$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$

$z_2 = 1+i$

① اكتب z_1 ، z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي

② اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري، واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{1+1}$$

$$= \frac{1 - i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

بالمطابقة بين الشكلين الجبري والمثلثي.

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

$\sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$= |4| = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}$ بالشكل الأسي z

$4e^{\frac{\pi}{4}}$

ج) لدينا

$AB = 4$

فالمثلث OAB متساوي الساقين

• لدينا OAB مثلث متساوي الساقين

OI متوسط

منصف

$\dots) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{OB})$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

د)

$\frac{z_A + z_B}{2}$

$\frac{4 + 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{2+\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

$(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$

$r=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{2}}=\sqrt{4(2+\sqrt{2})}$

$=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\theta_I=\frac{\pi}{8}$

$z_I=2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

$z_I=2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$=2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}+i\,2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}$

بالمطابقة بين الشكل الجبري و المثلثي .

$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

2018 / 1

$a=-1-i$

$b=1-i$ $c=2i$

$m=-1+i$

نعتبر النقط

1) حل ...

2) احسب d صورة c بالدوران الذي مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) اثبت ان النقط B, O, M على استقامة

4) احسب $\arg\frac{c-d}{m}$. استنتج ان $DC\perp OM$.

$z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$

$r=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$

$\tan\theta=\left|\frac{y}{x}\right|=1$ ومنه

$\theta=\frac{\pi}{4}$ لأن الطويلة ...

$z_B=4e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه

$r_A=4$ $r_B=4$

نستنتج أن OAB مثلث متساوي الساقين في O .

ولدينا OAB مثلث متساوي الساقين ومنه OI محور ومنصف .

$(\vec{u},\vec{OI})=\frac{1}{2}(\vec{u},\vec{OB})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

(2)

$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

$=\frac{4+2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{z_I=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$r=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$

حل معادلة

مميز المعادلة

١) $\Delta > 0$

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

٢) $\Delta = 0$

٣) $\Delta < 0$

$z_2 = \bar{z}_1$

٤) Δ عقدي
نوجد جذوره التربيعية

$\sqrt{\Delta_1}$

$\frac{-b+\sqrt{\Delta_1}}{2a}$

x_1 , x_2

$x_1 \cdot x_2 = 0$

2017 / 2

$z_M = -1 + i$

١) اثبت أن z_M^8 حقيقي

٢) جد z' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ دائرية بالاتجاه الموجب

$z_M = -1 + i$ $e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$z_M = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$z_M^8 = (\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i})^8$

$= (\sqrt{2})^8\, e^{6\pi i}$

$= (2^{\frac{1}{2}})^8\, e^{0 i}$

$= 16$ وهو حقيقي.

② $z' - z_A = e^{\frac{\pi}{4}i}(z - z_A)$

$z' - 1 - i = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(-1 + i - 1 - i)$

$z' - 1 - i = \frac{1}{\cancel{2}}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\cancel{-2})$

$z' = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 1 + i$

$z' = (1 - \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$

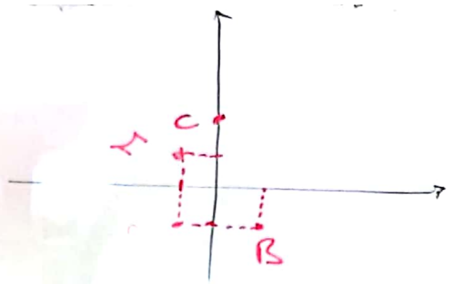
$r = \sqrt{2(1-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{2 - 4\sqrt{2} + 4} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

ع في الربع الثالث

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$z' = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\, e^{\frac{5\pi}{4} i}$



③ $d = i c = i(2i) = -2$

② $z_{\vec{OM}} = z_M - z_0$

$= -1 + i - 0 = -1 + i$

$z_{\vec{OB}} = z_B - z_0$

$= 1 - i - 0 = 1 - i$

نلاحظ أن المتجهان متعاكسان
فيكونان متوازيان
ويشتركان بالنقطة O فالنقاط
مستقيمة أي O , M , B

④ $\frac{c - d}{m} = \frac{2i + 2}{-1 + i}$

$= \frac{(2i+2)(-1-i)}{1+1}$

$= (i+1)(-1-i)$

$= -i + 1 - 1 - i = -2i$

$\arg \frac{c-d}{m} = \frac{-\pi}{2}$

ومنه $DC \perp OM$
لوجود زاوية بينهما $(-\frac{\pi}{2})$

$r = \sqrt{\ }$

$= \sqrt{\ }$

$\frac{z}{I} =$

$= 2\sqrt{2+}$

$\sin \frac{\pi}{8}$

$a = -1$

$b = 1$

٢٠١٧ / ٢

$z_M = -1 + i$

① اثبت أن z^8 حقيقي

② جد z' لحقة M' وفق دوران مركزه $A(1,1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبها بالشكل الأسي.

$z_M = -1 + i$

$z_M = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$

$z_M^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}\right)^8$

$= (\sqrt{2})^8\, e^{6\pi i}$

$= (2^{\frac{1}{2}})^8\, e^{0 i}$

$= 16$ وهو حقيقي.

② $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$

$z' - 1 - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1 + i - 1 - i)$

$z' - 1 - i = \frac{1}{\cancel{2}}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-\cancel{2})$

$z' = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 1 + i$

$z' = (1 - \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$

$r = \sqrt{2(1-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{2 - 4\sqrt{2} + 4} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

(z' في الربع الثالث)

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$z' = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\; e^{\frac{5\pi}{4} i}$

١٣

حل معادلة من الدرجة الثانية في C

$az^2 + bz + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

ونميز الحالات التالية:

١) $\Delta > 0$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

٢) $\Delta = 0$ للمعادلة حل وحيد حقيقي

$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

٣) $\Delta < 0$ للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \overline{z_1}$

٤) Δ عقدي $\Delta = a + ib$

نوجد جذوره التربيعية من جملة المعادلات

$x^2 - y^2 = a$

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$2x \cdot y = b$

فنحصل على $\sqrt{\Delta_1}$ ، $\sqrt{\Delta_2}$ نأخذ أحدهما

ومنه حلول المعادلة

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_1}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a}$

(المعادلة من الدرجة الثانية التي حلولها x_1 ، x_2 هي من الشكل:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

إذا طلب لدينا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

فإن

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ حيث x_1 ، x_2 جذرا المعادلة

-٧-

تمرين ع.٦

$z_B = -3i \qquad z_A = -1 + i$

$P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

① اثبت أن z_A جذر لمعادلة $P(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر

② جد العدد العقدي z' ليكون A' صورة النقطة A وفق دوران يكون B مركزه وزاويته $\frac{\pi}{2}$

③ اكتب z_A بالشكل الأسي

الحل:

$(-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i =$

$\cancel{1-2i-1} - 1 - 2i + i - 2 + 3 + 3i$

$= 0$

$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$

$-1 + i + z_2 = -1 - 2i$

$z_2 = -1 - 2i + 1 - i$

$z_2 = -3i$

$z_{A'} - z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A - z_B)$

$z_{A'} + 3i = i(-1 + i + 3i)$

$z_{A'} + 3i = -4 - i$

$z_{A'} = -4 - 4i$

③ $z_A = -1 + i \qquad x = -1 \quad y = 1$

$r = \sqrt{2}$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \qquad \theta' = \frac{\pi}{4}$

z_A يقع في الربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

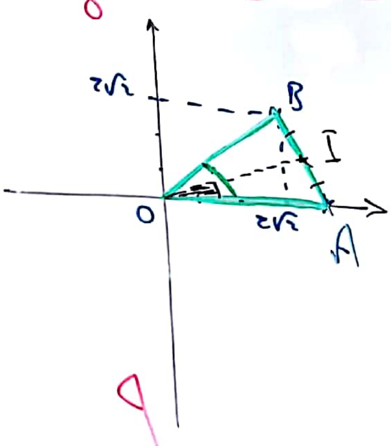
$z_A = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

ع.١٨ $z_A = 4 \qquad z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ، I منتصف AB.

① مثل A ، B واكتب z_B بالشكل الأسي

② بين صيغة المثلث OAB واثبت أن $\frac{\pi}{8} = (\vec{u}, \vec{OI})$

③ اكتب z_I بالشكل الجبري واستنتج قيمة $\sin\frac{\pi}{8}$



$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

$r = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \qquad \theta' = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ، z يقع في الربع الأول

$z_B = 4\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

② لدينا $r_A = 4 \qquad r_B = 4$

فالمثلث OAB متساوي الساقين في O.

لدينا OAB مثلث متساوي الساقين فيه OI متوسط وهو منصف.

$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{OB})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

③ $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

$= \frac{4 + 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{z_I = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$

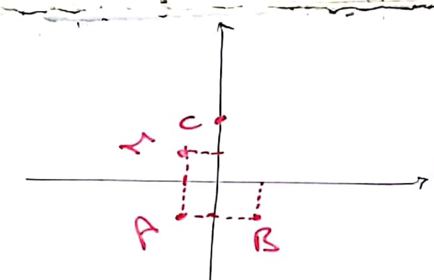
ج.١٧ / ٢

١) اثبت ان

٢) جد z'

...$(1+i)$

$\frac{\pi}{4}$:



(أ) $d = ic = i(2i) = -2$

(ب) $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_O = -1 + i - 0 = -1 + i$

$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_O = 1 - i - 0 = 1 - i$

نلاحظ أن (المتجهات) مترابطة
خطياً لأن المتجهان متوازيان
ويشتركان بالنقطة O فالنقاط
O, M, B تقع على استقامة واحدة

(ج)
$$\frac{c-d}{m} = \frac{2i+2}{-1+i}$$
$$= \frac{(2i+2)(-1-i)}{1+1}$$
$$= (i+1)(-1-i)$$
$$= -i + 1 - 1 - i = -2i$$
$$\arg\frac{c-d}{m} = \frac{-\pi}{2}$$

$DC \perp OM$ لأن الزاوية بينهما $(-\frac{\pi}{2})$

$$r = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2}$$
$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$\theta_I = \frac{\pi}{8}$$
$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi}{8} i}$$

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} + i\, 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}$$

بالمطابقة بين الجزئين التخيليين

$$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

ج.١٨ / ١

$a = -1 - i$
$b = 1 - i$, $c = 2i$
$m = -1 + i$

في المستوى المركب

١) جد d صورة c بدوران حول (O) زاوية $\frac{\pi}{2}$

٢) اثبت ان M, O, B تقع على استقامة واحدة

٣) احسب $\arg\frac{c-d}{m}$ ثم استنتج ان $DC \perp OM$

$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$
$r = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4$
$\tan\theta = \left|\frac{y}{x}\right| = 1$
$\theta = \frac{\pi}{4}$ الربع الأول
$z_B = 4 e^{\frac{\pi}{4} i}$
$r_A = 4$ $r_B = 4$

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u}, ...)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$
$$= \frac{4 + 2\sqrt{2} + i...}{2}$$
$$z_I = 2 + \sqrt{2} + i...$$
$$r = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (...}$$

$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$

$z_2 = 1+i$

① أكتب z_1 ، z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي

② أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري ، واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}$

$= \frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{1+1}$

$= \frac{1-i+\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

بالمطابقة بين الشكلين الجبري والمثلثي .

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

$r = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\theta = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $z \in$ الربع الأول

$z_B = 4e^{\frac{\pi}{4}i}$

③ لدينا

$r_A = 4 \qquad r_B = 4$

فالمثلث OAB متساوي الساقين

لدينا OAB مثلث متساوي الساقين ومنه المستقيم OI منصف

$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{OB})$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

④ $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$

$= \frac{4+2\sqrt{2}+i\,2\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{z_I = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$

$r = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2}$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2+\sqrt{2})}$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\theta_I = \frac{\pi}{8}$

$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi}{8} i}$

$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} + i\, 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}$

بالمطابقة بين الجزئين التخيليين

$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$a = -1 - i$
$b = 1 - i$ $\quad c = 2i$
$m = -1 + i$

2018

في المستوي ...

① ...

② ... $\frac{\pi}{2}$ ... (O)

... B, O, M ...

③ ...

④ ... $\arg\frac{c-d}{m}$ ...

$Dc \perp OM$

$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$

$r = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\theta = \left|\frac{y}{x}\right| = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$z_B = 4 e^{\frac{\pi}{4} i}$

$r_A = 4 \qquad r_B = 4$

المثلث OAB متساوي الساقين

المثلث OAB ... متساوي الساقين ... OI منصف

$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{OB})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

$= \frac{4 + 2\sqrt{2} + i\, 2\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{z_I = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$

Scanned by CamScanner

٢٠١٧ / ٢

$z_M = -1 + i$

(١) اثبت أن z^8 حقيقي

(٢) جد z' صورة M وفقاً لدوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ بالاتجاه الموجب .

$z_M = -1 + i$

$z_M = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$

$z_M^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}\right)^8$

$= (\sqrt{2})^8\, e^{6\pi i}$

$= (2^{\frac{1}{2}})^8\, e^{0 i}$

$= 16$ وهو حقيقي .

(٢) $z' - z_A = e^{\frac{\pi}{4} i}(z - z_A)$

$z' - 1 - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1 + i - 1 - i)$

$z' - 1 - i = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-2)$

$z' = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 1 + i$

$z' = (1 - \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$

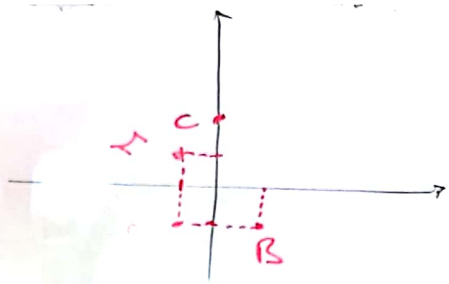
$r = \sqrt{2(1-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{2 - 4\sqrt{2} + 4} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

z' في الربع الثالث

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$z' = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\, e^{\frac{5\pi}{4} i}$



(٣) $d = iC = i(-i)\cdot$ ... $= -2$

(٤) $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_0$

$= -1 + i - 0 = -1 + i$

$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_0$

$= 1 - i - 0 = 1 - i$

نلاحظ أن المتجهين متعاكسان

فإن النقاط على استقامة واحدة

(٥) $\frac{c - d}{m} = \frac{2i + 2}{-1 + i}$

$= \frac{(2i + 2)(-1 - i)}{1 + 1}$

$= (i + 1)(-1 - i)$

$= -i + 1 - 1 - i = -2i$

$\arg \frac{c - d}{m} = \frac{-\pi}{2}$

ومنه $DC \perp OM$

لأن الزاوية بينهما $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

١٣ ١٢ ١١

مثال:

$z_M = -1 + i$

① اثبت أن z^8 حقيقي

② جد z' صورة M وفقاً لدوران مركزه $A(1,1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ بالاتجاه الموجب على الشكل الأسي

$z_M = -1 + i$

$$z_M = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

$$z_M^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{6\pi i} = (2^{\frac{1}{2}})^8 e^{0 i} = 16$$

وهو حقيقي.

②
$$z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$$

$$z' - 1 - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1 + i - 1 - i)$$

$$z' - 1 - i = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-2)$$

$$z' = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 1 + i$$

$$z' = (1 - \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$$

$$r = \sqrt{2(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - 4\sqrt{2} + 4} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$$

z' في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z' = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\; e^{\frac{5\pi}{4} i}$$

حل معادلة من الدرجة الثانية في C

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ونميز الحالات التالية

١) $\Delta > 0$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

٢) $\Delta = 0$ للمعادلة حل وحيد حقيقي

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

٣) $\Delta < 0$ للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \bar{z}_1$$

٤) Δ عقدي $\Delta = a + ib$

نوجد جذوره التربيعية من خلال العلاقات

$$x^2 - y^2 = a$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$2x \cdot y = b$$

فنحصل على $\sqrt{\Delta_1}$ ، $\sqrt{\Delta_2}$ نأخذ أحدهما

ومنه حلول المعادلة

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_1}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a}$$

المعادلة من الدرجة الثانية التي حلولها x_1 ، x_2 من الشكل:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

إذا كان لدينا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

فإن:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

x_1 ، x_2 جذرا المعادلة

صندوق فيه 9 كرات 4 بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء سحبنا ثلاث كرات على التتالي دون إعادة

4	3	2
ب	ح	س

دون إعادة.

① ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء.

A: الكرات الثلاث بيضاء.

ب ب ب

$$P(A) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} = —$$

② ما احتمال ظهور كرة حمراء وكرتين بيضاء

B: كرة حمراء وكرتين بيضاء

ب ب ح

$$P(B) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}\times 3 = —$$

③ ما احتمال ظهور كرة من كل لون

ب س ح

$$P(C) = \frac{4}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}\times 6 = —$$

④ ما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء والثالثة حمراء.

س ب ح

$$P(D) = \frac{2}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7} = —$$

⑤ ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث من لون واحد

ب ب ب   ح ح ح

$$P(E) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} + \frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}$$

⑥ ما احتمال ظهور ولا كرة بيضاء.

4	5
ب	غ

دون إعادة.

غ غ غ

$$P(F) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7} = —$$

⑦ ما احتمال ظهور كرة بيضاء على الأقل

ب غ غ   ب ب غ

$$P(G) = \frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times 3 + \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times 3$$

ب ب ب

$$+\ \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} = —$$

أو

$$P(G) = 1 - P(F)$$

$P(D) = \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \_\_\_$

(5) ما احتمال ان تكون الكرات المسحوبة من لون واحد.

$P(E) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7}$

(6) ما احتمال ظهور ولا كرة بيضاء.

ب 4   غ 5

$P(F) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \_\_\_$

(7) ما احتمال ظهور كرة بيضاء على الأقل.

$P(G) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times 3 + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \ldots$

$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \_\_\_$

$P(G) = 1 - P(F)$

(8) كرة بيضاء الأكثر.

$P(H) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times 3 + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \_\_\_$

(9) اذا علمت ان الكرة الثانية والثالثة غير بيضاء فما احتمال ان تكون الاولى بيضاء.

M : الكرة الثانية والثالثة غير بيضاء

N : الكرة الاولى بيضاء.

$$P(N|M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)}$$

$$P(N \cap M) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{80}{504}$$

الاولى بيضاء والثانية والثالثة غير بيضاء

$$P(M) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{240}{504}$$

$$P(N|M) = \frac{\frac{80}{504}}{\frac{240}{504}} = \frac{80}{240}$$

(10) ليكن X: متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

2 ح   7 غ ح

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \_\_\_$

$P(X=1) = \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times 3 = \_\_\_$

$P(X=2) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} \times 3$

X	0	1	2	Σ
P				
X·P				
X²·P				

$E(X) = \sum x \cdot p$

$E(X^2) = \sum x^2 \cdot p$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

صندوق فيه 9 كرات مرقمة من 1 الى 9 سحبنا ثلاث كرات

(1) ما احتمال ظهور كرة ... بين الكرات المسحوبة ...

2   1 3 4 5 6 7 8 9

$\frac{\binom{1}{1}\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}}$

(2) اذا علمت ان مجموع ... الكرات المسحوبة ... زوجي فما احتمال ... ان تكون الكرة ذات ... الرقم 2 بينها ...

M : مجموع الكرات ...

N : الكرة ذات الرقم 2 ...

$P(N|M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)}$

$+ \binom{1}{1}\binom{5}{2}$

2 4 6 8   1 3 5 7 9

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{n}{n+1}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{n}{n+1}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\cancel{\frac{3}{5}}}{\frac{3n+3+5n}{\cancel{5}(n+1)}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3n+3}{8n+3}$$

$$8n+3 = 9n+9$$

$$9n-8n = 9-3$$

$$n=6$$

$$P(M) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}$$

$\boxed{2\,4\,6\,8 \quad 1\,3\,5\,7\,9}$

زوز   ج   ز ف ف

مثال: صندوقان. صندوق I فيه 5 كرات 3 بيضاء و 2 سوداء وصندوق II فيه n كرة بيضاء وكرة سوداء سحبنا صندوق ثم سحبنا منه كرة

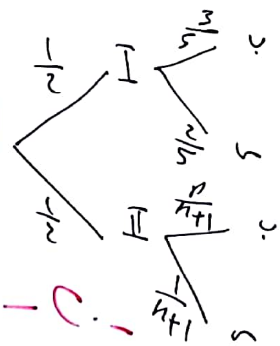
A: حدث ان الكرة المسحوبة بيضاء

B: " " من I.

اذا كان $P(B|A) = \frac{1}{3}$

اوجد قيمة n

I: $\frac{n}{n+1}$ ب، $\frac{1}{n+1}$ س I: $\frac{3}{5}$ ب، $\frac{2}{5}$ س



① سحبنا 3 كرات من بين الكرات ... اوجد احتمال ان يكون الرقم 2 بين الكرات المسحوبة.

$\boxed{2 \quad 1\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}$

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}}$$

② اذا كان مجموع ارقام الكرات المسحوبة زوجي فما احتمال ان تكون احدى الكرات الرقم 2 بين الكرات

M: مجموع الكرات = زوجي

N: احدى الكرات = رقم 2 بين

$$P(N|M) = \frac{P(N\cap M)}{P(M)}$$

ز ف ف   ز ز ز

$$P(N\cap M) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}+\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}$$

$\boxed{2 \quad 4\,6\,8 \quad 1\,3\,5\,7\,9}$

$X(-2) = \dots$

$P(X=0) = \dots$

$P(X=1) = \dots$

$P(X=-2) = \dots$

X	0
P	
X·P	
X²·P	

$E(X) = \Sigma \dots$

$E(X^2) = \dots$

$V(X) = \dots$

$\sigma(X) \dots$

$\boxed{\frac{4}{2}}$

$Y(\Omega) = \{\cancel{0}, 1, 2$

$$P(Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}$$

$$P(Y=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}$$

$$P(Y=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}}$$

$\frac{4}{6}$

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

٢٧

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} \times \frac{2}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} \times \frac{2}{6} + \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} \times \frac{4}{6}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} \times \frac{2}{6} + \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} \times \frac{4}{6}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} \times \frac{2}{6} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} \times \frac{4}{6}$$

① لتكن A: حدث الحصول على عدد زوجي ثمانية مرات

$n = 8 \quad k = 3$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

٢٨

$K = 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

A: الوحدانية

B: مجموع ...

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$\boxed{1\ 1\ 2\ 2\ 3}$

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(A \cap B) =$

٢٩

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

0: 2 4 6 8 10 12 : 18

1: 3 5 7 9 11 : 18

X	0	1
	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$

٣٠

---

8 12 : 9

9 : 8

6 10 : 9

7 11 : 10

1	2	3
$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$

1	2	3	X
$\frac{9}{36}$	0		$\frac{18}{36}$
0	$\frac{10}{36}$		$\frac{18}{36}$
$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$		

$\neq \frac{9}{36}$

غير مستقل

مراجعة الاحتمالات :

الاختبار : هو تجربة نقوم بها ولا نعلم مسبقاً نتائجها الممكنة.

فضاء العينة : هو مجموعة النتائج الممكنة الظهور أثناء التجربة. ونرمز لها بـ Ω.

عدد عناصر فضاء العينة = عدد الخيارات
عدد الإمكانيات

الحوادث : الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

- حدث مستحيل ϕ
- حدث أكيد Ω
- حدث بسيط يتألف من عنصر واحد
- الحدث المتمم (الحدث المعاكس) A, A'

$$A \cap A' = \phi$$
$$A \cup A' = \Omega$$

قوانين في الاحتمالات

1) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

عدد عناصر A

عدد عناصر فضاء العينة

2) $P(\Omega) = 1 \qquad P(\phi) = 0$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

3) $P(A) + P(A') = 1$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

5) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

6) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

...والاحتمالات

1) $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

عدد عناصر فضاء العينة

2) $P(\Omega) = 1$

$0 \leq P(A) \leq ...$

3) $P(A) + P(A') ...$

$P(A') = 1 - P(A...$

4) $P(A \cup B) = P(A) + ...$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B ...$

5) $P(A \cap B') = P(A) - ...$

$P(A' \cap B) = P(B) - P...$

6) $P(A' \cap B') = P(A...$

$= 1 - P(A \cup ...$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)...$

$= 1 - P(A \cap B)...$

-٢-

---

7. الاحتمال المشروط

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال A علماً أن B وقع

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نستخدم: اذا علمت ما احتمال

* ما احتمال ... اذا علمت.

8. الاستقلال الاحتمالي

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ونستخدم فقط في الاستقلال.

مسائل الاستقلال: جميع مسائل

١) الرمي لأكثر من مرة.

٢) مسائل النرد.

٣) مسائل السحب المتتالي مع الإعادة

* A ، B مستقلان إذن

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

* A ، B مستقلان احتمالياً

إذن

-٣-

A ، B' مستقلان احتمالياً

A' ، B ~ ~

A' ، B' ~ ~

9. المتغير العشوائي

$X(\Omega) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي

$P(X=\alpha) = \lambda$

$P(X=\beta) = \mu$

$P(X=\gamma) = \varphi$

X	α	β	γ	Σ
P	λ	μ	φ	1
$X \cdot P$	$\alpha \cdot \lambda$	$\beta\mu$	$\gamma\varphi$	H
$X^2 \cdot P$	$\alpha^2\lambda$	$\beta^2\mu$	$\gamma^2\varphi$	K

$E(X) = \sum X \cdot P = H$ التوقع الرياضي

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ التباين

$E(X^2) = \sum X^2 \cdot P = K$

$V(X) = K - H^2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ الانحراف المعياري

-٤-

تجربة برنولي ...

تستخدم: • اذا طلب عدد التجارب كبير ...

• في حالة السحب مع (التتابع ...

$$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

n: عدد مرات تكرار التجربة

p: احتمال حدث ...

$q = 1 - p$ (المتمم).

$K = 0, 1, 2, 3, ... \to n$

$E(X) = n \cdot p$

$V(X) = n \cdot p \cdot q$

السحب

معاً (عشوائياً) $\binom{n}{r}$

توالي

$\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

-٥-

15 تجربة برنولي ...

تستخدم: • اذا طلب عدد التجارب كبير ...

• في حال السحب مع الارجاع (التكرار).

$P(X=K)\ \binom{n}{k} p^{K} q^{n-K}$

n : عدد مرات تكرار التجربة.

p : احتمال حدث الفرد.

$q = 1-p$ (المتمم).

السؤال: $K = 0,1,2,3,\dots \to n$

- $E(X) = n\cdot p$
- $V(X) = n\cdot p\cdot q$

14 السحب

معاً (عشوائياً): $\binom{n}{r}$

مع التتالي: مع ارجاع ، دون ارجاع

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

12 الضرب لعدد الحالات

$3+3+3+3 = 3\times 4$ ← عدد تكرار 3 (حالات)

• لا نضرب.

1) اذا طلب السحب معاً (توافيق)

2) " " " من لون واحد.

3) " " " فقط بنفس المسألة.

• نضرب.

• اذا طلب السحب كرتين من لونين مختلفين نضرب بـ 2

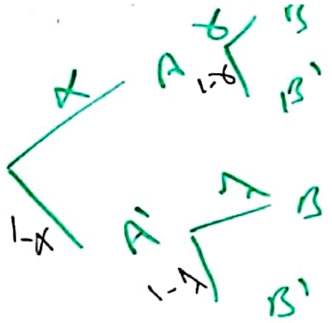
• اذا طلب السحب لثلاث كرات من لونين مختلفين نضرب بـ 3

• اذا طلب السحب لثلاث كرات من ثلاث ألوان مختلفة نضرب بـ $3! = 6$

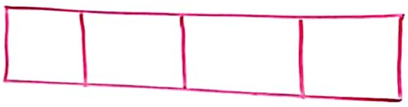
13 مخطط الشجرة:

تستخدم: • سحبين متتاليين.

• الخيار = المتفرد.



$P(B) = \gamma\times\alpha + \lambda(1-\alpha)$



$n(\Omega) = 2^4 = 16$

$A = \{(-1,-1,1,1), (-1,1,-1,1), (-1,1,1,-1), (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

دورة 2019

صندوق يحتوي على خمس كرات
ثلاث كرات حمراء ومرقمة 0، 1، 2
وكرتان بيضاوان متماثلتان تحملان الرقم 1، 0
نسحب عشوائياً كرتين دون إعادة.

أ) A: الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته

ج) X: يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

ب	ب	ح	ح	ح
0	1	2	1	0

5

ب	ب	ح	ح	ح

دون إعادة

ح ح ب ب ب

$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{20}$$

ج)

0	0	1	1	2

دون إعادة

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

٨ -

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{8}{20}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{20}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{4}{20}$$

X	0	1	2	3	$\sum$
P	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1
$X \cdot P$	0	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{32}{20}$
$X^2 \cdot P$	0	$\frac{8}{20}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{36}{20}$	$\frac{68}{20}$

$$E(X) = \sum_0^3 X \cdot P = \frac{32}{20}$$

$$E(X^2) = \sum X^2 \cdot P = \frac{68}{20}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{68}{20} - \left(\frac{32}{20}\right)^2$$

دورة 2011

صندوق يحتوي 5 كرات متماثلة
4 خضراء 5 حمراء
نسحب عشوائياً ...
X: ... R 5 ... R 3 ... 3

- ٩

-9-

$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{8}{20}$

$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{6}{20}$

$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{4}{20}$

X	0	1	2	3	Σ
P	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1
$X \cdot P$	0	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{32}{20}$
$X^2 \cdot P$	0	$\frac{8}{20}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{36}{20}$	$\frac{68}{20}$

$E(X) = \sum_{0}^{3} X \cdot P = \frac{32}{20}$

$E(X^2) = \sum X^2 \cdot P = \frac{68}{20}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \frac{68}{20} - \left(\frac{32}{20}\right)^2$

C.11 جدول كراسي وكرات متماثلة

5 حمراء

4 صفراء

نسحب عشوائيا كرتين = n

X: 5 R ، 3 R_2

0 بيانيا

-10-

$\boxed{ع^4 \quad ع^5}$ 9 كرات.

$X(\Omega) = \{0, 3, 5\}$

$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$

$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$

$P(X=0) = 1 - \frac{50}{84} = \frac{34}{84}$

X	0	3	5	Σ
P	$\frac{34}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	1
$X \cdot P$	0	$\frac{120}{84}$	$\frac{50}{84}$	$\frac{170}{84}$

$E(X) = \sum X \cdot P = \frac{170}{84}$

C.11 / 1

$P = \frac{2}{3}$

K	0	1	2	3
$P(X=K)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	—	—

$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$

$p = \frac{2}{3} \quad q = \frac{1}{3} \quad n = 3$

-11-

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1$

$= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0$

$= \frac{8}{27}$

$E(X) = n \cdot p = 3 \times \frac{2}{3} = 2$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

C.10

$\frac{6}{10}$ A: $\frac{5}{100}$ ع ، ص $\frac{95}{100}$

$\frac{4}{10}$ B: $\frac{2}{100}$ ع ، ص $\frac{98}{100}$

A: الطماطم صالحة للاستعمال

$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{95}{100} + \frac{98}{100} \times \frac{4}{10}$

$= \frac{570}{1000} + \frac{392}{1000} = \frac{962}{1000}$

A: الطماطم صالحة للاستعمال.

B: من المصدر A.

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{570}{1000}}{\frac{962}{1000}} = \frac{570}{962}$

-12-

③ سحب قطعتين معا X: عدد القطع

$\boxed{ع^{30} \quad ص^{570}}$ 600 قطعة.

A

في 100 قطعة يوجد 5 غير صالحة

في 600 قطعة " " n " "

$n = \frac{5 \times 600}{100} = 30$

$P(X=0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}}$

$= \frac{\frac{30 \times 29}{2 \times 1}}{\frac{600 \times 599}{2 \times 1}}$

$= \frac{30 \times 29}{600 \times 599} = \frac{29}{20 \times 599}$

C.10

الكتابة $\frac{1}{3}$ ، $T = \frac{2}{3}$

X يمثل عدد مرات ظهور الكتابة

$\Omega = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

$|\Omega| = 2^3 = 8$