أو نصف مغلقة، وتسمى الفترة $[a, b]$ فترة مغلقة.

على افتراض أن I فترة مفتوحة أو مغلقة أو نصف مفتوحة، إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على I وكانت x_0 نقطة في I، نقول: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند x_0 إذا أصبحت قيمة المقدار $|f(x) - f(x_0)|$ صغيرة جدًّا عندما $x \in \mathrm{I}$ وتقترب x من x_0 .

استعمل التعريف أعلاه للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1) ماذا يحدث للمتباينات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟

2) ماذا يحدث للفترات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟

3) ما المصطلح الرياضي المناسب الذي يجب وضعه في الفراغ لتصبح العبارة الآتية صحيحة؟ إذا كانت $f(x)$ غير $\underline{\ ?\ }$ عند x_0، فإنه يوجد للدالة نقطة عدم اتصال عند x_0.

4) ما الرمز المستعمل للدلالة على أن العدد x موجود في الفترة I؟

5) مثِّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

6) هل الدالة المعطاة في التمرين 5 متصلة على الفترة $[0, 1]$؟ وإذا كانت غير متصلة، فما نقاط عدم الاتصال؟

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

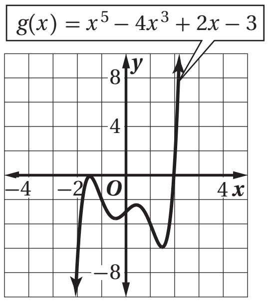
القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التزايد والتناقص قد تكون الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة على فترة معطاة. وتُسمى النقاط التي تتغير عندها الدالة من متزايدة إلى متناقصة أو العكس **نقاطًا حرجة**، وقد تكون النقطة الحرجة **صغرى محلية**، أو **صغرى مطلقة**، أو **عظمى محلية**، أو **عظمى مطلقة**. ويُستعمل المصطلح قيمة **قصوى** للدلالة على القيمة الصغرى أو العظمى.

مثال

قدّر قيم x التي يكون للدالة عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيّن نوعها بالاعتماد على التمثيل البياني للدالة $f(x)$، ثمّ عزّز إجابتك عدديًا.

التحليل بيانيًا:



يظهر من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = -1.5$، وصغرى محلية مقدارها -3.5 عند $x = -0.5$، وعظمى محلية مقدارها -2.5 عند $x = 0.5$، وصغرى محلية مقدارها -6 عند $x = 1.5$. ويظهر كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا لـ x على جانبي قيمة x التي عندها قيمة صغرى أو عظمى على أن يكون الفرق بين كل عدد والذي يليه 0.5 وحدة، واختر قيمة كبيرة لـ x وأخرى صغيرة.

x	-100	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	100
$f(x)$	-1×10^{10}	-7	-0.09	-2	-3.5	-3	-2.47	-4	-5.91	1	$\approx1\times10^{10}$

لما كانت $f(-1.5) > f(-1)$، $f(-1.5) > f(-2)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(-2, -1)$ قريبة من -1.5.

ولما كانت $f(-0.5) < f(0)$، $f(-0.5) < f(-1)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(-1, 0)$ قريبة من -0.5.

ولما كانت $f(0.5) > f(1)$، $f(0.5) > f(0)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(0, 1)$ قريبة من 0.5.

ولما كانت $f(1.5) < f(2)$، $f(1.5) < f(1)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(1, 2)$ قريبة من 1.5.

وكذلك لما كانت $f(100) > f(-1.5)$، $f(-100) < f(1.5)$، $f(-100) < f(-0.5)$ فإن هذا يعزز تخميننا بأنه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

تمارين

الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل من الدالتين الآتيتين، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

1) $f(x) = 2x^6 + 2x^4 - 9x^2$

2) $f(x) = x^3 + 9x^2$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين.

نسمي المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**.

متوسط معدل التغير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو ميل القاطع، m_{sec}.

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = 0.5x^3 + 2x$ في كل من الفترتين الآتيتين:

a) $[-3, -1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)}$$ ضع -3 مكان x_1 و -1 مكان x_2

$$= \frac{[0.5(-1)^3 + 2(-1)] - [0.5(-3)^3 + 2(-3)]}{-1 - (-3)}$$ أوجد قيم $f(-3)$، $f(-1)$

$$= \frac{-2.5 - (-19.5)}{-1 - (-3)} = \frac{17}{2}$$ بسِّط

b) $[-1, 1]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$ ضع -1 مكان x_1 و 1 مكان x_2

$$= \frac{2.5 - (-2.5)}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$$ أوجد القيم وبسِّط

تمارين:

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدّوال الآتية في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-3, -2]$

2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-1, 0]$

3) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [-3, -1]$

4) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [1, 3]$

5) $f(x) = x^4 + 8x - 3; [-4, 0]$

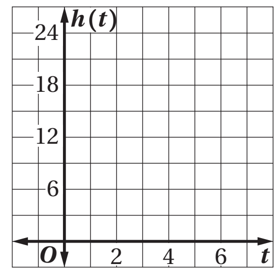
6) $f(x) = -x^4 + 8x - 3; [0, 1]$

1-4 تدريبات حل المسألة

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1) **قذيفة نارية:** يطلق قارب فقد اتجاهه قذائف نارية في الهواء. إذا كان ارتفاع القذيفة بالأمتار يُعبّر عنه بالدالة $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني من بدء إطلاق القذيفة، فأجب عما يأتي:

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

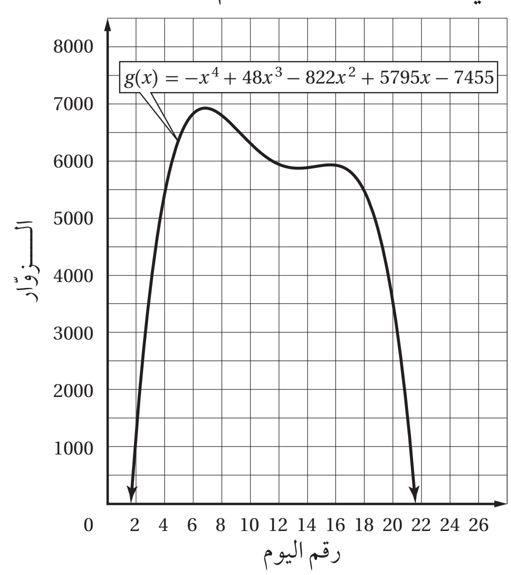


b) قدّر أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.

2) **استجمام:** إذا كان عدد زوار أحد أماكن الاستجمام يُعبَّر عنه بالدالة:

$$g(x) = -x^4 + 48x^3 - 822x^2 + 5795x - 7455$$

حيث x عدد الأيام منذ فتح المكان للزوار، فقدّر إلى أقرب وحدة القيم القصوى المحلية أو المطلقة وقيم x التي تكون عندها هذه القيم.



3) **استجمام:** أوجد متوسط معدل تغير الدالة في المسألة 2 لكل فترة زمنية مما يأتي:

a) من اليوم 2 إلى اليوم 6.

b) من اليوم 13 إلى اليوم 15.

c) من اليوم 18 إلى اليوم 20.

4) **صناديق:** قطعة من الكرتون مربعة الشكل طول ضلعها 18 بوصة. يُراد عمل صندوق منها دون غطاء، وذلك بقص مربعات متطابقة من أركانها، ثم ثني الأجزاء البارزة إلى أعلى.

a) اكتب دالة $v(x)$، حيث v حجم الصندوق، x طول ضلع المربع الذي تم قصّه من الأركان الأربعة.

b) أوجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن، وما أكبر حجم؟

c) أوجد القيمة الصغرى المحلية للدالة؟ ووضِّح ماذا تعني هذه القيمة في سياق المسألة.

1-4 التدريبات الإثرائية

معادلات "غير حقيقية"

معادلات غير حقيقية: توجد معادلات لا يمكن تمثيلها على المستوى الإحداثي مثل المعادلة $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 14 = 0$. وبإكمال المربع بالنسبة لِـ x و y نحصل على المعادلة $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = -5$.

تعلم أنه لجميع قيم x و y الحقيقية فإن كلًّا من القيمتين $(x-1)^2$ و $2(y+2)^2$ غير سالبة، لذا فإن ناتج جمعهما لا يمكن أن يساوي -5. وعليه فلا توجد أعداد حقيقية تحقق المعادلة، بل يحققها أعداد تخيلية (مركّبة) فقط.

تحقق مما إذا كان بالإمكان تمثيل كل من المعادلات الآتية على المستوى البياني، مجيبًا بِـ«نعم» أو «لا»:

1) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = -4$

2) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = -7$

3) $(x+2)^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$

4) $x^2 + 16 = 0$

5) $x^4 + 4y^2 + 4 = 0$

6) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 16 = 0$

ما قيم k التي تحقق ما يأتي في السؤالين 7 و 8؟

a) تجعل حلول المعادلة أعدادًا تخيلية (مركّبة) فقط.

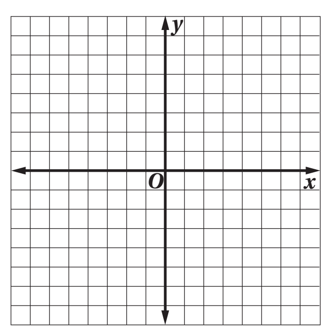
b) يكون التمثيل البياني للعلاقة نقطة.

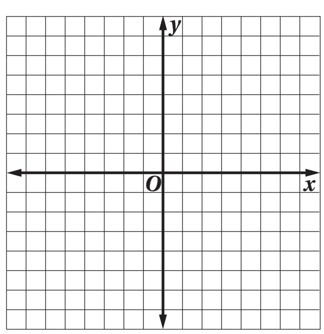
c) يكون التمثيل البياني في المستوى ممكنًا.

d) اختر قيمة لِـ k التي تجعل التمثيل البياني ممكنًا، ثم ارسم المنحنى على الشبكة المعطاة.

7) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + k = 0$

8) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - k = 0$





9) لماذا لا يمكننا مناقشة القيم القصوى ومتوسط معدل التغير للتمثيل البياني في كلٍّ من المسألتين 7 و 8؟

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-5 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم) الدالة الرئيسة هي أبسط صورة في عائلة الدالة.

الدالة الرئيسة (الأم)	الصيغة	ملاحظات
الدالة الثابتة	$f(x) = c$	التمثيل البياني هو مستقيم أفقي.
الدالة المحايدة	$f(x) = x$	إحداثيات أي نقطة على التمثيل البياني (a, a).
الدالة التربيعية	$f(x) = x^2$	التمثيل البياني على صورة حرف U.
الدالة التكعيبية	$f(x) = x^3$	المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
دالة الجذر التربيعي	$f(x) = \sqrt{x}$	التمثيل البياني في الربع الأول.
دالة المقلوب	$f(x) = \frac{1}{x}$	التمثيل البياني مكون من جزأين.
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \|x\|$	التمثيل البياني على صورة حرف V.
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$	دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x؛ وهي نوع من الدوال الدرجية.

مثال **صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.**

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، المدى: $\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$.

المنحنى يمر بنقطة الأصل، لذا فالمقطع x هو 0 ، والمقطع y هو 0.

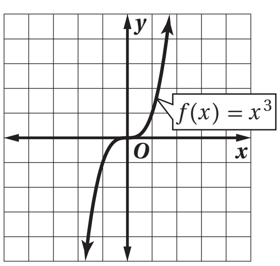
والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل والدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

وكذلك الدالة متصلة؛ لأنه يمكن تتبع منحناها دون رفع القلم عن الورقة.

وعندما تتناقص x بلا حدود فإن y تؤول إلى سالب ما لا نهاية، وعندما تتزايد x بلا حدود فإن y تؤول إلى موجب ما لا نهاية.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty , \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

لاحظ أن الدالة متزايدة دائمًا، لذا فهي متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.



تمارين

صف خصائص التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

1-5 تدريبات إعادة التعليم

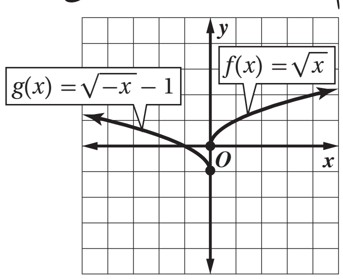
(تتمة)

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) يمكن إجراء تحويل للدالة الرئيسة لإنشاء منحنيات أخرى في عائلة هذه الدالة.

الانسحاب (الإزاحة)	$g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا ...	...$\lvert k \rvert$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
		...$\lvert k \rvert$ وحدة إلى أسفل عندما $k < 0$.
	$g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا...	...h وحدة إلى اليمين عندما $h > 0$.
		...$\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليسار عندما $h < 0$.
الانعكاس	$g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	...حول المحور x.
	$g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	... حول المحور y.
التمدد	$g(x) = a \cdot f(x)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...توسعًا رأسيًّا إذا كان $a > 1$.
		...تضيقًا رأسيًّا إذا كان $0 < a < 1$.
	$g(x) = f(ax)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...تضيقًا أفقيًّا إذا كان $a > 1$.
		...توسعًا أفقيًّا إذا كان $0 < a < 1$.

مثال **عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = \sqrt{-x} - 1$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$، ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه.**

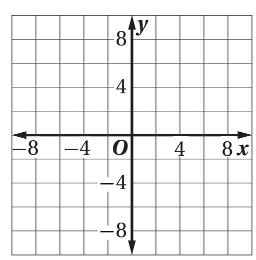


منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y، ومزاح وحدة واحدة إلى أسفل.

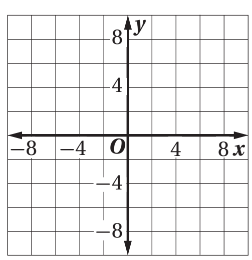
تمارين:

عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$ ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه:

(1 $g(x) = 0.5\,|x + 4|$



(2 $g(x) = 2x^2 - 4$



1-5 تدريبات حل المسألة

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

1) **مساحة:** إذا كان العرض w لقطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ثابتة مقدارها A فإنه يُعبر عن العرض بالعلاقة: $w(x) = \frac{A}{x}$، حيث x طول المستطيل.

a) إذا كانت مساحة قطعة الأرض 1000 قدم مربعة، فصف التحويلات التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة $f(x) = \frac{1}{x}$ للحصول على منحنى الدالة $w(x)$.

b) اكتب دالة بدلالة الطول يمكن استعمالها لإيجاد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها معطاة.

c) هل الدالة التي حصلت عليها في b تحويل للدالة $f(x)$؟ وضِّح إجابتك.

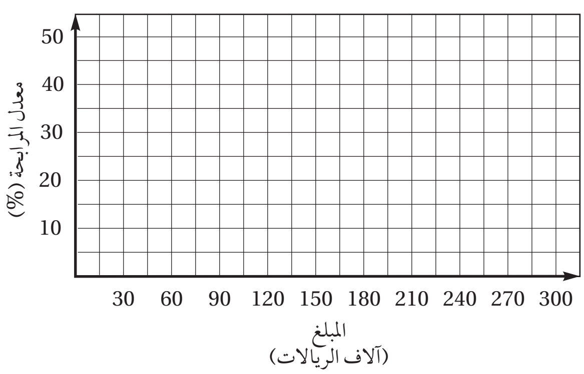
d) أوجد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها 1000 قدم مربعة.

2) **جولف:** إذا كان مسار كرة الجولف مُعطى بالقاعدة $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$، حيث $h(x)$ ارتفاع الكرة بالياردات عن سطح الأرض، وx المسافة الأفقية بين الكرة ونقطة انطلاقها بالياردات.

فصف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.

3) **مرابحة:** مثّل معدلات المرابحة على المبالغ المبينة في الجدول الآتي باستعمال الدالة الدرجية.

معدلات المرابحة	
حدود المبلغ (ريال)	معدل المرابحة (%)
من 0 إلى 41200	15
من 41201 إلى 99600	28
من 99601 إلى 151750	31
من 151751 إلى 271050	36
أكثر من 271051	39.6



4) **أُفق:** يمكن استعمال الدالة $f(x) = \sqrt{1.5x}$ لتقدير مسافة الرؤية الأفقية أو مقدار المسافة التي يمكن لشخص الرؤية ضمنها في يوم صافٍ، حيث $f(x)$ المسافة بالأميال، وx ارتفاع الشخص بالأقدام.

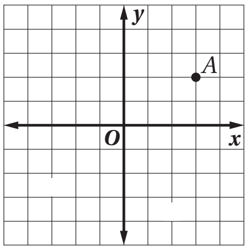
a) قارن بين منحنى $f(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

b) تستعمل الدالة $g(x) = 1.2\sqrt{x}$ كذلك لتقدير مسافة الرؤية الأفقية. قارن بين منحنى $g(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

1-5 التدريبات الإثرائية

الدوران

الدوران: تحويل هندسي يدوّر المنحنى حول نقطة بزاوية معينة، وقد يكون باتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. في هذا النشاط اعتبر الدوران حول نقطة الأصل وعكس اتجاه عقارب الساعة. ولتدوير نقطة بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل استعمل القاعدة $(x, y) \rightarrow (-y, x)$.



1) مثّل صورة النقطة A بعد دورانها بزاوية $90°$ مستعملًا القاعدة، وسمّ الصورة A'، ثمّ أوجد إحداثيات A'.

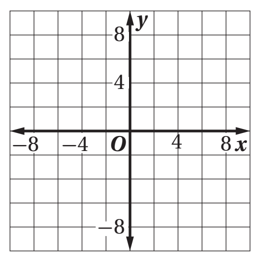
2) مثّل صورة النقطة A' بعد دورانها بزاوية $90°$، وسمّ الصورة A''. ثمّ أوجد إحداثيات A''، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية $180°$.

3) مثّل صورة A'' بعد دورانها بزاوية $90°$، وسم الصورة A'''. ثمّ اكتب إحداثيات A'''، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية $270°$.

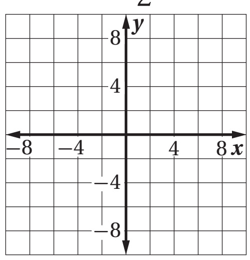
لتدوير دالة، يمكنك رسم صور عدة نقاط ثم التوصيل بينها.

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية $90°$:

4) $f(x) = x^3 - 2$

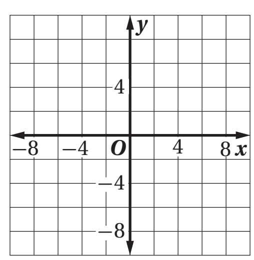


5) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

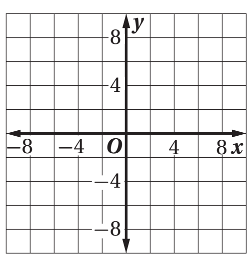


مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية $270°$:

6) $f(x) = |x^3 + 2x - 4|$



7) $f(x) = \sqrt{-x - 4}$



8) إذا دوّرنا منحنى الدالة $f(x) = 2x - 3$ بزاوية $90°$، فما الدالة التي تمثّل منحنى الدالة بعد تدويرها؟

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1-6 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

العمليات على الدوال يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على دالتين لتكوين دالة جديدة. ويكون مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالي الدالتين عدا القيم التي تجعل المقام صفرًا.

مثال 1

إذا كانت $f(x) = x^2 - x - 6$ و $g(x) = x + 2$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 - x - 6 + x + 2$$
$$= x^2 - 4$$

مجال كل من g ، f هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f+g)$ هو $(-\infty, \infty)$.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$
$$= \frac{(x-3)(x+2)}{x+2} = x - 3$$

مجال كل من f و g هو $(-\infty, \infty)$، لكن $x = -2$ تجعل مقام الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ صفرًا، لذا فإن مجالها هو $\{x \mid x \neq -2, x \in \mathbf{R}\}$.

مثال 2

إذا كانت $f(x) = x^2 - 3 , g(x) = \frac{1}{x}$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - 3 - \frac{1}{x}$$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال g هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ؛ لذا فإن مجال $(f-g)$ هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) $(f \cdot g)(x)$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x^2 - 3)\frac{1}{x}$$
$$= x - \frac{3}{x}$$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$، ومجالg هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ؛ لذا فإن مجال $(f.g)$ هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

تمارين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، حيث $f(x)$ و $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وحدِّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \frac{2}{x}$

2) $f(x) = x^2 + 4x - 7, g(x) = \sqrt{x}$

1-6 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تركيب الدوال نستعمل قيمة إحدى الدالتين في **تركيب الدوال** لإيجاد قيمة الدالة الثانية عند تلك القيمة. إذا أُعطيت الدالتان f و g، فإنه يمكن تعريف تركيب الدالتين $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = f[g(x)]$. ويتضمن مجال $f \circ g$ كل قيم x من مجال الدالة g التي تكون عندها قيم $g(x)$ في مجال f.

مثال إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = 4x + 2$، فأوجد $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف تركيب دالتين

$= f(4x + 2)$ ضع $4x + 2$ مكان $g(x)$

$= 3(4x + 2)^2 + 2(4x + 2) - 1$ ضع $4x + 2$ مكان x في $f(x)$

$= 3(16x^2 + 16x + 4) + 8x + 4 - 1$ بسِّط

$= 48x^2 + 56x + 15$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ تعريف تركيب دالتين

$= g(3x^2 + 2x - 1)$ ضع $3x^2 + 2x - 1$ مكان $f(x)$

$= 4(3x^2 + 2x - 1) + 2$ ضع $3x^2 + 2x - 1$ مكان x في $g(x)$

$= 12x^2 + 8x - 2$ بسِّط

تمارين

أوجد قيمة: $[f \circ g](4)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

1) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 2x - 4$

2) $f(x) = 3x^2 - 4, g(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = x^3, g(x) = 5x$

4) $f(x) = 4x - 2, g(x) = \sqrt{x + 3}$

5) $f(x) = 3x - 5, g(x) = x^2 + 1$

6) $f(x) = \frac{1}{x - 1}, g(x) = x^2 - 1$

7) $f(x) = 2x - 3, g(x) = \frac{1}{x - 2}$

8) $f(x) = x - 8, g(x) = x + 4$

1-6 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1) **عرض رياضي:** تشكل مجموعة من الطلاب دائرة طول نصف قطرها r. عند سماع إشارة البدء، يبدأ الطلاب بالرجوع إلى الخلف، ويُعبَّر عن طول نصف قطر الدائرة بالأقدام بالمعادلة $f(t) = 2.5t$، حيث t الزمن بالثواني من إشارة البدء. أوجد دالة التركيب التي تُعبِّر عن مساحة الدائرة بعد t ثانية مستعملًا صيغة مساحة الدائرة $g(r) = \pi r^2$ ، ثم أوجد المساحة إلى أقرب جزء من مئة بعد 4 ثوانٍ.

2) **شموع:** يقوم شخص بصناعة شموع وبيعها في السوق المحلي. فإذا كانت الدالة $c(h) = 4h$ تُعبِّر عن عدد الشموع التي يصنعها بعد h من الساعات، وتُعبِّر الدالة $f(c) = 12 + 0.25c$ عن تكاليف صنع c شمعة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة التركيب التي تعبِّر عن تكاليف صناعة الشمع بعد h ساعة.

b) إذا انخفضت تكاليف إنتاج c من الشموع بمقدار 10%، فاكتب دالة التخفيض بعد التكاليف $s(x)$، ثم اكتب دالة تركيب تعبِّر عن تكاليف الإنتاج بعد h ساعة خلال فترة تخفيض تكاليف الإنتاج.

3) **علوم:** إذا كانت الدالة $t(x) = \frac{\sqrt{2x}}{28} + 6.25$ تعبِّر عن درجة الحرارة السيليزية لسائل في كأس كبيرة بعد x من الثواني، فأوجد دالتين s, r بحيث يكون $t(x) = [S \circ r]$، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $\mathrm{I}(x) = x$

4) **رحلة:** يضع شخصان ميزانية لرحلة مشتركة يرغبان في القيام بها، تكلفة الرحلة بالريالات للشخص الأول يُعبَّر عنها بالدالة $f(x) = 45x + 350$. وللشخص الثاني بالدالة $g(x) = 60x + 475$، حيث x عدد أيام الرحلة.

a) أوجد الدالة $(f + g)(x)$، وحدِّد مجالها.

b) ماذا يعني جمع الدالتين في a ؟

c) أوجد $(f + g)(7)$ ، وبيِّن معنى الإجابة.

d) أعد الخطوات $a–c$ للدالة $(g - f)(x)$.

1-6 التدريبات الإثرائية

تطبيقات على تركيب الدوال

تطبيقات على تركيب الدوال: يمكن إيجاد دالة بمتغير واحد تمثِّل مساحة المربع، إذ يُعبر عن مساحة المربع A بعلاقة صريحة مع طول ضلعه s على الصورة : $A = f(s) = s^2$. وعادة ما تمثل الكميات الفيزيائية بدوال بعدة متغيرات، وقد يكون كل منها دالة بعدة متغيرات أخرى إضافية. فمثلًا المسافة التي تقطعها سيارة بكمية محددة من الوقود تعتمد على كتلتها، ونوع الوقود المستعمَل، ونظافة المحرك وعوامل أخرى، وكل منها يعتمد عل متغيرات أخرى إضافية. إن إيجاد قيمة كمية معينة عند قيم محددة للمتغيرات يكون أسهل بإيجاد دالة واحدة تتكون من تركيب هذه الدوال جميعها، ثم التعويض بدلًا من المتغيرات.

إن التردد f لبندول الساعة هو عدد الاهتزازات (الأرجحات) الكاملة (p) التي يتحركها البندول في 60 ثانية.
ويكون الزمن اللازم لإتمام دورة واحدة: $f(p) = \frac{60}{p}$، وعندها تكون f دالة اهتزازة البندول بدلالة p، ومن ناحية أخرى، فإن اهتزازة البندول دالة مع طوله L بالسنتمترات: $p(L) = 0.2\sqrt{L}$.

وأخيرًا طول البندول L دالة بدلالة طوله ℓ عند درجة حرارة $0°$ سيليزية. إن العلاقة بين طول البندول L ومعامل التمدد للمادة e ودرجة الحرارة C وطوله في $0°$ سيليزية يُعبّر عنه بالقاعدة: $L(\ell, C, e) = \ell(1 + eC)$.

1) **a)** عبّر عن دالة تردد البندول $f(p(L(\ell, C, e)))$ جبريًّا بدلالة طوله بالسنتمترات عند درجة $0°$ سيليزية، حيث $e = 0.00002$.

b) أوجد التردد إلى أقرب جزء من عشرة لبندول من النحاس عند درجة حرارة $300°$ سيلزية إذا كان طول البندول 15 سم عند درجة $0°$ سيليزية .

2) يُعبر عن الحجم V لبالون أرصاد كروي طول نصف قطره r بالقاعدة $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. إذا مُلئ البالون بالهواء على أن يـزداد طـول نصف قطره بمعدل ثابـت $r(t) = \frac{1}{2}t + 2$، حيث r بالأمتار، t عدد الثـواني من بدء ملئه بالهواء، فأجب عما يأتي:

a) أوجد $V(r(t))$.

b) أوجد الحجم بعد 10 ثوانٍ من بدء ملئه بالهواء، معتبرًا $\pi = 3.14$.

1-7 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

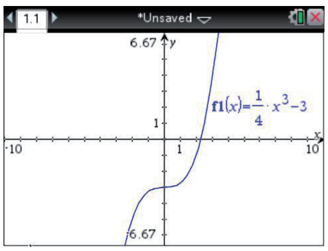
الدوال العكسية والدوال المتباينة تكون كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحداهما فإن الزوج المرتب (a, b) يكون موجودًا في الأخرى.

ويُرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز $f^{-1}(x)$.

يوجد للدالة دالة عكسية إذا وفقط إذا قطع أي مستقيم أفقي منحنى الدالة في نقطة واحدة على الأكثر، وهذا يُعرف **باختبار الخط الأفقي**. وإذا حقَّقت الدالة اختبار الخط الأفقي، فتكون دالة **متباينة**؛ لأن x ترتبط بقيمة واحدة فقط من y.

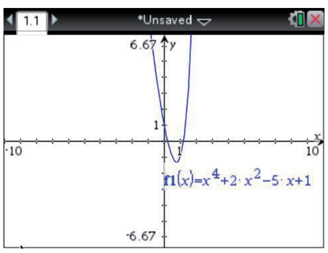
مثال

مثّل كل دالة من الدالتين الآتيتين بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـِ «نعم» أو «لا».



a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3$

نعم، يوجد دالة عكسية؛ لأنه ليس بالإمكان إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة واحدة، وعليه فإن $f^{-1}(x)$ موجودة.



b) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5x + 1$

لا، لا يوجد دالة عكسية؛ لأنه يمكن إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة، وعليه فإن $g^{-1}(x)$ غير موجودة.

تمارين

مثّل منحنى كل دالة من الدوال الآتية مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـِ «نعم» أو «لا»:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = x^2 - 5$

3) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 6x - 4$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

5) $f(x) = -x^3 + 6$

6) $f(x) = -x^3 + 2x$

1-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدوال العكسية لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: استعمل اختبار الخط الأفقي للتأكد من وجود دالة عكسية.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل بين الرمزين x و y.

الخطوة 3: حُلَّ بالنسبة إلى y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

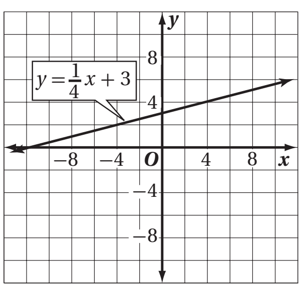
الخطوة 4: ضع قيودًا على المجال إن وجدت.

يمكنك التحقق من صحة حلك بإثبات أن $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$، بمعنى آخر، أن يعطي التركيب الناتج عن الدالة وعكسها الدالة المحايدة دائمًا.

إذا أُعطيت منحنى دالة، فإنه يمكنك تمثيل دالتها العكسية بيانيًّا بتحديد نقاط على منحنى $f(x)$، ثم تحديد صورها بالانعكاس حول المحور $y = x$. غيّر موقعي الإحداثيين x ، y ، ثم صل النقاط بمستقيم أو منحنى أملس.

مثال **تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ موجودة، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها.**

الخطوة 1: من التمثيل البياني تحقق الدالة اختبار الخط الأفقي، لذا يوجد دالة عكسية لها.



الخطوة 2: $y = \frac{1}{4}x + 3$ ضع y مكان $f(x)$.

$x = \frac{1}{4}y + 3$ بدِّل بين x , y.

الخطوة 3: $4x = y + 12$ حُلَّ بالنسبة إلى y.

$y = 4x - 12$

$f^{-1}(x) = 4x - 12$ ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

الخطوة 4: لا يوجد قيود على المجال.

تمارين

تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة f موجودة في كل مما يأتي، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها، وضع أي قيود على مجالها:

1) $f(x) = 2x - 4$

2) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

3) $f(x) = \frac{5}{x - 2}$

4) $f(x) = x^3 + 4$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-7 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال العكسية

1) كهربائي: إذا كان المبلغ الذي يتقاضاه كهربائي يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = 60 + 55x$، حيث x عدد ساعات العمل.

a) أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة.

b) ماذا يمثّل x في الدالة العكسية؟

c) إذا تقاضى الكهربائي 225 ريالًا، فكم ساعة عَمِل؟

2) توفير: يوفر عبد الله 15% من دخله الشهري مضافًا إليه 200 ريالٍ.

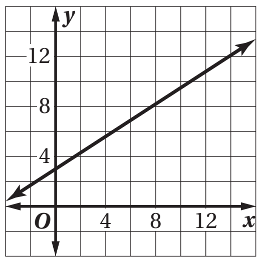
a) أوجد الدالة التي تُعبّر عن المبلغ الشهري الذي يوفِّره عبد الله، حيث x دخله الشهري.

b) أوجد الدالة العكسية للدالة f.

c) تحقق من أن كلًّا من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى.

3) بندول: إذا كان الوقت بالثواني الذي يستغرقه بندول لإتمام اهتزازة واحدة ذهابًا وإيابًا يُعبّر عنه بالدالة $f(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}\ , x \geq 0$، حيث x طول البندول بالأمتار، فأوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.

4) تخفيضات: يبيِّن التمثيل البياني الآتي معدل تكلفة شحن بضاعة في موسم التخفيضات. استعمل التمثيل البياني للدالة لتمثيل الدالة العكسية.



5) كرة سلة: يُعبّر عن مساحة سطح كرة طول نصف قطرها x بالدالة $f(x) = 4\pi x^2$.

a) ما مجال هذه الدالة؟

b) أوجد الدالة العكسية لهذه الدالة موضحًا ماذا يمثِّل كلّ من المتغيرين فيها.

c) إذا كانت مساحة سطح كرة سلة 278 بوصة مربعة، فأوجد طول نصف قطرها مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

6) أجور: يتقاضى موقف للسيارات أجرة مقدارها 4.50 ريالات عن كل ساعة أو جزء منها، حيث تمثّل الدالة f تكلفة الوقوف x من الساعات في هذا الموقف $f(x) = \begin{cases} 4.5[x]\ , [x] = x \\ 4.5[x+1]\ , [x] < x \end{cases}$، فهل يوجد دالة عكسية لهذه الدالة؟ وضِّح إجابتك.

1-7 التدريبات الإثرائية

الانعكاس في لعبة الحروف

الانعكاس في لعبة الحروف: حل هذا اللغز، املأ الفراغ أمام كل إرشاد، علمًا بأن عدد حروف الإجابة الصحيحة مساويًا عدد الأعداد الموجودة إلى يسار الإرشاد. ثم املأ الجدول بالحروف المناسبة لحل اللغز، ومعرفة الجملة التي تحصل عليها، واستعمل القاموس لمساعدتك على حل الإرشادات.

ضع الحرف (الحروف) أو الكلمات الآتية في الفراغ المخصص، ثم انقلها إلى الجدول عند الأعداد المحددة.

HALF ONE LEFT VE

ISE RATIO WHEN STRAIGHT

الإرشادات:

1) إذا كان العنصر (e, v) ينتمي إلى علاقةٍ ما، فإن العلاقة العكسية تتضمن (__ , __). — 17 28

2) نجد الدالة العكسية للدالة $2x$ بحساب__ قيمة x. — 2 29 6 27

3) الحرف الأول والحرفان الأخيران من مدلول الرمز f^{-1} باللغة الإنجليزية__. — 31 33 14

4) ناتج ضرب عدد في معكوسه الضربي. — 20 11 34

5) النسبة بين عددين تُسمى __. — 24 16 19 10 4

6) لحل معادلة مصفوفية على الصورة $AX = B$، اضرب كل طرف من طرفي المعادلة من جهة __ في النظير الضربي للمصفوفة A. — 35 3 21 8

7) يتناسب متغيران تناسبًا عكسيًا __ يكون ناتج ضربهما ثابتًا. — 13 9 22 5

8) شكل التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الخطية هو __. — 26 32 30 23 25 12 15 1

■	1	2	3	■	4	5	6	7 Y	■	8	9	10	11	12	■
13	14	■	15	16	17	18 E	■	19	20	■	21	22	23	24	
■	25	26	■	27	28	29	30	■	31	32	33	34	35	36 F	■

ملحق الإجابات

1-1 تدريبات إعادة التعليم

الدّوال

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية على مجموعة الأعداد النسبية **Q**، وغير النسبية **I**، والأعداد الصحيحة **Z**، والأعداد الكلية **W**، والأعداد الطبيعية **N**.

الصفة المميزة للمجموعة هي إحدى طرق وصف المجموعة، وفيها نختار متغيرًا ونكتب خصائصه، ونبيّن إلى أي مجموعة ينتمي.

والفترة طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة، وفيها نستعمل أقواسًا مغلقة إذا كانت أطراف الفترة تنتمي إلى المجموعة، وأقواسًا مفتوحة إذا كانت أطراف الفترة لا تنتمي إليها. ونستعمل ∞ للتعبير عن اللانهاية الموجبة، و$-\infty$ للتعبير عن اللانهاية السالبة.

مثال اكتب المجموعة $x > 18$ باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة.

تتضمن المجموعة كلّ الأعداد التي هي أكبر من 18.

الصفة المميزة: $\{x \mid x > 18, x \in \mathbf{R}\}$

الخط العمودي | يعني "حيث"، والرمز $\in$ يعني ينتمي إلى، وتقرأ العبارة: مجموعة الأعداد x حيث x أكبر من 18 و x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

رمز الفترة: $(18, \infty)$

استعملنا الأقواس المفتوحة؛ لأن 18 ليس عنصرًا في المجموعة، و ∞ للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

تمارين

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{17, 18, 19, 20, \ldots\}$

$\{x \mid x \geq 17, x \in \mathbf{N}\}$

2) $x \leq -2$

$\{x \mid x \leq -2, x \in \mathbf{R}\}; (-\infty, -2]$

3) $x > -8.8$

$\{x \mid x > -8.8, x \in \mathbf{R}\}; (-8.8, \infty)$

4) $5 < x < 15$

$\{x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbf{R}\}; (5, 15)$

5) $x < -11$ أو $x \geq 1$

$\{x \mid x < -11$ أو $x \geq 1, x \in \mathbf{R}\};$
$(-\infty, -11) \cup [1, \infty)$

6) $\{\ldots, -10, -9, -8, -7\}$

$\{x \mid x \leq -7, x \in \mathbf{Z}\}$

1-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدّوال

تمييز الدّوال العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر من مجموعة مثل B. وتحتوي المجموعة A على المدخلات أو عناصر **المجال**، في حين تحتوي المجموعة B على المخرجات أو عناصر **المدى**. **والدالة f** من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر واحد فقط y من B. ولإيجاد قيمة الدالة عند نقطة a في مجالها، ضع a مكان المتغير المستقل، ثم أوجد الناتج.

مثال 1 أوجد قيمة كلّ من الدالتين الآتيتين:

a) **إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$، فأوجد $f(-2)$**

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$ الدالة الأصلية

$f(-2) = 4(-2)^3 + 6(-2)^2 + 3(-2)$ عوض -2 مكان x

$= -32 + 24 - 6 = -14$ بسِّط

b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, x \leq 4 \\ 3x, 4 < x < 10 \\ 2x^2 - 15, x \geq 10 \end{cases}$، **فأوجد $g(6)$ و $g(10)$**

بما أن 6 واقعة بين 4 و 10، فإننا نستعمل القاعدة $g(x) = 3x$، لذا $g(6) = 3(6) = 18$

وبما أن 10 تنتمي إلى المجموعة $x \geq 10$، فإن $g(10) = 2(10)^2 - 15 = 185$

مثال 2 حدِّد مجال الدالة $f(x) = \dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$

إذا كان مقام العبارة $\dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$ يساوي صفرًا، فإنها غير معرفة. وبحلّ المعادلة $x^2 - 6x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال وهي $x = 0$، و $x = 6$. أي أن المجال هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 6, x \in \mathbf{R}\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, \infty)$

تمارين

أوجد قيمة كلّ دالة مما يأتي:

1) إذا كانت $f(x) = 5x^2 - 4x - 6$، فأوجد قيمة $f(3)$.

27

2) إذا كانت $h(x) = 9x^9 - 4x^4 + 3x - 2$، فأوجد قيمة $h(t)$.

$9t^9 - 4t^4 + 3t - 2$

3) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} x + 45, & x \leq -1 \\ 81 - x, & x > -1 \end{cases}$، فأوجد $g(-5)$، $g(36)$.

45, 40

4) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & x < 3 \\ 2x + 10, & 3 \leq x < 8 \\ 42, & x \geq 8 \end{cases}$، فأوجد قيم $f(3)$، $f(8.5)$.

42; 16

1-1 تدريبات حل المسألة

الدّوال

1) **مناخ:** يبيِّن الجدول الآتي متوسط درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجَّلة في إحدى المدن.

درجات الحرارة العظمى والصغرى (°F)		
الشهر	العظمى	الصغرى
يناير	91	84
مارس	100	84
مايو	108	95
يونيو	117	97
أكتوبر	106	95
ديسمبر	93	86

a) اكتب العلاقة على صورة أزواج مرتبة.
$\{(91,84),(100,84),(108,95),(117,97),(106,95),(93,86)\}$

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.
المجال: $\{91,100,108,117,106,93\}$
المدى: $\{84,95,97,86\}$

c) حدِّد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. **نعم**

2) **غزلان:** تمثِّل الدالة الآتية أعداد الغزلان خلال 5 سنوات $f(d) = -3d^4 + 43d^3 - 185d^2 + 350d - 59$ أوجد قيمة كل من $f(3)$ و $f(5)$، اللتين تمثّلان أعداد الغزلان في السنتين الثالثة والخامسة.
244 غزالًا؛ 566 غزالًا

3) **خدمات:** يتقاضى مطعم 15% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، إذا كانت تكلفتها أقلّ من 50 ريالًا. ويتقاضى 18% من تكلفة الوجبة إذا كانت تكلفتها 50 ريالًا وأقل من 100 ريال. و 20% إذا كانت تكلفتها 100 ريال أو أكثر، اكتب دالة متعددة التعريف تصف التكلفة الكلية التي على أحد زبائن المطعم دفعها بدلالة وجبة كلفتها c.

$$t(c) = \begin{cases} \mathbf{1.15c,\ 0 < c < 50} \\ \mathbf{1.18c,\ 50 \le c < 100} \\ \mathbf{1.2c,\ c \ge 100} \end{cases}$$

4) **شحن:** يبيِّن الجدول الآتي تكلفة توصيل بضاعة، وتعتمد الأجرة على الثمن الإجمالي للمشتريات.

الثمن الإجمالي (ريال)	تكلفة التوصيل (ريال)
0 ولغاية 300	8
أكثر من 300 ولغاية 600	15
أكثر من 600 ولغاية 1000	20
أكثر من 1000	مجانًا

a) اكتب دالة متعددة التعريف تصف أجرة التوصيل c بدلالة الثمن الإجمالي للمشتريات t.

$$c(t) = \begin{cases} \mathbf{8\ ,\ 0 \le t \le 300} \\ \mathbf{15\ ,\ 300 < t \le 600} \\ \mathbf{20\ ,\ 600 < t \le 1000} \\ \mathbf{0\ ,\ t > 1000} \end{cases}$$

b) اكتب مجال الدالة ومداها.
المدى: $\{0, 8, 15, 20\}$، المجال: $[0, \infty)$

5) **مصعد:** بدأ مصعد فيه 12 شخصًا، بالهبوط من الدور الثامن، وكان ينزل عند كل دور شخص واحد، فإذا كان للعمارة دوران تحت مستوى الأرض و 8 أدوار فوق المستوى. ويُعبِّر عن عدد الأشخاص المتبقي في المصعد بـ $f(\ell) = \ell + 4$ حيث ℓ رقم الدور، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب مجالًا مناسبًا باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.
المجال: $\{\ell \mid -2 \le \ell \le 8, \ell \in Z\}$

b) اكتب مدى الدالة.
المدى: $\{2,3,4,5,...,12\}$

1-1 التدريبات الإثرائية

معدل التغير

معدل التغير: تتغير الدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$، بمقدار $f(b) - f(a)$. ويُعَرّف متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ بالمقدار $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

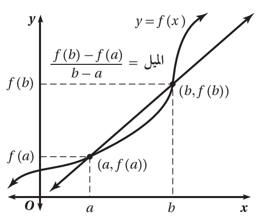
أوجد التغير ومتوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين القيمتين المعطاتين في كل من السؤالين الآتيين:

1) $f(x) = 3x - 4$ من $x = 3$ إلى $x = 8$

التغير: 15، متوسط معدل التغير: 3

2) $f(x) = x^2 + 6x - 10$، من $x = 2$ إلى $x = 4$

التغير: 24، متوسط معدل التغير: 12



متوسط معدل التغير بين $x = a$ و $x = b$ يمثِّل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a, f(a))$، $(b, f(b))$ على منحنى الدالة f كما هو مبين في الشكل المجاور.

3) أيهما أكبر: متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ بين 0 و 1 أم بين 4 و 5؟

متوسط معدل التغير بين 4 و 5 هو الأكبر.

4) أيّ الدّوال الآتية $f(x) = x\ ; g(x) = x^2; h(x) = x^3$ لها أكبر متوسط معدل تغير بين 2 و 3؟

$h(x)$

5) أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ في كل فترة من الفترات الآتية:

a) $a = 1$ إلى $b = 1.1$ **2.1**

b) $a = 1$ إلى $b = 1.01$ **2.01**

c) $a = 1$ إلى $b = 1.001$ **2.001**

d) ما القيمة التي يقترب منها متوسط معدل التغير عندما تقترب قيمة b من 1؟ **2**

تُسمى القيمة التي أوجدتها في التمرين **5d** معدل التغير اللحظي للدالة، وله أهمية كبيرة في علم التفاضل والتكامل.

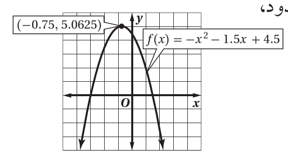
6) أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = 3x^2$ عندما تقترب x من 3. **18**

1-2 تدريبات إعادة التعليم

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال إذا نظرت إلى منحنى الدالة، فإنه يمكنك تحديد مجالها ومداها، وتقدير المقطعين x, y.
تسمى المقاطع x لمنحنى دالة بأصفار هذه الدالة؛ لأن قيمة الدالة عند كلّ منها تساوي صفرًا.

مثال **استعمل التمثيل البياني للدالة f لإيجاد مجالها ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.**



يدل السهمان اللذان على المنحنى على استمراريته من اليسار ومن اليمين دون حدود،
لذا فإن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

لا تزيد قيم الدالة على 5.0625 أو $f(-0.75)$، لذا فإن مداها هو
مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي 5.0625

أي أنَّ المدى: $\{y \mid y \leq 5.0625, y \in \mathbf{R}\}$

التقدير من التمثيل البياني: المقطع y هو الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المنحنى المحور y، ويُقدَّر بـ 4.5، وبالمثل فإن المقطعين x للدالة أو صفري الدالة هما الإحداثيان x للنقطتين اللتين يقطع المنحنى عندهما المحور x، ويبدو أنهما عند 3− و 1.5

الحل جبريًّا: لإيجاد المقطع y جبريًّا، أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = -(0)^2 - 1.5(0) + 4.5 = 4.5$$

ولإيجاد أصفار الدالة جبريًّا ضع $f(x) = 0$، ثم حلّ المعادلة بالنسبة إلى x

$$-x^2 - 1.5x + 4.5 = 0$$

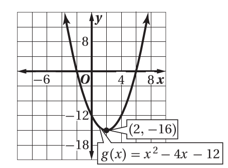
$$-1(x + 3)(x - 1.5) = 0$$

$$x = 1.5 \text{ أو } x = -3$$

تمارين

استعمل التمثيل البياني للدالة g لإيجاد مجال الدالة ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها ، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.

1)



المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

المدى: $\{y \mid y \geq -16, y \in \mathbf{R}\}$

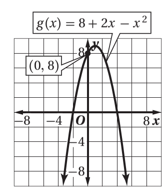
المقطع y: -12

الصفران: $-2, 6$

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6);$$

$$x = 6 \text{ أو } x = -2$$

2)



المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

المدى: $\{y \mid y \leq 9, y \in \mathbf{R}\}$

المقطع y: 8

الصفران: $-2, 4$

$$8 + 2x - x^2 = -(x + 2)(x - 4);$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 4$$

1-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

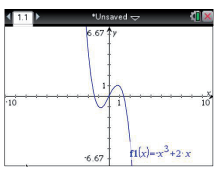
تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تماثل المنحنيات يوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول المحور x أو المحور y **محور تماثل**. ويوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول نقطة الأصل **نقطة تماثل**.

متماثل بالنسبة إلى...	الوصف	الاختبار الجبري
المحور x	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
المحور y	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
نقطة الأصل	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x، و $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.

تسمى الدّوال المتماثلة حول المحور y دوالَّ **زوجية**، وفيها يكون $f(-x) = f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة. وتسمى الدّوال المتماثلة حول نقطة الأصل دوالَّ **فردية**، وفيها يكون $f(-x) = -f(x)$.

مثال **استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = -x^3 + 2x$ بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.**



يتضح من التمثيل أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

التحقق جبريًّا: $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -f(x)$

إذن فالدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

تمارين

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلّ دالة من الدّوال الآتية، ثم حلّل منحناها؛ لتحدد ما إذا كانت زوجية أو فردية أو غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

1) $f(x) = 4x^3 + 1$

ليست فردية وليست زوجية؛ لأن
$$4(-x)^3 + 1 = -4x^3 + 1$$

2) $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

زوجية؛ لأن $(-x)^4 - 10(-x)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9$

متماثلة حول المحور y.

3) $g(x) = \frac{5}{x^4}$

زوجية؛ لأن $\frac{5}{(-x)^4} = \frac{5}{x^4}$

متماثلة حول المحور y.

4) $g(x) = x^3 - 6x$

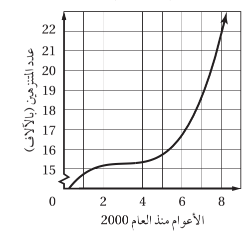
فردية؛ لأن $(-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x$

متماثلة حول نقطة الأصل.

1-2 تدريبات حل المسألة

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

1) **متنـزه:** إذا كان العدد السنوي للمتنزّهين في أحد المتنزّهات من عام 2000 إلى عام 2008 يُعبّر عنه بالمعادلة $v(x) = 0.05x^3 - 0.51x^2 + 1.81x + 13.35$، حيث x عدد الأعوام منذ عام 2000.

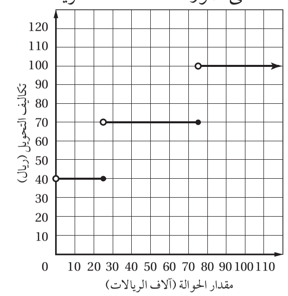


a) اعتمادًا على التمثيل البياني، قدّر عدد المتنزّهين عام 2006. **16700**

b) أوجد العدد التقريبي للمتنزّهين عام 2006 جبريًّا. **16650**

c) في أي عام زاد عدد المتنزّهين على 20000 أول مرة؟ **2008**

2) **حوالات:** يبيّن الشكل الآتي تكاليف الحوالات النقدية والمعطاة على صورة دالة متعددة التعريف.

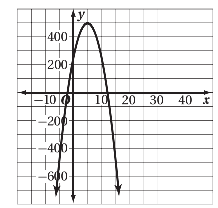


a) اكتب مجال الدالة ومداها.

المجال: $(0, \infty)$، المدى: $\{40, 70, 100\}$

b) قدّر تكاليف تحويل 245 ألف ريال بالاعتماد على التمثيل البياني أعلاه. **100 ريال**

3) **صناعة:** أُطلق نموذج صاروخ وتمثّل الدالة: $y = -10x^2 + 100x + 250$ العلاقة بين ارتفاع الصاروخ عن الأرض (y) بالأقدام بعد (x) ثانية.



a) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

250 قدمًا

b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

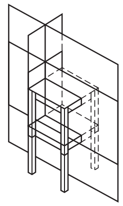
700 قدم

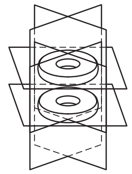
1-2 التدريبات الإثرائية

تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد

تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد: يوجد تماثل للأجسام الثلاثية الأبعاد كما هو الحال في الأشكال الثنائية الأبعاد.

إذا قطع مستوى مجسمًا، وكان كل من جزأي المجسم صورة مرآة للجزء الآخر، فإن المستوى يُسمى مستوى تماثل للمجسم. وقد يكون للمجسم عددٌ منتهٍ، أو غيرُ منتهٍ من مستويات التماثل. ففي الشكل المجاور، يوجد للكرسي مستوى تماثل واحد، في حين يوجد لقطعة الحلوى عدد غير منتهٍ من مستويات التماثل رُسِمَ ثلاثة منها.





حدّد عدد مستويات التماثل لكل مجسم مما يأتي، ثم صفها.

1) طوبة على شكل متوازي مستطيلات.

ثلاثة مستويات تماثل تمر بالمركز، وكل مستوى منها يوازي وجهين متقابلين.

2) كرة تنس.

عدد لا نهائي من المستويات يمر كل منها بمركز الكرة.

3) علبة عصير أسطوانية الشكل.

عدد لا نهائي من المستويات تمر بالمحور المركزي، بالإضافة إلى مستوى يمر بمنتصف المحور، ويصنع معه زاوية قائمة.

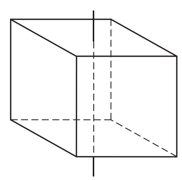
4) هرم قاعدته مربع.

4 مستويات تمر جميعها بالرأس العلوي؛ مستويان كل منهما يوازي حرفين متقابلين من القاعدة، والمستويان الآخران يمران بقطري القاعدة.

5) مكعب.

9 مستويات: 3 مستويات كل منها يوازي وجهين متقابلين، وأما المستويات الستة الباقية فيمر كل منها بزوج من الأحرف المتقابلة.

يوجد كذلك تماثل دوراني للمجسمات. فمثلًا في الشكل المجاور، المحور المرسوم خلال المكعب يمثّل محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة؛ لأنه يمكن تدوير المكعب حوله إلى أربعة أوضاع مختلفة متطابقة.



6) كم محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة للمكعب؟ استعمل مكعب الأرقام لتحدد محاور التماثل.

3؛ كل محور يمر بمركزي وجهين متقابلين.

1-3 تدريبات إعادة التعليم

الاتصال والنهايات

الاتصال تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقَّقت الشروط الآتية:

1) $f(x)$ معرفة عند c؛ أي أن $f(c)$ موجودة.

2) تقترب $f(x)$ من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي أنّ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.

3) القيمة التي تقترب منها $f(x)$ من جهتي c هي $f(c)$؛ أي أنّ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

ويكون للدّوال غير المتصلة ثلاثة أنواع من عدم الاتصال، وهي: عدم الاتصال اللانهائي، وعدم الاتصال القفزي، وعدم الاتصال القابل للإزالة.

مثال حدِّد ما إذا كانت كلّ من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال هل هو: لا نهائي أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

a) $f(x) = 2|x| + 3; x = 2$

(1) $f(2) = 7$، أي أن $f(2)$ موجودة.

(2) كوّن جدولًا يبيّن قيم $f(x)$ عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

x	$y=f(x)$
1.9	6.8
1.99	6.98
1.999	6.998

x	$y=f(x)$
2.1	7.2
2.01	7.02
2.001	7.002

يبيِّن الجدولان أن y تقترب من 7 عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

أي أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$.

(3)

$f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$؛ إذن الدالة متصلة عند $x = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}; x = 1$

الدالة غير معرفة عند $x = 1$؛ لأنها تجعل المقام صفرًا.

يبيِّن الجدولان أنه عندما تقترب قيم x من العدد 1 من اليسار، تتناقص قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون سالبة. وعندما تقترب قيم x من 1 من اليمين، تتزايد قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون موجبة.

x	$y=f(x)$
0.9	−9.5
0.99	−99.5
0.999	−999.5

x	$y=f(x)$
1.1	10.5
1.01	100.5
1.001	1000.5

وعليه، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$.

تمارين

حدِّد ما إذا كانت كلّ دالة من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيمة x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال، هل هو: لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

1) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 2 \\ x-1, & x \le 2 \end{cases}$ ؛ $x = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5,$

وعليه فإن الدالة غير متصلة، ولها نقطة عدم اتصال قفزي.

2) $f(x) = x^2 + 5x + 3; x = 4$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 39, \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 39, f(4) = 39$

وعليه فإن الدالة متصلة.

1-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الاتصال والنهايات

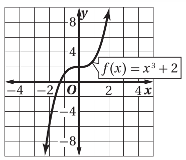
سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة يصف سلوك طرفي التمثيل البياني مسار المنحنى عند طرفيه، أو ماذا يحدث لقيم $f(x)$ عندما تتزايد أو تتناقص قيم x بلا حدود. ويمكنك استعمال مفهوم النهاية لوصف سلوك طرفي التمثيل.

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليسار (عندما تتناقص قيم x السالبة بلا حدود): $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليمين (عندما تتزايد قيم x الموجبة بلا حدود): $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

قد تؤول قيم $f(x)$ إلى سالب ما لانهاية أو موجب ما لا نهاية أو إلى قيمة محددة.

مثال استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 + 2$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمّ عزِّز إجابتك عدديًّا.



عندما تتناقص x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي سالب ما لا نهاية: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

عندما تتزايد قيم x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي موجب ما لانهاية: $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم $|x|$.

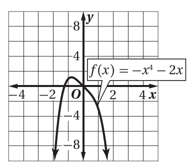
x	−1000	−100	−10	0	10	100	1000
$y=f(x)$	−999999998	−999998	−998	2	1002	1000002	1000000002

عندما $x \longrightarrow -\infty$، فإن $f(x) \longrightarrow -\infty$. وعندما $x \longrightarrow \infty$، فإن $f(x) \longrightarrow \infty$.

تمارين:

استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا:

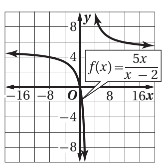
1)



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$

انظر أعمال الطلاب.

2)



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 5; \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 5$

انظر أعمال الطلاب.

الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-3 تدريبات حل المسألة

الاتصال والنهايات

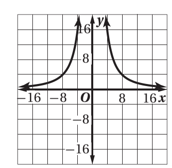
1) **إسكان:** إذا كانت نسبة الذين يملكون منازل في إحدى الدول يُعبر عنها بالقاعدة:
$h(x)=-0.0009x^4-0.09x^3+1.54x^2-4.12x+47.37$,
حيث x عدد العقود منذ 1900، فاستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $h(x)$ على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا، ثم صف سلوك طرفي تمثيلها البياني.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

2) **هندسة:** يُعبّر عن ارتفاع متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وحجمه 250 وحدة مكعبة بالقاعدة: $f(x) = \frac{250}{x^2}$، حيث x طول ضلع القاعدة.

a) تحقق إن كانت الدالة متصلة عند $x = 5$، وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.
نعم، الدالة متصلة عند $x = 5$؛ لأن $f(5) = 10$ وأن $\lim\limits_{x\to5} f(x)=10$.

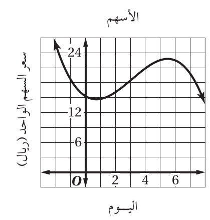
b) هل الدالة متصلة على $(-\infty, +\infty)$؟ برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت غير متصلة فوضِّح إجابتك، وحدِّد نوع عدم الاتصال، هل هو لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟
غير متصلة، عدم اتصال لا نهائي؛ لأن $f(0)$ غير معرفة، $f(x)$ غير متصلة عند $x = 0$.

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من إجابتك في الفرع b.



3) **رحلة:** إذا كانت تكلفة الشخص الواحد في رحلة جماعية يُعبَّر عنها بالقاعدة $f(x) = \frac{600}{x+25}$، حيث x عدد المشتركين، فمثّل الدالة على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم عيِّن نقاط عدم الاتصال وصفها بالاعتماد على التمثيل البياني.
عدم اتصال لا نهائي عند $x = -25$.

4) **أسهم:** إذا كان معدل سعر السهم الواحد لإحدى الشركات بعد x يوم من عرضها في السوق يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = -0.15x^3 + 1.4x^2 - 1.8x + 15.29$.



استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty; \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
انظر أعمال الطلاب.

الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-3 التدريبات الإثرائية

قراءة الرياضيات

اقرأ: يُستعمل التعريف الآتي للاتصال في كتب الرياضيات الجامعية. لاحظ أن المؤلف يبدأ بتوضيح رموز الفترات المختلفة. على الرغم من وجود عدد كبير من الرموز القياسية المتفق عليها عالميًّا، إلا أنه جرت العادة أن يوضح مؤلفو الكتب هذه الرموز التي يريدونها.

> في هذا الكتاب تسمى المجموعة S مجال الدالة، وعادة ما تكون فترة. وتحقق إحدى المتباينات الأربع الآتية: $a < x < b, a \le x < b, a < x \le b, a \le x \le b$. وفي هذه المتباينات يكون $a \le b$. وتكافئ هذه المتباينات الفترات $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$، على الترتيب.
> تسمى (a, b) فترة مفتوحة، والفترتان $[a, b)$ و $(a, b]$ نصف مفتوحة أو نصف مغلقة، وتسمى الفترة $[a, b]$ فترة مغلقة.
> على افتراض أن I فترة مفتوحة أو مغلقة أو نصف مفتوحة، إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على I وكانت x_0 نقطة في I، نقول: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند x_0 إذا أصبحت قيمة المقدار $|f(x) - f(x_0)|$ صغيرة جدًّا عندما $x \in I$ وتقترب x من x_0 .

استعمل التعريف أعلاه للإجابة عن الأسئلة الآتية:

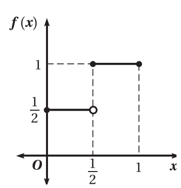
1) ماذا يحدث للمتباينات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟
يمكن أن تتحقق المتباينة $a \le x \le b$ فقط.

2) ماذا يحدث للفترات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟
تكون الفترة (a, b) هي $\varnothing$ ، والفترات الأخرى تمثل النقطة $a = b$.

3) ما المصطلح الرياضي المناسب الذي يجب وضعه في الفراغ لتصبح العبارة الآتية صحيحة؟ إذا كانت $f(x)$ غير ___؟___ عند x_0، فإنه يوجد للدالة نقطة عدم اتصال عند x_0.
متصلة

4) ما الرمز المستعمل للدلالة على أن العدد x موجود في الفترة I؟
$x \in I$

5) مثِّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



6) هل الدالة المعطاة في التمرين 5 متصلة على الفترة $[0, 1]$؟ وإذا كانت غير متصلة، فما نقاط عدم الاتصال؟
لا، الدالة غير متصلة عند $x = \frac{1}{2}$.

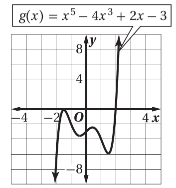
الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التزايد والتناقص قد تكون الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة على فترة معطاة. وتُسمى النقاط التي تتغير عندها الدالة من متزايدة إلى متناقصة أو العكس **نقاطًا حرجة**، وقد تكون النقطة الحرجة **صغرى محلية**، أو **صغرى مطلقة**، أو **عظمى محلية**، أو **عظمى مطلقة**. ويُستعمل المصطلح قيمة **قصوى** للدلالة على القيمة الصغرى أو العظمى.

مثال **قدّر قيم x التي يكون للدالة عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيّن نوعها بالاعتماد على التمثيل البياني للدالة $f(x)$، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًا.**



التحليل بيانيًا:

يظهر من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = -1.5$، وصغرى محلية مقدارها -3.5 عند $x = -0.5$، وعظمى محلية مقدارها -2.5 عند $x = 0.5$، وصغرى محلية مقدارها -6 عند $x = 1.5$. ويظهر كذلك أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا لـ x على جانبي قيمة x التي عندها قيمة صغرى أو عظمى على أن يكون الفرق بين كل عدد والذي يليه 0.5 وحدة، واختر قيمة كبيرة لـ x وأخرى صغيرة.

x	-100	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	100
$f(x)$	-1×10^{10}	-7	-0.09	-2	-3.5	-3	-2.47	-4	-5.91	1	$\approx1\times10^{10}$

لما كانت $f(-1.5) > f(-2)$ ، $f(-1.5) > f(-1)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(-2, -1)$ قريبة من -1.5.

ولما كانت $f(-0.5) < f(-1)$ ، $f(-0.5) < f(0)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(-1, 0)$ قريبة من -0.5.

ولما كانت $f(0.5) > f(0)$ ، $f(0.5) > f(1)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(0, 1)$ قريبة من 0.5.

ولما كانت $f(1.5) < f(1)$ ، $f(1.5) < f(2)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(1, 2)$ قريبة من 1.5.

وكذلك لما كانت $f(100) > f(-1.5)$، $f(-100) < f(1.5)$، $f(-100) < f(-0.5)$ فإن هذا يعزز تخميننا بأنه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

تمارين

الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل من الدالتين الآتيتين، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

1) $f(x) = 2x^6 + 2x^4 - 9x^2$

صغرى محلية مقدارها -5.03 عند $x = -0.97$؛ وعند $x = 0.97$ وعظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$

2) $f(x) = x^3 + 9x^2$

صغرى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$؛ وعظمى محلية مقدارها 108 عند $x = -6$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين. نسمي المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**.

متوسط معدل التغير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو ميل القاطع، m_{sec}.

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال **أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = 0.5x^3 + 2x$ في كل من الفترتين الآتيتين:**

a) $[-3, -1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)}$$ ضع -3 مكان x_1 و -1 مكان x_2

$$= \frac{[0.5(-1)^3 + 2(-1)] - [0.5(-3)^3 + 2(-3)]}{-1 - (-3)}$$ أوجد قيم $f(-3)$، $f(-1)$

$$= \frac{-2.5 - (-19.5)}{-1 - (-3)} = \frac{17}{2}$$ بسِّط

b) $[-1, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$ ضع -1 مكان x_1 و 1 مكان x_2

$$= \frac{2.5 - (-2.5)}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$$ أوجد القيم وبسِّط

تمارين:

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدّوال الآتية في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-3, -2]$

-28

2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-1, 0]$

0

3) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [-3, -1]$

-14

4) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [1, 3]$

26

5) $f(x) = x^4 + 8x - 3; [-4, 0]$

-56

6) $f(x) = -x^4 + 8x - 3; [0, 1]$

7

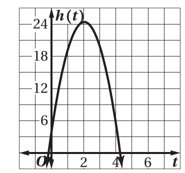
الاسم: ____________ التاريخ: ________

1-4 تدريبات حل المسألة

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1) **قذيفة نارية:** يطلق قارب فقد اتجاهه قذائف نارية في الهواء. إذا كان ارتفاع القذيفة بالأمتار يُعبّر عنه بالدالة $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني من بدء إطلاق القذيفة، فأجب عما يأتي:

a) مثّل الدالة بيانيًّا.



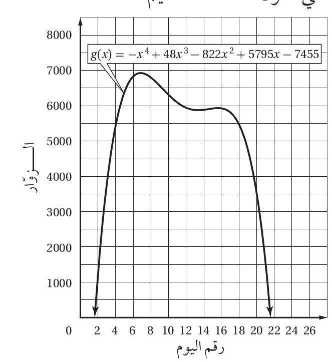
b) قدّر أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.

24.5 مترًا؛ انظر أعمال الطلاب.

2) **استجمام:** إذا كان عدد زوار أحد أماكن الاستجمام يُعبَّر عنه بالدالة:

$g(x) = -x^4 + 48x^3 - 822x^2 + 5795x - 7455$

حيث x عدد الأيام منذ فتح المكان للزوار، فقدّر إلى أقرب وحدة القيم القصوى المحلية أو المطلقة وقيم x التي تكون عندها هذه القيم.



عظمى محلية ومطلقة (7, 6900)؛ صغرى محلية (13, 5857)؛ عظمى محلية (16, 5905).

3) **استجمام:** أوجد متوسط معدل تغير الدالة في المسألة 2 لكل فترة زمنية مما يأتي:

a) من اليوم 2 إلى اليوم 6.

1395

b) من اليوم 13 إلى اليوم 15.

19

c) من اليوم 18 إلى اليوم 20.

−921

4) **صناديق:** قطعة من الكرتون مربعة الشكل طول ضلعها 18 بوصة. يُراد عمل صندوق منها دون غطاء، وذلك بقص مربعات متطابقة من أركانها، ثم ثني الأجزاء البارزة إلى أعلى.

a) اكتب دالة $v(x)$، حيث v حجم الصندوق، x طول ضلع المربع الذي تم قصّه من الأركان الأربعة.

$\boldsymbol{v(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x}$

b) أوجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن، وما أكبر حجم؟

3 in.; 432 in³

c) أوجد القيمة الصغرى المحلية للدالة؟ ووضّح ماذا تعني هذه القيمة في سياق المسألة.

القيمة الصغرى =0، وتحدث عندما x=9؛ إذا تم قص مربعات من الأركان طول ضلع كل منها 9 بوصات فإن حجم الصندوق يصبح 0 ؛ لأنه لا يمكن صنع الصندوق.

الاسم: ____________ التاريخ: ________

1-4 التدريبات الإثرائية

معادلات "غير حقيقية"

معادلات غير حقيقية: توجد معادلات لا يمكن تمثيلها على المستوى الإحداثي مثل المعادلة $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 14 = 0$. وبإكمال المربع بالنسبة لـ x و y نحصل على المعادلة $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = -5$.

تعلم أنه لجميع قيم x و y الحقيقية فإن كلًّا من القيمتين $(x-1)^2$ و $2(y+2)^2$ غير سالبة، لذا فإن ناتج جمعهما لا يمكن أن يساوي 5−. وعليه فلا توجد أعداد حقيقية تحقق المعادلة، بل يحققها أعداد تخيلية (مركّبة) فقط.

تحقق مما إذا كان بالإمكان تمثيل كل من المعادلات الآتية على المستوى البياني، مجيبًا بـ«نعم» أو «لا»:

1) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = -4$

لا

2) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = -7$

لا

3) $(x+2)^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$

نعم

4) $x^2 + 16 = 0$

لا

5) $x^4 + 4y^2 + 4 = 0$

لا

6) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 16 = 0$

لا

ما قيم k التي تحقق ما يأتي في السؤالين 7 و 8؟

a) **تجعل حلول المعادلة أعدادًا تخيلية (مركّبة) فقط.**

b) **يكون التمثيل البياني للعلاقة نقطة.**

c) **يكون التمثيل البياني في المستوى ممكنًا.**

d) **اختر قيمة لـ k التي تجعل التمثيل البياني ممكنًا، ثم ارسم المنحنى على الشبكة المعطاة.**

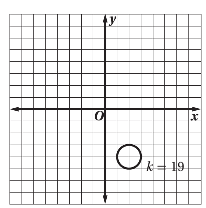
7) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + k = 0$

a) $\boldsymbol{k > 20}$

b) $\boldsymbol{k = 20}$

c) $\boldsymbol{k < 20}$

d)



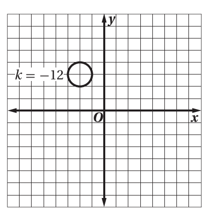
8) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - k = 0$

a) $\boldsymbol{k < -13}$

b) $\boldsymbol{k = -13}$

c) $\boldsymbol{k > -13}$

d)



9) لماذا لا يمكننا مناقشة القيم القصوى ومتوسط معدل التغير للتمثيل البياني في كلٍّ من المسألتين 7 و 8؟

إجابة ممكنة: لأن كلًّا منهما ليست دالة.

1-5 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم) الدالة الرئيسة هي أبسط صورة في عائلة الدالة.

الدالة الرئيسة (الأم)	الصيغة	ملاحظات
الدالة الثابتة	$f(x) = c$	التمثيل البياني هو مستقيم أفقي.
الدالة المحايدة	$f(x) = x$	إحداثيات أي نقطة على التمثيل البياني (a, a).
الدالة التربيعية	$f(x) = x^2$	التمثيل البياني على صورة حرف U.
الدالة التكعيبية	$f(x) = x^3$	المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
دالة الجذر التربيعي	$f(x) = \sqrt{x}$	التمثيل البياني في الربع الأول.
دالة المقلوب	$f(x) = \frac{1}{x}$	التمثيل البياني مكون من جزأين.
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$	التمثيل البياني على صورة حرف V.
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$	دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x؛ وهي نوع من الدوال الدرجية.

مثال **صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.**

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، المدى: $\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$.

المنحنى يمر بنقطة الأصل، لذا فالمقطع x هو 0 ، والمقطع y هو 0.

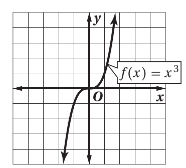
والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل والدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

وكذلك الدالة متصلة؛ لأنه يمكن تتبع منحناها دون رفع القلم عن الورقة.

وعندما تتناقص x بلا حدود فإن y تؤول إلى سالب ما لا نهاية، وعندما تتزايد x بلا حدود فإن y تؤول إلى موجب ما لانهاية.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

لاحظ أن الدالة متزايدة دائمًا، لذا فهي متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.



تمارين

صف خصائص التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، والمدى: $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbf{R}\}$؛ المقطع x هو 0؛ المقطع y هو 0، المنحنى متماثل حول المحور y، والدالة زوجية ومتصلة، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

1-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

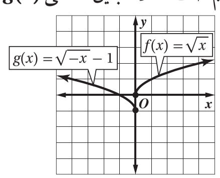
الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) يمكن إجراء تحويل للدالة الرئيسة لإنشاء منحنيات أخرى في عائلة هذه الدالة.

الانسحاب (الإزاحة)	$g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا ...	...$\lvert k \rvert$ وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
		...$\lvert k \rvert$ وحدة إلى أسفل عندما $k < 0$.
	$g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا...	...h وحدة إلى اليمين عندما $h > 0$.
		...$\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليسار عندما $h < 0$.
الانعكاس	$g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	...حول المحور x.
	$g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	... حول المحور y.
التمدد	$g(x) = a \cdot f(x)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...توسعًا رأسيًّا إذا كان $a > 1$.
		...تضيقًا رأسيًّا إذا كان $0 < a < 1$.
	$g(x) = f(ax)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...تضيقًا أفقيًّا إذا كان $a > 1$.
		...توسعًا أفقيًّا إذا كان $0 < a < 1$.

مثال **عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = \sqrt{-x} - 1$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$، ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه.**

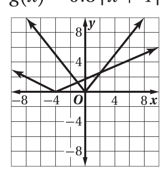
منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y، ومزاح وحدة واحدة إلى أسفل.



تمارين:

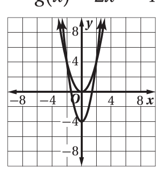
عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$ ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه:

1) $g(x) = 0.5\lvert x + 4 \rvert$



منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى دالة القيمة المطلقة $f(x) = \lvert x \rvert$، ومزاح 4 وحدات إلى اليسار.

2) $g(x) = 2x^2 - 4$



منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$، ومزاح 4 وحدات إلى أسفل.

الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-5 تدريبات حل المسألة

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

1) **مساحة:** إذا كان العرض w لقطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ثابتة مقدارها A فإنه يُعبر عن العرض بالعلاقة: $w(x) = \frac{A}{x}$، حيث x طول المستطيل.

a) إذا كانت مساحة قطعة الأرض 1000 قدم مربعة، فصف التحويلات التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة $f(x) = \frac{1}{x}$ للحصول على منحنى الدالة $w(x)$.

توسع رأسي للدالة $f(x)$.

b) اكتب دالة بدلالة الطول يمكن استعمالها لإيجاد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها معطاة.

$$P(x) = 2x + 2\left(\frac{A}{x}\right)$$

c) هل الدالة التي حصلت عليها في b تحويل للدالة $f(x)$؟ وضِّح إجابتك.

لا، إجابة ممكنة: إنها ناتج جمع دالتين نسبيتين مختلفتين.

d) أوجد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها 1000 قدم مربعة. **126.5 ft**

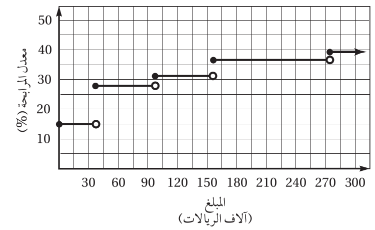
2) **جولف:** إذا كان مسار كرة الجولف مُعطى بالقاعدة $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$، حيث $h(x)$ ارتفاع الكرة بالياردات عن سطح الأرض، وx المسافة الأفقية بين الكرة ونقطة انطلاقها بالياردات.

فصف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.

منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x)$ مزاح 10 وحدات إلى اليمين، مع تضيق رأسي، ومنعكس حول المحور x، ومزاح 10 وحدات إلى أعلى.

3) **مرابحة:** مثّل معدلات المرابحة على المبالغ المبينة في الجدول الآتي باستعمال الدالة الدرجية.

معدلات المرابحة	
حدود المبلغ (ريال)	معدل المرابحة (%)
من 0 إلى 41200	15
من 41201 إلى 99600	28
من 99601 إلى 151750	31
من 151751 إلى 271050	36
أكثر من 271051	39.6



4) **أفق:** يمكن استعمال الدالة $f(x) = \sqrt{1.5x}$ لتقدير مسافة الرؤية الأفقية أو مقدار المسافة التي يمكن لشخص الرؤية ضمنها في يوم صافٍ، حيث $f(x)$ المسافة بالأميال، وx ارتفاع الشخص بالأقدام.

a) قارن بين منحنى $f(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

الدالة $f(x)$ تكافئ الدالة الرئيسة (الأم) بعد تضيق أفقي.

b) تستعمل الدالة $g(x) = 1.2\sqrt{x}$ كذلك لتقدير مسافة الرؤية الأفقية. قارن بين منحنى $g(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

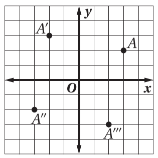
الدالة $f(x)$ تكافئ الدالة الرئيسة (الأم) بعد توسع رأسي.

الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-5 التدريبات الإثرائية

الدوران

الدوران: تحويل هندسي يدوّر المنحنى حول نقطة بزاوية معينة، وقد يكون باتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. في هذا النشاط اعتبر الدوران حول نقطة الأصل وعكس اتجاه عقارب الساعة. ولتدوير نقطة بزاوية 90° حول نقطة الأصل استعمل القاعدة $(x, y) \to (-y, x)$.



1) مثّل صورة النقطة A بعد دورانها بزاوية 90° مستعملًا القاعدة، وسمّ الصورة A′، ثمّ أوجد إحداثيات A′. **(−2, 3)**

2) مثّل صورة النقطة A′ بعد دورانها بزاوية 90°، وسمّ الصورة A″. ثمّ أوجد إحداثيات A″، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية 180°.

$(-3,-2)$; $(x, y) \to (-x, -y)$

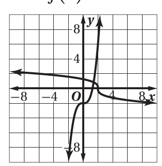
3) مثّل صورة A″ بعد دورانها بزاوية 90°، وسمّ الصورة A‴. ثمّ اكتب إحداثيات A‴، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية 270°.

$(2, -3)$; $(x, y) \to (y, -x)$

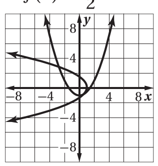
لتدوير دالة، يمكنك رسم صور عدة نقاط ثم التوصيل بينها.

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية 90°:

4) $f(x) = x^3 - 2$

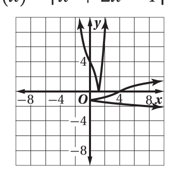


5) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

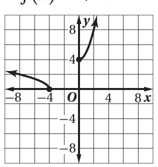


مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية 270°:

6) $f(x) = |x^3 + 2x - 4|$



7) $f(x) = \sqrt{-x - 4}$



8) إذا دوّرنا منحنى الدالة $f(x) = 2x - 3$ بزاوية 90°، فما الدالة التي تمثّل منحنى الدالة بعد تدويرها؟

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

1-6 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

العمليات على الدوال يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على دالتين لتكوين دالة جديدة. ويكون مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالي الدالتين عدا القيم التي تجعل المقام صفرًا.

مثال 1 إذا كانت $f(x) = x^2 - x - 6$ و $g(x) = x + 2$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$= x^2 - x - 6 + x + 2$
$= x^2 - 4$

مجال كل من f ، g هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f + g)$ هو $(-\infty, \infty)$.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$= \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$
$= \frac{(x - 3)(x + 2)}{x + 2} = x - 3$

مجال كل من f و g هو $(-\infty, \infty)$، لكن $x = -2$ تجعل مقام الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ صفرًا، لذا فإن مجالها هو $\{x \mid x \neq -2, x \in \mathbf{R}\}$.

مثال 2 إذا كانت $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = \frac{1}{x}$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$= x^2 - 3 - \frac{1}{x}$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال g هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f - g)$ هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$= (x^2 - 3)\frac{1}{x}$
$= x - \frac{3}{x}$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال g هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f.g)$ هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

تمارين

أوجد $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، حيث $f(x)$ و $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وحدِّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \frac{2}{x}$

$\frac{x^3 - x + 2}{x}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المجال هو.
$\frac{x^3 - x - 2}{x}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المجال هو.
$\frac{2x^2 - 2}{x}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المجال هو.
$\frac{x^3 - x}{2}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المجال هو.

2) $f(x) = x^2 + 4x - 7, g(x) = \sqrt{x}$

$x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x}$; $[0, \infty)$ المجال هو.
$x^2 + 4x - 7 - \sqrt{x}$; $[0, \infty)$ المجال هو.
$x^2\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} - 7\sqrt{x}$; $[0, \infty)$ المجال هو.
$\frac{x^2 + 4x - 7}{\sqrt{x}}$; $(0, \infty)$ المجال هو.

1-6 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تركيب الدوال نستعمل قيمة إحدى الدالتين في **تركيب الدوال** لإيجاد قيمة الدالة الثانية عند تلك القيمة. إذا أُعطيت الدالتان f و g، فإنه يمكن تعريف تركيب الدالتين $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = f[g(x)]$. ويتضمن مجال $f \circ g$ كل قيم x من مجال الدالة g التي تكون عندها قيم $g(x)$ في مجال f.

مثال إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = 4x + 2$، فأوجد $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين
$= f(4x + 2)$	ضع $4x + 2$ مكان $g(x)$
$= 3(4x + 2)^2 + 2(4x + 2) - 1$	ضع $4x + 2$ مكان x في $f(x)$
$= 3(16x^2 + 16x + 4) + 8x + 4 - 1$	بسِّط
$= 48x^2 + 56x + 15$	
$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف تركيب دالتين
$= g(3x^2 + 2x - 1)$	ضع $3x^2 + 2x - 1$ مكان $f(x)$
$= 4(3x^2 + 2x - 1) + 2$	ضع $3x^2 + 2x - 1$ مكان x في $g(x)$
$= 12x^2 + 8x - 2$	بسِّط

تمارين

أوجد قيمة: $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](4)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

1) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 2x - 4$
$2x^2 - 4x - 7; 4x^2 - 5; 9$

2) $f(x) = 3x^2 - 4, g(x) = \frac{1}{x}$
$\frac{3 - 4x^2}{x^2}; \frac{1}{3x^2 - 4}; -\frac{61}{16}$

3) $f(x) = x^3, g(x) = 5x$
$125x^3; 5x^3; 8000$

4) $f(x) = 4x - 2, g(x) = \sqrt{x + 3}$
$4\sqrt{x + 3} - 2; \sqrt{4x + 1}; 4\sqrt{7} - 2$

5) $f(x) = 3x - 5, g(x) = x^2 + 1$
$3x^2 - 2; 9x^2 - 30x + 26; 46$

6) $f(x) = \frac{1}{x - 1}, g(x) = x^2 - 1$
$\frac{1}{x^2 - 2}; \frac{2x - x^2}{x^2 - 2x + 1}; \frac{1}{14}$

7) $f(x) = 2x - 3, g(x) = \frac{1}{x - 2}$
$\frac{8 - 3x}{x - 2}; \frac{1}{2x - 5}; -2$

8) $f(x) = x - 8, g(x) = x + 4$
$x - 4; x - 4; 0$

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1) **عرض رياضي:** تشكل مجموعة من الطلاب دائرة طول نصف قطرها r. عند سماع إشارة البدء، يبدأ الطلاب بالرجوع إلى الخلف، ويُعبَّر عن طول نصف قطر الدائرة بالأقدام بالمعادلة $f(t) = 2.5t$، حيث t الزمن بالثواني من إشارة البدء. أوجد دالة التركيب التي تُعبِّر عن مساحة الدائرة بعد t ثانية مستعملًا صيغة مساحة الدائرة $g(r) = \pi r^2$، ثم أوجد المساحة إلى أقرب جزء من مئة بعد 4 ثوانٍ.

$g[f(t)] = 6.25\pi t^2$; $314.2\ ft^2$

2) **شموع:** يقوم شخص بصناعة شموع وبيعها في السوق المحلي. فإذا كانت الدالة $c(h) = 4h$ تُعبِّر عن عدد الشموع التي يصنعها بعد h من الساعات، وتُعبِّر الدالة $f(c) = 12 + 0.25c$ عن تكاليف صنع c شمعة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة التركيب التي تعبِّر عن تكاليف صناعة الشمع بعد h ساعة.

$f[c(h)] = 12 + h$

b) إذا انخفضت تكاليف إنتاج c من الشموع بمقدار 10%، فاكتب دالة التخفيض بعد التكاليف $s(x)$، ثم اكتب دالة تركيب تعبِّر عن تكاليف الإنتاج بعد h ساعة خلال فترة تخفيض تكاليف الإنتاج.

$s(x) = 0.9x$;

$s\{f[c(h)]\} = 10.8 + 0.9h$

3) **علوم:** إذا كانت الدالة $t(x) = \frac{\sqrt{2x}}{28} + 6.25$ تعبِّر عن درجة الحرارة السيليزية لسائل في كأس كبيرة بعد x من الثواني، فأوجد دالتين s, r بحيث يكون $t(x) = [S \circ r]$، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

إجابة ممكنة: $s(x) = \frac{x}{28} + 6.25$; $r(x) = \sqrt{2x}$

4) **رحلة:** يضع شخصان ميزانية لرحلة مشتركة يرغبان في القيام بها، تكلفة الرحلة بالريالات للشخص الأول يُعبَّر عنها بالدالة $f(x) = 45x + 350$. وللشخص الثاني بالدالة $g(x) = 60x + 475$، حيث x عدد أيام الرحلة.

a) أوجد الدالة $(f+g)(x)$، وحدِّد مجالها.

$(f+g)(x) = 105x + 825$;

المجال هو $\{x \mid x \geq 0, x \in Z\}$.

b) ماذا يعني جمع الدالتين في a ؟

المبلغ الذي سيصرفه الشخصان معًا في الرحلة.

c) أوجد $(f+g)(7)$، وبيِّن معنى الإجابة.

1560 ريالًا، المبلغ الذي سيصرفه الاثنان معًا في رحلة مدتها 7 أيام.

d) أعد الخطوات a–c للدالة $(g-f)(x)$.

a) $(g-f)(x) = 15x + 125$

المجال هو $\{x \mid x \geq 0, x \in Z\}$.

b) المبلغ الذي سيصرفه الثاني زيادة على الأول.

c) 230 ريالًا مقدار ما يصرفه الثاني زيادة على الأول في سبعة أيام.

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 التدريبات الإثرائية

تطبيقات على تركيب الدوال

تطبيقات على تركيب الدوال: يمكن إيجاد دالة بمتغير واحد تمثِّل مساحة المربع، إذ يُعبر عن مساحة المربع A بعلاقة صريحة مع طول ضلعه s على الصورة: $A = f(s) = s^2$. وعادة ما تمثل الكميات الفيزيائية بدوال بعدة متغيرات، وقد يكون كل منها دالة بعدة متغيرات أخرى إضافية. فمثلًا المسافة التي تقطعها سيارة بكمية محددة من الوقود تعتمد على كتلتها، ونوع الوقود المستعمَل، ونظافة المحرك وعوامل أخرى، وكل منها يعتمد على متغيرات أخرى إضافية. إن إيجاد قيمة كمية معينة عند قيم محددة للمتغيرات يكون أسهل بإيجاد دالة واحدة تتكون من تركيب هذه الدوال جميعها، ثم التعويض بدلًا من المتغيرات.

إن التردد f لبندول الساعة هو عدد الاهتزازات (الأرجحات) الكاملة (p) التي يتحركها البندول في 60 ثانية. ويكون الزمن اللازم لإتمام دورة واحدة: $f(p) = \frac{60}{p}$، وعندها تكون f دالة اهتزازة البندول بدلالة p، ومن ناحية أخرى، فإن اهتزازة البندول دالة مع طوله L بالسنتمترات: $p(L) = 0.2\sqrt{L}$.

وأخيرًا طول البندول L دالة بدلالة طوله ℓ عند درجة حرارة $0°$ سيليزية. إن العلاقة بين طول البندول L ومعامل التمدد للمادة e ودرجة الحرارة C وطوله في $0°$ سيليزية يُعبّر عنه بالقاعدة: $L(\ell, C, e) = \ell(1 + eC)$.

1) a) عبّر عن دالة تردد البندول $f(p(L(\ell, C, e)))$ جبريًّا بدلالة طوله بالسنتمترات عند درجة $0°$ سيليزية، حيث $e = 0.00002$.

$$f(p(L(\ell, C, e))) = \frac{300\sqrt{\ell(1 + 0.00002C)}}{\ell(1 + 0.00002C)}$$

b) أوجد التردد إلى أقرب جزء من عشرة لبندول من النحاس عند درجة حرارة $300°$ سيلزية إذا كان طول البندول 15 سم عند درجة $0°$ سيليزية.

77.2 اهتزازة في الدقيقة

2) يُعبر عن الحجم V لبالون أرصاد كروي طول نصف قطره r بالقاعدة $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. إذا مُلِئ البالون بالهواء على أن يزداد طول نصف قطره بمعدل ثابت $r(t) = \frac{1}{2}t + 2$، حيث r بالأمتار، t عدد الثواني من بدء ملئه بالهواء، فأجب عما يأتي:

a) أوجد $V(r(t))$.

$$V(r(t)) = \frac{\pi t^3}{6} + 2\pi t^2 + 8\pi t + \frac{32}{3}\pi$$

b) أوجد الحجم بعد 10 ثوانٍ من بدء ملئه بالهواء، معتبرًا $\pi = 3.14$.

$1436.03\ m^3$

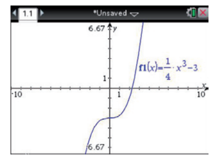
1-7 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

الدوال العكسية والدوال المتباينة تكون كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحداهما فإن الزوج المرتب (a, b) يكون موجودًا في الأخرى.
ويُرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز $f^{-1}(x)$.
يوجد للدالة دالة عكسية إذا وفقط إذا قطع أي مستقيم أفقي منحنى الدالة في نقطة واحدة على الأكثر، وهذا يُعرف **باختبار الخط الأفقي**. وإذا حقَّقت الدالة اختبار الخط الأفقي، فتكون دالة **متباينة**؛ لأن x ترتبط بقيمة واحدة فقط من y.

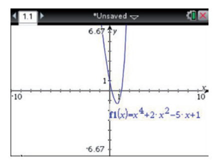
مثال

مثّل كل دالة من الدالتين الآتيتين بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـ«نعم» أو «لا».



a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3}$

نعم، يوجد دالة عكسية؛ لأنه ليس بالإمكان إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة واحدة، وعليه فإن $f^{-1}(x)$ موجودة.



b) $\boldsymbol{g(x) = x^4 + 2x^2 - 5x + 1}$

لا، لا يوجد دالة عكسية؛ لأنه يمكن إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة، وعليه فإن $g^{-1}(x)$ غير موجودة.

تمارين

مثّل منحنى كل دالة من الدوال الآتية مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـ«نعم» أو «لا»:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$
نعم

2) $f(x) = x^2 - 5$
لا

3) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 6x - 4$
لا

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$
نعم

5) $f(x) = -x^3 + 6$
نعم

6) $f(x) = -x^3 + 2x$
لا

1-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدوال العكسية لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: استعمل اختبار الخط الأفقي للتأكد من وجود دالة عكسية.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل بين الرمزين x و y.

الخطوة 3: حُلَّ بالنسبة إلى y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: ضع قيودًا على المجال إن وجدت.

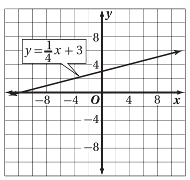
يمكنك التحقق من صحة حلك بإثبات أن $f^{-1}[f(x)] = x$ و $f[f^{-1}(x)] = x$، بمعنى آخر، أن يعطي التركيب الناتج عن الدالة وعكسها الدالة المحايدة دائمًا.

إذا أُعطيت منحنى دالة، فإنه يمكنك تمثيل دالتها العكسية بيانيًّا بتحديد نقاط على منحنى $f(x)$، ثم تحديد صورها بالانعكاس حول المحور $y = x$. غيّر موقعي الإحداثيين x، y، ثم صل النقاط بمستقيم أو منحنى أملس.

مثال

تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ موجودة، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها.

الخطوة 1: من التمثيل البياني تحقق الدالة اختبار الخط الأفقي، لذا يوجد دالة عكسية لها.



الخطوة 2: $y = \frac{1}{4}x + 3$ ضع y مكان $f(x)$.
$x = \frac{1}{4}y + 3$ بدِّل بين y , x.

الخطوة 3: $4x = y + 12$ حُلَّ بالنسبة إلى y.
$y = 4x - 12$
$f^{-1}(x) = 4x - 12$ ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

الخطوة 4: لا يوجد قيود على المجال.

تمارين

تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة f موجودة في كل مما يأتي، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها، وضع أي قيود على مجالها:

1) $f(x) = 2x - 4$
نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$؛ لا توجد قيود.

2) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
لا

3) $f(x) = \frac{5}{x-2}$
نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{5 + 2x}{x}; x \neq 0$

4) $f(x) = x^3 + 4$
نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$؛ لا توجد قيود.

الاسم: ____________ التاريخ: ________

1-7 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال العكسية

1) **كهربائي:** إذا كان المبلغ الذي يتقاضاه كهربائي يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = 60 + 55x$، حيث x عدد ساعات العمل.

a) أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة.
$$f^{-1}(x) = \frac{x-60}{55}$$

b) ماذا يمثّل x في الدالة العكسية؟
ما يتقاضاه الكهربائي

c) إذا تقاضى الكهربائي 225 ريالًا، فكم ساعة عَمِل؟
3 ساعات

2) **توفير:** يوفر عبد الله 15% من دخله الشهري مضافًا إليه 200 ريال.

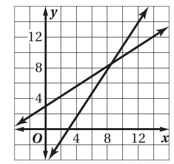
a) أوجد الدالة التي تُعبّر عن المبلغ الشهري الذي يوفّره عبد الله، حيث x دخله الشهري.
$$f(x) = 0.15x + 200$$

b) أوجد الدالة العكسية للدالة f.
$$f^{-1}(x) = \frac{x-200}{0.15}$$

c) تحقق من أن كلًّا من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى.
$$f[f^{-1}(x)] = 0.15\left(\frac{x-200}{0.15}\right) + 200 = x$$
$$f^{-1}[f(x)] = \frac{0.15x + 200 - 200}{0.15} = x$$

3) **بندول:** إذا كان الوقت بالثواني الذي يستغرقه بندول لإتمام اهتزازة واحدة ذهابًا وإيابًا يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ ، $x \ge 0$، حيث x طول البندول بالأمتار، فأوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.
$$f^{-1}(x) = \frac{9.8\,x^2}{4\pi^2}$$

4) **تخفيضات:** يبيّن التمثيل البياني الآتي معدل تكلفة شحن بضاعة في موسم التخفيضات. استعمل التمثيل البياني للدالة لتمثيل الدالة العكسية.



5) **كرة سلة:** يُعبّر عن مساحة سطح كرة طول نصف قطرها x بالدالة $f(x) = 4\pi x^2$.

a) ما مجال هذه الدالة؟ **$(0, \infty)$**

b) أوجد الدالة العكسية لهذه الدالة موضحًا ماذا يمثّل كلّ من المتغيرين فيها.
$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{4\pi}}$$
x مساحة سطح الكرة، $f^{-1}(x)$ طول نصف قطر الكرة.

c) إذا كانت مساحة سطح كرة سلة 278 بوصة مربعة، فأوجد طول نصف قطرها مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.
4.7 in

6) **أجور:** يتقاضى موقف للسيارات أجرة مقدارها 4.50 ريالات عن كل ساعة أو جزء منها، حيث تمثّل الدالة f تكلفة الوقوف x من الساعات في هذا الموقف $f(x) = \begin{cases} 4.5[x] , & [x] = x \\ 4.5[x+1] , & [x] < x \end{cases}$، فهل يوجد دالة عكسية لهذه الدالة؟ وضّح إجابتك.

لا؛ إذا مثلت الدالة بيانيًا فإنها لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

الاسم: ____________ التاريخ: ________

1-7 التدريبات الإثرائية

الانعكاس في لعبة الحروف

الانعكاس في لعبة الحروف: لحل هذا اللغز، املأ الفراغ أمام كل إرشاد، علمًا بأن عدد حروف الإجابة الصحيحة مساويًا عدد الأعداد الموجودة إلى يسار الإرشاد. ثم املأ الجدول بالحروف المناسبة لحل اللغز، ومعرفة الجملة التي تحصل عليها، واستعمل القاموس لمساعدتك على حل الإرشادات.

ضع الحرف (الحروف) أو الكلمات الآتية في الفراغ المخصص، ثم انقلها إلى الجدول عند الأعداد المحددة.

HALF ONE LEFT VE

ISE RATIO WHEN STRAIGHT

الإرشادات:

1) إذا كان العنصر (e, v) ينتمي إلى علاقةٍ ما، فإن العلاقة العكسية تتضمن (__ , __). **V E** (17 28)

2) نجد الدالة العكسية للدالة $2x$ بحساب__ قيمة x. **H A L F** (2 29 6 27)

3) الحرف الأول والحرفان الأخيران من مدلول الرمز f^{-1} باللغة الإنجليزية__. **I S E** (31 33 14)

4) ناتج ضرب عدد في معكوسه الضربي. **O N E** (20 11 34)

5) النسبة بين عددين تُسمى__. **R A T I O** (24 16 19 10 4)

6) لحل معادلة مصفوفية على الصورة $AX = B$، اضرب كل طرف من طرفي المعادلة من جهة__ في النظير الضربي للمصفوفة A. **L E F T** (35 3 21 8)

7) يتناسب متغيران تناسبًا عكسيًّا__ يكون ناتج ضربهما ثابتًا. **W H E N** (13 9 22 5)

8) شكل التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الخطية هو__. **S T R A I G HT** (26 32 30 23 25 12 15 1)

	1 T	2 H	3 E		4 O	5 N	6 L	7 Y		8 T	9 H	10 I	11 N	12 G	
13 W	14 E		15 H	16 A	17 V	18 E		19 T	20 O		21 F	22 E	23 A	24 R	
	25 I	26 S		27 F	28 E	29 A	30 R		31 I	32 T	33 S	34 E	35 L	36 F	