/ /

* الأشعة *

* الشعاع: هو مستقيم له بداية وليس له نهاية
نرمز له $\vec{AB}\,(\vec{u})$ ويسمى متجه

* عناصر الشعاع:

١- المنحى
٢- الجهة
٣- الطول [النظيم]

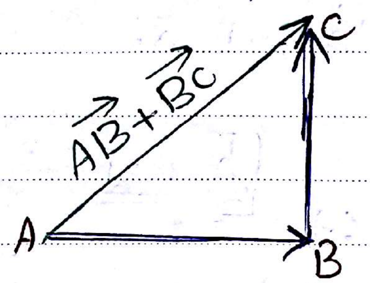
* الشعاع الصفري:
نرمز له $\vec{0}$

* الشعاعات المتساويان:
هما شعاعات لهما المنحى ذاته والجهة ذاتها والطول ذاته

* ملاحظة: إذا كانت
$\vec{AB} = \vec{DC}$
والنقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة فإن $ABCD$ متوازي أضلاع

* علاقة شال: نستخدمها لجمع شعاعين متعاقبين حيث نحصل بالنتيجة على شعاع له بداية الأول ونهاية الثاني

* مثال: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



* الشعاعات المرتبطان خطياً:
* نحقق الارتباط الخطي لشعاعين إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أي نحقق:

$$\vec{V} = K\vec{u}$$

عندها يكون $\vec{V}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً

* نحقق الارتباط الخطي بين الشعاعين إذا كانت مركباتهما متناسبة
(هام جداً!)

* مثال:
$\vec{u} = (2, 4, 6)$
$\vec{V} = (-1, -2, -3)$
هل الشعاعان مرتبطان خطياً؟

$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

$= (2, 4, 6)$

$\vec{v} = (-1, -2, -3)$

نلاحظ أن:

$\vec{u} = 2(\vec{v})$

فهما مرتبطان خطياً.

أو: $\boxed{ط2}$

$\vec{u}(2, 4, 6)$

$\vec{v}(-1, -2, -3)$

$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} = \frac{6}{-3}$

$\Rightarrow -2 = -2 = -2$

المركبات متناسبة

فالشعاعان مرتبطان خطياً

* ملاحظات:

١- الشعاع الصفري مرتبط خطياً مع أي شعاع، لأن:

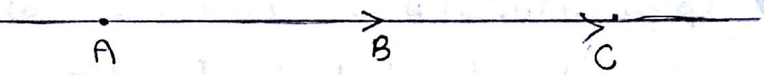
$\vec{u} \cdot 0 = \vec{0}$

٢- أياً كانت النقطة A من الفراغ و أياً كان الشعاع $\vec{u}$ فإنه توجد نقطة واحدة B تحقق: $\vec{AB} = \vec{u}$

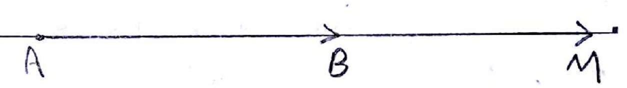
Subject

يسمى المستقيم بنقطتين منه
النقاط المجهولة دائماً نرمز لها M

3- تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة
إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطياً

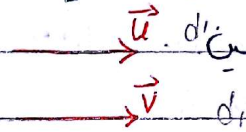


مبرهنة: إذا كان لدينا نقطتين من الفراغ A و B عندئذٍ المستقيم AB هو مجموعة من النقاط M التي تجعل $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطياً
أي: $\vec{AM} = k\vec{AB}$



نتائج هامة: فائدة الارتباط الخطي:

1- إثبات توازي مستقيمين



2- إثبات عدم توازي مستقيمين

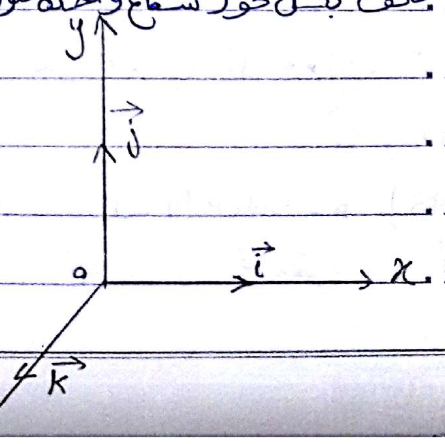
3- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

4- إثبات عدم وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

مراجعة عامة في الفراغ:

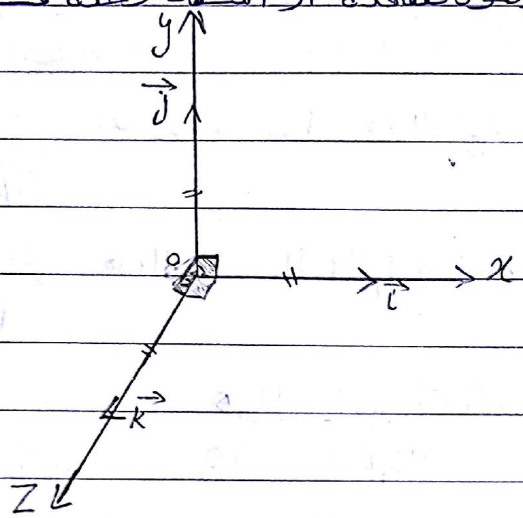
الفراغ: هو فضاء مكون من ثلاث محاور إحداثية هي محور الفواصل XX' ومحور التراتيب YY' ومحور الرواقم ZZ'

نلحق بكل محور شعاع واحدة طوله يساوي 1

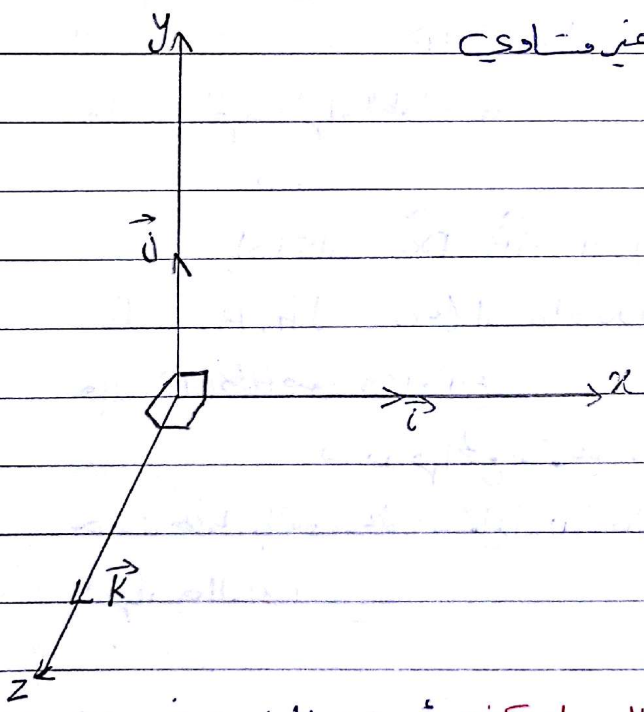


أنواع المعالم:

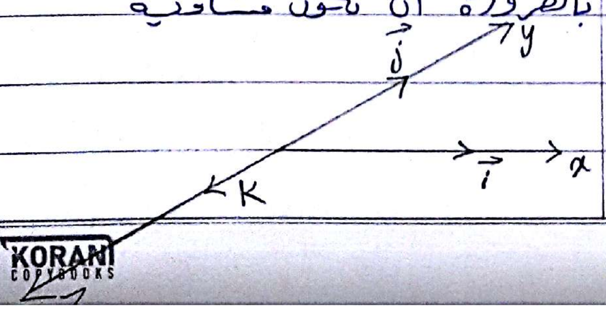
1- معلم متجانس: $(O; \vec{i}, \vec{j}, k)$ مبدأ
وهو معلم أشعة الواحدة فيه طولها يساوي واحد وتكون متعامدة أو أشعة الواحدة متساوية



2- معلم متعامد: أشعة الواحدة تكون متعامدة وطولها غير متساوي



3- معلم كيفي: أشعة الواحدة غير متعامدة وليس بالضرورة أن تكون متساوية



مركبات شعاع معرف بنقطتين:

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

أو

$\vec{AB}\left[(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\right]$

مثال:

$A(2, 1, -2)$

$B(3, -2, 0)$

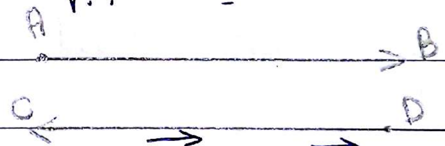
$\vec{AB} = (3-2)\vec{i} + (-2-1)\vec{j} + (0+2)\vec{k}$

$= 1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

أو

$\vec{AB}(1, -3, 2)$

الشعاعان المتعاكسان: هما شعاعان لهما نفس الطول ونفس الحامل ولكن يختلفان بالجهة



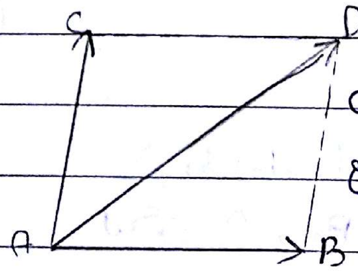
$\vec{AB} = -\vec{BA}$

العمليات على الأشعة

جمع الأشعة

1 طريقة متوازي الأضلاع: تستخدم إذا كان للشعاعان البداية نفسها

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$



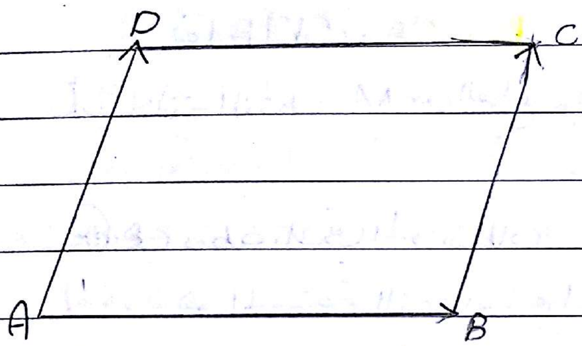
حاصل جمع الشعاعين هو قطر متوازي الأضلاع

2 طريقة شال: تستخدم إذا كانت بداية الثاني نهاية الأول أي

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

ملاحظة

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

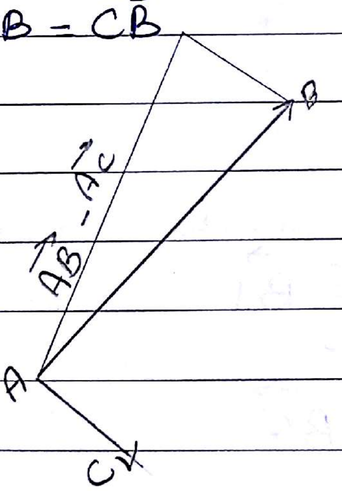


جمع شعاعين هو شعاع

طرح الأشعة: نضيف للشعاع الأول معكوس الشعاع الثاني أي

$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA}$

$\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$



منتصف قطعة مستقيمة:

حتى تكون النقطة I منتصف $[AB]$ يجب أن يتحقق الشرطين:

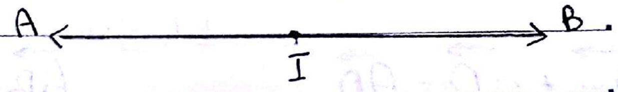
$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

Subject

$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

أو $\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$

أي متعاكسين بالجهة ومتساويان بالطول



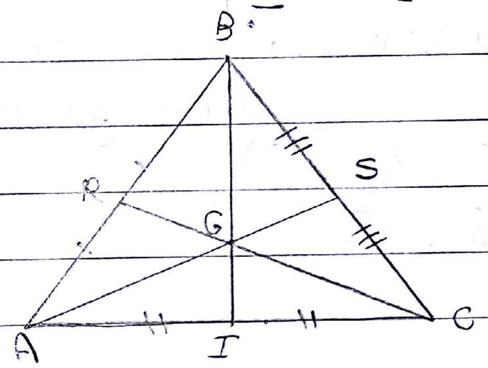
مركز ثقل المثلث: هام جداً

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

G هي نقطة تلاقي المتوسطات

المتوسط: هو المستقيم الذي يقسم الضلع المقابل إلى قسمين متساويين



خواص مركز ثقل المثلث

$$\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BI}$$

$$\vec{GI} = \frac{1}{3}\vec{BG}$$

$$\vec{BG} = 2\vec{GI}$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$ هامة جداً

من جهة الرأس $\frac{2}{3}$

من جهة القاعدة $\frac{1}{3}$

إحداثيات مركز ثقل المثلث:

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

المسافة بين نقطتين: (طول الشعاع)(طول القطعة)

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_1)^2}$$

مثال: $A(2,1,-3)$ $B(3,-4,0)$

احسب AB

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-1)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$$

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة:

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

$$X_I = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$Y_I = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$Z_I = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

لتكن A و B نقطتين مثقلتين $(A,\alpha)(B,\beta)$

عندها نقول أن G هي مركز أبعاد متناسبة لهاتين النقطتين إذا تحقق الشرط:

$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$

أي

$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

أو

$$\vec{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$$

تثقيل G مركز الأبعاد هو $\alpha+\beta$

نتيجة: إذا كان G مركز أبعاد متناسبة لنقطتين متثقلتين A و B فإن النقاط A, B, G على استقامة واحدة

مثال: عين α ، β لتكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A,B اللتان تحققان العلاقة

$3\vec{GB}-5\vec{AB}=\vec{0}$

فكرة الحل: نبحث عن علاقة تحوي $\vec{GA}$ و $\vec{GB}$

$3\vec{GB}-5\vec{AB}=\vec{0}$

$3\vec{GB}-5(\vec{AG}+\vec{GB})=\vec{0}$

$3\vec{GB}-5\vec{AG}-5\vec{GB}=\vec{0}$

$-2\vec{GB}-5\vec{AG}=\vec{0}$

$-2\vec{GB}+5\vec{GA}=\vec{0}$

$\beta=-2$ $\qquad$ $\alpha=5$

تثقيل G هو $(-2+5)$ أي $+3$

مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

لتكن (A,α) (B,β) (C,γ)

نقول إن G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط إذا تحقق الشرط:

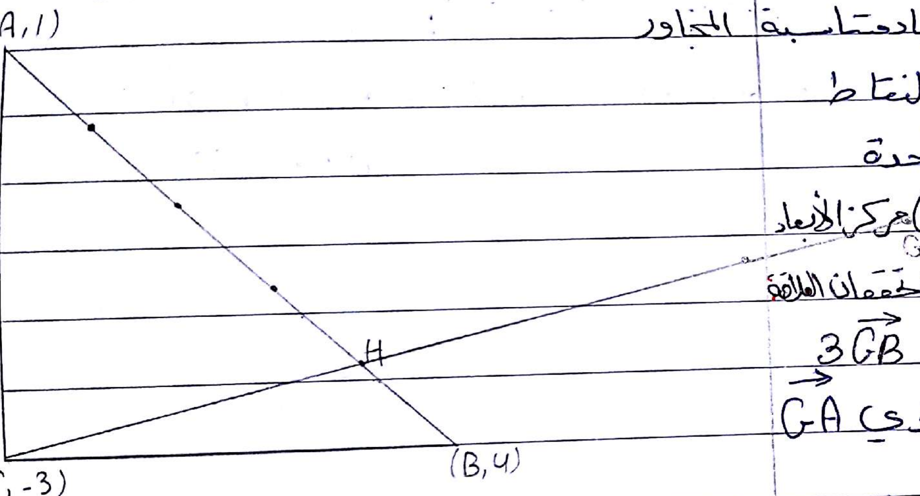
$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$

طريقة إيجاد مركز الأبعاد لثلاث نقاط A, B, C

1] نوجد مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين (A,α) (B,β) وليكن $(H, \alpha+\beta)$

2] نوجد مركز الأبعاد لـ H ، C ولتكن $(G, \alpha+\beta+\gamma)$

مثال: أنشئ مركز الأبعاد للنقاط A و B و C في الشكل المجاور



1- نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B كما يلي وليكن $(H,5)$

$$\vec{AH}=\frac{4}{5}\vec{AB}$$

2- نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين H ، C وليكن $(G,2)$

$$\vec{CG}=\frac{5}{2}\vec{CH}$$

$\vec{CG}=2,5\vec{CH}$

النقطتان إذا كان لهما نفس التثقيل فإن مركز الأبعاد في المنتصف

مركز الأبعاد أقرب دائماً للنقطة الأثقل

Subject

مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط:

$(A,\alpha)\,(B,\beta)\,(C,\gamma)\,(D,\lambda)$

1 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B. وليكن $(H_1, \alpha+\beta)$

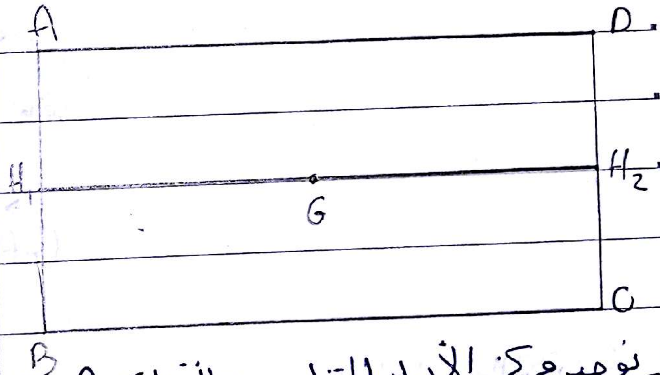
2 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين C و D. وليكن $(H_2, \gamma+\lambda)$

3 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين H_1 و H_2 وليكن G (حسب الخاصة التجميعية)

مثال: ليكن المستطيل ABCD

$(A,1)\,(B,1)\,(C,1)\,(D,1)$

أوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربعة (المستطيل).



1 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B وليكن $(H_1, 2)$

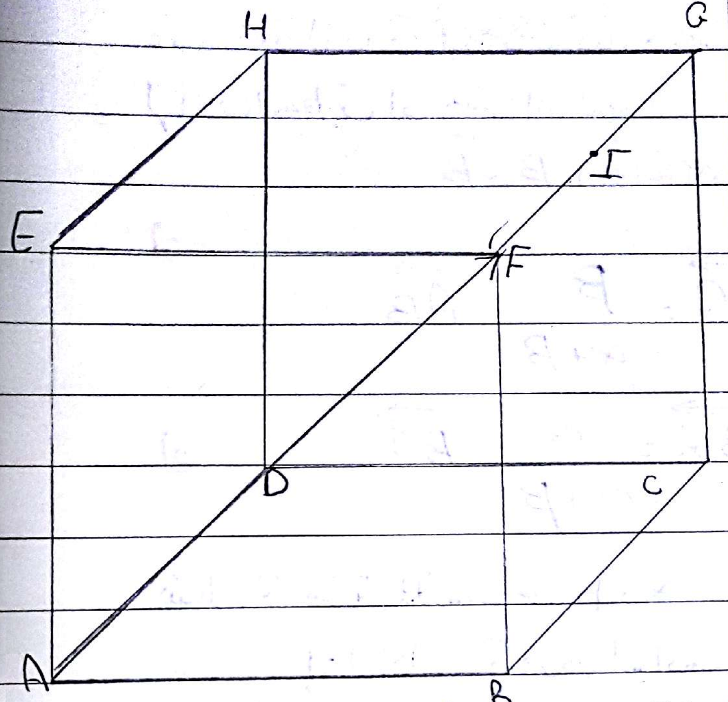
2 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين C و D وليكن $(H_2, 2)$

3 نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H_1,2)$ و $(H_2,2)$ وليكن $(G,4)$

مثال: سؤال دورة

مكعب: ABCDEFGH

1- ارسمه.



2- ليكن I منتصف FG عين النقطة M التي تحقق العلاقة:

$\vec{AB}+\vec{AE}+\vec{FI}=\vec{AM}$

فكرة الحل: نجمع الأشعة بالطرف الأول لشعاع واحد بدايته A

$\underbrace{\boxed{\vec{AB}+\vec{AE}}}_{\text{متوازي الأضلاع}}+\vec{FI}=\vec{AM}$

$\vec{AF}+\vec{FI}=\vec{AM}$

(شال) $\vec{AI}=\vec{AM}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على I

3- أثبت صحة العلاقة:

$\vec{AB}+\vec{CF}=\vec{AF}+\vec{CB}$

$l_1=\vec{AB}+\vec{CF}$

F B

$=\vec{AF}+\underbrace{\vec{FB}+\vec{CB}+\vec{BF}}_{\vec{0}}$

لأنهما متعاكسان

$=\vec{AF}+\vec{CB}=l_2$

Scanned by CamScanner

Subject

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

((الخاصة المميزة لمستوي في الفراغ))

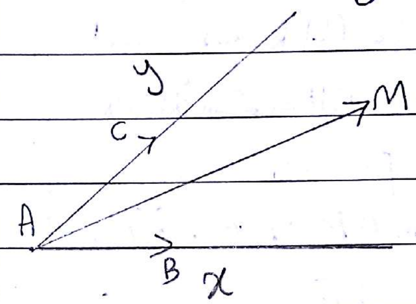
لتعيين مستوي بنقطة و شعاعين غير مرتبطين خطياً

النقطة هي M والشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{V}$

$$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

نقطة من المستوي

حيث x و y أعداد



نسمي $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ شعاعا التوجيه للمستوي

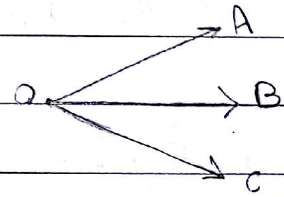
ونقول أنهما يوجهان المستوي [ABC]

*تعريف: نقول عن ثلاثة أشعة $\vec{w}$ ، $\vec{u}$ ، $\vec{V}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجدت نقطة O تقع هي والنقاط الثلاثة A, B, C في مستوي واحد حيث

$\vec{u} = \vec{OA}$

$\vec{V} = \vec{OB}$

$\vec{w} = \vec{OC}$



3 أشعة مرتبطة خطياً تعني نقاطها تقع في مستوٍ واحد

ملاحظة: يمكن تعميم هذه القاعدة على أي عدد من الأشعة

مبرهنة: إذا كان لدينا ثلاثة أشعة $\vec{w}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ اثنان منها غير مرتبطين خطياً $(\vec{u}, \vec{v})$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

حيث: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

أي: كتابة $\vec{w}$ كعبارة خطية بدلالة الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$

علاقة المستوي:

$\vec{AM} =$ عدد x شعاع الواحدة الأولى + عدد x شعاع الواحدة الثانية

مثال: لدينا في المستوي النقاط التالية:

$A(0,0,0)$ $E(0,1,0)$

$H(0,1,1)$ $J(1,0,\frac{3}{4})$

$K(\frac{1}{4},0,1)$ $G(1,1,1)$

1. أثبت أن الشعاعين $\vec{EG}$ ، $\vec{EJ}$ مرتبطين خطياً

$\vec{EG} = (1,0,1)$

$\vec{EJ} = (1,-1,\frac{3}{4})$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$$

⇐ المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً

2. أثبت أن الأشعة $\vec{HK}$ ، $\vec{EG}$ ، $\vec{EJ}$ مرتبطة خطياً.

لإثبات ارتباط 3 أشعة يكفي كتابة أحدهم بدلالة الشعاعين الآخرين

3 معادلات بمجهولين نختار اثنين ونحلها ثم نعوض الحل في المعادلة الثالثة

فإذا طابقت محققة ⇐ الحل مقبول

وإذا طابقت غير محققة ⇐ الحل مرفوض

$$\vec{HK} = \alpha\vec{EG} + \beta\vec{EJ}$$

Subject

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\-1\\\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\\-\beta\\\frac{3}{4}\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\-\beta\\\alpha+\frac{3}{4}\beta\end{bmatrix}$$

$\frac{1}{4}=\alpha+\beta$ ①

$-1=-\beta$ ②

$0=\alpha+\frac{3}{4}\beta$ ③

من ② نجد $\beta=1$

نعوض في ① $\frac{1}{4}=\alpha+1$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}-1 \Rightarrow \alpha=-\frac{3}{4}$

للتأكد نعوض في ③

$0=\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}(1)$

$0=0$ محققة

$\beta=1$, $\alpha=-\frac{3}{4}$ $\Leftarrow$

مقبولان

$\Rightarrow \overrightarrow{HK}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{EG}+1\overrightarrow{EJ}$

$\Leftarrow$ الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً

3_ استنتج أن المستقيم HK يوازي المستوي (EJG)

المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

لأن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً

تدرب، p : 16

1_ $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[EF]$

و J منتصف $[FG]$

1) في كل من الحالات التالية، بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المعروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب، وعلل إجابتك

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ / $\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AF}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على F

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}$ / $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على G

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AF}$

حسب $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$

Subject

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$

M تنطبق على E ⇐

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK}$

⇐ حيث K نقطة تجعل الشكل AEKG متوازي أضلاع وبالتالي M لا تقع على أحد رؤوس المكعب.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HA}$

$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$

M تنطبق على B ⇐

2) في كل من الحالات الآتية حدد موضع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}}_{\text{متوازي أضلاع}} + \overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J ⇐

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}}_{\text{متوازي أضلاع}} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J ⇐

$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}}_{\text{شال}} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}}_{\text{شال}} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \underbrace{\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}}_{\text{شال}}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI}$

N تنطبق على I ⇐

عندما نجمع شعاعين لهما نفس البداية فالناتج هو قطر متوازي الأضلاع الذي يبدأ بالحرف المشترك بينهما أو ضعفي نصف القطر

3) في كل من الحالات الآتية، عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً

المطلوب أن نجمع الأشعة لشعاع واحد حتى ولو كان مضروب بعدد

$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$ قطر متوازي الأضلاع

KORAN COPYBOOKS

Subject

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH})$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

$\Leftarrow$ P منتصف $\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

$\Leftarrow$ Q منتصف $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}) - \overrightarrow{AB}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

2) ABCDEFGH متوازي سطوح

1) أثبت صحة المساواة الشعاعية في كل من الحالات الآتية:

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$

$l_1 : \underbrace{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF}}_{\text{متوازي أضلاع}} + \overrightarrow{BE}$

$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0} = l_2$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$l_1 : \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} = l_2$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

$l_1 : \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB}$

$= \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} = l_2$

$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$

$l_1 : \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FD} = l_2$

2) وضِّع النقاط P و Q و R

بحيث يكون:

KORAN

المستقيمان المتوازيان: هما مستقيمان لا يلتقيان مهما امتدا

$\vec{CR} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AE}) - \vec{AB}$

$\vec{CR} = \frac{1}{2}(\vec{DE}) - \vec{AB}$

$\vec{CR} = \frac{1}{2}\vec{DE} + \vec{BA}$

$\vec{CR} = \vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DE}$

$\Leftarrow$ R منتصف $\vec{DE}$

3) عين شعاعاً يساوي $\vec{DC} + \vec{BD} + \vec{BF}$

وأثبت أن هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع $\vec{AH}$

$\vec{DC} + \vec{BD} + \vec{BF}$

$= \vec{BD} + \vec{DC} + \vec{BF}$

$= \vec{BC} + \vec{BF}$

$\vec{BG} = \vec{AH}$

بما أن الشعاعان $\vec{BG}, \vec{AH}$ متساويان

فإنهما مرتبطان خطياً لأن أحدهما ينتج عن الآخر بضربه بالعدد 1

4) أوجد شعاعاً يساوي $\vec{FE} + \vec{FG} + \vec{FB}$

و أثبت أن هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع $\vec{DF}$

$\vec{FE} + \vec{FG} + \vec{FB}$

$= \vec{FH} + \vec{FB}$

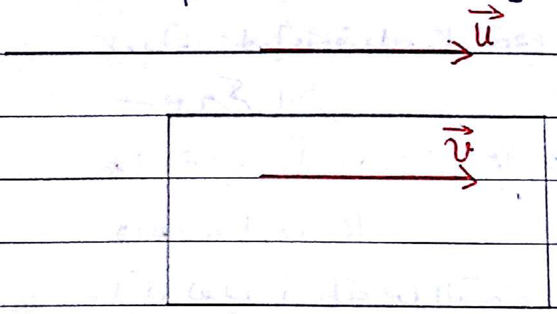
$\vec{FH} + \vec{HD} = \vec{FD} = -\vec{DF}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً.

توازي مستقيم مع مستوي:

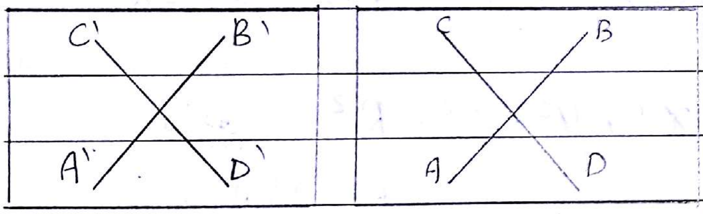
هندسياً: يتوازى مستقيم مع مستوي إذا وازى أحد مستقيماته

شعاعياً: نبحث عن شعاعين متوازيين أحدهما يقع في المستوي والآخر محمول على المستقيم



توازي مستويين:

هندسياً: يتوازى مستويان إذا توازى مستقيمين متقاطعين من الأول مع مستقيمين متقاطعين من الثاني



شعاعياً: نطبق ما يلي:

1- نوجد شعاعين $\vec{CD}, \vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً في المستوي الأول

2- نوجد شعاعين $\vec{C'D'}, \vec{A'B'}$ غير مرتبطين خطياً في المستوي الثاني

3- يجب أن يكون $\vec{A'B'}, \vec{AB}$ مرتبطين خطياً

4- يجب أن يكون $\vec{C'D'}, \vec{CD}$ مرتبطين خطياً

المستوي: هو سطح غير محدود إذا اشترك معه المستقيم بأكثر من نقطة انطبق عليه

وين ما شفنا (O) يعني مبدأ الإحداثيات $O(0,0,0)$

الكرة: سؤال أكيد في الامتحان النهائي

تعريف الدائرة: مجموعة من نقاط المستوي تبعد بعداً متساوياً عن نقطة ثابتة في المستوي تسمى مركز الدائرة.

تعريف الكرة: مجموعة من نقاط الفراغ تبعد بعداً متساوياً عن نقطة ثابتة في الفراغ تسمى مركز الكرة.

* استنتج معادلة الكرة التي مركزها (O) ونصف قطرها R.

الحل: نفرض نقطة من الكرة

$M(x,y,z)$

عندها يكون $(OM = R)$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

بتربيع $x^2+y^2+z^2=R^2$

معادلة الكرة لا تنسوها

مثال: اكتب معادلة كرة مركزها (O) ونصف قطرها 5.

نعوض بالقانون:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=5^2$$

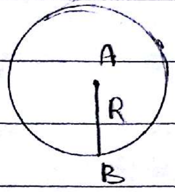
$$x^2+y^2+z^2=25$$

مثال: اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $A(2,-5,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

$$(x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=2$$

مثال: أوجد معادلة كرة S مركزها $A(1,2,-3)$ وتمر من $B(2,1,-2)$

يجب حساب نصف القطر



$$R=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

المعادلة $\Leftarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$

معادلة الكرة

$$(X-X)^2+(y-y)^2+(z-z)^2=R^2$$

المركز — المركز — المركز

شعاعين مرتبطين $\Downarrow$ المستقيمين متوازيين

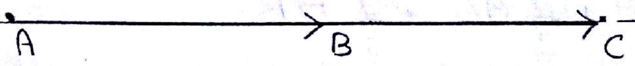
شعاعين مستقلين (غير مرتبطين) $\Downarrow$ المستقيمين متقاطعين

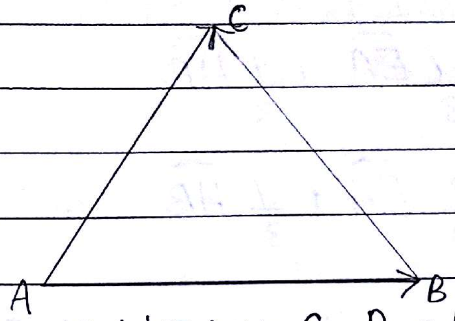
تدريب: p: 20

1- A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. أتكون الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ مرتبطة خطياً؟

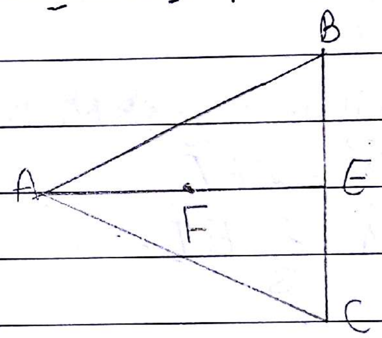
هذه النقاط إما على استقامة واحدة وبالتالي الأشعة مرتبطة خطياً أو ليست على استقامة واحدة وبالتالي تعيّن مستوي ونحقق ما يلي:

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$$





2- A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. E نقطة تحقق $\vec{BE}=4\vec{BC}$ و F نقطة تحقق $\vec{AF}=\frac{1}{2}\vec{AE}$. أتقع النقاط A و B و C و D و E و F في مستوٍ واحد؟



بما أن A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ فهي تشكل مستوي واحد (إن لم تكن على استقامة واحدة) وحسب العلاقة:

$\vec{BE}=4\vec{BC}$

مرتبطان خطياً أي النقاط B, E, C على استقامة واحدة وبالتالي E تقع في المستوي (ABC) لأن المستقيم BC يقع بأكمله في ذلك المستوي.

$\vec{AF}=\frac{1}{2}\vec{AE}$

وبنفس الطريقة نبرهن أن F تقع في المستوي نفسه أي سنبدأ أن A, E, F تقع على استقامة واحدة و F تقع ضمن نفس المستوي

أي أن النقاط جميعها ضمن نفس المستوي

3- ABCDEFGH مكعب. I منتصف [EF] و J منتصف [FG].

1) أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI)؟

المستوي (ABI) يقع ضمن المستوي (AEFB) و J لا تنتمي إلى هذا المستوي فهي لا تنتمي إلى (ABI)

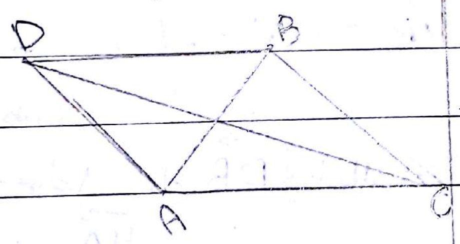
2) أتقع الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AI}$ و $\vec{AJ}$ في مستوٍ واحد؟ أتكون الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً؟

لا تقع في مستوٍ واحد لأن J لا تنتمي إلى المستوي (ABI)

4- ABCD رباعي وجوه و M هي النقطة المحققة للعلاقة:

$\vec{AM}=\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{DC}$

عبر عن $\vec{AM}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$. واستنتج أن M تنتمي إلى المستوي (ABC).



$\vec{AM}=\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{AB}$

$=\frac{3}{2}\vec{AB}+\vec{BC}$

وبالتالي M تقع ضمن المستوي (ABC) لأن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً أي تقع في نفس المستوي

5_ $ABCDEFGH$ مكعب فيه M نقطة تحقق $\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EH}$ و N نقطة تحقق $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

1) أثبت أن: $\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

$l_1 = \vec{MN} = \vec{ME} + \vec{EN}$

$= \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN}$

$= \frac{1}{3}\vec{HE} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$= \frac{1}{3}(\vec{HE} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}\vec{DB} + \vec{EA} = l_2$

2) أتكون الأشعة $\vec{EA}$ و $\vec{MN}$ و $\vec{HB}$ مرتبطة خطياً؟

الفكرة: سنحول الشعاع $\vec{DB}$ في الطلب الأول إلى الشعاع $\vec{HB}$

لدينا من الطلب السابق

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}(\vec{DH} + \vec{HB})$

$= \vec{EA} = \frac{1}{3}\vec{DH} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$= \vec{EA} - \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

فالأشعة مرتبطة خطياً

6_ $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$ ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة:

$3\vec{EM} = 2\vec{EI}$

1) لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB؟

$3\vec{EM} = 2\vec{EI}$

$\vec{EM} = \frac{2}{3}\vec{EI}$

EI متوسط في المثلث AEB

$\Leftarrow$ M هي مركز ثقل المثلث AEB

2) أتكون الأشعة $\vec{LM}$ و $\vec{GJ}$ و $\vec{HK}$ مرتبطة خطياً؟

فكرة الحل: نحاول إيجاد علاقة ارتباط خطي بين $\vec{LM}$ و $\vec{HK}$، لأن M مركز ثقل المثلث AEB و LB متوسط متعلق بالضلع EA ولدينا العلاقة:

$\vec{LM} = \frac{1}{3}\vec{LB}$

$\frac{1}{3}(\vec{LA} + \vec{AB}) = \frac{1}{3}(\vec{GK} + \vec{HG}) = \frac{1}{3}\vec{HK}$

$\frac{1}{3}\vec{LM} = \frac{1}{3}\vec{HG} + 0\,\vec{GJ}$

$\Leftarrow$ الأشعة مرتبطة خطياً

Subject

تدريب : p:24

1- نتأمل النقاط $A(3,5,2)$ ، $B(2,-1,3)$

$C(0,-2,2)$ ، $D(-2,5,1)$ ، $E(3,9,2)$

$F(8,13,3)$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ.

1) احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$ و $[EF]$.

نفرض N منتصف AB

$$x_N = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_N = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z_N = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

نفرض M منتصف CD

$$\Rightarrow M\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

نفرض S منتصف EF

$$\Rightarrow S\left(\frac{11}{2}, 11, \frac{5}{2}\right)$$

2) احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{AB}(2-3, -1-5, 3-2)$

$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$

$\overrightarrow{CD}(-2-0, 5-(-2), 1-2)$

$\overrightarrow{CD}(-2,7,1)$

$\overrightarrow{EF}(5,4,1)$

3) عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$ نفرض $K(x,y,z)$

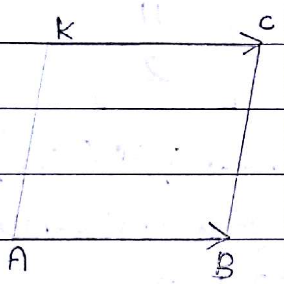
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-x \\ -2-y \\ 2-z \end{bmatrix}$$

$-1 = -x \Rightarrow x = 1$

$-6 = -2-y \Rightarrow y = 4$

$1 = 2-z \Rightarrow z = 1$

$K(1,4,1)$



4) جد مركبات كل من الشعاعين:

$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

$$= 3\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -18 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$

$$= 2\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Subject

$$= \begin{bmatrix}-2\\-12\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\ \frac{7}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}15\\12\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}14\\ \frac{-7}{2}\\ \frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

2- في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ نعطي إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح ABCDEFGH المرسوم جانباً وهي $A(2,1,-1)$ ، $E(3,-1,3)$, $C(-3,2,0)$, $B(1,3,-1)$.

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

نحسب إحداثيات النقطة D حيث نفرض $D(x,y,z)$ وأن $\vec{AD}=\vec{BC}$ من الشكل.

$$\begin{bmatrix}x-2\\y-1\\z+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$x-2=-4 \Rightarrow x=-2$

$y-1=-1 \Rightarrow y=0$

$z+1=1 \Rightarrow z=0$

$\Rightarrow D(-2,0,0)$

نفرض $F(x,y,z)$ ومن الشكل:

$\vec{AE}=\vec{BF}$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-1\\y-3\\z+1\end{bmatrix}$$

$x-1=1 \Rightarrow x=2$

$y-3=-2 \Rightarrow y=1$

$z+1=4 \Rightarrow z=3$

$F(2,1,3)$

نفرض $H(x,y,z)$ من الشكل، $\vec{HE}=\vec{DA}$

$$\begin{bmatrix}3-x\\-y\\3-z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$3-x=4 \Rightarrow x=-1$

$-y=1 \Rightarrow y=-1$

$3-z=-1 \Rightarrow z=4$

$H(-1,-1,4)$

نفرض $G(x,y,z)$ من الشكل، $\vec{EF}=\vec{HG}$

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+1\\y+2\\z-4\end{bmatrix}$$

$-1=x+1 \Rightarrow x=-2$

$2=y+2 \Rightarrow y=0$

$0=z-4 \Rightarrow z=4$

$G(-2,0,4)$

3- لدينا في معلم للفراغ النقاط $A(3,0,-1)$

$B(-2,3,2)$, $C(1,2,-2)$.

Subject

1) حدد إحداثيات النقطة I منتصف [AB]

$$I\left(\frac{3-2}{2},\ \frac{0+3}{2},\ \frac{-1+2}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

2) حدد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C. هام جدا

الكلمة بعد بالنسبة نضعها في المنتصف

نفرض $D(x,y,z)$

D C I

$$\vec{DC} = \vec{CI}$$

$$\begin{bmatrix} 1-x \\ 2-y \\ -2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$1-x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$2-y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

$-2-z = \frac{5}{2} \Rightarrow z = -\frac{9}{2}$

3) حدد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة: $\vec{BM} = \vec{AB} + 3\vec{AC}$

نفرض $M(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x+2 = -11 \Rightarrow x = -13$

$y-3 = 9 \Rightarrow y = 12$

$z-2 = 0 \Rightarrow z = 2$

4) حدد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة $\vec{NA} = 2\vec{NC}$

نفرض $N(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix} 3-x \\ 0-y \\ 1-z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1-x \\ 2-y \\ -2-z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-x \\ 0-y \\ 1-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x \\ 4-2y \\ -4-2z \end{bmatrix}$$

$3-x = 2-x \Rightarrow 3-2 = -2x+x$

$\Rightarrow x = -1$

$-y = 4-2y \Rightarrow y = 4$

$1 - Z = -4 - 2Z$

$1 + 4 = -2Z + Z \Rightarrow Z = -3$

4. لدينا النقطتان $A(2,3,-2)$ و $B(5,-1,0)$
جد إن أمكن في كل حالة إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

$\vec{MA} = 2\vec{AB}$

نفرض $M(x,y,Z)$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-Z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$2 - x = 6 \Rightarrow x = -4$

$3 - y = -8 \Rightarrow y = 11$

$-2 - Z = 4 \Rightarrow Z = -6$

$\vec{MA} = \vec{MB}$

نفرض $M(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ 0-Z \end{bmatrix}$$

$2 - x = 5 - x \Rightarrow 2 = 5$

مساواة خاطئة لا يمكن حساب M.

$3\vec{BA} + \vec{MB} = \vec{0}$

نفرض $M(x,y,Z)$

$$3\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ -Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ -Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-9 + 5 - x = 0 \Rightarrow x = -4$

$12 - 1 - y = 0 \Rightarrow y = 11$

$-6 - Z = 0 \Rightarrow Z = -6$

$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{AB}$

نفرض $M(x,y,Z)$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ 0-Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$2 - x - 5 + x = 3$

$-3 = 3$

مساواة خاطئة لا يمكن حساب M

5. أ يمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة؟

حتى تقع النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{BM}$ مرتبطين خطياً أي أنه يجب أن تكون المركبات متناسبة

$\vec{AB}(1,-1,1)$

$\vec{BM}(a-3, b-2, 1)$

$$\frac{a-3}{1} = \frac{b-2}{-1} = \frac{1}{1}$$

$b-2=-1 \Rightarrow b=1$

$a-3=1 \Rightarrow a=4$

⇐ يمكن تعيين a و b

6. أ يمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً؟ هام جداً

$$\frac{2}{1}=\frac{a}{-2}=\frac{5}{a}$$

$$a^2=-10$$

مستحيلة الحل لا يمكن حساب a

7. في كل من الحالات الآتية بيّن إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

$A(3,-1,2)$

$B(0,2,4)$

$C(2,0,-3)$

حتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ مرتبطين خطياً:

$\vec{AB}(-3,3,2)$

$\vec{BC}(2,-2,-7)$

$$\frac{-3}{2}=\frac{3}{-2}\neq\frac{2}{-7}$$

⇐ المركبات غير متناسبة فالشعاعات غير مرتبطين خطياً

$A(-4,1,3)$

$B(-2,0,5)$

$C(0,-1,7)$

$\vec{AB}(2,-1,2)$

$\vec{BC}(2,-1,2)$

⇐ المركبات متناسبة فالنقاط تقع على استقامة واحدة

$A(1,-1,0)$

$B(1,-1,4)$

$C(1,-1,-3)$

$\vec{AB}(0,0,4)$

$\vec{BC}(0,0,7)$

$\vec{AB}=K\,\vec{BC}$

$(0,0,4)=K(0,0,-7)$

$4=-7K \Rightarrow K=\frac{4}{-7}$

$$\vec{AB}=\frac{4}{-7}\vec{BC}$$

⇐ الشعاعان مرتبطان خطياً فالمركبات متناسبة والنقاط تقع على استقامة واحدة

المسافة في الفراغ:

يكون المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متجانس إذا تحقق الشرطان:

المستقيمات (OI) و (OJ) و (OK) متعامدة مثنى مثنى.

نظيم كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ يساوي واحدة الطول أي:

$$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$$

نظيم الشعاع $\vec{u}$ الذي مركباته (a,b,c) نعطى بالعلاقة:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Subject

في حالة نقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ يكون،

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مثال في معلم متعامد متجانس لدينا النقاط:

$A(2,3,2)$ و $B(-2,-1,2)$ و $C(-2,3,-2)$

و $D(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

1) احسب المسافات AB ، AC ، AD
BC ، BD ، CD.

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-2-2)^2+(3-3)^2+(-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(\frac{1}{3}-2)^2+(\frac{2}{3}-3)^2+(-\frac{1}{3}-2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{49}{9}+\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$BC = \sqrt{(-2+2)^2+(3+1)^2+(-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(\frac{1}{3}+2)^2+(\frac{2}{3}+1)^2+(-\frac{1}{3}-2)^2}$$

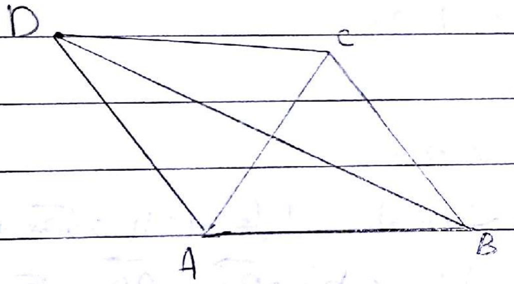
$$= \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$CD = \sqrt{(\frac{1}{3}+2)^2+(\frac{2}{3}-3)^2+(-\frac{1}{3}+2)^2}$$

$$\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{49}{9}+\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{123}}{3}$$

2) بين طبيعة وجوه رباعي الوجوه $ABCD$.

حدد نوع المثلثات في الوجوه



$AB = AC = BC$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

$AD = BD$ و $BD \neq AB$ فالمثلث ABC متساوي الساقين رأسه D وهو ليس مثلثا قائما

لأن $DA^2 + DB^2 \neq AB^2$

$AD = DC$ فالمثلث ADC متساوي الساقين

$CD = BD$ فالمثلث BCD متساوي الساقين

المثلثات ABD و ACD و BCD مثلثات طبوقة

KORAN

Subject

تدريب : p:27

1- احسب نظيم $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في كل من الحالات الآتية:

$\vec{u}(2,-2,3)$

$\vec{v}(4,-4,-2)$

$\vec{w}(4,1,-2)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{17}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(4)^2+(-4)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(4)^2+(1)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(5)^2} = \sqrt{1+25}$

$= \sqrt{26}$

$\vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+(1)^2}$

$= \sqrt{2+3+1} = \sqrt{6}$

2- في ما يلي بين هل المثلث ABC قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

في حالة:

$A(1,3,-1)$

$B(3,6,-2)$

$C(0,4,0)$

$AB = \sqrt{(3-1)^2+(6-3)^2+(2+1)^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$AC = \sqrt{(0-1)^2+(4-3)^2+(0+1)^2}$

$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(0-3)^2+(4-6)^2+(0+2)^2}$

$= \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

فالمثلث ليس متساوي الأضلاع ولا متساوي الساقين لمعرفة إذا كان قائم نطبق عكس فيثاغورث:

$BC^2 \overset{?}{=} AC^2 + AB^2$

$\sqrt{17}^2 = \sqrt{14}^2 + \sqrt{3}^2$

$17 = 17$

⇐ المثلث قائم في A

في حالة:

$A(1,3,-2)$

$B(2,-1,0)$

$C(6,-3,-1)$

$AB = \sqrt{(2-1)^2+(-1-3)^2+(0+2)^2}$

$= \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

$BC = \sqrt{(6-2)^2+(-3+1)^2+(-1-0)^2}$

$= \sqrt{16+16+1} = \sqrt{33}$

$AC = \sqrt{(6-1)^2+(-3-3)^2+(-1+2)^2}$

$= \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$

⟸ المثلث متساوي الساقين حسب

عكس فيثاغورث

$AC^2 \overset{?}{=} AB^2 + BC^2$

$\sqrt{62}^2 = \sqrt{21}^2 + \sqrt{21}^2$

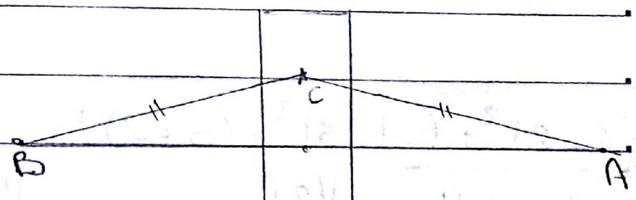
$62 \neq 42$

⟸ المثلث ليس قائم

المستوي المحوري لقطعة هو مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعداً متساوياً عن طرفي القطعة

3 لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$ بين أي النقاط C أو D أو E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB] في حالة $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$

الفكرة: نحسب البعد عن طرفي القطعة A و B فإذا كان البعد متساوي فالنقطة تنتمي للمستوي المحوري



$CA = \sqrt{(5+2)^2+(2-5)^2+(-1+2)^2}$

$CA = \sqrt{59}$

$CB = \sqrt{59}$

$CA = CB$

⟸ C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB]

$DA = \sqrt{21}$

$DB = \sqrt{21}$

$DA = DB$

⟸ D تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB]

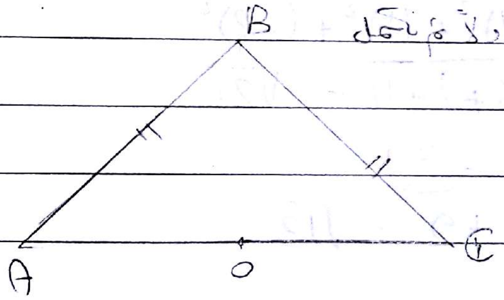
$EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$EB = \sqrt{4} = 2$

$EA \neq EB$

⟸ E لا تنتمي إلى المستوي المحوري

4 نتأمل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O. أثبت أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.



لحساب إحداثيات C نفرض $C(x,y,z)$

$\vec{CO} = \vec{OA}$

$$\begin{bmatrix} 0-x \\ 0-y \\ 0-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ \sqrt{2}-0 \end{bmatrix}$$

$-x = 1 \Rightarrow x = -1$

$-y = 1 \Rightarrow y = -1$

$-z = \sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2}$

ط2 قاعدة:

نعلم أنه إذا كانت $F(a,b,c)$ نقطة فإن $F(a,-b,-c)$ بالنسبة للمبدأ E.

حسب الأطوال:

$AC = \sqrt{16} = 4$

$AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ متساوي الساقين

حسب عكس فيثاغورث:

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$16 = 16$

∴ المثلث قائم في B

5 نتأمل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(-1,3,3)$ و $E(5,3,3)$

أثبت أن B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A.

يجب أن تكون الأطوال متساوية

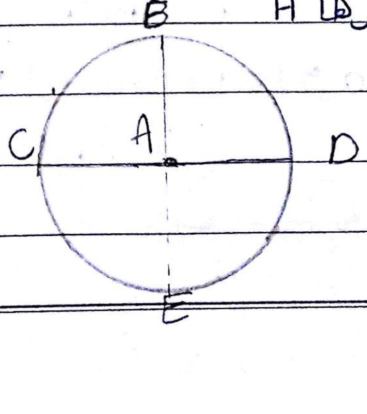
$AB = \sqrt{25} = 5$

$AD = \sqrt{25} = 5$

$AE = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{25} = 5$

∴ النقاط B, D, C, E تقع على كرة واحدة مركزها A



مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ:

إن مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط المثقلة الأربع (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ هو النقطة الوحيدة G التي تحقق العلاقة:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}}$$

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة الأربع (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ عندئذٍ أياً كانت النقطة M كان

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}}$$

الخاصة التجميعية:

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة الأربع (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ عندئذٍ إذا كان H مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط منها مثل (A,α) (B,β) (C,γ) كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$\boxed{(D,\delta),\ (H,\alpha+\beta+\gamma)}$$

ملاحظة: إذا كانت H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) (B,β) وكانت K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,γ) (D,δ) كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين.

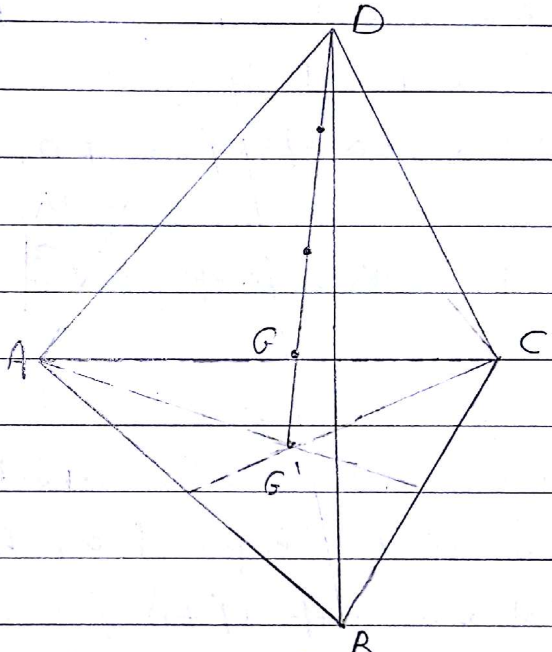
$$\boxed{(H,\alpha+\beta),\ (K,\gamma+\delta)}$$

مثال:

ليكن ABCD رباعي وجوه وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

لنعين موضع G نستبدل بالنقاط (A,1)، (B,1)، (C,1) مركزها G' وهو مركز ثقل المثلث ⟸ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (G',3) و (D,1) إذا تحقق G العلاقة:

$$\vec{G'G} = \frac{1}{4}\vec{G'D}$$

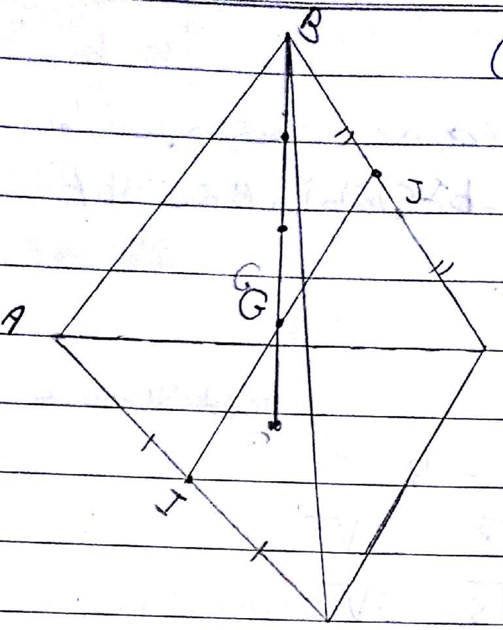


نسمي النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD وهي تقع على القطعة المستقيمة [G'D] التي تسمى المتوسط المرسوم من D لرباعي وجوه وتقع في نهاية الربع الأول من هذا المتوسط من طرف G'.

مثال هام جداً يأتي في الامتحان ٤ درجة

ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G. I منتصف [AD]، J منتصف [BC] أثبت أن I و J و G على استقامة واحدة.

G مركز ثقل ABCD فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1) و (B,1) و (C,1) و (D,1)



ولكن I منتصف [AD] فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,1) و (D,1) و J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,1) (C,1) وحسب الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (I,2) و (J,2) فالنقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة وتكون G منتصف [IJ]

إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة:
١- نأخذ شعاعين ونبرهن مرتبطين خطياً ⟸ إذا كان عنا إحداثيات
٢- نبرهن إحداها مركز أبعاد للنقطتين الأخريين ⟸ إذا كان عنا تثقيلات

تمرينات ومسائل:

١- ABCD رباعي وجوه فيه I منتصف [AB] و J منتصف [CD] و O منتصف [IJ]

1) املأ الفراغ:

$$\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{DB}+\vec{CD}$$

Subject

واستنتج أن: $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}$

$\vec{AD}+\vec{DB}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{CB}=l_2$

2) بسط كلا من $\vec{AI}+\vec{IJ}+\vec{JC}$ و $\vec{BI}+\vec{IJ}+\vec{JD}$ واستنتج أن $\vec{AC}+\vec{BD}=2\vec{IJ}$

$\vec{AI}+\vec{IJ}+\vec{JC}=\vec{AC}$

$\vec{BI}+\vec{IJ}+\vec{JD}=\vec{BD}$

بجمع العلاقتين طرف إلى طرف:

$\vec{AC}+\vec{BD}=\vec{AI}+\vec{IJ}+\vec{JC}+\vec{BI}+\vec{IJ}+\vec{JD}$ متعاكسان ، متعاكسان

$\vec{AC}+\vec{BD}=2\vec{IJ}$

3) لماذا $\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OI}$ و $\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{OJ}$

واستنتج أن $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$

حسب قاعدة متوازي الأضلاع:

$\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OI}$

$\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{OJ}$

بجمع العلاقتين:

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{OJ}+2\vec{OI}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2(\vec{OJ}+\vec{OI})$

$=2(\vec{0})=\vec{0}$

وهو المطلوب.

4) لتكن K منتصف [AD] و L منتصف [BC]

أثبت أن $\vec{IK}=\frac{1}{2}\vec{BD}$ و $\vec{LJ}=\frac{1}{2}\vec{BD}$

استنتج أن IKJL متوازي أضلاع

$\vec{IK}=\frac{1}{2}\vec{BD}$

$l_1 = \vec{IK}=\vec{IA}+\vec{AK}$

$=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{AD})$

$=\frac{1}{2}\vec{BD}=l_2$

$\vec{LJ}=\frac{1}{2}\vec{BD}$

$l_1=\vec{LJ}=\vec{LC}+\vec{CJ}=\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CD}$

$=\frac{1}{2}\vec{BD}=l_2$

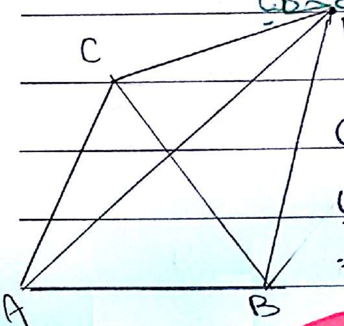
$\vec{IK}=\vec{LJ} \Leftarrow$

فالرباعي [KJL] متوازي أضلاع

3) في المقولات الآتية بين الصحيح من الخطأ معللا إجابتك

هام جدا

ABC مثلث مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة $\vec{DA}$ و $\vec{DB}$ و $\vec{DC}$ مرتبطة خطيا.



خطأ، لأنه إذا كانت D بالمستوي (ABC) ⇐ مرتبطين

أما إذا لم تكن D في المستوي فالأشعة غير مرتبطة خطيا.

إذا أعطنا مستوي (ABC)
فالنقطة D قد تشكل مع A و B و C
أشعة مرتبطة (إذا وقعت في المستوي (ABC))
وقد لا تشكل أشعة مرتبطة إذا لم
تقع في المستوي (ABC)

Subject

$CK = \sqrt{14}$

المقولة صحيحة والنقطة K متساوية البعد عن النقاط C ، B ، A

النقاط $C(4,0,0)$ و $D(0,-2,0)$ و $E(1,2,6)$ و $F(5,1,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(4,-2,2)$ و $B(2,2,0)$

$EA = \sqrt{41}$
$EB = \sqrt{37}$ } $EA \neq EB$

⇐ E لا تنتمي إلى المستوي المحوري

و ABCD رباعي وجوه و a عدد حقيقي و I و J هما بالترتيب منتصفا [AB] و [CD] و E و F نقطتان تحققان العلاقتين: $\vec{AE} = a\vec{AD}$ و $\vec{BF} = a\vec{BC}$ وأخيراً H هي منتصف [EF]
أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة.

$\vec{AE} = a\vec{AD}$

E مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A, 1-a)$ (D, a)

$\vec{BF} = a\vec{BC}$

F مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(B, 1-a)$ (C, a)

ط₂ لنثبت أن I ، J ، H على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن H مركز أبعاد للنقطتين I ، J

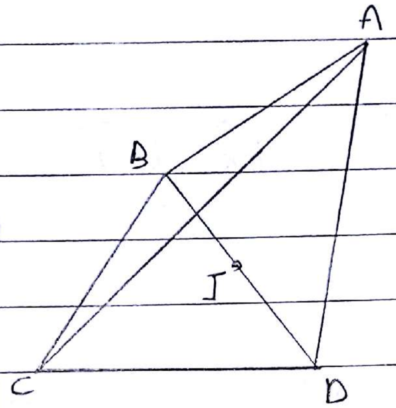
$\vec{AE} = a\vec{AD}$

$\vec{AE} = a\vec{AE} + a\vec{ED}$

$\vec{0} = (1-a)\vec{AE} + a\vec{ED}$

إذاً E مركز أبعاد للنقطتين $(A, 1-a)$ (D, a)

ABCD رباعي الوجوه لتكن I النقطة المعرفة بالعلاقة: $2\vec{IA} = \vec{DA} + \vec{BC} + \vec{CA}$
عندئذ تقع I على أحد حروف رباعي الوجوه
نحدد مكان I ثم نقرر



$2\vec{IA} = \vec{DA} + \vec{BC} + \vec{CA}$

$\vec{IA} + \vec{IA} = \vec{DA} + \vec{BA}$

$\vec{IA} - \vec{DA} = \vec{BA} + \vec{AI}$

$\vec{ID} = \vec{BI}$

⇐ I منتصف [BD]

⇐ المقولة صحيحة

نتأمل الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ نفرض أن أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً عندها تكون الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ غير مرتبطة خطياً

المقولة خاطئة لأنه إذا وقعت النقطة D في المستوي (ABC) كانت الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

النقاط $A(5,1,3)$ و $B(2,-\sqrt{5},-2)$ و $C(3,-3,3)$ و $K(2,0,1)$ متساوية البعد عن

$AK = \sqrt{14}$

$BK = \sqrt{14}$

KORAN

$\vec{BF} = a\vec{BC}$

$\vec{BF} = a\vec{BF} + a\vec{FC} \Rightarrow$

$\vec{0} = (1-a)\vec{BF} + a\vec{FC}$

إذاً F مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(C,a)(B,1-a)$

H منتصف EF أي H مركز أبعاد

متناسبة للنقطتين E , F

$(F,1)(E,1)$

حسب الخاصة التجميعية يكون H مركز أبعاد

متناسبة للنقاط الأربعة

$(A,1-a)(B,1-a)(C,a)(D,a)$

I منتصف AB أي I مركز أبعاد متناسبة

للنقطتين $(A,1-a)$ $(B,1-a)$

J منتصف CD أي J مركز أبعاد

متناسبة للنقطتين (C,a) (D,a)

وحسب الخاصة التجميعية تكون H

مركز أبعاد للنقاط الأربعة

$(A,1-a)(B,1-a)(C,a)(D,a)$

وهي نفسها مركز الأبعاد للنقطتين

$(I,2-2a)(J,2a)$

فالنقاط I , J , H على استقامة واحدة.

طريقة ثانية:

$\vec{AE} = \frac{\alpha}{1}\vec{AD}$

(E,1) مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1-\alpha)(D,\alpha)$

$\vec{BF} = \frac{\alpha}{1}\vec{BC}$

(F,1) مركز أبعاد متناسبة $(B,1-\alpha)$ (C,α)

ولكن H منتصف EF فهو مركز أبعاد متناسبة

ل (E,1) و (F,1)

AD ⇓ E   BC ⇓ F

H

⇐ H مركز أبعاد متناسبة للنقاط A,B,C,D

I   J

ولكن I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A , B لأنه

منتصف [AB]

و J مركز أبعاد متناسبة للنقطتين C , D لأنه

منتصف [CD]

⇐ H مركز أبعاد متناسبة للنقطتين I , J حسب

الخاصة التجميعية

⇐ H , I , J على استقامة واحدة

$\vec{AE} = \frac{☆}{♡}\vec{AB}$ ← البسط

له المقام - البسط

$(E, ♡)$

مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (B,☆) و

(A, ♡ - ☆)

10. A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

من الفراغ و D و E نقطتان تحققان

$\vec{AE} = 3\vec{CE}$ و $3\vec{AD} = 2\vec{AD}$

1) أثبت أن النقاط A و B و C و D و E

تقع في مستوٍ واحد.

Subject

$3\vec{AD} = 2\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$ مرتبطان خطياً إذاً

النقاط A ، B ، D تقع على استقامة واحدة

ومنه المستقيم AB تقع في المستوي (ABC)

⟸ D واقعة في المستوي

لدينا أيضاً: $\vec{AE} = 3\vec{CE}$

الشعاعان $\vec{CE}$ و $\vec{AE}$ مرتبطان خطياً

⟸ النقاط E ، C ، A تقع على استقامة واحدة

ومنه المستقيم AC تقع في المستوي

(ABC) ⟸ النقاط A ، B ، C ، D ، E

تقع في مستوي واحد هو (ABC).

2) لتكن I منتصف [CD] و J منتصف [BE] أثبت وقوع I و A و J على استقامة واحدة.

D مركز أبعاد لـ A و B من العلاقة:

$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

C مركز أبعاد لـ A , E من العلاقة:

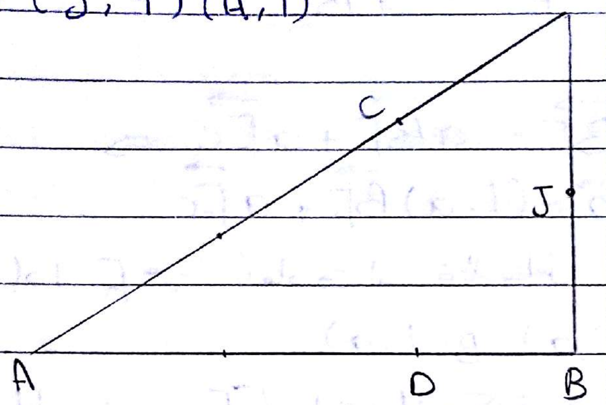
$\vec{EC} = \frac{1}{3}\vec{EA}$

ولكن I مركز أبعاد متناسبة لـ C , D فرضاً.

⟸ I مركز أبعاد لـ E , B , A ولكن

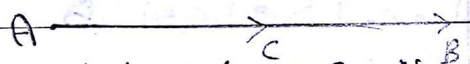
J مركز أبعاد لـ A , J التثقيلات هي (D,3) (C,3) (I,6) (B,2).

(E,2) (J,4) (A,1)



16) جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين A(2,-1,3) و B(0,5,-1)

لو قيل النقاط على استقامة واحدة نستخدم حصراً $\vec{AC} = \vec{CB}$



بما أن C تقع على محور الفواصل فإن إحداثياتها

$C(x,0,0)$

$CA = CB \Rightarrow CA^2 = CB^2$

$(2-x)^2 + (-1-0)^2 + (3-0)^2 =$

$(0-x)^2 + (5-0)^2 + (-1-0)^2$

$4 - 4x + x^2 + 1 + 9 = x^2 + 25 + 1$

$4 - 4x + x^2 + 1 + 9 - x^2 - 25 - 1 = 0$

$-4x - 12 = 0$

$\Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow x = -3$

$C(-3,0,0)$

17) ليكن α عدد حقيقياً ولنتأمل النقاط الثلاث A(3,1,-3) و B(-1,5,-3) و C(-1,1,α)

أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين

أ- إذا كان α أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

4 نقاط في مستو واحد
⟸ 3 أشعة مرتبطة خطيا

$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2 + (-3-\alpha)^2}$

$= \sqrt{25 + 6\alpha + \alpha^2}$

$BC = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-5)^2 + (\alpha+3)^2}$

$= \sqrt{25 + 6\alpha + \alpha^2}$

والمثلث متساوي الساقين رأسه C

حتى يكون متساوي الأضلاع يجب:

$AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$32 = 16 + (\alpha+3)^2$

$(\alpha+3)^2 = 32 - 16$

$\alpha^2 + 6\alpha + 9 - 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$

$(\alpha+7)(\alpha-1) = 0$

إما $\alpha = -7$

أو $\alpha = 1$

⟸ ومنه يمكن أن يكون المثلث متساوي الأضلاع.

13) نتأمل في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

$\vec{AB} = (-2, 0, -1)$

$\vec{AC} = (0, -1, -3)$

$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$

الشعاعان غير مرتبطان خطيا لأن مركباتهما غير متناسبة ⟸ النقاط A ، B ، C ليست تقع على استقامة واحدة.

2) عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)؟

$M(m,1,3)$ تنتمي للمستوي (ABC)

الشرط أن يشكل ثلاث أشعة مرتبطة خطيا

$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

$$\begin{pmatrix} m-3 \\ 1-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ -3y \end{pmatrix}$$

① $m - 3 = -2x$

② $-1 = -y$

③ $2 = -x - 3y$

من ② نجد: $y = 1$

نعوض في ③: $2 = -x - 3 \Rightarrow x = -5$

نعوض في ①:

$m - 3 = -2(5) \Rightarrow m = 13$

$\Rightarrow M(13, 1, 3)$

3) ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستو واحد؟

يوجد عددان حقيقيان a و b حيث:

الشرط: 3 أشعة مرتبطة خطيا

$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 3-1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1-3 \\ 2-2 \\ 0-1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3-3 \\ 1-2 \\ -2-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ -3b \end{bmatrix}$$

① $x-3=-2a$

② $y-2=-b$

③ $2=-a-3b$

من ② نجد، $b=2-y$

من ① نجد، $a=\frac{x-3}{-2}$

نعوض في ③

$2=-\left[\frac{-x+3}{2}\right]-3(-y+2)$

$2=\frac{x-3}{2}+\frac{3y-6}{1\,(2)}$

$2=\frac{x-3+6y-12}{2}$

$2=\frac{x+6y-15}{2}$

نضرب طرفي المعادلة بـ 2

$4=x+6y-15$

$x+6y=19$

20 m و n عددان حقيقيان موجبان تماماً

$n>m>0$. نتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$

و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عين m و n ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$. أدبي

نحسب أطوال أضلاع المثلث MAN

$MA^2=(\sqrt{3})^2+(3-6)^2+(0-m)^2$

$MA^2=3+9+m^2$

$\boxed{MA^2=12+m^2}$

$NA^2=3+9+m^2$

$\boxed{NA^2=12+m^2}$

$NM^2=(0-0)^2+(6-0)^2+(m-n)^2$

$=36+(m-n)^2$

يكون المثلث قائم في A حسب فيثاغورث،

$NM^2=NA^2+MA^2$

$36+(m-n)^2=12+n^2+12+m^2$

$36+m^2-2mn+n^2=24+n^2+m^2$

$36-2mn=24$

$2mn=12$

$\boxed{m.n=6}$ ①

حجم الهرم $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة x الارتفاع

$V=\frac{1}{3}S(OBMN).h=\frac{\overset{BM}{m}+\overset{CN}{n}}{2}.6\rightarrow OB$

$V=\frac{1}{3}S(OBMN).h\rightarrow$ ارتفاع الهرم

$5\sqrt{3}=\frac{1}{3}(3)(m+n)(\sqrt{3})$

$\boxed{m+n=5}$ ②

KORAN COPYBOOKS

Subject

من ① و ② نجد أن:

$m=2$, $n=3$ مقبول

أو $m=3$, $n=2$ مرفوض

لأن $n>m>0$

ارتفاع الهرم هو AF وطوله يساوي فاصلة النقطة لأن $\vec{AF}$ يوازي محور الفواصل

مساحة شبه المنحرف =

$$\underbrace{\frac{\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}}{2}}_{\text{القاعدة الوسطى}} \times h$$

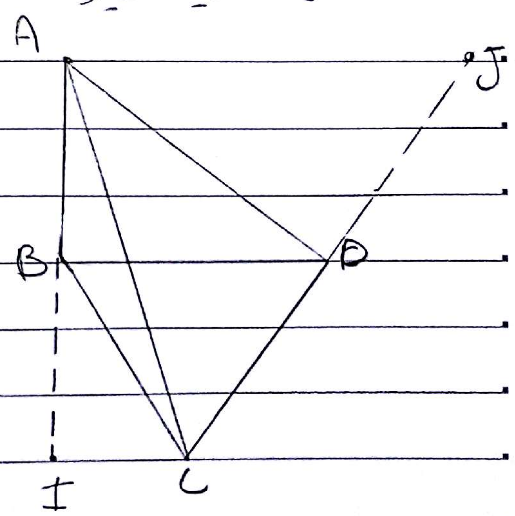
h: ارتفاع شبه المنحرف

قاعدتا شبه المنحرف يجب أن تكونا متوازيتان

22. نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ ونقطتين I و J معرفتين وفق: $\vec{IA}=2\vec{IB}$ و $\vec{JC}-2\vec{JD}$ لاحظ

أ) أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

لا تنطبق J على I لأن AB و DC مختلفان (غير متوازيان وغير متقاطعان)



2) أثبت أنه أياً كانت النقطة M من الفراغ كان:

$$\vec{MA}-2\vec{MB}=-\vec{MI}$$

$$l_1=\vec{MI}+\vec{IA}-2\vec{MI}-2\vec{IB}$$

$$=-\vec{MI}+2\vec{IB}-2\vec{IB}$$

$$=-\vec{MI}=l_2$$

$$\vec{MC}-2\vec{MD}=-\vec{MJ}$$

$$l_1=\vec{MJ}+\vec{JC}-2\vec{MJ}-2\vec{JD}$$

$$=-\vec{MJ}+2\vec{JD}-2\vec{JD}$$

$$=-\vec{MJ}=l_2$$

3) جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق، هامجدداً

$$\|\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=\|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD}\|$$

نفرض G مركز ثقل المثلث ،

$$\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=3\vec{MG}$$

$$\underbrace{\|\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|}=\|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD}\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|3\vec{MG}\|=\|3\vec{MA}-(\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD})\|$$

$$\|3\vec{MG}\|=\|3\vec{MA}-3\vec{MG}\|$$

$$\|3\vec{MG}\|=\|3(\vec{MA}-\vec{MG})\|$$

$$\cancel{3}\|\vec{MG}\|=\cancel{3}\|\vec{MA}-\vec{MG}\|$$

$$\|\vec{MG}\|=\|\vec{MA}+\vec{GM}\|$$

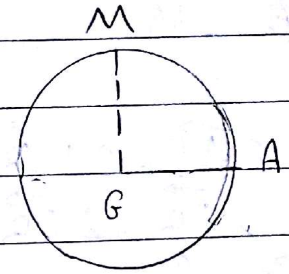
$$\|\vec{MG}\|=\|\vec{GA}\|$$

$$MG=GA$$

KORAN

إذا كان الطرفان لهما نفس الثقل فإن مركز الأبعاد في المنتصف

مجموعة النقاط هي كرة مركزها G



مجموعة النقاط

$MA = MB$

مجهول

مجموعة النقاط مستوي محوري للقطعة AB

$GA = GB$

معلوم غير M

مجموعة النقاط كرة مركزها G

2- ABCD رباعي وجوه وضوعاً تشكل النقاط الآتية

1) T مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,1) و (B,2)

$\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ الطويل = القصير

أو

$\vec{BT} = \frac{1}{3}\vec{BA}$

2) J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,2) و (D,1)

$\vec{DJ} = \frac{2}{3}\vec{DC}$

3) K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1) و (B,2) و (C,2) و (D,1)

$(I,3)$

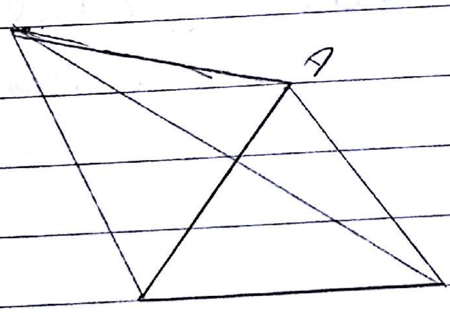
$(J,3)$

$(K,6)$ حسب الخاصية التجميعية

4) L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,1) (B,-2)

5) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1) و (B,-2) و (C,-1).

6) N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1) (B,-2) و (C,-1) و (D,1)



الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي

الجداء السلمي في الفراغ

العبارات المختلفة للجداء السلمي:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

ملاحظة هامة:

$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB}$

في حالة A و B نقطتان من المستوي

شرط تعامد شعاعين «غير معدومين»:

1 أن يكون الجداء السلمي لهما معدوم أي:

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

2 إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين فإن:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$

حيث θ الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أي:

$\theta = (\vec{u},\vec{v})$

3 العبارة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد:

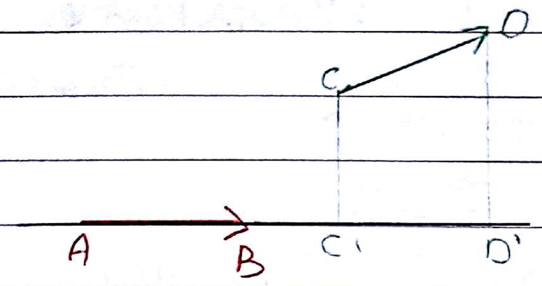
a- إذا كان $\vec{u}(x_1,y_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2)$ فإن:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

b- إذا كان $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإن:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

4 الجداء السلمي لشعاع $\vec{CD}$ مع شعاع آخر $\vec{AB}$ يساوي الجداء السلمي لمسقط الشعاع الأول $\vec{CD}$ على المستقيم AB بالشعاع الثاني $\vec{AB}$

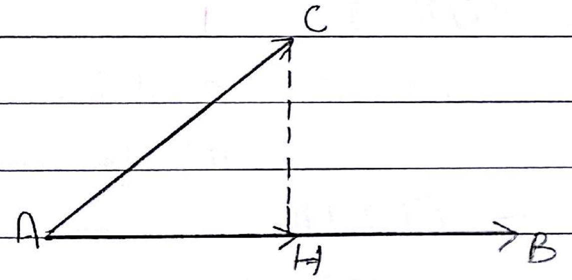


* توضيح: $\vec{CD}\cdot\vec{AB} = \vec{C'D'}\cdot\vec{AB}$

حيث أن المسقط القائم لـ CD على (AB) هو (C'D')

* حالة خاصة:

$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = \vec{AH}\cdot\vec{AB}$



خواص الجداء السلمي:

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة وليكن a,b عددان حقيقيان فإن:

1 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2 $(a\cdot\vec{u})(b\cdot\vec{v}) = ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$

3 $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

4 $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

ملاحظة هامة:

لا يحقق الجداء السلمي جميع خواص ضرب الأعداد

مثال:

إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$

خاطئة $\Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

لا يجوز اختصار الطرفين على نفس الشعاع

ولكن

$\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$

$\vec{u}(\vec{v} - \vec{w}) = 0$

متعامدان $(\vec{u})$ و $(\vec{v} - \vec{w})$

الجداء السلمي لشعاعين مرتبطين خطياً:

[1] إذا كان الشعاعان مرتبطين خطياً ولهما نفس الجهة فإن الزاوية بينهما (0) فإن:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

[2] إذا كان الشعاعان متعاكسان بالجهة فإن $(\theta = \pi)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

حيث $\cos\pi = -1$

ملاحظات هامة:

ليكن $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظم للمستقيم d وليكن $\vec{v}(-b,a)$

$\vec{u}(b,-a)$

شعاعي توجيه المستقيم

مثال: $\vec{n}(3,2)$

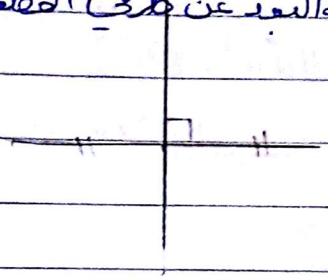
فيكون شعاعي توجيه المستقيم هما

$\vec{v}(-3,2)$

$\vec{u}(3,-2)$

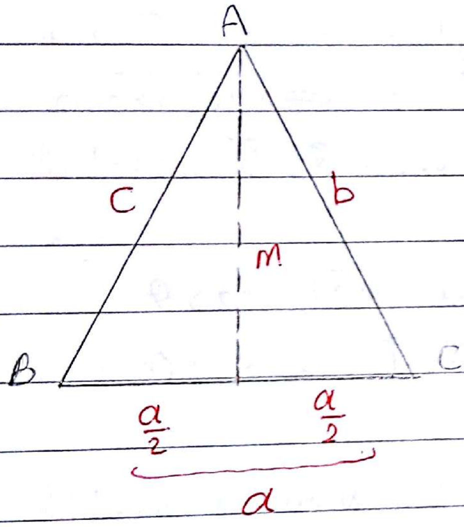
محور قطعة مستقيمة: (الارتفاع)

هو العمود النازل على القطعة المستقيمة في منتصفها أو مجموعة نقاط متساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة



علاقة الكاشي:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$



مبرهنة المتوسط:

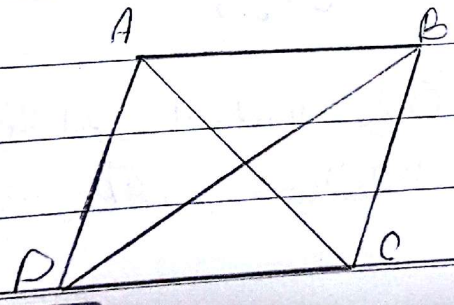
$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

m المتوسط

علاقة متوازي الأضلاع:

مجموع مربعات أطوال أضلاعه = مجموع مربعي طول قطريه

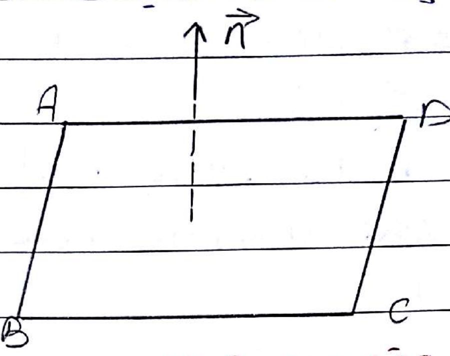
$AB^2 + AD^2 + CD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$



مستقلة خطياً = غير مرتبطة خطياً

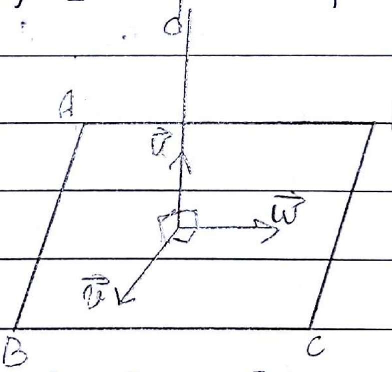
التعامد في الفراغ

تعريف الشعاع الناظم على مستوٍ: نقول عن $\vec{n} \neq 0$ أنه شعاع ناظم على المستوي P إذا وفقط إذا كان حامله عمودياً على المستوي P.



تعامد مستقيم مع مستوي:

يكون المستقيم d عمودياً على المستوي P إذا كان شعاعه الموجه $\vec{u}$ عمودي على زوج $(\vec{v}, \vec{w})$ من الأشعة المستقلة خطياً في المستوي P أو بشكل آخر إذا كان الشعاع الموجه $\vec{u}$ للمستقيم d مرتبط خطياً مع الشعاع الناظم $\vec{n}$ على المستوي P



ملاحظة: لتعامد مستقيم مع مستوي إذا تعامد مع مستقيمين متقاطعين في المستوي.

الوضع النسبي لمستويين «اعتماداً على الأشعة الناظمة»:

1 يتوازى مستويان إذا كان الناظمان مرتبطان خطياً

$P_1 // P_2 \iff$ (الناظمان مرتبطان خطياً)

2 يتقاطع مستويين إذا كان ناظماهما غير مرتبطين خطياً

3 يتعامد مستويان إذا كان الناظمان متعامدان والعكس صحيح

تعامد مستقيمين:

لإثبات تعامد مستقيمين يكفي إثبات تعامد شعاع موجه لأحدهما مع شعاع موجه للآخر

خاصة الأعمدة الثلاث:

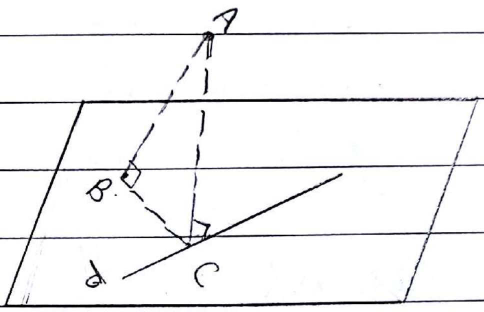
1 $d \in P$

2 $A \notin P$

3 B مسقط قائم لـ A على المستوي

4 C مسقط لـ B على d

$\Rightarrow AC \perp d$



المعادلة الديكارتية لمستوي:

$ax+by+cz+d=0$

حيث c, b, a ليست جميعها معدومة ويكون $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي

ملاحظة هامة جداً:

استنتج المعادلة العامة للمستوي المار من نقطة A

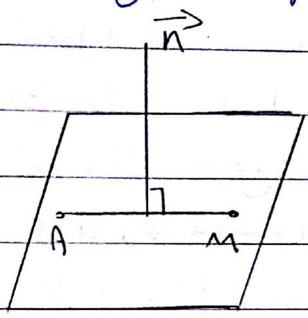
إذا كان لدينا $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة

إذا تعامد مستقيم مع مستوي فهو يعامد جميع المستقيمات الموجودة في المستوي.

Subject

من المستوي و شعاع $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً له.

ناظم نفرض $M(x,y,z) \in P$



$\vec{AM} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\vec{n} \perp \vec{AM}$

$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

$(a,b,c)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

وهي المعادلة العامة للمستوي

بُعد نقطة عن مستوي

إذا كان $A(x_0,y_0,z_0)$ فإن:

$$dist(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تقاطع مستويين أو توازيهما

$\boxed{1}$ $\vec{n_1} // \vec{n_2} \Leftarrow P_1 // P_2$ أو منطبقان

$\boxed{2}$ $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطان $\Leftarrow$ P_1 و P_2 متقاطعان

$\boxed{3}$ $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftarrow P_1 \perp P_2$

مثال: أوجد معادلة مستوي عبر النقطة $A(1,2,-4)$ ويقبل $n(3,-1,1)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$3(x-1)-(y-2)+1(z+4)=0$

نفك معادلة المستوي

$P: 3x-y+z+3=0$

نستنتج من المعادلة السابقة مركبات الناظم ونقطتين من هذا المستوي

$\vec{n}(3,-1,1)$

نفرض $x=y=0 \Rightarrow z+3=0$

$\Rightarrow z=-3$

$\Rightarrow (0,0,-3)$

نفرض $y=z=0 \Rightarrow 3x+3=0$

$3x=-3 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow (-1,0,0)$

سؤال امتحاني إضافي: هل تنتمي النقطة $F(-1,1,1)$ للمستوي؟

نعوض النقطة بمعادلة المستوي

$3(-1)-(1)+1+3=0$

محققة $0=0$

$\Leftarrow F \in P$

سؤال امتحاني: أوجد بعد النقطة $C(3,2,-4)$ عن المستوي.

$$dist(C,P) = \frac{|3(3)-2-4+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(1)^2}}$$

$$= \frac{|6|}{\sqrt{11}} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$

Scanned by CamScanner

Subject

تدريب ، p 50

1- احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$

في الحالتين :

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-3)(5) = -14$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + 5(-2) =$

$= \frac{1}{6} - 10 = -\frac{59}{6}$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = \left(\frac{1}{3}\right)(2) + (-2)(-3) = \frac{20}{3}$

$\vec{u}(2, -1)$

$\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$\vec{w}(5, 2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + -1(3) = -1 - 3 = -4$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = -\frac{1}{2}(5) + 3(2) = -\frac{5}{2} + 6 = \frac{7}{2}$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = 5(2) + 2(-1) = 10 - 2 = 5$

2- أعطِ في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d :

$d: 2x + 5y - 5 = 0 \quad A(5,3)$

$d': y = mx + p$

الحل

$d: 2x + 5y - 5 = 0$

نحوله للشكل السابق :

$5y = -2x + 5 \qquad \div 5$

$y = -\frac{2}{5}x + 1$

ولكن $d' \perp d$

$\Rightarrow m_d \times m_{d'} = -1$

$-\frac{2}{5} \times m_{d'} = -1 \Rightarrow m_{d'} = \frac{-1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$

ولطلب p نعوض الميل ونقطة (5,3)

$d': y = mx + p$

$3 = \frac{5}{2}(5) + p \Rightarrow p = 3 - \frac{25}{2}$

$p = \frac{-19}{2}$

$\Rightarrow d': y = \frac{5}{2}x - \frac{19}{2}$

$d: x - 3y + 2 = 0 \qquad A(-1, 2)$

$d': y = mx + p$

$3y = x + 2$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

ولكن $d \perp d'$ ،

$m_d \times m_{d'} = -1$

KORAN COPYBOOKS

Scanned by CamScanner

Subject

$\frac{1}{3} \times m_{d'} = -1 \Rightarrow m_{d'} = \frac{-1}{\frac{1}{3}}$

$m_{d'} = -1 \times \frac{3}{1} = -3$

نعوض الميل والنقطة $(-1,2)$:

$d': 2 = -3(-1) + p$

$p = 2 - 3 = -1$

$\Rightarrow d': y = -3x - 1$

المستقيمان المتعامدان جداء ميليهما يساوي (-1)

المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل

3. أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أن: هام

$2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$l_2 = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$= (\vec{AB}+\vec{BC})(\vec{AB}-\vec{BC}) + (\vec{CD}+\vec{DA})(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}) + \vec{CA}(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}[\vec{AB} - \vec{BC} - (\vec{CD} - \vec{DA})]$

$= \vec{AC}[\vec{DB} - (\vec{BC} + \vec{CD})]$

$= \vec{AC}[\vec{DB} - \vec{BD}]$

$= \vec{AC}[\vec{DB} + \vec{DB}] = 2\vec{AC}\cdot\vec{DB}$

4. أعط في الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستقيم d:

$d: 2x + y - 5 = 0 \quad A(-2, 4)$

$d = \frac{|2(-2) + (4) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$

$= \frac{5}{\sqrt{5}}$

$d: \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0 \quad A(-\sqrt{2}, 2)$

$d = \frac{|\sqrt{2}(-\sqrt{2}) - 3(2) - 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{11}} = \frac{9}{\sqrt{11}}$

تدريب: p.53

1. احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين:

$\vec{u}(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$

$\vec{v}(1-\sqrt{2}, 0, -1)$

$\vec{w}(0, -\sqrt{3}, 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + (\sqrt{3})(0) + (0)(-1)$

$= 1 - 2 + 0 + 0 = -1$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = (1-\sqrt{2})(0) + (0)(-\sqrt{3}) + (-1)(1)$

$= 0 + 0 - 1 = -1$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = (0)(1+\sqrt{2}) + (-\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (1)(0)$

$0 - 3 + 0 = -3$

$\vec{u}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{v}\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{w}(1, 0, 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)(-2) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3} = 1$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\right)(1) + (-2)(0) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$

Subject

$= \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1)(\frac{2}{3}) + (0)(-\frac{1}{6}) + (1)(\frac{1}{2})$

$= \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

2- إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

$\vec{u}(\vec{u} + \vec{v}) =$

$\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 25 - 4 = 21$

$\vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$

$= \vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = -4 - 9 = -13$

$(2\vec{u})(\vec{v} - 3\vec{u})$

$= 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{u}\|^2$

$= -8 - 150 = -158$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - 3\vec{v})$

$= \|\vec{u}\|^2 - 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2$

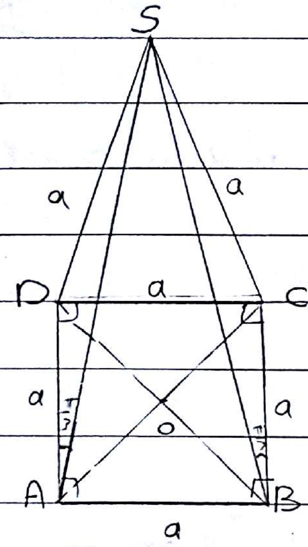
$= 25 + 12 - 4 - 27 = 16$

3- نتأمل هرماً S_ABCD قاعدته مربع ورأسه S وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a. احسب $\vec{SA} \cdot \vec{AC}$ و $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$ و $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$.

$\vec{SA} \cdot \vec{SB} =$

$\|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SB}\| \cdot \cos\frac{\pi}{3}$

$= a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$



طول القطر في المربع = طول الضلع × $\sqrt{2}$

$\vec{SA} \cdot \vec{SC} =$

نحسب AC حسب فيثاغورث في المثلث القائم ABC.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$AC = \sqrt{2}a$

نحسب عكس فيثاغورث في المثلث SAC

الوتر $(\sqrt{2}a)^2 \stackrel{?}{=} a^2 + a^2$

$2a^2 = 2a^2$

$\Leftarrow$ المثلث SAC قائم في S

$\Rightarrow \vec{SA} \perp \vec{SC} \Rightarrow \vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0$

$\vec{SA} \cdot \vec{AC} =$

المثلث SAC متساوي الساقين فيه

$\hat{A} = \hat{C} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$

$= -\vec{AS} \cdot \vec{AC} =$

$\vec{SA} \cdot \vec{AC} = -a \cdot \sqrt{2}a \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$= -\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -a^2$

KORANI

Scanned by CamScanner

Subject

$\vec{SA}\cdot\vec{AC} =$ b_2

$\vec{oA}\cdot\vec{AC} = \|\vec{oA}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\pi$

$= \frac{\sqrt{2}a}{2}\cdot\sqrt{2}a\,(-1) = -a^2$

b_3

$\vec{SA}\cdot\vec{AC} =$ S

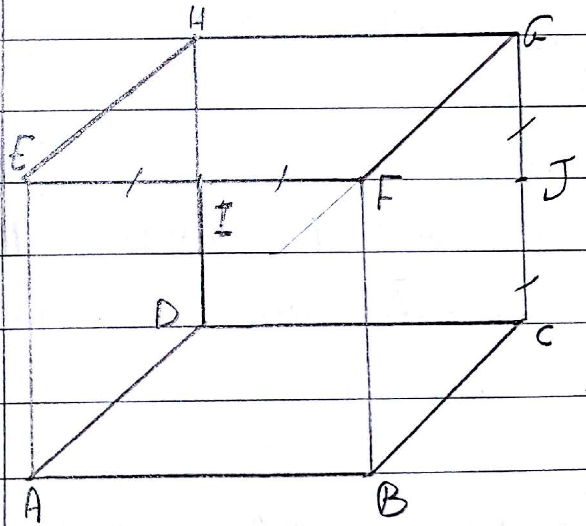
$= \vec{SA}\cdot\vec{AS} + \vec{SA}\cdot\vec{SC}$

$= -\vec{AS}\cdot\vec{AS}$

$= -\|\vec{AS}\|\cdot\|\vec{AS}\|\cos 0$

$= -a\cdot a\cdot 1 = -a^2$

4 ABCDEFGH مكعب طول ضلعه a. منتصف I منتصف [EF] و J منتصف [CG]. احسب $\vec{EI}\cdot\vec{EA}$ و $\vec{EI}\cdot\vec{FG}$ و $\vec{EI}\cdot\vec{GJ}$ و $\vec{EI}\cdot\vec{IA}$ و $\vec{JH}\cdot\vec{JD}$



Scanned by CamScanner

Subject

تدريب p:56

1. بين فيما يأتي إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين أو عين الوسيط α ليكونا كذلك

$\vec{u}(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $\quad \vec{v}(-\frac{2}{5}, 2, 3)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\frac{5}{4})(-\frac{2}{5}) + (-\frac{3}{2})(2) + (\frac{1}{2})(3)$

$= -\frac{2}{4} - \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = -2 \neq 0$

$\Leftarrow$ الشعاعان غير متعامدين

$\vec{u}(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ $\quad \vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1) + (1-\sqrt{2})(1)$

$= 0$

$\Leftarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u}(2, -\frac{1}{2}, 5)$ $\quad \vec{v}(-\frac{2}{5}, 3, \alpha)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$(2)(-\frac{2}{5}) + (-\frac{1}{2})(3) + 5\alpha = 0$

$-\frac{23}{10} + 5\alpha = 0$

$5\alpha = \frac{23}{10} \Rightarrow \alpha = \frac{23}{50}$

$\vec{u}(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2)$ $\quad \vec{v}(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\sqrt{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = 0$

$\alpha(\sqrt{3} + \frac{2}{3}) = -1$

$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3} + \frac{2}{3}}$

2. نتأمل النقطتين $A(2,-5,1)$ و $B(0,2,6)$ والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2,3,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ أثبت أن d عمودي على المستقيم (AB).

$\vec{AB}(-2, 7, 5)$

$\vec{u}(-4, 1, -3)$

$\vec{AB}\cdot\vec{u}_d = 8 + 7 - 15 = 0$

$\Leftarrow d \perp AB$

3. أطوال الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10، أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

$= \frac{1}{2}(100 - 36 - 64) = 0$

$\Leftarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

4. نتأمل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ونفترض أن $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان. أثبت أن للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

علماً أن الشعاعان متعامدان

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 0$

$u^2 - v^2 = 0$

$u^2 = v^2$

$u = v \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

تدريب ، p 59

1- في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً:

$\vec{n}(1,-1,0)$: $A(1,0,5)$

$P: 1(x-1)-1(y-0)+0(z-5)=0$

$P: x-y-1=0$

$\vec{n}(2,3,-1)$ $\quad A(\sqrt{2},-2,5)$

$2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-1(z-5)=0$

$P: 2x-3y-z-1+2\sqrt{2}=0$

$\vec{n}(\frac{2}{3},4,-1)$ $\quad A(\frac{1}{2},3,-1)$

$P: \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})+4(y-3)-1(z+1)=0$

$P: \frac{2}{3}x+4y-z-\frac{40}{3}=0$

$\vec{n}(\sqrt{3},2,0)$ $\quad A(0,-3,0)$

$P: \sqrt{3}(x-0)+2(y+3)+0(z-0)=0$

$P: \sqrt{3}x+2y+6=0$

2- في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة A موازياً المستوي P:

$P: 2x-y+3z=0$ $\quad A(1,0,1)$

بما أن Q و P متوازيان فإن لهما نفس الناظم أي:

$\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(2,-1,3)$

فتكون معادلة المستوي:

$Q: 2(x-1)-1(y-0)+3(z-1)=0$

$Q: 2x-y+3z-5=0$

$P: z=2$ $\quad A(0,0,0)$

$\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(0,0,1)$

$1(z-0)=0$

$Q: z=0$

$P: x+y=5$ $\quad A(0,3,0)$

$\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(1,1,0)$

$1(x-0)+1(y-3)+0(z-0)=0$

$x+y-3=0$

$P: 5x-3y+4z=8$ $\quad A(-1,2,-3)$

$\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(5,-3,4)$

$5(x+1)-3(y-2)+4(z+3)=0$

$5x-3y+4z+23=0$

3 ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$P: 7x+3y-z-1=0$

$Q: 6x-11y-9z-5=0$

$R: 2x-3y+5z+4=0$

$\vec{n}_P(7,3,-1)$

$\vec{n}_Q(6,-11,-9)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=42-33+9=18\neq 0$

الناظمان غير متعامدان ← المستويان غير متعامدان

$\vec{n}_P(7,3,-1$

Subject

$\vec{n}_R(2,-3,5)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 7(2)+(3)(-3)+(-1)(5)$

$= 5-5=0$

الناظمان متعامدان ⇐ المستويان متعامدان

$\vec{n}_Q(6,-11,-9)$

$\vec{n}_R(2,-3,5)$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = 12+33-45=0$

الناظمان متعامدان ⇐ المستويان متعامدان

4- بيّن في كل من الحالات الآتية بين إذا كان المستويان P و Q متقاطعين.

$P: x-y+z=0$

$Q: x-y+z-3=0$

$\vec{n}_P(1,-1,1)$

$\vec{n}_Q(1,-1,1)$

$\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 1=1=1$

المركبات متناسبة فالناظمان مرتبطان خطياً فالمستويان متوازيان أو غير متقاطعان

$P: 2x+y+5=0$

$Q: 4x+2y+z+5=0$

$\vec{n}_P(2,1,0)$

$\vec{n}_Q(4,2,1)$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$

الناظمان غير مرتبطان خطياً والمستويان متقاطعان

2- المستويان المتوازيان ناظم أحدهما هو ناظم على الآخر

3- يتعامد مستويان إذا تعامد الناظمان

4- يتقاطع مستويان إذا كان ناظماهما غير مرتبطين

5- احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $P: 2x-y+3z-5=0$ وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $Q: y-z=0$

$$d(A,P) = \frac{|2(5)-(-3)+3(4)-5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(3)^2}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{14}}$$

$$d(B,Q) = \frac{|2-5|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

تمرينات ومسائل ، P: 64

3- 1- بيّن في كل من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين:

$\vec{u}(1,-2,5)$ $\quad \vec{v}(2,-\frac{3}{2},1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2)+(-2)(-\frac{3}{2})+(5)(1)$

$= 2+3+5 = 10 \neq 0$

⇐ الشعاعان غير متعامدان

KORANI COPYBOOKS

$\vec{u}(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$ $\vec{v}(\sqrt{2},\sqrt{3},1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3+0=5\neq 0$

$\Leftarrow$ الشعاعان غير متعامدان

2- لتأخذ النقاط $A(4,1,-2)$ و $B(-1,2,4)$

و $C(0,2,-5)$ و $D(1,-2,-\frac{7}{2})$.

ولتكن M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{CD}$ و

$\vec{DB}\cdot\vec{AC}$ و $\vec{MB}\cdot\vec{CD}$.

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

$x_M=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$

$y_M=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

$z_M=\frac{-2+4}{2}=1$

$M(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(-5)(-4)+(1)(1)+(6)(-3)$

$=20+1-18=3$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=-5-4+9=0$

$\vec{DB}\cdot\vec{AC}=\begin{bmatrix}-2\\4\\\frac{15}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\1\\3\end{bmatrix}$

$=8+4-\frac{45}{2}=\frac{16+8-45}{2}=\frac{-21}{2}$

$\vec{MB}\cdot\vec{CD}=0$

3- بين في كل من الحالات الآتية إذا كان المستويان P و Q متعامدين:

$P: x+2y-5z+7=0$

$Q: x+2y+z-3=0$

$\vec{n}_P(1,2,-5)$

$\vec{n}_Q(1,2,1)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=1+4-5=0$

$\Leftarrow$ الناظمان متعامدان $\Leftarrow$ المستويان متعامدان

$P: x-3y+2=0$

$Q: y-2z+3=0$

$\vec{n}_P(1,-3,0)$

$\vec{n}_Q(0,1,-2)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0-3+0=-3$

الناظمان غير متعامدان $\Leftarrow$ المستويان غير متعامدان

4- احسب في كل من الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستوي P:

$P: x+y-2z+4=0$ $A(0,\sqrt{2},1)$

$d(A,P)=\frac{|1(0)+(\sqrt{2})-2(1)+4|}{\sqrt{0^2+(1)^2+(-2)^2}}$

$=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{6}}$

$P: 3x+y-\frac{z}{2}+7=0$ $A(5,-2,0)$

$d(A,P)=\frac{|3(5)+(-2)-\frac{0}{2}+7|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-\frac{1}{2})^2}}$

$=\frac{20}{\sqrt{\frac{41}{4}}}=\frac{20}{\frac{\sqrt{41}}{2}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$

طريقة إيجاد معادلة مستوي
عرف من ثلاث نقاط A, B, C:

1] نوجد شعاعي توجيه للمستوي من النقاط السابقة وليكن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

2] نفرض ناظم المستوي وليكن $\vec{n}(a,b,c)$.

3] نوجد علاقتين من الناظم والشعاعين السابقين كما يلي:

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC}=0$

4] نفرض [$C=$ عدد] غير الصفر ونعوض في المعادلتين السابقتين ونحلهما حلاً مشتركاً فنوجد a و b.

5] نستخدم إحدى النقاط المعطاة والناظم ونعوض في المعادلة العامة للمستوي.

مثال: تمرينات ومسائل $P.69$:

1- في الحالتين الآتيتين احسب بعد A عن المستوي P

$P: 2x-y+z+1=0 \quad A(1,2,-3)$

$$d=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2(1)-(2)+(-3)+1|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

2- $A(-1,1,1)$ و P هو المستوي المار بالنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$

$\vec{BC}=(-1,0,0)$

$\vec{CD}=(0,-3,-3)$

وهما غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب المركبات

نفرض الناظم $\vec{n}=(a,b,c)$

$\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{BC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BC}=0$

$-a+0+0=0$

$-a=0 \Rightarrow a=0$

$\vec{n}\perp\vec{CD} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{CD}=0$

$0-3b-3c=0$

نفرض $c=1$

$-3b-3(1)=0$

$-3b=3 \Rightarrow b=-1$

$\vec{n}=(0,-1,1)$

$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

$0(x-0)-1(y-1)+1(z-0)=0$

$-y+z+1=0$

$$d=\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الفصل المشترك لمستويين: هو المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين

إيجاد بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين:

1] نوجد بعد النقطة عن المستوي الأول وليكن d_1

2] نوجد بعد النقطة عن المستوي الثاني وليكن d_2.

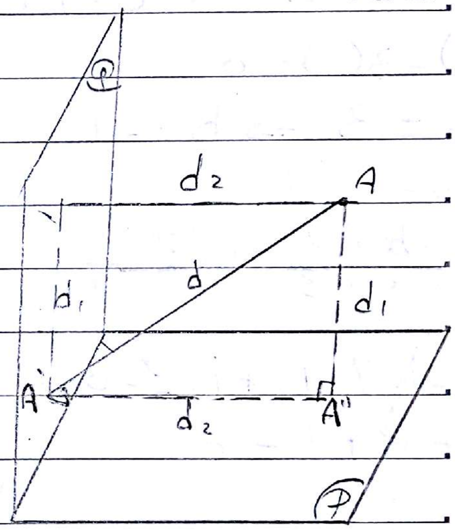
3] نوجد بعد النقطة عن الفصل المشترك للمستويين عن طريق فيثاغورث وليكن d.

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

3] نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة والمستويين P و Q :

$$P: x+y-2z-1=0$$

$$Q: x+y+z=0$$



1) أثبت أن المستويين P و Q متعامدان.

$\vec{n}_P(1,1,-2)$

$\vec{n}_Q(1,1,1)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q \overset{?}{=} 0$

$(1)(1)+(1)(1)+(1)(-2)=0$ متعامدان

$0=0$

$\Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$

فالمستويان متعامدان

2) احسب بعد A عن كل من المستويين P و Q.

$$d_1(A,P) = \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d_2(A,Q) = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

3) استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q.

حسب فيثاغورث في المثلث $AA'A''$

$$\|AA''\|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{25}{3} = \frac{54}{6} = \frac{27}{3} = 9$$

$$\Rightarrow AA' = 3$$

Subject

معادلة مستوي عرّ من نقطتين ويعامد مستوي معطى في المسألة:

1 نفرض ناظم المستوي $\vec{n}(a,b,c)$

2 نوجد علاقتين من الناظم والنقطتين المفروضتين ومن الناظم وناظم من المستوي المعطى:

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$\vec{n} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n} = 0$

المطلوب المعطى المعطى

3 نحصل على علاقتين بثلاث مجاهيل ونفرض $[c=1]$ ونوجد a و b

4 نستخدم الناظم وإحدى النقطتين ونعوض في معادلة المستوي

تمرينات ومسائل.

14 في كل من الحالات الآتية، نُعطى نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوٍ P. تحقق في كل حالة أن المستقيم (AB) ليس عمودياً على P ثم أعطِ معادلة للمستوي Q العمودي على P والمار بالنقطتين A و B.

$P: x+y+z=0$

$A(1,0,0) \quad B(0,1,1)$

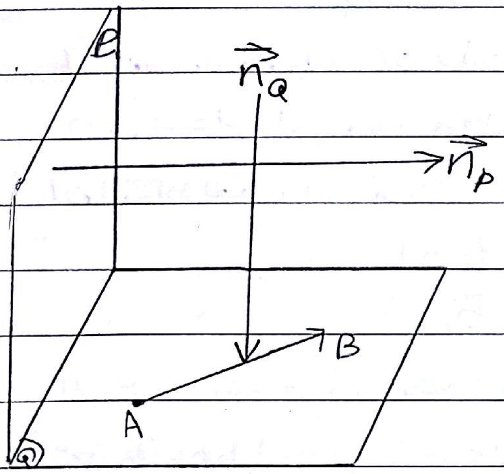
للتأكد مستقيم مع مستوي إذا كان شعاع التوجيه مرتبطاً خطياً مع الناظم

$\vec{n}_P(1,1,1)$

$\vec{AB}(-1,1,1)$

$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$

المركبات غير متناسبة $\vec{AB}$ غير مرتبط خطياً مع $\vec{n}_P$ أي لا يعامد المستوي.



نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a,b,c)(-1,1,1) = 0$

$-a+b+c=0 \quad ①$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1,1,1)(a,b,c) = 0$

$a+b+c=0 \quad ②$

نفرض أن $c=1$

$-a+b+1=0 \quad ①'$

$a+b+1=0 \quad ②'$

بالجمع: $2b+2=0$

$\Rightarrow b=-1$

نعوض في $①'$: $-a-1+1=0$

$\Rightarrow a=0$

$\vec{n}_Q(0,-1,1)$

نعوض في معادلة المستوي.

$0(x-1)-1(y-0)+1(z-0)=0$

$Q: -y+z=0$

Subject

16- نتأمل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
النقاط $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و
$C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$.

1) أثبت أن النقاط C و D و E ليست
واقعة على استقامة واحدة / أثبت
أن النقاط تعين مستوي

$\vec{DC}(4,-4,0)$

$\vec{DE}(1,-5,1)$

المركبات غير متناسبة والأشعة غير
مرتبطة خطياً ليست على استقامة
واحدة (تعين مستوي)

2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على
المستوي (CDE).

$\vec{AB}(-1,-1,-4)$

$\vec{CD}(-4,4,0)$

$\vec{ED}(-1,5,-1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{ED}=(-1)(-1)+(-1)(5)+(-4)(-1)=0$

$\Leftarrow$ متعامدان $\vec{AB},\vec{ED}$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=(-1)(-4)+(-1)(4)+(-4)(0)=0$

$\Leftarrow$ متعامدان $\vec{AB},\vec{CD}$

$\Rightarrow AB \perp (CDE)$

18- نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
النقطتين $A(-1,0,1)$ و $\Omega(2,-1,3)$
نهدف إلى كتابة معادلة للكرة S التي
مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

1) احسب ΩA.

$\Omega A=\sqrt{(-3)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ
احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z.

نفرض $M(x,y,z)$

$\Omega M^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

$=x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-6z+9$

$=x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14$

3) أثبت أن $M(x,y,z)$ نقطة من S إذا وفقط
إذا تحقق الشرط $\Omega M^2=\Omega A^2$ واستنتج
معادلة للكرة S المطلوبة.

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من الكرة إذا وفقط
إذا كان $\Omega M=R$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^3}=\sqrt{14}$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

19- في معلم متجانس اكتب معادلة للكرة التي
مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

$A(1,1,1)$ $\Omega(0,0,1)$

$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$R=\Omega A=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=2$

$x^2+y^2+(z-1)^2=2$

$A(1,-2,3)$ $\Omega(0,5,-1)$

$\Omega A=\sqrt{1+49+16}=\sqrt{66}$

$(x-0)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=66$

Subject

20- في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω

ونصف قطرها r.

$r=2$ $\quad \Omega(1,2,3)$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$

$r=\sqrt{3}$ $\quad \Omega(0,5,-1)$

$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

21- في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

في الحالات الآتية: توقع 2020

$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

ترتيب (1)

$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$

لـ ← نربع ← نضيف دائماً ← + ← −

$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-2-1-9=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$

⇐ مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها

$(1,-3,0)$

ونصف قطرها

$R=\sqrt{14}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$2x^2-4x$

$2(x^2-2x)$

$2(x^2-2x+1-1)$

$2(x-1)^2-2$

7- في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل

نقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ومستوياً

P نقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين

موجهين أثبت أن المستقيم (AB) عمودي

على المستوي P.

$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(1)(-3)+(1)(-5)+(-2)(-4)$

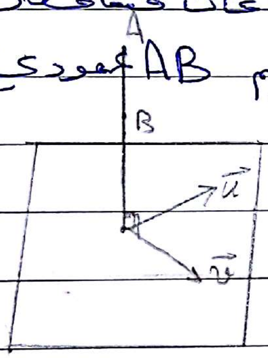
$=-8+8=0$

⇐ الشعاعان متعامدان

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=(3)(-3)+(-1)(-5)+(-1)(-4)=0$

⇐ الشعاعان متعامدان

⇐ المستقيم AB عمودي على المستوي P



22- في معلم متعامد نتأمل النقطة $A(2,-2,2)$

والمستوي $P: x+2y+3z=5$ نفرض

اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس

المستوي P هام جداً دورة

كرة تمس مستوي يكون R هو بعد المركز عن المستوي

معادلة الكرة:

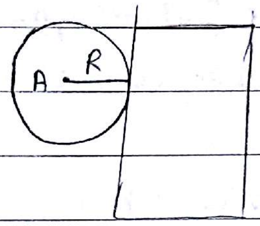
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

$R=dist(A,P)=\dfrac{|2+(2)(-2)+3(2)-5|}{\sqrt{1+4+9}}$

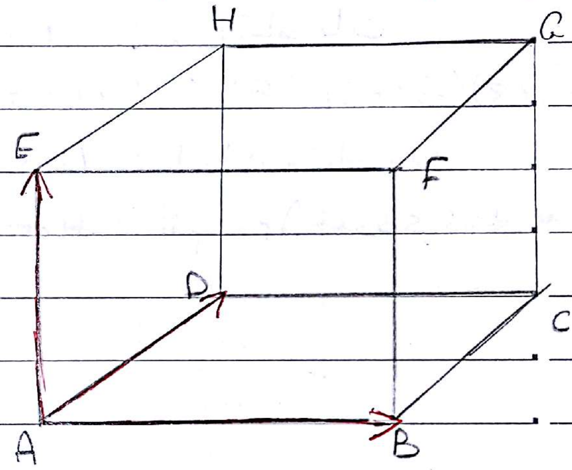
$=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

معادلة الكرة تصبح:

$$(x+2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$$



إحداثيات المكعب في الفراغ:



لدينا المعلم: راقم ترتيب كاملة

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$

$B(1,0,0)$

$D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$

$H(0,1,1)$

$F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$

$C(1,1,0)$

إذا كان طول ضلع المكعب $\star$ فيكون المعلم

$(A, \frac{1}{\star}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\star}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{\star}\overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$

$B(\star,0,0)$

$D(0,\star,0)$

$E(0,0,\star)$

$F(\star,0,\star)$

$G(\star,\star,\star)$

$C(\star,\star,0)$

$H(0,\star,\star)$

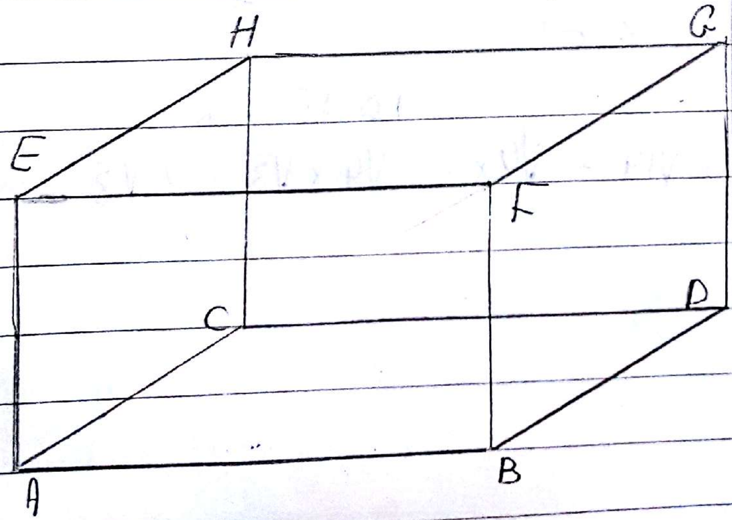
ملاحظة هامة:

لدينا المعلم $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{i}=\frac{1}{\star}\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AB}=\star\vec{i}$

$\vec{j}=\frac{1}{\star}\overrightarrow{AD}$ أو $\overrightarrow{AD}=\star\vec{j}$

$\vec{k}=\frac{1}{\star}\overrightarrow{AE}$ أو $\overrightarrow{AE}=\star\vec{k}$



Subject

ثم نتمم. $y^2 - y + z^2 - 4z + x^2 = 0$

$y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + z^2 - 4z + 4 - 4 + x^2 = 0$

$(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (z-2)^2 - 4 + x^2 = 0$

$(y-\frac{1}{2})^2 + (z-2)^2 + x^2 - \frac{17}{4} = 0$

$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-2)^2 = \frac{17}{4}$

ج) ما طبيعة المجموعة E؟

تمثل مجموعة النقاط معادلة كرة من الشكل

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

مركزها $(0, \frac{1}{2}, 2)$

ونصف قطرها $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

9

$(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{AB}$ $\vec{AD}$ $\vec{AA'}$

المعلم هو

$(A, \frac{1}{b}\vec{AB}, \frac{1}{a}\vec{AD}, \frac{1}{c}\vec{AA'})$

$A(0,0,0)$

$B(b,0,0)$

$D(0,a,0)$

$A'(0,0,c)$

$B'(b,0,c)$

$C'(b,a,c)$

$C(b,a,0)$

$D'(0,a,c)$

$(A, \frac{1}{☆}\vec{AB}, \frac{1}{♡}\vec{AD}, \frac{1}{\Delta}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$

$B(☆,0,0)$

$D(0,♡,0)$

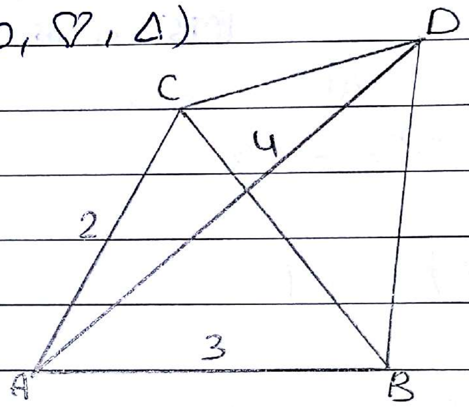
$E(0,0,\Delta)$

$C(☆,♡,0)$

$G(☆,♡,\Delta)$

$F(☆,0,\Delta)$

$H(0,♡,\Delta)$



$(A, \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AC}, \frac{1}{4}\vec{AD})$

23) في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

أ) أعط معادلة للمجموعة E المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

نفرض $M(x,y,z)$

$(2-x, 1-y, 2-z)\cdot(-2-x, -y, 2-z)=0$

$-4-2x+2x+x^2-y+y^2+4-2z-2z+z^2=0$

$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$

Subject

11) $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$

لتكن النقطة I منتصف $[AB]$

1) أعط معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

$I(1,0,0)$ $F(2,0,1)$.

$H(0,1,1)$ $G(2,1,1)$.

2) اكتب معادلة للمستوي (IFH).

نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$

هو ناظم المستوي (IFH) فهو عمودي

على $\overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{IF}$.

$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

$\overrightarrow{IF}(1,0,1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IH}=0 \Rightarrow$

$(a,b,c)(-1,1,1)=0$

$-a+b+c=0$ ①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IF}=0 \Rightarrow$

$(a,b,c)(1,0,1)=0$

$a+c=0$ ②

نجمع ① و ②

$b+2c=0$

نفرض $c=1$

$\Rightarrow b=-2$

نعوض $c=1$ في ②

$a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$\vec{n}(-1,-2,1)$

نعوض في معادلة المستوي العامة

$-(x-1)-2(y-0)+1(z-0)=0$

$-x-2y+z+1=0$

وهي معادلة المستوي. $dist=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

27) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$ هام جداً سؤال دورة

1) أعط معادلة المستوي المحوري P_1 للقطعة $[AB]$. المستوي المحوري هو المستوي العمودي على القطعة في منتصفها

نفرض I منتصف AB:

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=3$

$y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=1$

$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$

$\Leftarrow (3,1,-\frac{1}{2})$ وهي النقطة التي يمر منها المستوي

ويكون الناظم

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$

$\Leftarrow$ معادلة المستوي

$-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\frac{1}{2})=0$

$-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$

وهي معادلة المستوي.

KORAN COPYBOOKS

Scanned by CamScanner

Subject

2) أثبت أن d هو مجموعة النقاط

$M\left(-\frac{5}{3}Z+1 ,\ \frac{2}{3}Z-2 ,\ Z\right)$

عندما تتحول Z في R.

نحل المجاهيل الثلاثة بدلالة أحد المجاهيل (بدلالة المجهول) بالسؤال

كاتبين: عندما تتحرك (Q)

نكتب المجاهيل بدلالة Z,

$Q - P \Rightarrow$

$3y - 2Z + 6 = 0$

$3y = 2Z - 6$

$\div 3 \Rightarrow y = \frac{2Z-6}{3}$

نضرب Q بـ 2 ثم نجمع مع P:

$3x + 5Z - 3 = 0$

$3x = -5Z + 3$

$x = \frac{-5Z+3}{3}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}Z+1,\ \frac{2}{3}Z - ,\ Z\right)$

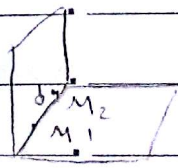
مجموعة النقاط تمثل الفصل المشترك للمستويين

3) أعط شعاع توجيه للمستقيم d.

$Z = 0 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$

$x + y + 1 = 0$

$3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -2$



$\Rightarrow M_1(1,-2,0)$

$Z = 0 \Rightarrow M_1(1,-2,0)$

نعوض M_2

$Z = 3 \Rightarrow M_2(-4,0,3)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-5,2,3)$

4) اكتب معادلة المستوي R العمودي على كل من P و Q ويمر بالنقطة A(2,5,-2).

R عمودي على P و Q

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}_R \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

$\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0$ (2)

KORAN

الموضوع التاريخ / / 201

المستويات و المستقيمات في الفراغ

* حل جملة المعادلات الخطية بـ 3 مجاهيل :

[1] طريقة الحذف بالجمع :
نضرب أحد المعادلات بعدد مناسب ونجمعه مع معادلة أخرى لكي يختفي المجهول فنحصل على معادلة جديدة «4» بمجهولين ثم نطبق نفس الطريقة على زوج آخر من المعادلات فنحصل على معادلة جديدة «5» تحوي على نفس المجهول ، نعوض المعادلتين 4 و 5 في معادلة

مثال : حل جملة المعادلات :

$\boxed{1}$ $2x - y + 3z = 0$

$\boxed{2}$ $x - 2y + z = 1$

$\boxed{3}$ $x + y - z = 2$

نجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$

$\Rightarrow 3x + 2z = 2$

$x = \dfrac{2-2z}{3}$ $\boxed{4}$

نطرح $\boxed{2}$ - $\boxed{3}$

$\Rightarrow -3y + 2z = -1$

$y = \dfrac{-1-2z}{-3}$ $\boxed{5}$

نعوض في 4 و 5 في 3

$\dfrac{2-2z}{3} + \dfrac{-1-2z}{-3} - z = 2$

نضرب الطرفين بـ 3-

$-2 + 2z - 1 - 2z + 3z = -$

$3z = -3 \Rightarrow z = -1$

نعوض في 4 :

$\Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

نعوض في 5 :

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ الحل هو $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}, -1\right)$

[2] طريقة الحذف بالتعويض
في المثال السابق من $\boxed{3}$ نجد

$\boxed{4}$ $x = y + z + 2$

نعوض $\boxed{4}$ في $\boxed{1}$

$-2y + 2z + 4 - y + 3z = 0$

$\boxed{5}$ $-3y + 5z = -4$

نعوض $\boxed{4}$ في $\boxed{2}$

$-y + z + 2 - 2y + z = 1$

$\boxed{6}$ $-3y + 2z = -1$

بالحل المشترك بين $\boxed{5}$ و $\boxed{6}$ نجد

$3z = -3 \Rightarrow z = -1$

التكملة بنفس الطريقة .

ملاحظات هامة

[1] أثناء حل المعادلات نصادف أشياء غريبة مثل

$0=0$ أو $2=2$

عندها تكون المعادلة تقبل عدد غير منتهي من الحلول

[2] عندما يظهر $2=0$ عندها تكون الجملة متناقضة أي ليس لها حل.

تعريف المستقيم في الفراغ

المستقيم AB هو مجموعة مراكز الأبعاد M المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-t)$ (B,t) حيث $t\in\mathbb{R}$ أي تحقق مايلي النقطة M من المستقيم AB تكون:

$$(1-t)\vec{AM} + t\vec{BM} = \vec{0}$$

* تعريف القطعة المستقيمة:

القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t)$ (B,t) أي تحقق: مجموع المثقلين = 1 حيث $t\in[0,1]$ أمثال موجبة

$$(1-t)\vec{AM} + t\vec{BM} = \vec{0}$$

* تعريف داخل المثلث ABC:

هو مجموعة مراكز الأبعاد للنقاط المثقلة (A,α) (B,β) (C,γ)

حيث $\alpha,\beta,\gamma>0$

تعريف المستوي في الفراغ:

المستوي (ABC) هو مجموعة M التي تحقق: $x,y\in\mathbb{R}$

$$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

انتماء نقطة الى مستوي:

حتى تنتمي النقطة M الى المستوي (ABC) فذلك يقتضي وجود عددين x و y بحيث تكون M مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1-x-y)$ (B,x) (C,y)

* نتيجة:

لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أن أحدها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الأخريين.

* نتيجة: لإثبات وقوع 4 نقاط في مستوي واحد يكفي إثبات أن إحداها مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة الأخرى.

التمثيل الوسيطي لمستقيم:

نحتاج نقطة وشعاع موجه للمستقيم اذا مر المستقيم بنقطة معلومة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$ فإننا نستنتج المعادلات الوسيطية كما يلي:

نأخذ نقطة $M\in d$ عندها $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا أي:

$$\vec{AM} = t\vec{u}$$

$[x - x_A , y - y_A , z - z_A] = t(a,b,c)$

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أو نكتب هذا:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال: اكتب المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر بالنقطة $A(2,1,3)$ ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,5,-1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 3 - 1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال: اكتب معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $A(2,1,-5)$ $B(3,2,-1)$

شعاع التوجيه $\vec{u} = \vec{AB} = (1,1,4)$

$$\begin{cases} x = 3 + 1t \\ y = 2 + 1t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

* التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة

هي نفس المعادلات السابقة

لكن $t \in [0,1]$

* التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم

هي نفس المعادلات السابقة لكن

$t \in [0,+\infty[$

أو $t \in]-\infty,1]$

متى يتقاطع مستقيمان:

يوجد شرطين: مثال ص83

[1] أن يكون المستقيمان غير متوازيين أي المركبات غير متناسبة

[2] يجب أن يقعا في مستوي واحد أي يوجد حل مشترك لمعادلتيهما.

متى يتقاطع مستقيم مع مستوي:

$\vec{u} \leftarrow d$

$\vec{n_p} \leftarrow P$

$\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow P \parallel d$

$\vec{n}$ لا يعامد $\vec{u}$ $\Rightarrow$ P تقطع d

إذا كانت المركبات متناسبة في شعاعي توجيه المستقيمين فالمستقيمان متوازيان

كل ما يقولوا تقاطع <= حل مشترك

٤- إيجاد نقطة التقاطع بين مستقيم ومستوي: مثال ص 87

فإننا نعوض معادلات المستقيم الثلاثة في معادلة المستوي ونجد t ثم نعوض مرة أخرى في المعادلات الوسيطية الثلاث فنجد نقطة التقاطع

ملاحظة: أثناء تقاطع مستقيم مع مستوي إذا طلع $0=0$ فإنه يوجد عدد غير منته من نقاط التقاطع أي أن المستقيم يقع في المستوي (محتوى في)

متى يتقاطع مستويين

$P \longrightarrow \vec{n_P}$

$Q \longrightarrow \vec{n_Q}$

$\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}$ مرتبطان خطياً ⇓ المستويان متوازيان

$\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}$ غير مرتبطان خطياً ⇓ المستويان متقاطعان

نميز الحالات التالية حينما نحل جملة المعادلتين مثلاً مذكورة في الكتاب "الصفحة 85"

* فقرة امتحانية هامة:

إيجاد الفصل المشترك لمستويين متقاطعين [أي سنوجد المعادلات الوسيطية]

يوجد صياغة طرق:

الطريقة الأولى:

نوجد نقطتين مشتركتين من المعادلتين كما يلي

ثم نوجد شعاع توجيه للمستقيم المحدد منهما

* مثال: أوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمعادلتين

$2x+y-z+2=0$

$x+2y-z+1=0$

الحل: نفرض $x=0 \Leftarrow$

$\boxed{1}\ y-z+2=0$

$\boxed{2}\ 2y-z+1=0$

نضرب المعادلة $\boxed{1}$ بـ 2 ونطرح

$\boxed{1}\ 2y-2z+4=0$

$\boxed{1}-\boxed{2} \Rightarrow -z+3=0 \Rightarrow 3=z$

نعوض في $\boxed{1} \Rightarrow y=1$

$A(0,1,3)$

نفرض $y=0 \Rightarrow$ $\boxed{1}\ 2x-z+2=0$

$\boxed{2}\ x-z+1=0$

نضرب المعادلة $\boxed{2}$ بالعدد 2

$\boxed{2}\ 2x-2z+2=0$

$\boxed{1}-\boxed{2} \Rightarrow z=0$

نعوض في $\boxed{1}$ $2x=-2 \Rightarrow x=-1$

$B(-1,0,0)$

$\vec{u}=\vec{AB}(-1,-1,-3)$

$$d: \left\{\begin{array}{l} x=-1-1t \\ y=0-1t \\ z=0-3t \end{array}\right. \quad t\in \mathbb{R}$$

تمارين صفحة 84

[1]

$x = x_A + at$

$y = y_A + bt$

$z = z_A + ct$

$x = -1$

$y = 2 + t \quad ; t \in \mathbb{R}$

$z = -t$

[2] (1) نوجد شعاع التوجيه $\vec{AB}$

$\vec{AB}(4,2,1)$

$x = -2 + 4t$

$y = 1 + 2t \quad , t \in \mathbb{R}$

$z = 0 + t$

(2) $\vec{u} = \vec{AB} = (4,2,1)$

$x = 2 + 4t$

$y = 3 + 2t \quad , t \in [0,1]$

$z = 1 + t$

(3) $x = -2 + 4t$

$y = 1 + 2t \quad , t \in [0, +\infty[$

$z = t$

(4) $x = -2 - 4t$

$y = 1 - 2t \quad , t \in]-\infty, 0]$

$z = -t$

[3] $A(0,0,0)$ $D(0,1,0)$

$B(1,0,0)$ $G(1,1,1)$

$E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$C(1,1,0)$ $I(1,\frac{1}{2},0)$

$H(0,1,1)$ $I(1,\frac{1}{2},0)$

$J(\frac{1}{2},1,0)$ $K(0,\frac{1}{2},1)$

$\vec{IK}(-1,0,1)$

$x = 0 - t$

$y = \frac{1}{2} \quad , t \in \mathbb{R}$

$z = 1 + t$

$\vec{FJ}(-\frac{1}{2},1,-1)$

$x = 1 - \frac{1}{2}\lambda$

$y = \lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$

$z = 1 - \lambda$

$\vec{u_1}(-1,0,1)$ $\vec{u_2}(-\frac{1}{2},1,-1)$

$\frac{-1}{-\frac{1}{2}} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow 2 \neq 0$

الشعاعان غير مرتبطان خطيا المستقيمان غير متوازيين

ندرس التقاطع.

$-t = 1 - \frac{1}{2}\lambda$ [1]

$\frac{1}{2} = \lambda$ [2]

$1 + t = 1 - \lambda$ [3]

نعوض [2] في [3]

$1 + t = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

نعوض في [1]

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})$

$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$

المستقيمان غير متقاطعان

⇐ متخالفان

⇐ النقاط الأربعة لا تقع في مستو واحد

تدريب صفحة 87

①

$P_1: x + y = 2$

$P_2: x + z = 1$

$\vec{n}_{P_1}(1, 1, 0)$

$\vec{n}_{P_2}(1, 0, 1)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$

المركبات غير متناسبة فالمستويان متقاطعان

نفرض $x=0$

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 1$

$A(0, 2, 1)$

نفرض $y=0$

$\Rightarrow x = 2$

$2 + z = 1 \Rightarrow z = -1$

$B(2, 0, -1)$

$\vec{AB}(2, -2, -2)$

$x = 0 + 2t$

$y = 2 - 2t \quad , t \in \mathbb{R}$

$z = 1 - 2t$

②

$P_1: -x + y + z = 3$

$P_2: 2x - y + 2z = 1$

$\vec{n}_{P_1}(-1, 1, 1)$

$\vec{n}_{P_2}(2, -1, 2)$

$\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{-1}$

المركبات غير متناسبة والمستويان متقاطعان

نفرض $x=0$ ونعوض في المعادلتين

$y + z = 3 \quad \boxed{1}$

$-y + 2z = 1 \quad \boxed{2}$

بالجمع

$3z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{3}$

نعوض في $\boxed{1}$

$y = \frac{5}{3}$

$A(0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$

نفرض $y=0$ ونعوض:

$-x + z = 3 \quad \boxed{3}$

$2x + 2z = 1 \quad \boxed{4}$

نضرب المعادلة 3 بـ 2

$-2x + 2z = 6$

ونجمع مع المعادلة 4:

$\Rightarrow 4z = 7 \Rightarrow z = \frac{7}{4}$

نعوض في 3:

$-x + \frac{7}{4} = 3$

$x = \frac{-5}{4}$

$B(\frac{-5}{4}, 0, \frac{7}{4})$

$\vec{AB}(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{12})$

$$\begin{cases} x = 0 - \frac{5}{4}t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{5}{3}t \\ z = \frac{4}{3} + \frac{5}{12}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

[2] [1] نفرض أن $x = 0 \Leftarrow$

$-y - 2z = 1$ (3)

$-y - z = 0$ (4)

نضرب (3) بـ (-1) ونجمع مع (4)

$\Rightarrow y + 2z = -1$

$-y - z = 0$

$\Rightarrow z = -1$

نعوض في 4

$\Rightarrow y = 1$

$A(0, 1, -1)$

نفرض أن $z = 0 \Leftarrow$

$3x - y = 1$ (*)

$x - y = 0$ (**)

نضرب (*) بـ (-1) ونجمع مع (**)

$-3x + y = -1$

$x - y = 0$

$\Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{AB}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$$d' \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}s \\ y = 1 - \frac{1}{2}s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

$\vec{u_1}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$\vec{u_2}(1, -1, 2)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ متوازيان

ندرس التطابق

$t = \frac{1}{2}s$ (1)

$-t = 1 - \frac{1}{2}s$ (2)

$2t - 1 = -1 + s$ (3)

(1)+(2) $\Rightarrow 0 = 1$

مساواة غير ممكنة

متوازيان غير متطابقان

---

[3] (1) $A(-1, 2, 3)$

$B(1, 2, -1)$

$P: x + y + z = 1$

$\vec{u} = \vec{AB}(2, 0, -4)$

$\vec{n} = (1, 1, 1)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0$

المستقيم يقطع المستوي

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB)

$x = 1 + 2t$

$y = 2$

$z = -1 - 4t$

نعوض في معادلة المستوي

$1 + 2t + 2 - 1 - 4t = 1$

$t = \frac{1}{2}$

نعوض عن t في المعادلات الوسيطية

نقطة التقاطع

$x = 2$

$y = 2$ $\quad (2, 2, -3)$

$z = -3$

[2] متجه توجيه $\vec{u}_d\ (1, -2, 0)$

$A(2, -1, 0)$

نكتب المعادلات الوسيطية ثم كالسابق

نقطة التقاطع $(0, 3, 0)$

[4] نفس 3

نقطة التقاطع $\left(-2, -\frac{1}{2}, 5\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{u} \perp \vec{n}$ المستقيم لا يقطع المستوى

بل يوازيه

تقاطع ثلاث مستويات

عند دراسة تقاطع ثلاث مستويات نحل

المعادلات الثلاث معاً مشتركة

* تحويل صيغة 3 معادلات وسيطية الى صيغة معادلتي مستقيم.

مثال:

اكتب صيغة معادلتي المستقيم L الذي معادلاته الوسيطية

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + 5 \\ y &= 3t - 2 \\ z &= t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$t = \frac{x-5}{2}$

$t = \frac{y+2}{3}$

$t = z$

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{3} = z$$

$3x - 15 = 2y + 4$

$3x - 2y - 19 = 0$

$y + 2 = 3z$

$y - 3z + 2 = 0$

اذا كتبت معادلة المستقيم عن طريق معادلتي مستويين

لوجد نقطتين مشتركتين بين المستويين "في الفصل المشترك"

مثال: ادرس تقاطع المستويات الثلاثة:

$\boxed{1}\quad x + y - 2z = -1$

$\boxed{2}\quad 3x + y - z = -1$

$\boxed{3}\quad -2x - 2y + 4z = 1$

$\boxed{1}$ نوجد الفصل المشترك لـ $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$
ونوجد المعادلات الوسيطية

$\boxed{2}$ نعوض المعادلات في المستوي الثالث
فنستنتج نقطة التقاطع أو نحصل على مساواة
خاطئة ⟸ لا يوجد نقطة تقاطع
أو $0 = 0$ ⟸ المستويات الثلاثة
تتقاطع بنفس الفصل المشترك

مثال

$P_1: -x + 2y + 3z - 5 = 0$

$P_2: 3x - y - 4z + 5 = 0$

$P_3: 2x + 3y - 2z + 2 = 0$

ملاحظة هامة مثل ما ستغربي إذا شفتي هيك شي ..

لدينا معلم $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث

$\vec{AB} = ☆\,\vec{i}$ أو $\vec{i} = \frac{1}{☆}\vec{AB}$

$\vec{AD} = ♡\,\vec{j}$ أو $\vec{j} = \frac{1}{♡}\vec{AD}$

$\vec{AE} = \triangle\,\vec{k}$ أو $\vec{k} = \frac{1}{\triangle}\vec{AE}$

لإثبات تلك الشعة مرتبطة خطياً نكتب شعاع بدلالة شعاعين آخرين ولا تنسى ترد بطين بعدد.

كيف أثبت أنو نقطة لا تقع على مستقيم بوجد شعاعين و بأثبت أنن غير مرتبطين وهيك تكون النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

RoRo

هامين جداً جداً ‼

عنا نوعين من المعالم

معلم متجانس

متى نستخدم

عندما يكون الشكل:

1. مكعب
2. متوازي مستطيلات
3. رباعي الوجوه المتعامدة "الكل"

هون فينك تستخدمه لحساب كل شي وتطبيق هاد القانون

$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

معلم كيفي

متى نستخدم

عندما يكون الشكل متوازي سطوح مثلاً

هون نفرض المعلم ونستخدمه لكل شي ما عدا عند الزاوية هون نستخدم هاد القانون

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

ومنحسب الزاوية أو العكس

هامة جداً لإعادة تنسيها

لحساب بعد نقطة عن مستوي نستخدم قانون الـ dist

نقول إحداثيات نقطة ومركبات شعاع

كيف نوجد مركبات شعاع ؟!

$\vec{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$

كرة

مركز

نصف قطر

حل تمرينات ومسائل

1) a. $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$

$O(0,0,0)$ $\quad B(0,1,0)$

$A(1,0,0)$ $\quad C(0,0,1)$

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3}$

$y_G = \frac{1}{3}$ $\quad z_G = \frac{1}{3}$

$G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

نبرهن أن $\vec{OG}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين وهما AB و AC :

$\vec{AB}(-1,1,0)$ $\quad \vec{OG}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\vec{AC}(-1,0,1)$ وهما غير مرتبطان لعدم تناسب المركبات

$\vec{OG} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftarrow (OG) \perp (AB)$

$\vec{OG} \cdot \vec{AC} = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftarrow (OG) \perp (AC)$

ومنه $(OG) \perp (ABC)$

2) a. $A'(2,0,0)$

$B'(0,2,0)$

$C'(0,0,3)$

$\vec{A'B'}(-2,2,0)$

$\vec{A'C'}(-2,0,3)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{A'B'} = 0$

$-2a + 2b = 0$ [1]

$\vec{n} \cdot \vec{A'C'} = 0$

$-2a + 3c = 0$ [2]

نفرض $c = 1 \Leftarrow$

$-2a + 2b = 0$

$-2a + 3 = 0$

من * نجد $-2a + 2b = 0$

$2a = 2b \Rightarrow a = b$

نعوض في **

$-2b + 3 = 0$

$-2b = -3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$\vec{n}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$\frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{2}(y-0) + 1(z-0) = 0$

$3x + 3y + 2z - 6 = 0$

طريقة ثانية فقط في هذا التمرين

$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$

احداثيات للنقاط المارة

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

$3x + 3y + 2z - 6 = 0$

حتى تنتمي النقطة M الى المستقيم AC يجب أن يتحقق الشرط $\vec{AM} = k\vec{AC}$

$\vec{AM} = K\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x-1 = -K$

$x = 1-K$

$y = 0$

$z = K$ وسيط

c. نقطة التقاطع

نقطة $K(4,0,-3)$

[3] a. $L(0,4,-3)$

b. لاثبات (AB) $(A'B')$ و (KL)

نأخذ الزوج $\vec{AB}$ و $\vec{A'B'}$ ونبرهن الارتباط

نأخذ الزوج $\vec{AB}$ ، $\vec{KL}$ ونبرهن الارتباط

[4] $K \in (AC) \Rightarrow K \in (ABC)$

$K \in (A'B'C')$

$\Leftarrow$ K مشتركة بين المستويين $(A'B'C')$ (ABC)

$L \in (BC) \Rightarrow L \in ABC$

$L \in (A'B'C')$

$\Leftarrow$ L مشتركة بين المستويين (ABC) و $(A'B'C')$

$\Leftarrow$ المستويين (ABC)

$(A'B'C')$ مشتركان نفصل مشترك (KL)

[1] اذا ما حللنا بالنسبة $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ سيباني علامة

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$

$C(2,1,0)$ $F(2,0,1)$

$G(2,1,1)$ $H(0,1,1)$

$I(1,0,0)$ $J(2,1,\frac{1}{2})$

[2] $DJ = \sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2+(\frac{1}{2}-0)^2}$

$= \frac{\sqrt{17}}{2}$

$IJ = \frac{3}{2}$

$\vec{DI}\ (1,-1,0)$

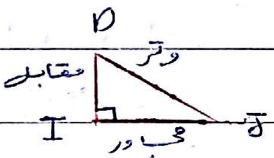
$\vec{IJ}\ (1,1,\frac{1}{2})$

$\vec{DI} \cdot \vec{IJ} = 0$ محقق

$\Rightarrow DI \perp IJ$

المثلث DIJ قائم في I

$\cos I\hat{J}D = \frac{IJ}{DJ} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$



(3) نختار الشعاعين ونفرضنا ... ونصل لمعادلة

$x+y-4z-1=0$

$dist(H, DIJ) = \frac{|0+1-4(1)-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Scanned by CamScanner

4 حجم رباعي الوجوه

$= (HDIJ)$

$\frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

نحتاج مساحة القاعدة

(DIJ) وهو مثلث قائم

$S = \frac{1}{2} [DI] [IJ]$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{2}) (\frac{3}{2})$

<= حجم رباعي الوجوه

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{1}{3}$

شعاع توجيه d هو نفسه ناظم المستوي

الطول المستقيم عن المستوي

كل ما يقول أوجد بعد نقطة عن مستوي وبعدها يطالب حساب حجم رباعي الوجوه أو الهرم يكون البعد هو طول الارتفاع

أهم قوانين المساحة

حجم الهرم هو $\frac{1}{3} S.h$

مساحة القاعدة:

اذا كانت القاعدة مربع تكون مساحته هي

$S = (\text{طول الضلع})^2$

مستطيل العرض × الطول = S

مثلث قائم $S = \frac{1}{2}$ قائم 1 × قائم 2

مثلث متساوي الأضلاع

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{طول الضلع})^2$

مساحة متوازي الأضلاع:

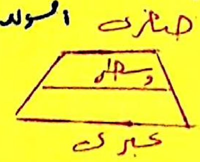
$S = \frac{1}{2}$ القطر 1 × القطر 2

مساحة مثلث سابق للتوضيح:

$S = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

مساحة شبه المنحرف:

S = الارتفاع × القاعدة الوسطى



القاعدة الوسطى $= \frac{\text{كبرى} + \text{صغرى}}{2}$

$7 \times$ عدد $= -5$

عدد $= \frac{-5}{7}$

التاريخ / / 201 — الموضوع

طريقة غاوس لحل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

نطبق ما يلي:

1 نجعل أمثال x في المعادلة الأولى واحداً

2 نصفّر أمثال x في المعادلة الثانية

3 نصفر أمثال x في المعادلة الثالثة

4 نصفر أمثال y في المعادلة الثالثة بالاعتماد على السطر الذي يسبقه "الثانية"

5 نحل المعادلات الناتجة من الأسفل إلى الأعلى

6 إذا طلع $0 = 0$ فإن الجملة لها عدد غير منتهي من الحلول أي المستويات منطبقة أو لها حل مشترك

7 إذا طلع مساواة خاطئة $0 = 2$ فالجملة مستحيلة أما المستويات متوازية ونتأكد من ذلك عن طريق الارتباط الخطي للثلاثة

مثال: حل جملة المعادلات وادرس تقاطع المستويات الثلاثة

[1] $2x - y + 3z = 0$

[2] $3x - 2y + 4z = 11$

[3] $x - 3y + 2z = 1$

نبدل المعادلة الأولى بالثالثة

$L_1 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow x - 3y + 2z = 1$

$3x - 2y + 4z = 11$

$2x - y + 3z = 9$

نضرب المعادلة الأولى بـ -3 على سودة ثم نجمع مع الثانية

$-3L_1 + L_2 \Rightarrow$ $x - 3y + 2z = 1$ [1]

$-2L_1 + L_3$ $\quad 7y - 2z = 8$ [2]

$5y - z = 7$ [3]

نضرب المعادلة الثانية بـ $\frac{-5}{7}$ ثم نجمعها مع 3

$\frac{-5}{7} L_2 + L_3 \Rightarrow$

$x - 3y + 2z = 1$ [1]

$7y - 2z = 8$ [2]

$\frac{3}{7} z = \frac{9}{7}$ [3]

من 3

$z = 3$

$y = 2$ نعوض في 2

$x = 1$ نعوض في 1

بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ أو

بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين

نطبق ما يلي :

[1] نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم "المعادلات للفصل المشترك"

[2] نوجد معادلة المستوي المار من A والعمودي على d [d هو الناظم] والنقطة d مع المستوي فتكون مسقط النقطة A على المستقيم ولتكن A'

تمرين [5] صفحة 66

$$2x - y + z - 4 = 0$$

$$x + y + 2z - 5 = 0$$

[1] تقاطع المستويين :

الناظمان غير مرتبطان خطياً

[2] (1) نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك

بالجمع :

$$3x + 3z - 9 = 0$$

$$3\div \quad x + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = -z + 3$$

نعوض في [2]

$$-z + 3 + y + 2z - 5 = 0$$

$$z + y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -z + 2$$

$\Rightarrow$ المعادلات الوسيطية

نفرض $z = t$

$$x = -t + 3$$

$$y = -t + 2 \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$z = t$$

نوجد معادلة المستوي المار من A والعمودي على d حيث

$$\vec{n} = \vec{u_d} = (-1, -1, 1)$$

$$-1(x-2) - 1(y+1) + 1(z-2) = 0$$

$$-x - y + z = 0$$

وهي معادلة المستوي

نوجد نقطة تقاطع d مع المستوي السابق

$$-(-t+3) - (-t+2) + t = 0$$

$$t = \frac{5}{3}$$

نعوض في المعادلات الوسيطية لـ d .

$$x = \frac{-5}{3} + 3 = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{-5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{5}{3}$$

$$d = AA' = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

الموضوع .... التاريخ / / 201

أصعب فقرة في الهندسة

"السند عسر ونحلها أسهل فقرة"

ص 67 8 — 17,4,12 — إيجاد مسقط نقطة على مستوي

1 نوجد معادلة المستوي "إن لم تعطى"

2 نوجد معادلات المستقيم المار بالنقطة المفروضة والعمودي على المستوي "الشعاع توجيهه هو ناظم المستوي"

نعوض معادلات المستقيم في المستوي فينتج المسقط

مثال: أوجد مسقط النقطة $A(1,0,1)$ في المستوي $x+y+z+1=0$

نوجد معادلة المستقيم المار من A والعمودي على المستوي

$\vec{u_d} = \vec{n} = (1,1,1)$

$x = 1 + 1t$

$y = 0 + 1t \quad t \in R$

$z = 1 + 1t$

نعوض معادلة المستقيم بالمستوي

$1+t+t+1+t+1=0$

$3t = -3 \Rightarrow t = -1$

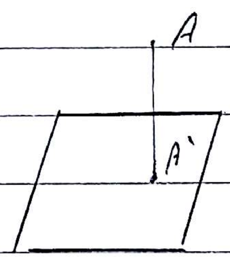
نعوض بالمعادلات الوسيطية

$x = 0$

$y = -1$

$z = 0$

$A'(0,-1,0)$



تم الحل بنجاح

ذكرنا أن نقطة معطاة لها مسقط نقطة مفروضة

برهن أن $A'(0,-1,0)$ هي مسقط النقطة $A(1,0,1)$ على المستوي.

دورة

$x+y+z+1=0$

1 نبرهن أن $\vec{AA'}$ مرتبط خطياً مع $\vec{n}(1,1,1)$

2 نبرهن أن A' تنتمي للمستوي [نعوض في المستوي]

عيّن مجموعة النقاط في الفراغ التي تحقق

$\|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\|$ أو $AM = BM$

الحرف المشترك مجهول (M) $\Downarrow$ مجموعة النقاط هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AE}\|$

الحرف المشترك معلوم (A) $\Downarrow$ مجموعة النقاط كرة مركزها A

مثال :

نفرض أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

A و B و C

عين مجموعة النقاط التي تحقق

$$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MF}\|$$

$$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{MF}\|$$

$$\|\vec{MG}\| = \|\vec{MF}\|$$

مجموعة النقاط هي مستوي محوري

للقطعة [GF]

$$\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\| = \|4\vec{AG}\|$$

حيث G مركز ثقل ABCD

$$\|\vec{MG}\| = \|\vec{AG}\|$$

العدد التخيلي: نتخيل أن جذر العدد (-1) هو (i)

أي $\boxed{i^2=-1}$

★ القوى الطبيعية للعدد i:

★ $i^0=1$

★ $i^1=i$

★ $i^2=-1$

★ $i^3=i^2.i=-i$

★ $i^4=i^2.i^2=+1$

★ $i^5=i^4.i=i$

★ $i^6=i^4.i^2=-1$

★ $i^7=i^4.i^3=-i$

★ $i^8=i^4.i^4=1$

نتيجة: قوى العدد i الطبيعية محصورة بالمجموعة $\{\mp1, \mp i\}$

كيف نحسب ناتج قوة لـ i ؟؟

نقسم الأس على العدد «4» ونميّز الباقي:

- إذا كان الباقي 0 ⇐ يكون الناتج 1
- إذا كان الباقي 1 ⇐ يكون الناتج i
- إذا كان الباقي 2 ⇐ يكون الناتج -1
- إذا كان الباقي 3 ⇐ يكون الناتج -i

أمثلة: ★ احسب العدد i^{200} ؟؟؟

$$i^{200}=i^{4(50)}=1$$

★ احسب العدد i^{2001} ؟؟؟

$$i^{2001}=i^{4\times500+1}=i$$

★ احسب العدد i^{202} ؟؟

$$i^{202}=(i)^{50\times4+2}=-1$$

★ الشكل الجبري للعدد العقدي:

Z = عدد حقيقي + i عدد حقيقي

$$Z = a + b\,i$$

عدد عقدي ، قسم حقيقي «Re(z)» ، قسم تخيلي «Im(z)»

مثال: $Z=2-5i$

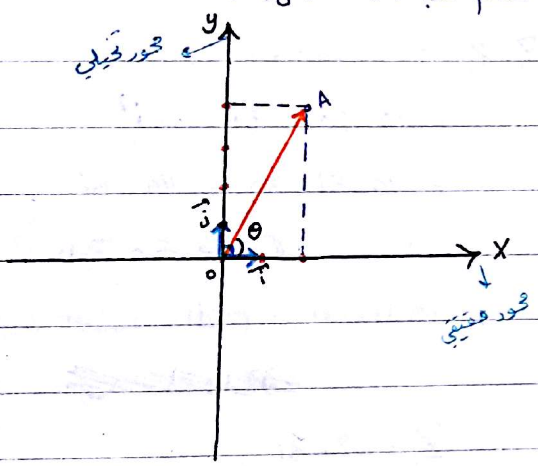
أوجد القسم الحقيقي «Re(z)» والقسم التخيلي «Im(z)» ؟؟

$Re(Z)=2$, $Im(Z)=-5$

★ تمثيل العدد العقدي في [المستوي]:

مثّل العدد $Z_A=2+4i$ ؟؟؟

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$



★ طويلة العدد العقدي:

$$|Z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

سؤال امتحاني: متى نقول عن العدد العقدي أنه حقيقي «بحت» ؟ إذا كان القسم التخيلي معدوم أي

$Im(Z)=0$

مثال: $Z=2$ ← لأنه يكتب بالشكل $Z=2+0i$

متى نقول عن عدد عقدي أنه تخيلي «بحت» ؟ إذا كان القسم الحقيقي معدوم أي $Re(Z)=0$

مثال: $Z=2i$ ← لأنه يكتب بالشكل: $Z=0+2i$

★ العمليات الحسابية في C:

أولاً: الجمع والطرح:

مثال: $Z_1 = -2+3i$

$Z_2 = 5+10i$

$Z_1 + Z_2 = 3 + 13i$

ثانياً: الضرب:

نضرب عادي ولكن نضع بدلاً عن (i^2) العدد (-1).

مثال: $Z_1 = -2+3i$

$Z_2 = 5+10i$

$Z_1 . Z_2 = (-2+3i) \times (5+10i)$

$= -10 - 20i + 15i + 30i^2$

$= -10 - 5i - 30 = 40 - 5i$

ثالثاً: القسمة في C:

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال:

$Z_1 = -2+3i$

$Z_2 = 5+10i$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(-2+3i)(5-10i)}{(5+10i)(5-10i)} = \frac{-10+20i+15i+30}{5^2-(10i)^2}$$

$$= \frac{20+35i}{25+100} = \frac{20+35i}{125} = \frac{20}{125} + \frac{35}{125}i$$

نرمز للمرافق $\bar{Z}$

- مرافق العدد العقدي نغير إشارة أمثال i ♥
- لما نضرب بالمرافق الإشارة اللي بالنص تتغير ♥
- إذا كانت طويلة العدد 1 فإن العدد يساوي مقلوب مرافقه ♥

رابعاً: المساواة بين عددين عقديين:

يتساوى عددان عقديان إذا تساوى القسم الحقيقي لهما والقسم التخيلي لهما.

مثال: أوجد λ علماً أن $[Z_1 = Z_2]$ حيث:

$Z_1 = 3-4i$

$Z_2 = 3+2\lambda i$

$-4i = 2\lambda i$

$-4 = 2\lambda$

$\lambda = \frac{-4}{2} = -2$

نتائج:

1 مرافق المرافق هو العدد نفسه $\overline{(\bar{Z})} = Z$

2 العدد + مرافقه = ضعفي القسم الحقيقي

$Z + \bar{Z} = (a+bi) + (a-bi)$

$= a+bi+a-bi = 2a$

3 $Re(Z) = a = \frac{Z+\bar{Z}}{2}$

4 العدد - مرافقه = ضعفي القسم التخيلي

$Z - \bar{Z} = (a+bi) - (a-bi)$

$= a+bi-a+bi = 2bi$

5 $Im(Z) = b = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

6 هام: يكون العدد العقدي Z حقيقياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $Z = \bar{Z}$ « العدد العقدي يساوي مرافقه »

مثال: $Z = 2 \Rightarrow \bar{Z} = 2$

يكون العدد العقدي Z تخيلي بحت إذا وفقط إذا كان $\bar{Z} = -Z$ أي [مرافقه يساوي معكوسه]

مثال: $Z = -3i$

$\bar{Z} = +3i$

$-Z = -(-3i) = 3i$

Date : / /   Subject:

$\boxed{8}$ العدد . مرافقه = مربع طويلته:

$$Z.\bar{Z} = |Z|^2$$

أي: $Z.\bar{Z} = a^2 + b^2$

$\boxed{9}$ حالة خاصة: إذا كان $|Z| = 1 \Leftarrow$

$$Z\bar{Z} = 1 \Rightarrow Z = \frac{1}{\bar{Z}}$$

الشكل المثلثي للعدد العقدي:

$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\boxed{1}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$ $\boxed{2}$

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ $\boxed{3}$

استنتاج Z: $Z = a + bi$

$$= r\cos\theta + r\sin\theta i$$

$$\Rightarrow Z = r[\cos\theta + \sin\theta i]$$

وهو الشكل المثلثي

* نرمز لزاوية العدد العقدي بالرمز:

$$arg(Z) = \theta + 2\pi K$$

قد تكون موجبة وقد تكون سالبة   عدد صحيح من الدورات

مثال: عين r و $arg(Z)$ للعدد العقدي $Z = 1 + i$ ؟

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

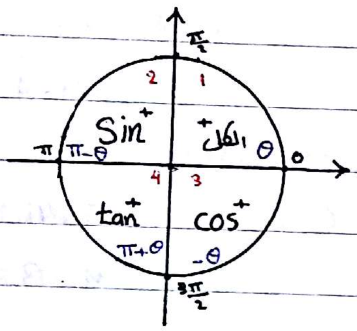
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi K$$

الشكل المثلثي $\Rightarrow Z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

* تذكير بالدائرة المثلثية:

	$30\ \frac{\pi}{6}$	$45\ \frac{\pi}{4}$	$60\ \frac{\pi}{3}$	0	$90\ \frac{\pi}{2}$	$180\ \pi$	$270\ \frac{3\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	0	1	0	-1
cos	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
tan	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	0	∞	0	∞
cot	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	∞	0	∞	0



كل سنة خنجرة كوسا

في الربع الأول كل موجب — في الربع الثاني sin موجب — في الربع الثالث tan موجب — في الربع الرابع cos موجب

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt2} \\ \cos\theta &= -\frac{1}{\sqrt2}\end{aligned}\right\}$$ ربع ثاني $\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{-1}{\sqrt2} \\ \cos\theta &= \frac{-1}{\sqrt2}\end{aligned}\right\}$$ ربع ثالث $\Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= -\frac{1}{2} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt3}{2}\end{aligned}\right\}$$ ربع رابع $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

Date : / / Subject: ....

المتطابقة التكعيبية:
$(\star\pm\heartsuit)^3=\star^3\pm3\star^2\heartsuit+3\heartsuit^2\star\pm\heartsuit^3$

$\boxed{3}$ ①
$$Z=\frac{\sqrt2+i}{\sqrt2-i}+\frac{\sqrt2-i}{\sqrt2+i}$$
$(\sqrt2+i)$ $(\sqrt2-i)$
$$=\frac{(\sqrt2+i)(\sqrt2+i)+(\sqrt2-i)(\sqrt2-i)}{(\sqrt2+i)(\sqrt2-i)}$$
$$=\frac{2+\sqrt2 i+\sqrt2 i+i^2+2-\sqrt2 i-\sqrt2 i+i^2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

② $\omega=(1+i)^2$
$$=[(1+i)^2]^4=[1+2i+i^2]^4=[2i]^4=16$$

$\boxed{4}$ ① $Z_1=(2+i)(3-2i)$
$=6-4i+3i-2i^2$
$=6-i+2=8-i$
$Z_1=8-i$

② $Z_2=(1+i)^2=2i$

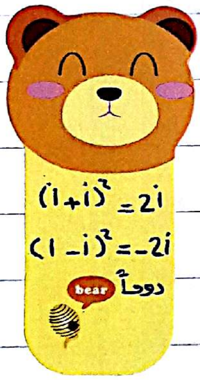
③ $Z_3=(1-i)^2=-2i$

④ $Z_4=(1+2i)(1-2i)$
$=1-4i^2=1+4=5$

⑤ $Z_5=(3+i\sqrt5)(3-i\sqrt5)$
$=9-5i^2=14$

⑥ $Z_6=(4-3i)$
$=16-24i+9i^2=7-24i$

⑦ $Z_7=\frac{4-6i}{3+2i}$
$$=\frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$
$$=\frac{12-8i-18i+12i^2}{9-4i^2}=\frac{-26i}{13}=-2i$$



★ حوّل من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري:
$$Z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=3\left[\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$=3\left[\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2}\right]$$
$$=\frac{3}{\sqrt2}-\frac{3}{\sqrt2}i$$

$\cos -\star=\cos\star$
$\sin -\star=-\sin\star$

★ تدرّب صفحة 105:

$\boxed{1}$ $M=A$
$Z_1=2+(2+0i)i=2+2i$
$Z_2=3+(2+0i)+4i=5+4i$

$M=B$
$X=(1+2i)$
$Z_1=2+(1+2i)i=2+i-2=i$
$Z_2=3+(1+2i)+4i=4+6i$

$M=C$
نعوض بدل X العدد (أ)

$\boxed{2}$ $P(i)=(i)^3-(1-i)(i)-i(4-5i)(4+6i)$
$=-i-[1-i][-1]-[4i+5]+4+6i$
$=-i-1+i-4i-5+4+6i=0$

$P(-2)=(-2)^3-(1+i)(-2)^2-(4-5i)(-2)+4+6i$
$=-8-4+4i+8-10i+4+6i=0$

$P(3-2i)=(3-2i)^3-(1-i)(3-2i)^2-(4-5i)$
$(3-2i)+(4+6i)=0$

Scanned by CamScanner

Date : / / ...ject:

$* + *i \Rightarrow \frac{\pi}{4}$

$* - *i \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$

$-* - *i \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{4}$

أو

$\frac{5\pi}{4}$

$Z = \dfrac{\overline{3Z^2 - 2iZ + 4}}{2Z - 3i}$

$\bar{Z} = \dfrac{3\bar{Z}^2 + 2i\bar{Z} + 4}{2\bar{Z} + 3i}$

$\bar{Z} = (\overline{1 + 2iZ})^3$ ④

$\bar{Z} = (\overline{1+2iZ})^3 = (\overline{1+2iZ})^3$

$\Rightarrow Z' = (1 - 2i\bar{Z})^3$

$\boxed{2}$ ① $Z - 2\bar{Z} = 2$

نعوض $Z = X + iy$

$\bar{Z} = X - iy$

$X + iy - 2(X - iy) = 2$

$X + iy - 2(X - iy) = 2$

$X + iy - 2X + iy = 2$

$-X + 3iy = 2$

تتساوى عددان عقديان إذا تساوى القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي و القسم التخيلي مع القسم التخيلي

أي: $-X = 2 \Rightarrow X = -2$

$3iy = 0i \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Z = -2$

② $2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$

$2i(X + iy) + (X + yi) = 3 + 3i$

$2iX - 2y + X - iy = 3 + 3i$

$-2y + X = 3$ $\boxed{1}$

$(2X - y)i = 3i$

$2X - y = 3$ $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ نجد: $X = 3 + 2y$

نعوض في $\boxed{2}$: $2(3 + 2y) - y = 3$

$6 + 4y - y = 3$

⑧ $Z_8 = \dfrac{1}{2 - i} = \dfrac{2 + i}{4 - i^2}$

$= \dfrac{2 + i}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$

⑨ $Z_9 = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$

$= \dfrac{(3 - 6i)(3 - i) + 4(3 + i)}{9 - i^2}$

$= \dfrac{9 - 3i - 18i + 6i^2 + 12 + 4i}{10}$

$= \dfrac{15 - 17i}{10} = \dfrac{15}{10} - \dfrac{17}{10}i$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{17}{10}i$

⑩ $Z_{10} = \left[\dfrac{4 - 6i}{2 - 3i}\right]\left[\dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}\right]$

$= \dfrac{4 + 12i - 6i - 18i^2}{6 + 4i - 9i - 6i^2}$

$= \dfrac{4 + 12i - 6i + 18}{6 + 4i - 9i + 6} = \dfrac{22 + 6i}{12 - 5i}$

$= \dfrac{(22 + 6i)(12 + 5i)}{(12 + 5i)(12 - 5i)} = \dfrac{264 + 110i + 72i - 30}{144 + 25}$

$= \dfrac{234 + 182i}{169} = \dfrac{234}{169} + \dfrac{182}{169}i$

تدرب صفحة 107 :

$\boxed{1}$ ① $Z = (Z - 1)(Z + i)$

نأخذ مرافق الطرفين :

$\bar{Z} = \overline{(Z - 1)(Z + i)} = (\bar{Z} - 1)(\overline{Z + i})$

$= (\bar{Z} - 1)(\bar{Z} - i)$

Sabbagh

Date : / / Subject:

$Z = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

② $Z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{4+12} = 4$

$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Big\}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$Z = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

③ $Z_3 = 4 - 4i$

$r = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Big\}$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$Z = 4\sqrt{2}\left[\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right]$

④ $Z_4 = -2i$

$r = \sqrt{2} = 2$

$\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$ $\Big\}$ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$Z = 2\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$

⑤ $Z_5 = \frac{-1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$

$r = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Big\}$ $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$Z = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

$3y = -3 \Rightarrow y = -1$

نعوض في $\boxed{1}$: $-2(-1) + X = 3$

$X = 1 \Rightarrow Z = 1 - i$

الخلاصة: نترك الطرف الثاني كما هو والطرف الأول نحلو ونطابق بين الطرفين

③ $2\bar{Z} = i - 1$

$2(X - iy) = i - 1$

$2X - 2iy = i - 1$

بالمطابقة : $2X = -1 \Rightarrow X = \frac{-1}{2}$

$-2iy = i \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$Z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$

④ حل $\frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}$

$i\bar{Z} + i = \bar{Z} - 1$

$\Rightarrow i\bar{Z} - \bar{Z} = -1 - i$

$\bar{Z}(i - 1) = -1 - i$

$\bar{Z} = \frac{-1-i}{i-1} = \frac{-1-i}{-1+i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام...

$= \frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{+1+i+i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow Z = -i$

تدرب صفحة 110 :

① $\boxed{2}$ $Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$r = \sqrt{2+2} = 2$

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Big\}$ $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

- مضاعفات π الزوجية لها نفس النسب المثلثية للصفر ♥
- مضاعفات π الفردية هي نفسها π ♥

(6) $Z_6 = \frac{4}{1-i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$\frac{4(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+4i}{1+1} = 2+2i$

$r = 2\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$

$Z = 2\sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]$

(3)

★ $Z_A = 1+i$

$Z_B = -1+i$

$Z_C = -1-i$

$Z_D = +1-i$

★ $Z_A = 1+0i$

$Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_C = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_D = -1+0i$

$Z_E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_F = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

قواعد:

★ $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$

★ $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

★ $\bar{z} \cdot \bar{z} = \bar{z}^2$

★ $\overline{z^2} = \bar{z}^2$

★ $\bar{\bar{z}} = z$

★ دستور دوموافر:

$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

نتيجة:

$[r[\cos\theta + i\sin\theta]]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

مثال: احسب $(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{12}$ ؟؟

$= \cos\frac{12\pi}{3} + i\sin\frac{12\pi}{3}$

$= \cos 4\pi + i\sin 4\pi$

$= 1 + i(0)$

نتائج هامة:

1. $Z =$ عدد موجب $\Rightarrow \theta = 0$
2. $Z =$ عدد سالب $\Rightarrow \theta = \pi$
3. $Z =$ عدد موجب $i \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
4. $Z =$ عدد سالب $i \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$
5. $|Z^n| = |Z|^n$
6. $[\arg(z)]^n = n\arg(z)$
7. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
8. مهم $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$

مثال:

$Z_1 = 4[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}]$

$Z_2 = \frac{3}{2}[\cos -\frac{\pi}{6} + i\sin -\frac{\pi}{6}]$

احسب $\frac{Z_1}{Z_2}$ ؟؟

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

9. $|Z_1 \cdot Z_2| = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

مثال توقع: $Z(1-i\sqrt{3})$

نحول إلى الشكل المثلثي: $r=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$$

$$Z=\left[2\left[\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right]\right]^5$$

$$=2^5\left[\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

$$=32\left[\frac{1}{2}-i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$=32\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=16+16\sqrt{3}i$$

* لإيجاد النسب لمضاعفات زاوية شهيرة فإننا نحدد هذه الزاوية على الدائرة المثلثية ثم نمنح نفس النسب للزاوية الشهيرة ولكن نراعي الإشارة حسب الربع الذي وقعنا فيه

مثال دورة: اكتب بالشكل الجبري:

$$Z=\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$$

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$\sqrt{3}+i$ ، $r=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}+i=2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$(1+i)^4=(\sqrt{2})^4\left[\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}\right]$$

$$=4[\cos\pi+i\sin\pi]$$

$$\Rightarrow 4[-1+0]=-4$$

$$\Rightarrow(\sqrt{3}+i)^3=(2)^3\left[\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right]$$

$$=8\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=8[0+1i]=8i$$

$$\Rightarrow Z=\frac{-4}{8i}=\frac{1}{2}i$$

الشكل الأسي للعدد العقدي:

نسمي e العدد النيبري حيث $e\simeq 2.7$ ونسمي $Z=re^{i\theta}$ بالشكل الأسي للعدد العقدي أي:

$$re^{i\theta}=r[\cos\theta+i\sin\theta]$$

مثال: اكتب $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي؟

$$r=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow Z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

* قواعد هامة: إذا كان $Z_1=r_1e^{i\theta_1}$ ، $Z_2=r_2e^{i\theta_2}$ فإن:

1. $Z_1\cdot Z_2=r_1\cdot r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
3. $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
4. $[re^{i\theta}]^n=r^n e^{in\theta}$
5. $Z_1=Z_2\Rightarrow r_1=r_2\Rightarrow\theta_1=\theta_2$

* حالة عدد عقدي طويلته 1: يكون الشكل الأسي $Z=e^{i\theta}$ ويكون الشكل المثلثي $Z=[\cos\theta+i\sin\theta]$

* دستورا «قاعدتا» أويلر: ــه لا يأتي استنتاجه

سؤال دورة: إذا كان $Z=e^{i\theta}$ أوجد $\overline{Z}$ ثم استنتج قاعدتا أويلر؟

$$e^{i\theta}=[\cos\theta+i\sin\theta]$$

المرافق $\Rightarrow e^{i\theta}=[\cos\theta-i\sin\theta]$

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad(1)$$

Date : / /   Subject: ....

بالطرح $\Rightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ ②

* طريقة التحويل من أسي إلى جبري :

مثال : حول إلى الشكل الجبري : $Z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؟؟

$Z = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

مثال : حول إلى الشكل الأسي : $Z = 1 + e^{2\theta i}$

$Z = 1 + [\cos 2\theta + i\sin 2\theta]$

$= 1 + [2\cos^2\theta - 1 + i\,2\sin\theta\cos\theta]$

$= 2\cos^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta$

$= 2\cos\theta[\cos + i\sin\theta] = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$

قواعد هامة

$\boxed{1}$ $-\star = \star e^{i\pi}$

مثال : $-5 = 5e^{i\pi}$ لأن $e^{i\pi} = -1$

$\boxed{2}$ $\star = -\star e^{i\pi}$

مثال : $10 = -10e^{i\pi}$

• لما رح حول عدد حقيقي مثل 5 أو 10- إلى الشكل الأسي
نغير إشارة العدد ونضيف بجانبه $e^{i\pi}$

$\boxed{3}$ $\star i = \star e^{i\frac{\pi}{2}}$ لأن $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

مثال : $5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{4}$ $-\star i = \star e^{\frac{3\pi}{2}i}$ لأن $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

مثال : $-5i = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$

• لما رح حول عدد تخيلي موجب إلى الشكل الأسي
نتركو مثل ما هو ونحط جنبو $e^{i\frac{\pi}{2}}$

* $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

* $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

* حل المعادلات من الدرجة الثانية في C ذات الأمثال الحقيقية :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يمكن أن نرمز لها بـ ω
أي تصبح المعادلة : $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ محققة لها
ونميز ثلاث حالات :

① $\Delta > 0$

⇐ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان :

$Z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $Z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

② $\Delta = 0$

⇐ $Z_1 = Z_2 = \dfrac{-b}{2a}$

③ $\Delta < 0$

⇐ للمعادلة جذران عقديان مترافقان هما :

$Z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$, $Z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$

* مثال توقع 2020 :

حل هذه المعادلة في C ؟؟ $Z^2 + 6Z + 34 = 0$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 34$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(34)$

$= 36 - 136 = -100 < 0$

للمعادلة جذران مترافقان هما :

$Z_1 = \dfrac{-6+10i}{2(1)} = \dfrac{-6}{2} + \dfrac{10}{2}i = -3+5i$

$Z_2 = \bar{Z}_1 = -3-5i$

* تحليل ثلاثي الحدود:

aZ^2+bZ+c

التحليل: هو تحويل المجموع إلى جداء عوامل، تحليل كثير الحدود بالقاعدة التالية:

$a(Z-Z_1)(Z-Z_2)$

جذرا المعادلة: $aZ^2+bZ+c=0$

مثال: حلل كثير الحدود:

$P(Z)=2Z^2-6Z+5$

$P(Z)=a(Z-Z_1)(Z-Z_2)$

نحتاج Z_1 و Z_2 وهما حلول المعادلة:

$2Z^2-6Z+8=0$

$\Delta=36-40=-4<0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان هما:

$Z_1=\frac{6+2i}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

$Z_2=\bar{Z_1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow P(Z)=2(Z-[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i])(Z-[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i])$

$=(2Z-3-i)(Z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)$

* نتائج هامة *

$Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$ [1]

$Z_1\cdot Z_2=\frac{c}{a}$ [2]

* إيجاد الجذور التربيعية للعدد العقدي «a+bi»:

أولاً: الطريقة الجبرية:

[1] نفرض $\alpha=x+iy$ جذر للعدد العقدي المعطى.

[2] نطبق $\underbrace{(x+iy)^2}_{\text{مفروض}}=\underbrace{a+bi}_{\text{معطى}}$

$x^2+2ixy-y^2=a+bi$

بالمساواة: [1] $x^2-y^2=a$

[2] $2xy=b$

بالحل المشترك

للفائدة: نستخدم معادلة ثالثة:

$|(x+iy)^2|=|a+bi|$

$|x+iy|^2=|a+bi|$

$[\sqrt{x^2+y^2}]^2=\sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}}$ [3]

* ملاحظة هامة جداً: يمكن استخدام العلاقات [1] و[2] و[3] كقواعد مباشرة في هذه الفقرة ولكن يفضّل تعرف نطالها

مثال أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $Z^2=1+i$ ؟؟

$b=1$ و $a=1$ ⇐ نفرض $(x+iy)$ جذر لـ $1+i$

⇐ ① $x^2-y^2=1$

② $2xy=1$

③ $x^2+y^2=\sqrt{2}$

بالجمع [1]+[3]: $2x^2=1+\sqrt{2}$

⇐ $x^2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ← $x_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

نعوض في [2] ⇐ من أجل x_1

$2\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)y=1$ ⇐ $y=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

الجذر الأول هو: $Z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

من أجل x_2 نطبق ← $Z_2=-Z$

الجذر الثاني هو: $Z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

Date : / /

Subject:

★ إيجاد الجذرين التربيعيين بالشكل الأسي:

★ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $Z=re^{i\theta}$ بالشكل الأسي؛

الحل: نفرض $\star=r'e^{i\theta'}$ جذر لـ Z ← $\star^2=Z$

$\Rightarrow (r'e^{i\theta'})^2 = re^{i\theta}$

$\Rightarrow r'^2 \cdot e^{2\theta' i} = re^{i\theta} \Rightarrow r'^2 = r \Rightarrow \boxed{r'=\sqrt{r}}$ [1]

$\Rightarrow 2\theta' = \theta \Rightarrow \theta'_1 = \frac{\theta}{2} + 2\pi k$

$\theta'_2 = \pi + \frac{\theta}{2}$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $Z=e^{i\frac{\pi}{2}}$؛

نفرض $\omega = re^{i\theta}$ جذر تربيعي لـ Z ← $\omega^2 = Z$

$\Rightarrow (re^{i\theta})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

أو $\theta_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

الجذر الأول $\Rightarrow \omega_1 = 1e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\omega_2 = 1e^{i\frac{5\pi}{4}}$

تدريب صفحة 113:

II ① $Z_1 = (1-i)^2$

$r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt2}$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$Z = [\sqrt2 (\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4})]^2$

$= 2((\cos -\frac{2\pi}{4} + i \sin -\frac{2\pi}{4})$

$= 2(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2})$

هام جداً ②

$Z_2 = \frac{1 - i\sqrt3}{1-i}$

$1 - i\sqrt3 \Rightarrow r = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt3}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$

$Z_1 = 2[\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}]$

$1 + i \Rightarrow r = \sqrt2$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt2}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$Z_2 = \sqrt2\,[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \left|\frac{2}{\sqrt2}\right| [\cos(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$

$= \sqrt2\,[\cos\frac{-7\pi}{12} + i\sin\frac{-7\pi}{12}]$

③

$Z_3 = \left(\frac{\sqrt3 - i}{i}\right)$

$(\sqrt3 - i) \Rightarrow r = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt3}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$

$(\sqrt3 - i) = 2[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}]$

$i = [\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}]$

$Z = \frac{2}{1}[\cos(\frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{2})$

$= [2\cos\frac{-4\pi}{6} + i\sin\frac{-4\pi}{6}]^5$

$= 32\,[\cos\frac{-10\pi}{3} + i\sin\frac{-10\pi}{3}$

نطرح -4π

$= 32\,[\cos(\frac{-12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})$

$= 32\,[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}]$

$$Z_1 = \frac{\sqrt6 - i\sqrt2}{2} \qquad \boxed{2}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt6}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\frac{\sqrt6}{2}}{\sqrt2} = \frac{\sqrt6}{2\sqrt2}\\ \sin\theta &= \frac{-\frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt2} = \frac{-1}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{-\pi}{6}$$

$$Z_1 = \sqrt2\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$

$$Z_2 = 1 - i$$

$$r = \sqrt2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt2}\\ \sin\theta &= \frac{-1}{\sqrt2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

$$Z_2 = \sqrt2\left[\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt2}{\sqrt2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{= 1\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]} \leftarrow \text{مثلثي}$$

نقسم الشكل الجبري :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt6}{2} - \frac{\sqrt2}{2}}{1 - i} = \frac{\left(\frac{\sqrt6}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt6}{2} - i\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt6}{2}i + \frac{\sqrt2}{2}}{2}$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt6 + \sqrt2}{4} + \frac{\sqrt6 - \sqrt2}{4}} \leftarrow \text{جبري}$$

بالمقارنة بين $\frac{Z_1}{Z_2}$ المثلثي و $\frac{Z_1}{Z_2}$ الجبري نجد :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt6 + \sqrt2}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt6 - \sqrt2}{2}$$

$$Z_1 = 32 \qquad \boxed{3}$$

$$Z_2 = -32\sqrt3\, i$$

$$Z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6 \qquad 1 \quad \boxed{4}$$

$$= \cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8}$$

$$= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$Z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right) \qquad 2$$

قوانين الإكمال :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \star\right) = \cos\star$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \star\right) = \sin\star$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right]^6$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)\right]^6$$

$$= \cos\frac{9}{5}\pi + i\sin\frac{9\pi}{5}$$

$$= \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{-\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)$$

$$Z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) \qquad 3$$

$$= \sqrt2\left[\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt2\left[\cos\frac{13\pi}{36} + i\sin\frac{13\pi}{36}\right]$$

$$= \left[\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad 4$$

$$= (\sqrt2)^{2016}\left[\cos\frac{2016\pi}{4} + i\sin\frac{2016\pi}{4}\right]$$

$$= (\sqrt2)^{2016}\left[\cos 504\pi + i\sin 504\pi\right]$$

$$= 2^{1008}[1+0] = 2^{1008}$$

Date : / / Subject:

$$Z_4 = (1+i\sqrt{3})^4 \qquad (4)$$

$r=2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_4 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^4 = 16e^{i(\frac{-2\pi}{3})}$$

$$Z_5 = \frac{6}{1+i} \qquad (5)$$

$$Z_5 = \frac{6}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3\sqrt{2}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3\sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$Z_6 = (1+i\sqrt{3})\, e^{i\frac{4\pi}{3}} \qquad (6)$$

$1+i\sqrt{3} \Rightarrow r=2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 16\, e^{i\frac{8\pi}{3}} = 16\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow Z = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$Z_7 = \left[\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right]^5 \qquad (7)$$

$1+i \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z = \left[\frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{6}}}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \left[\frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{32}\, e^{i5(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{8}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$256e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad (8)$$

$$12\, e^{-\frac{3\pi}{4}i} \qquad (9)$$

$$3\, e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad (10)$$

★ تسب صفحة 116 :

$$\star\ Z_1 . Z_2 = 3e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 3e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad \boxed{1}$$

$$\star\ Z_1^3 = [e^{i\frac{\pi}{3}}]^3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi}$$

$$\star\ Z_3^4 = [\sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}]^4 = (\sqrt{2})^4 (e^{i\frac{8\pi}{3}})$$

$$= 4e^{i\frac{8\pi}{3}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\star\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{3}\, e^{i(\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{3}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\star\ Z_1 . Z_2 . Z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{12}} . \sqrt{2}\, e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 3\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})}$$

$$= 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{9\pi}{12}} = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i \qquad (1) \qquad \boxed{2}$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$Z = 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$(1+i)\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad (2)$$

$$(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})(\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}) = \sqrt{6}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$Z_3 = (1-\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad (3)$$

سالب

$$\star - \star\, e^{i\pi}$$

$$(1-\sqrt{2}) = (-1+\sqrt{2})\, e^{i\pi}$$

نعوض في Z_3 :

$$Z_3 = (-1+\sqrt{2})\, e^{i\pi} . e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= (-1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= (-1+\sqrt{2})\, e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

*تدرب صفحة 118 :

1

① --- $3Z + Z' = 2 - 5i$

② --- $Z - Z = -2 + i$

بالجمع : $4Z = -4i \Rightarrow Z = -i$

نعوض في ② $\Leftarrow$ $-i + Z' = -2 + i$

$-Z' = -2 + 2i$

$Z' = 2 - 2i$

2 $2Z^2 - 6Z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4 < 0$

$\Leftarrow$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$Z_1 = \frac{6+2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$Z_2 = \bar{Z_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

هام جداً

3 $Z^2 + pZ + q = 0$

$Z_1 = 1 + 2i$

$Z_2 = 3 - 5i$

$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{q}{q}$

$\Rightarrow (1+2i)(3-5i) = \frac{q}{1}$

$3 - 5i + 6i + 10 = q$

$13 + i = q$ --- ①

$Z_1 + Z_2 = \frac{-p}{q}$

$1 + 2i + 3 - 5i = \frac{-p}{1}$

$4 - 3i = -p$

$\boxed{p = 3i - 4}$ --- ②

4 $(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$

بالنشر : $Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15$

لحل المعادلة : $Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$

$(Z^2 - 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5) = 0$

إما : ------

أو : ------

تمرينات ووسائل :

5 $Z_1 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$

$Z_1 = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{i2x}$

$Z_1 = \cos 2x + i \sin 2x$

$Z_2 = (3+i)^4$

$Z_2 = (3+i)^2 (3+i)^2$

$= (9 + 6i - 1)(9 + 6i - 1)$

$= (8 + 6i)(8 + 6i)$

$= 64 + 96i - 36$

$= 28 + 96i$

هام جداً سؤال وزاري

9 يكون Z حقيقي : $Z = \bar{Z}$ إذا كان $|Z| = 1$

فإن $Z \cdot \bar{Z} = 1 \Leftarrow \bar{Z} = \frac{1}{Z}$

بالمثل : $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$

يأتي كما هو

$\bar{Z} = \frac{\bar{Z} + \bar{\omega}}{1 + \bar{Z}\bar{\omega}}$

$= \frac{\frac{1}{Z} + \frac{1}{\omega}}{1 + \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\omega}}$ $\quad \frac{\frac{\omega + Z}{\omega Z}}{\frac{\omega Z + 1}{\omega . Z}}$

$= \frac{\omega + Z}{\omega Z + 1} = Z$

$\Leftarrow$ عدد حقيقي

1) لإثبات عدد حقيقي يجب أن نبرهن أن المرافق هو العدد نفسه ؟

عندما يعطى في المسألة $|Z| = 1$ تذكر أن : $Z \cdot \bar{Z} = 1$

إذا كانت أمثال المعادلة التربيعية حقيقية فإن الجذران مترافقان
أما إذا كانت الأمثال العقدية تحوي i فإن الجذران ليسا بالضرورة مترافقان

Date : / / Subject:

$$Z_2 = \frac{-(1+4i)-(3+2i)}{2} = -2-3i$$

والباقي بنفس الشيء

تدرب صفحة 118 :

$$Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2}+2) = 0 \quad 5 \quad \boxed{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2(1+\sqrt{2}))^2 - 4(1)(2\sqrt{2}+4)$$

$$= 4(1+2\sqrt{2}+2) - 8\sqrt{2} - 16$$

$$= -4 < 0$$

⇐ المعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$Z = \frac{2(1+\sqrt{2})+2i}{2} = (1+\sqrt{2})+i$$

$$Z_2 = (1+\sqrt{2})-i$$

$$Z^2 - 2(\cos\theta)Z + 1 = 0 \quad \boxed{6}$$

$$\Delta = (-2(\cos\theta))^2 - 4(1)(1)$$

$$= 4\cos^2\theta - 4$$

$$= 4(\cos^2\theta - 1)$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= -4\sin^2\theta < 0$$

$$Z_1 = \frac{2\cos\theta + 2\sin\theta i}{2} = \cos\theta + \sin\theta i$$

$$Z_2 = \overline{Z} = \cos\theta - \sin\theta i$$

* صيغة ثانية للسؤال:
توقع هام دورة 2013 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد...؟

$$\omega = -3+4i \quad \boxed{1} \quad \boxed{14}$$

نفرض $Z = x+iy$ جذر لـ ω ⇐ $Z^2 = \omega$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -3+4i$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad (1)$$

$$2xy = 4 \quad (2)$$

$$|Z|^2 = \omega$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (3)$$

(3)+(1) ⇐

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -1$$

من أجل $x_1 = 1$ نعوض في $\boxed{2}$

$$2y_1 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$Z_1 = 1+2i$$

ومن أجل $x_2 = -1$

$$Z_2 = -Z_1 = -1-2i$$

والباقي هدية :)

$$Z^2 + (1+4i)Z - 5 - i = 0 \quad \boxed{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$$

$$= 5+12i$$

نوجد الجذران التربيعيان كما سبق وهما:

$$\sqrt{\Delta} \begin{cases} \alpha_1 = 3+2i \\ \alpha_2 = -3-2i \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{-(1+4i)+(3+2i)}{2} = 1-i$$

* حالات خاصة:

1 $\arg(Z) = \bigstar$ ⇐ مستقيم ميله $\tan\bigstar$

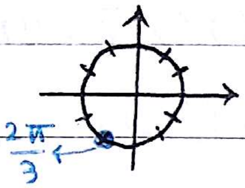
⇐ معادلة المستقيم $y = mx$ ⇐ $y = \tan x$

مثال ص110 رقم 4:

1 $\arg Z = \frac{\pi}{3}$ مجموعة النقاط مستقيم ،

معادلة : $y = \tan\frac{\pi}{3}\,x$ ⇐ $y = \sqrt{3}\,x$

2 $\tan -\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$



$\Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$

3 $y = 0$

r

2 $|Z| = \bigstar$

⇐ مجموعة النقاط دائرة نصف قطرها ★

معادلتها : $x^2 + y^2 = \bigstar^2$

4 $|Z| = 3$

تمثل دائرة نصف قطرها 3 ومعادلتها $x^2 + y^2 = 9$

3 $Re(Z) = \bigstar$ ⇐ تمثل مستقيم $// \; yy'$

معادلته $x = \bigstar$

5 $Re(Z) = -2$ ⇐ مستقيم معادلته $x = -2$

4 $Im(Z) = \bigstar$ ⇐ تمثل مستقيم $// \; xx'$

معادلته $y = \bigstar$

6 $Im(Z) = 1$ تمثل مستقيم معادلته $y = 1$

تطبيقات العقدية:

★ إذا كان A, B نقطتين في المستوي فإن العدد العقدي الممثل للشعاع هو:

$Z_{\overrightarrow{AB}} = [Z_B - Z_A]$

مثال: $A(2,3)$, $B(-1,4)$

مثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بعدد عقدي

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

$= -1 + 4i - 2 - 3i$

$= -3 + i$

أي $\overrightarrow{AB}(-3,1)$

$Z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + i$

العدد العقدي الممثل لمركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ)

والتي تمثل النقاط

Z_A , Z_B , Z_C

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث (ABC):

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.

مثال امتحاني: في مستوي عقدي لدينا النقاط A, B, C

$Z_A = a = 6 - i$

$Z_B = b = -6 + 3i$

$Z_C = c = -18 + 7i$

أثبت أن A, B, C على استقامة واحدة.

ط1

نحولها إلى نقاط

$A(6,-1)$

$C(-18,7)$

$B(-6,3)$

$\overrightarrow{AB} = (-6-6, 3+1)$

$= (-12, 4)$

$\overrightarrow{AC} = (-24, 8)$

$\frac{-12}{-24} \overset{?}{=} \frac{4}{8}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

الشعاعان مرتبطان خطياً فالنقاط على استقامة واحدة.

ط2

$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = (-6+3i) - (6-i)$

$= -12 + 4i$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = -24 + 8i$

نلاحظ أن $Z_{\overrightarrow{AC}} = 2 Z_{\overrightarrow{AB}}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً والنقاط على استقامة واحدة

المسافة التي تمثلها نقطتان بالشكل العشري

$AB = |z_B - z_A|$

في المثال السابق أوجد المسافة بين A, B

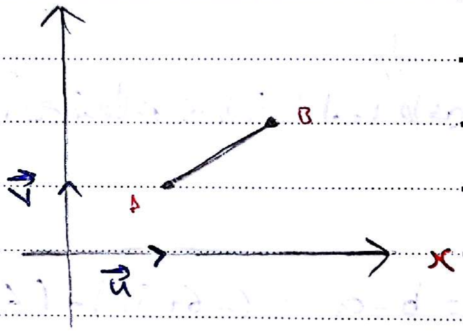
$AB = |b - a|$

$AB = |-12+4i|$

$= \sqrt{(-12)^2+4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} = 4\pi$

زاوية شعاع مع محور الفواصل :

$(\vec{AB}, \vec{u})$



مثال : عين زاوية الشعاع $\vec{AB}$ مع محور الفواصل في المثال السابق

$(\vec{AB}, \vec{u}) = \arg(b-a)$

$\arg(-12+4i)$

نحسب θ

$\cos\theta =$

$\sin\theta =$

بالمثال ليست مشيرة

قياس الزاوية الموجهة بين الشعاعين $\vec{AB}, \vec{CD}$

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$$

حالة خاصة :

إذا كان الشعاعان يشتركان بأصل

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

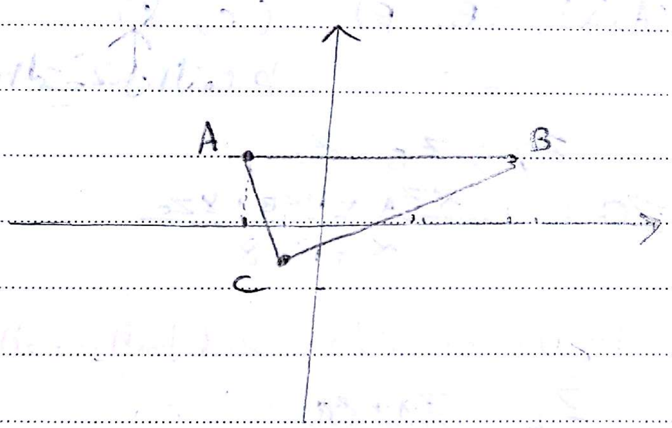
132 تدريب :

$\boxed{1}$

$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_B = 2+i$, $z_A = -1+i$

(1)

$A(-1,1)$, $B(2,1)$, $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$



(2)

$\vec{AB}(3,0)$

$z_{\vec{AB}} = 3$

$\vec{AC}(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

$z_{\vec{AC}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$\vec{BC}(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$z_{\vec{BC}} = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

/ /

(3)

$AB = 3$

$BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$AC = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$9 = 8.5 + 2.5$

$9 \neq 11$

من عكس فيثاغورث المثلث

ليس قائماً في C

5 (1)

$\vec{aa'}\ (-3, 4)$

$Z_{\vec{aa'}} = -3+4i$

$\vec{bb'}\ (1, -4)$

$Z_{\vec{bb'}} = 1-4i$

$\vec{cc'} = 2$

$Z_{\vec{cc'}} = 2$

$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

$-3+4i + 1-4i + 2 = 0$

(2)

$G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

$= \frac{1-i + 2+3i + 2+i}{3}$

$= \frac{3i + 5}{3}$

$= i + \frac{5}{3}$ ، $(\frac{5}{3}, 1)$

(3)

$Z_{G'} = \frac{Z_{A'} + Z_{B'} + Z_{C'}}{3}$

$= \frac{-2+3i+3-i+4+i}{3}$

$= \frac{5+3i}{3} = \frac{5}{3} + i$

$G'(\frac{5}{3}, 1)$

$G = G'$ مركز ثقل المثلث $A'B'C'$

8

(2) أ

نفرض الشكل الديكارتي للعدد العقدي

$Z = x+yi$

$|x + iy - 3 - 2i| = 1$

$|x - 3 + i(y-2)| = 1$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 1$

نربع $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

وهي معادلة ديكارتية من الشكل

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

المعادلة هي دائرة مركزها $(3, 2)$ نصف قطرها 1

2ب

$|Z - (3+2i)| = 1$

لتكن B صورة العدد العقدي $3+2i$

لتكن M صورة العدد العقدي $BM = r$

مجموعة النقاط M تمثل دائرة مركزها $(3,2)$ ونصف قطرها 1

تمثيل مجموعات النقاط : 20 درجة

1 الدائرة :

العلاقة : $|Z - \underset{\text{المركز}}{\text{عدد عقدي}}| = \underset{\text{نصف القطر}}{\text{عدد حقيقي}}$

مثال : $|Z - \underline{3 + i}| = 1$

دائرة مركزها $(3,-1)$ نصف قطرها 1

2 محور القطعة المستقيمة :

العلاقة : $|Z - \text{عدد عقدي}| = |Z - \text{عدد عقدي}|$

مثال : $|Z - 3 + 6i| = |Z - 5i|$

محور قطعة مستقيمة

$A(3, -6)$, $B(0, 5)$

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية :

أولاً : الانسحاب

لتكن Z التي تمثل M' هي صورة Z التي تمثل M وفق انسحاب شعاعه u (عدد عقدي)

القانون : الصورة = الأصل + عدد عقدي

مثال :

لتكن M تمثل $Z = 1 + i$ أوجد Z' صورة Z وفق انسحاب شعاعه $(-2, 3)$

$Z' = Z + (-2 + 3i)$

$= 1 + i + (-2 + 3i)$

$= -1 + 4i$

---

(1) ط1 :

$|Z - 1| = |Z - 3 - 2i|$

$|x + iy - 1| = |x + iy - 3 - 2i|$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$

$4x + 4y - 12 = 0$

$x + y - 3 = 0$

ط2 :

$A \rightarrow Z_A = 1 + 0i$

$B \rightarrow Z_B = 3 + 2i$

$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

$MA = MB$

صياغة أخرى للإجابة :

لتكن M صورة العدد العقدي Z

لتكن A صورة العدد العقدي $1 + 0i$

لتكن B صورة العدد العقدي $3 + 2i$

$AM = BM$

مجموعة النقاط M هي محور القطعة المستقيمة AB.

عقدية

$MA = MB$	$MA =$ عدد	$AB = AC$
محور القطعة AB	دائرة	دائرة مركزها A

بالانسحاب ما يعكس الإشارة

بالتحاكي يعكس الإشارة

بالدوران ...

توجيه 2020

عين طبيعة التحويل الهندسي

$\underbrace{b}_{\text{عدد عقدي}} = \underbrace{a}_{\text{عدد عقدي}} + \underbrace{2 - 4i}_{\text{عدد عقدي}}$

b صورة a وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(2,-4)$

مثال:

$c - d = 2+3i$

c صورة d وفق انسحاب شعاعه $(2,3)$

مثال:

$F = 1+2i$

F صورة O وفق انسحاب شعاعه $(1,2)$

مثال:

$b - 1 + 2i = a$

a صورة b وفق انسحاب $(-1,2)$

ثانياً: التحاكي

العلاقة:

الصورة - مركز التحاكي = نسبة التحاكي (الأصل - مركز التحاكي)

$z' - \text{عدد عقدي} = \text{عدد حقيقي}\,(z - \text{عدد عقدي})$

مثال: أوجد صورة $z = 1+i$ وفق تحاكي مركزه $A(2,1)$ بنسبة $\frac{1}{2}$

$z' - (2+i) = \frac{1}{2}[z - (2+i)]$

$z' - 2 - i = \frac{1}{2}[1+i-2-i]$

$z' - 2 - i = -\frac{1}{2}$

$z' = \frac{-3}{2} + i$

مثال: توجيه

$b - 1 = -(a - 1)$

b صورة a وفق تحاكي مركزه $(1,0)$ ونسبته -1

عكس الإشارة

مثال:

$f = 4b$

f صورة b بالنسبة لـ O وبنسبة 4.

ثالثاً: الدوران R

القانون: الصورة - المركز $= e^{i\theta}$ (الأصل - المركز)

مثال:

b صورة a وفق دوران $a = 1+i$ مركزه $F(4,2)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{6}$

$b - (4+2i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[a - (4+2i)]$

$b - 4 - 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}(1+i-4-2i)$

$b - 4 - 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}(-3-i)$

نحوله إلى جبري

$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

نعوض ونفك الأقواس وننقل ...

Farah

$e^{i\pi} = -1$

/ /

مثال: عين طبيعة التحويل:

$c - 2 + i = e^{i\frac{\pi}{4}}[d - 2 + i]$

c صورة d وفق دوران مركزه $(2, -1)$

وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$c = \overset{e^{i\pi}}{(-)}d$ أو دوران / تحاكي

رابعاً: التناظر المحوري:

التناظر المحوري

$z' = \bar{z}$ — مرافق العدد = صورة العدد — محور التناظر ox

$z' = -\bar{z}$ — مرافق العدد − = صورة العدد — محور التناظر oy

مثال: أوجد b صورة $a = 1 + i$

وفق تناظر محوري ox

$b = \bar{a}$

$b = 1 - i$

مثال:

$b = 2 + i$

$c = -2 + i$

c صورة b وفق تناظر محوري oy

خامساً: التناظر المركزي:

الشرط:

$z' = 2 \times \underbrace{\text{المركز}}_{\text{عدد مركب}} - z$

مثال: أوجد b صورة $a = 1 + i$

وفق تناظر مركزي $B(2 + i)$

$b = 2 \times (2 + i) - (1 + i)$

$b = 4 + 2i - 1 - i$

$b = 3 + i$

لا نطلق العاملي إلا عند التبديل

نحل مسائل التراتيب نستطيع حلها بالمبدأ الأساسي للعد

/ /

التحليل التوافقي : 60 علامة بالامتحان

* المبدأ الأساسي في العد:

تجربة تمر بمرحلتين أو طريقتين m , n

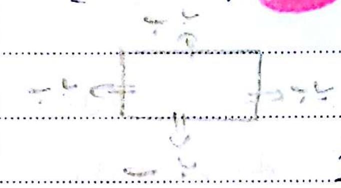
فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة

هي $m \times n$

مثال:

حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن

الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة



عدد طرق الدخول 4

عدد طرق الخروج 3

عدد الطرق $3 \times 4 = 12$

* قانون العاملي:

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

مثال:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

* خواص:

$\boxed{1}$ $n! = n(n-1)!$

مثال: $5! = 5 \times 4!$

$\boxed{2}$ $(n+1)! = (n+1)n!$

مثال:

$\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

$\boxed{3}$ $0! = 1$

$\boxed{4}$ $1! = 1$

سؤال: متى نستخدم العاملي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض

[نبدل عناصر المجموعة في أماكن يساوي عددها]

مثال:

نبدل ثلاث كرات مختلفة الألوان

[أخضر أحمر أسود]

بين بعضها البعض بكم طريقة يمكن ذلك

ما هي هذه الطرق $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

1) أخضر أحمر أسود — 5) أسود أخضر أحمر

2) أخضر أسود أحمر — 6) أسود أحمر أخضر

3) أحمر أخضر أسود

4) أحمر أسود أخضر

مثال: لدينا بطاقتان مرقمتان (1, 2) بكم طريقة يمكن تبديلها

$2! = 2 \times 1 = 2$

* قانون التراتيب [القوائم دون تكرار]

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد

ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء

عندها نستخدم التراتيب أو [هو ترتيب r الجزء

عنصر من مجموعة فيها n الكل عنصر]

* القانون هو:

$P_n^r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

مثال:

$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار

ثلاثة أشخاص من أجل لجنة مكونة من

[مدير , نائب مدير , أمين السر]

/ /

ملاحظة:

* نستخدم قانون التراتيب إذا كانت في المسألة أهمية للترتيب
* نستخدم المبدأ الأساسي بالعد بدل التراتيب عندما يكون مراكز، مراتب، مناصب، أو منازل الأعداد (حسب السؤال دون إعادة)

حل المثال:

سنختار 3 من 10

$P_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

عدد طرق اختيار المدير 10

عدد طرق اختيار نائب المدير 9

عدد طرق اختيار أمين السر 8

أو عن المبدأ الأساسي بالعد $= 10 \times 9 \times 8$

ثالثاً: التوافيق:

هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية أو هي مجموعة جزئية من مجموعة منتهية

متى نستخدم التوافيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ أو $\frac{\text{الكبير}!}{\text{الفرق}! \times \text{الصغير}!}$

مثال:

$\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

أو $\frac{5!}{3!(2!)} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2} = 10$

مثال:

لدينا 10 أشخاص سنختار منهم خمسة لتشكيل لجنة.

بما أنه لا يوجد مناصب أي لا يوجد أهمية للترتيب يعني توافيق

$\binom{10}{5} = \frac{P_{10}^5}{5!}$

مثال:

أب لديه 12 ولد بكم طريقة يختار أربعة منهم للذهاب ~~بـ~~ مشوار

لا يوجد أهمية للترتيب ← توافيق

$\binom{12}{4} = \frac{P_{12}^4}{4!}$

مثال: حديقة فيها 10 زهرات مختلفة الألوان بكم طريقة يمكن لفارس تشكيل باقة مكونة من أربعة زهرات لتوزيعهم على أربع أشخاص

$\binom{10}{4} = \frac{P_{10}^4}{4!}$

مثال:

صندوق فيه 6 بطاقات بكم طريقة نسحب أربع بطاقات (معاً، دفعة واحدة، دون إرجاع)

ما في ترتيب يعني توافيق

$\binom{6}{4} = \frac{P_6^4}{4!}$

ملاحظة: نبدأ اختيار المنازل من آخر منزلة إلا إذا كان هناك شرط فيما يتعلق بالمنزلة

$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-1} = n$

$P_n^1 = n$

دورة 2017:

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من أصل 8 أسئلة

المطلوب:

1 بكم طريقة للطالب يمكن أن يختار الأسئلة
لا يوجد أهمية للترتيب ← توافيق

$\binom{8}{5} = \frac{P_8^5}{5!} =$

2 بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية

الحل: أي الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية فأنا لا أختارها إنما سيختار سؤالين فقط من الأسئلة الخمسة المتبقية، ودون أهمية للترتيب

$\binom{5}{2} = \frac{P_5^2}{2!}$

ح:

نعتبر أن الطالب سيختار الثلاثة الأخيرة نفسها $\binom{3}{3}$ و سيختار من الخمسة المتبقية 2

$\binom{3}{3} \times \binom{5}{2}$

مثال:

لدينا الأعداد $\{1, 2, 3, 5\}$

بكم طريقة يمكن تشكيل أعداد مكونة من 3 خانات بشرط أن يكون العدد زوجي

عدد طرق اختيار الآحاد 1

عدد طرق اختيار العشرات 4

عدد طرق اختيار المئات 4

← عدد الطرق 16

مثال:

بكم طريقة يمكن ~~~~ تكوين عدد مكون من أربع خانات مختلفة من أرقام المجموعة $\{0, 1, 2, 7, 3\}$

عدد طرق اختيار آحاد الألوف 4

عدد طرق اختيار المئات 4

عدد طرق اختيار العشرات 3

عدد طرق اختيار الآحاد 2

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$

المجموعات

تعريف المجموعة: زمرة من العناصر تجمع بصفة ما نضعها بقوسين من الشكل { }

تقاطع مجموعتين: هي مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين ونرمز له [$\cap$]

اجتماع أو اتحاد مجموعتين: هي مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين ونرمز له [$\cup$]

فرق مجموعتين :
هي مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى A ولا تنتمي للمجموعة الثانية B

تدريب 152

2

(1) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}$

$= n^2 + n$

(2) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}$

$= 4n^2 + 2n$

(3) $\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!}$

$= \frac{2n(2n-1)! - (2n-1)!}{2n(n-1)! - (n-1)!}$

$= \frac{(2n-1)!\,(2n-1)}{(n-1)!\,(2n-1)}$

$\boxed{(2n-1)! > n!}$

$= \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots n(n-1)!}{(n-1)!}$

$= (2n-1)(2n-2)\cdots \times n$

(4) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

$\frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)n!}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$

(5) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)n!}$

$= \frac{n+1-1}{(n+1)n!} = \frac{n}{(n+1)(n)(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$

(6) $\frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\times \cdots (2n-1)}$

$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 3\times 5\times \cdots (2n-1)}$

$= 2n(2n-2)(2n-4)\cdots\times 6\times 4\times 2$

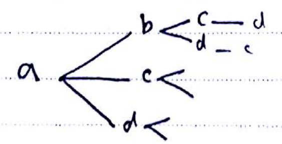
$= 2^n\,[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1]$

$= 2^n . n!$

3

$E = \{a, b, c, d\}$

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ طريقة



ثم نطبق الأعداد الثلاثة الأخرى بنفس الطريقة ونكتبها على شكل رباعيات

Farah Notebook

مسألة الأعداد والمنازل أول شي بدي أحدد إذا مختلفين

ما يقولوا عدد زوجي دائماً نبدأ بالآحاد

/ /

هام

4 توضيح

$S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

* عدد طرق اختيار العشرات 5

عدد طرق اختيار الآحاد 5

⇐ حسب المبدأ الأساسي

$5 \times 5 = 25$

* عدد طرق اختيار العشرات 5

عدد طرق اختيار الآحاد 4

حسب المبدأ الأساسي

$5 \times 4 = 20$

* عدد طرق اختيار الآحاد 2

عدد طرق اختيار العشرات 5

حسب المبدأ الأساسي

$2 \times 5 = 10$

5 عدد طرق اختيار المهندس 2

عدد طرق اختيار العمال 4

حسب المبدأ الأساسي في العد

$2 \times 4 = 8$

طريقة ثانية:

مرحلة أولى اختيار المهندس

$\binom{2}{1} = 2$

مرحلة ثانية اختيار العمال

$\binom{4}{1} = 4$

حسب المبدأ الأساسي

$4 \times 2 = 8$

6

عدد طرق اختيار الرئيس 7

عدد طرق اختيار نائب الرئيس 6

عدد طرق اختيار أمين السر 5

حسب المبدأ الأساسي

$7 \times 6 \times 5 = 210$

مثال خارجي للامتحانات:

في أحد الصفوف 10 شباب و 20 بنت يراد تشكيل لجنة مكونة من 3 شباب و 5 بنات لتمثيل هذه الشعبة في المسابقات

الحل:

نختار الشباب لحالهن والبنات لحالهن يعني منفرقين عن بعض ولكن نستخدم التوافيق لأننا نختار جزء من الكل دون أهمية للترتيب

مرحلة أولى لاختيار الشباب

$\binom{10}{3}$

مرحلة ثانية لاختيار البنات

$\binom{20}{5}$

حسب المبدأ الأساسي:

$\binom{10}{3} \times \binom{20}{5} =$

مثال خارجي امتحاني:

نفس المثال السابق لكن نريد تشكيل لجنة فيها (مدير - نائب مدير - أمين سر)

عدد الحدود أكبر من الأس بواحد

الحد التربيعي الأس = 2 ، الحد الخطي الأس = 1

الحد المستقل عن X أي لا يحوي X أو يحوي X^0 [مستقل ← الأس = 0]

الحل:

عدد طرق اختيار المدير 30

عدد طرق اختيار نائب المدير 29

عدد طرق اختيار أمين السر 28

$30 \times 28 \times 29 = 24360$

دستور ثنائي الحد:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \binom{n}{n} a^0 b^n$$

مثال:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$1 \times a^2 \times 1 + 2ab + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

مثال:

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^7 b^0 + \binom{7}{1} a^6 b^1 + \dots \binom{7}{7} a^0 b^7$$

قاعدة هامة:

إن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصر 2^n.

أوجد عدد المجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر $E\{a, b, c\}$

$2^3 = 8$

★ قاعدة أخرى $P_n^n = n!$

دستور الحد العام: هام جداً توقع

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مجهول $(a+b)^n$

مثال امتحاني: هام

أوجد الحد المستقل عن X في المنشور ذي الحدين

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$T_r = \binom{6}{r} (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

لا نفكه

$$\binom{6}{r} x^{12-2r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$\binom{6}{r} x^{12-2r} 1^r x^{-r}$$

$$\binom{6}{r} x^{12-3r}$$

بما أنه مستقل عن X فإن الأس = 0

$12 - 3r = 0$

$r = 4$

نعوض في آخر سطر وصلنا له ونعود بالفك

$$\binom{6}{4} x^{12-12} = \binom{6}{4}$$

$$\frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!}$$

$= 15$

وهو الحد الخامس

/ /

أنواع السحب المختلفة :

1) السحب مع التالي مع الإعادة

ميزات السحب

أ) يوجد أهمية للترتيب (تعكس الحالات)

ب) يوجد تكرار (عدد سحب العنصر أكثر من مرة)

ج) عدد النواتج الممكنة الكلية

$$\underbrace{n \times n \times n \times \dots n}_{r \text{ مرة}}$$

حيث n عدد العناصر

r عدد مرات السحب

د) لا ننقص العناصر المبدأ الأساسي

مثال:

صندوق فيه أربع كرات مرقمة بالأرقام (6, 7, 8, 9)

نسحب مع التالي مع الإعادة ثلاث كرات

ما جميع النواتج الممكنة

الحل:

عدد طرق سحب الكرة الأولى 4

عدد طرق سحب الكرة الثانية 4

عدد طرق سحب الكرة الثالثة 4

$4 \times 4 \times 4 = 64$ حسب المبدأ الأساسي في العد

طلب امتحاني:

كم نتيجة ممكنة لهذه التجربة في الحالات التالية

أ) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6

، الثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل 7

عدد طرق سحب الكرة الأولى 1

1 ـــــ

1 ـــــ

$1 \times 1 \times 1 = 1$

$\{7, 9, 6\}$

ب) الكرة المسحوبة أولاً 8 والثانية 7

عدد طرق سحب الكرة الأولى 1

1 ـــــ

4 ـــــ

$1 \times 1 \times 4 = 4$

$$\left\{\begin{matrix} 8 & 7 & 6 \\ 8 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 9 \end{matrix}\right\}$$

ج) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 8

عدد طرق المسحوبة أولاً 4

1 ـــــ

4 ـــــ

$4 \times 4 \times 1 = 16$

/ /

② السحب التتالي دون إعادة

مميزاتها:

أ) يوجد أهمية للترتيب (تعكس الحالات)

ب) لا يوجد تكرار لنفس العنصر

ج) عدد النتائج الممكنة حسب المبدأ الأساسي بالعد $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots$

د) عدد العناصر يتغير كلما سحب عنصر

مثال:

في آخر طلب من المسألة السابقة لو سحب الكرة التالية دون إعادة

$3 \times 1 \times 2 = 6$

③ السحب معاً: (دفعة واحدة)

المميزات:

أ) لا يوجد أهمية للترتيب (لا تعكس الحالات)

ب) نستخدم التوافيق $\binom{\text{الكل}}{\text{الجزء المسحوب}}$

مثال:

أعد الطلب الأول من المسألة السابقة في حال السحب معاً:

الحل: $\binom{4}{3}$

155

تدرب

①

③ $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} = \dfrac{\dfrac{7!}{5!(7-5)!}}{\dfrac{9!}{6!(9-6)!}}$

$\dfrac{\dfrac{7\times6\times5!}{6!\;\;3!}}{\dfrac{9\times8\times7\times6!}{5!\times2!}} = \dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$

⑤ $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$

$\dfrac{\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}{\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}} = \dfrac{2}{3}$

②

$n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$

$L_1 = n\binom{n-1}{r-1}$

$n\dfrac{P^{r-1}_{n-1}}{(r-1)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\times\cdots(n-1-r+1+1)}{(r-1)!}$

$\dfrac{P^r_n}{(r-1)!}$ وصلنا إلى نتيجة بالطرف

= الأول ونصل لنفس النتيجة

$L_2 = r\dfrac{P^r_n}{r!} = \dfrac{r\,P^r_n}{r(r-1)!}$

$\binom{n}{*} = \binom{n}{\heartsuit}$ تتساوى توفيقات من الشكل

$\Rightarrow n = * + \heartsuit$ بينما $\heartsuit \neq *$

/ /

$$\frac{P_n^r}{(r-1)!} = L_1$$

3

1

$$\binom{n}{2} = 36$$

شرط الحل $0 \leq 2 \leq n$

$$\frac{P_n^2}{2!} = 36 \Rightarrow$$

$$\frac{n(n-1)}{2\times1} = 36$$

$$n(n-1) = 72$$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

إما $n = 9$ مقبول

أو $n = -8$ مرفوض

2

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$$

شرط الحل $n \geq 4$

$$3\,\frac{P_n^4}{4!} = 14\,\frac{P_n^2}{2!}$$

$$3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$$

$$14\,\frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$$

$$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

إما $n = 10$ مقبول

أو $n = -5$ مرفوض

3 سؤال الدورة

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

تتساوى توفيقات عندما

$3n = n+2 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$

مقبول لأن هناك شرط حله

$3n \leq 10 \Rightarrow n \leq \frac{10}{3}$

شرط الحل

$0 \leq n \leq 3.33$

$n+2 \leq 10 \Rightarrow n \leq 8$

ولدينا $3n + n + 2 = 10$

$4n = 8 \Rightarrow n = 2$ مقبول

تمرينات ومسائل

1

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

$$L_1 = \frac{\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}}{}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)(n-r)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}} = \frac{n+1}{n+1-r} = L_2$$

/ /

3

① $P^5_n = 18 P^4_{n-2}$

شرط الحل $n \geq 3$

$\frac{(n+2)(n+1)(n)(n+1)}{n(n-1)(n-2)} = 14$

$n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$

$n^2 - 11n + 30 = 0$

$(n-6)(n-5) = 0$

إما $n = 6$

أو $n = 5$

② $P^5_n = 18 P^4_{n-2}$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$n(n-1) = 18(n-5)$

$n^2 - n = 18n - 90$

$n^2 - 19n + 90 = 0$

$(n-10)(n-9) = 0$

شرط الحل $n \geq 6$

إما $n = 10$

أو $n = 6$

5 دورة

$\binom{10}{7}$ توافيق لأنه لا يوجد أهمية للترتيب

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{604800}{5040} = 120$$

طريقة

2

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

$$L_1 = \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}}{\frac{n!}{n!(n-r)!}}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)n!}{(r+1)r!(n-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$\frac{n+1}{r+1} = L_2$$

2

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

$$2\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} = 5\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$(r+1)\cancel{r!}$ $(n-r+1)\cancel{(n-r)!}$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n-r+1}$$

$5r + 5 = 2n - 2r + 2$

$7r - 2n + 3 = 0$ ★

$3\binom{n}{r} , 8\binom{n}{r-1}$

بنفس الطريقة نوجد العلاقة

$3n - 11r = 3$ ★★

من ★ ، ★★ نوجد n و r بالحل المشترك

ع الأقل من الرقم والمتوقع

تمسائل تدعم الأمل مكرر بالعكس أو أطرح من الحالة العامة

/ /

$\binom{6}{3} \times \binom{4}{4}$

طريقة $\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times 1 = \frac{120}{6} = 20$

$\boxed{6}$

① $\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = 6160$

② $\binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{1}\binom{12}{4} + \binom{8}{0}\binom{12}{5}$

③ $\binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{1} + \binom{8}{5}\binom{12}{0}$

$\boxed{4}$ بما أنه لا يوجد أهمية للترتيب نستخدم التوافيق إن المصافحة تتم بين شخصين من أصل 10 دون أهمية للترتيب

$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$

من أجل n شخص

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

طريقة ثانية للسؤال السادس

آخر طلب:

نأخذ العكس: إما طالبة واحدة و 4 شباب أو صفر طالبة و 5 شباب

الناتج -

$\binom{20}{5}$ - الناتج

الحالة الكلية

$\boxed{16}$

④ فكرة الحل: نفكر بالعكس

[الـ 3 كرات نفس اللون]

إما (ح ، ح ، ح)

أو (ب ، ب ، ب)

أو (س ، س ، س)

$(6)^3 + (1)^3 + (3)^3 = 244$

⟸ عدد النتائج الممكنة للـ 3 كرات ليست جميعها من لون واحد هي

حالة $1000 - 244 = 756$

① عدد طرق سحب الكرة الأولى 10

عدد طرق سحب الكرة الثانية 10

عدد طرق سحب الكرة الثالثة 10

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$10 \times 10 \times 10 = 1000$

②

إما ح ح م

أو ب ب م

أو س س م

$3(6\times6\times4) + 3(3\times3\times7) + 3(9\times1\times1)$

$= 648$

③ $3! \times$ (ح ، ب ، س)

$3! \times (6\times3\times1) = 108$ طرق

⑤ إما $3\times$ (ح ، م ، م)

أو $3\times$ (ح ، ح ، م)

أو (ح ، ح ، ح)

$3(6\times4\times4) + 3(6\times6\times4) + (6)^3$

عند عكس 3 مشغلات 2 ضمن نفس الشيء تضرب بـ 3
لا بدي انعكس ثلث مشغلات مختلفين تضرب بـ 6 أو 3!

ط2: نفكر بالعكس
[ولا مرة حمراء]
أي [م ، م ، م]
$4 \times 4 \times 4 = 64$
حمراء واحدة على الأقل هي
$1000 - 64 = 936$

(6)
إما 3 (س ، م ، م)
أو 3 (م ، س ، س)
أو (س ، س ، س)

أو ط2
نفكر بالعكس (م ، م ، م)
$9 \times 9 \times 9 = 729$
$1000 - 729 = 271$

17

(1) عدد حالات سحب كرة أولى 10
عدد حالات سحب ثانية 9
عدد حالات سحب كرة ثالثة 8
$\Rightarrow 10 \times 9 \times 8 = 720$

(2)
إما 3 (م ، ح ، ح)
أو 3 (م ، م ، ح)
$= 3(3 \times 2 \times 7) + 3(6 \times 5 \times 4)$
$= 486$ حالة

(3) $3!$ (م ، س ، ب)
$3!(6 \times 1 \times 3) = 108$

(4) مناخذ العكس ونأخذ الكلي أي جميعها من لون واحد
(ح ، ح ، ح) (ب ، ب ، ب)
$(6 \times 5 \times 4) + (3 \times 2 \times 1) = 126$

$720 - 126 = 594$

(5) العكس ولا مرة حمراء أي (م ، م ، م)
$(4 \times 3 \times 2) = 24$
$720 - 24 = 696$

(6) نأخذ العكس أي ولا أسود أي (م ، م ، ح)
$9 \times 8 \times 7 = 504$
$720 - 504 = 216$

تدرب 159

(2)
$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$\binom{10}{r} x^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$\binom{10}{r} x^{10-r} \cdot x^{-r}$

$\binom{10}{r} x^{10-2r}$

الحد التربيعي

$10 - 2r = 2 \Rightarrow r = 4$

$T_4 = \binom{10}{4} x^6 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 210 x^2$

الحد الثابت

$10-2r=0 \Rightarrow r=5$

$T_r = \binom{10}{5} x^0$

$\boxed{3}$

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$

$T_r = \binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

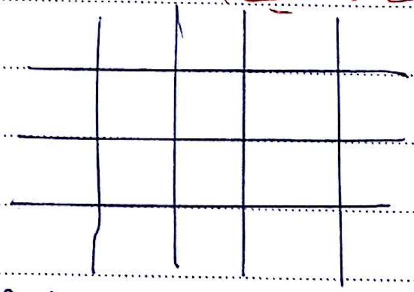
$= \binom{n}{r} x^{2n-3r}$

$2n-3r=0 \Rightarrow r=\frac{2}{3}n$

$n=3 \Rightarrow r=2$ تحقق
$n=6 \Rightarrow r=4$ تحقق $\Rightarrow$ 3 بالمضاعفات
$n=9 \Rightarrow r=6$ تحقق

$n=3k,\ k\in N$

تمرين خارجي:



كم متوازي أضلاع في الشكل.
متوازي الأضلاع يحتاج ضلعين
أفقيين وضلعين شاقوليين
نعد الأفقية ، نعد الأضلاع الشاقولية

$\binom{5}{2} \times \binom{4}{2}$ فرضاً

لو مثلث نعدد الأضلاع الكلي ونأخذ منها 3

* الحدث الابتدائي (الأولي) (البسيط) هو حدث يكون من عنصر واحد

* احتمال (Ω) = 1 ، $P(\Omega)=1$

* دائماً بالاحتمالات بالجواب البسط ≥ المقام أو معدوم

* الاحتمالات *

* تعاريف :

1 فضاء العينة : هي مجموعة النتائج الممكنة في التجربة ونرمز له بالرمز (Ω)

2 الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ونرمز لها بأحرف كبيرة

* قانون الاحتمال :

$$P(\star) = \frac{n(\star)}{n(\Omega)}$$ أو $\frac{\text{عدد الحالات المناسبة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

لحدث

* يحقق قانون الاحتمال الشروط الآتية :

1 في التجارب متساوية الاحتمال

مثال : تجربة رمي حجر النرد ورمي قطعة النقود

يكون احتمال الأحداث الابتدائية متساوي

مثال : تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فقط .

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

2 مجموع احتمالات الأحداث البسيطة يساوي احتمال الكلي أي ;

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{6}(6) = 1 = P(\Omega)$$

3 احتمال أي حدث ≥ 0 «موجب»

$$0 \leq P(\star) \leq 1$$

4 الحدث المعاكس $\bar{\star}$: هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع $\star$

مثال : عكس الزوجي : الفردي

عكس ~~ ~~ النجاح : الرسوب

* قانون احتمال حدثين :

إن وقوع A أو B على الأقل يعني اتحاد الحدثين A و B ويعطى بالقانون

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

أو

* قانون فرق حدثين :

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

A يقع ، B لا يقع

هو نفسه $P(A \cap \bar{B})$

* اذا - مع العلم - اذا كان - علماً ان ⟸ تدل على الاحتمال الشرطي

* بالاحتمال الشرطي نحسب المقام أولاً ويكون البسط هو احد حالات المقام

* الاحتمال الشرطي:

إن احتمال وقوع الحدث B علماً أن A فتوقع تعني A بشرط B

$P(A|B)$

شرط

* قانونه هو

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال: في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة لدينا الحدثين التاليين

A: العدد الظاهري يساوي 3

B: العدد الظاهري فردي

المطلوب:

1. أوجد Ω
2. أوجد احتمال A
3. أوجد $P(B)$
4. اذا علمنا أن العدد الظاهر يساوي 3 فما احتمال أن يكون هذا العدد فردي (A، B، احتمال شرطي)
5. اذا علمنا أن العدد الظاهري فردي فما احتمال أن يكون هذا العدد هو 3

① $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

③ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

④ $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$

⑤ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

* ملاحظة: اذا معنا تقاطع وبينا احتمال أو معنا احتمال وبينا تقاطع نطبق قانون الاحتمال

* الحدثان المتنافيان (منفصلان):

هما حدثان تقاطعهما $\emptyset$

مثال: في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة

A: حدث ظهور عدد أولي:

$A = \{2, 3, 5\}$

B: حدث ظهور عدد من مضاعفات 4

$B = \{4\}$

$A \cap B = \emptyset \iff$ A, B متنافيان

* الحدثان المتضادان [المتعاكسان]:
هما حدثان تقاطعهما Ø واجتماعهما Ω

مثال: A: ظهور عدد زوجي
$A = \{2, 4, 6\}$
B ظهور عدد فردي
$B = \{1, 3, 5\}$

* ملاحظة هامة:
في الاحتمال الشرطي دائماً
نحسب المقام قبل البسط

* قانون الاحتمال المركب:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

أو $P(B|A) \cdot P(A)$

* الاستقلال الاحتمالي لحدثين:
شرطه هو: A , B مستقلان

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

* الحدثان المستقلان: هما حدثان احتمال
وقوع أحدهما لا يؤثر على
احتمال وقوع الآخر

مثال: وجد أن عدد طلاب البكالوريا الذين
يستخدمون الانترنت 50% وأن 30%
يستخدمون الجوالات العادية (نوكيا) وأن 20%
يستخدمون جوالات عادية في الانترنت
هل استخدام الانترنت واستخدام الجوالات
العادية مستقلان؟

نفرض A حدث استخدام الانترنت

$$P(A) = \frac{50}{100}$$

نفرض B حدث استخدام جوال عادي

$$P(B) = \frac{30}{100}$$

جوال عادي + انترنت

$$P(A\cap B) = \frac{20}{100}$$

⟸ شرط الاستقلال الاحتمالي:

$$P(A\cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{20}{100} \overset{?}{=} \frac{50}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$\frac{20}{100} \neq \frac{15}{100}$$

⟸ الحدثان غير مستقلان احتمالياً

* دائماً الحالات بين بعضها ضرب ×
بس لما ينتقل ع حالة جديدة بجمع +

* بس نقول احداهما زرقاء وما حددلي انو وحدة بعكس الحالات

* لما بدنا نعكس سحبتين متطابقتين منضرب بـ 2

201 - -

الموضوع

مثال: صندوق فيه 10 كرات ، 2 زرقاء (B) و 5 خضراء (G) و 3 حمراء (R) نسحب على التوالي كرتين دون إعادة

المطلوب احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء

إما (ز - ز)

أو (م - ز)

$$\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{18}{90}$$

*ملاحظة: في مسائل السحب على التوالي مع إعادة ودون إعادة بالاحتمالات نستخدم المبدأ الأساسي في العد

*طلب اضافي: أعد المسألة السابقة في حال السحب مع إعادة

$$\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}$$

$$=\frac{20}{100}$$

*ملاحظة هامة: لم نعكس الحالات لأنه أجبرنا على أن تكون الكرة الثانية زرقاء

*طلب إضافي: أعد المسألة السابقة في حال السحب معاً

$$\frac{\binom{2}{2}+\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{1+16}{\frac{10\times 9}{2!}}=\frac{34}{90}$$

*طلب إضافي: نفس المسألة السابقة المطلوب احسب احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء في حال السحب على التوالي ودون إعادة وفي حال السحب على التوالي مع إعادة وفي حال السحب معاً

* المطلوب إحداهما حمراء

دون إعادة

(ح م) (م ح)
(ح ح)

$$2\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\right)+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$$

مع إعادة

(ح م) (م ح)
(ح ح)

$$2\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\right)+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}$$

معاً

(ح م)
(ح ح)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}+\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}$$

* بس يكون في صندوقين في تجربة اختيارية

* قانونا دومورغان :

[1] $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

[2] $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

[3] $P(\star) = 1 - P(\star')$
$P(\star') = 1 - P(\star)$

* قواعد التمثيل الشجري :

[1] كل عقدة في التمثيل الفروع ومجموع احتمالات الفروع الصادرة من العقدة يساوي الواحد

[2] إن احتمال المسار يساوي حاصل ضرب احتمالات المسجلة على الفروع

[3] احتمال حدث $(\star)$ = مجموع احتمالات المسارات التي تقود الى $\star$

* ملاحظة هامة : في المسائل التي فيها صندوقين ونختار احدهما فإننا نرسم مخطط شجرة من فرعين ونعطي لكل فرع احتمال $\frac{1}{2}$
[وهو طول ما يقول صندوقين متشابهين]

مثال: يحوي صندوق U_1 على كرة سوداء وكرتين بيضاويتين ويحوي صندوق U_2 على كرتين سوداويين وكرتين بيضاويين وكرة حمراء نختار احد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه كرة عشوائياً :

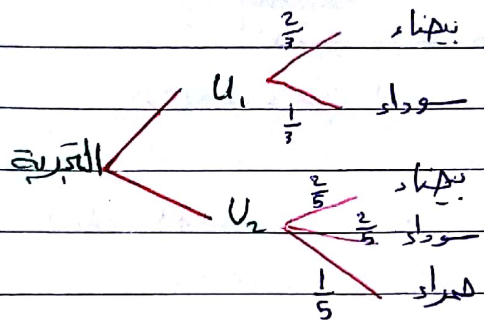
المطلوب :

1- احسب احتمال ان تكون هذه الكرة سوداء

2- لقد سحبنا كرة سوداء اللون
احتمال شرطي
(اذا علمت أن الكرة المسحوبة سوداء)
فما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_1 ؟

3- اذا علمت ان الكرة المسحوبة سوداء أوجد احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_2 ؟

4- اذا علمت أن الكرة المسحوبة بيضاء أوجد احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_2 ؟



$\boxed{1}$ اولا سوداء من U_1
أو سوداء من U_2

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$\boxed{2}$

$$P(U_1 | B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)}$$

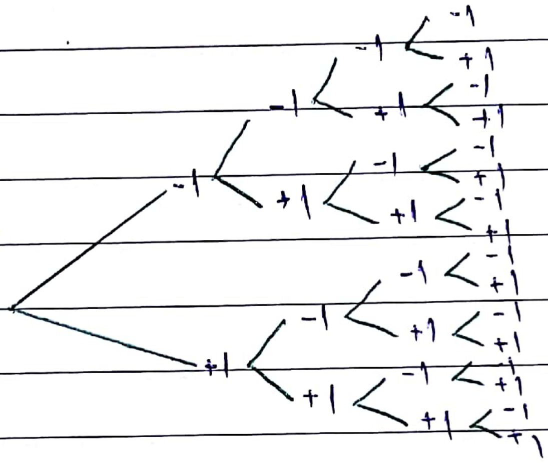
$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}$$

* تمارين صفحة 180 *

$\boxed{1}$ نفرض A حدث الحصول على 3 كرات بيضاء

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{228}$$

$\boxed{2}$



قانون: $n(\Omega) = 2^4 = 16$

الحالات:

$$\{(-1,-1,-1,-1),\ (-1,-1,-1,+1),\ \ldots\}$$

نفرض M حدث مجموع الخانات صفر

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16}$$

نفرض N حدث ألا يكون العدد ذاته بخانتين متجاورتين

$$P(N) = \frac{2}{16}$$

$\boxed{4}$

* $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

* $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

* $B = (B\cap A) + (B\cap A')$

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A')$$

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B\cap A) = \frac{1}{4} \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

$= \frac{\frac{3}{20}}{1-\frac{1}{2}} =$

$P(B|A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')} = \frac{4}{5}$

$P(B\cap A') = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

$P(B) = \frac{1}{12} + \frac{8}{15} = \_\_$

* $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{17}{20}$

$P(A'\cap B') = P(A\cup B)'$

$= 1 - P(A\cup B)$

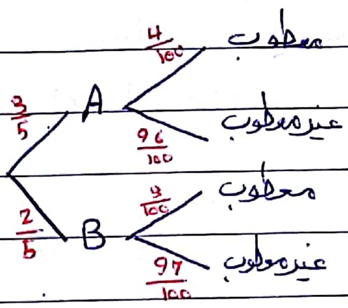
$= 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$

$P(B'|A') = \frac{P(B'\cap A')}{P(A')}$

* تدريب صفحة 180

5

①



$$P(A) = \frac{1200}{2000} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{800}{2000} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

② نفرض M حدث أن يكون معطوبا

$$P(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{100}$$

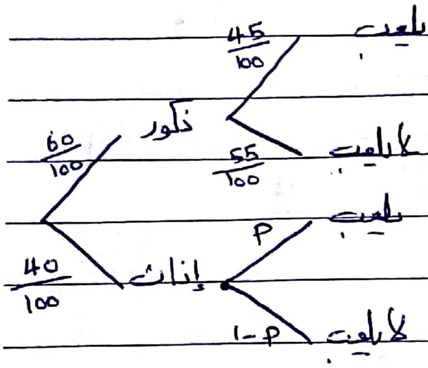
$$= \frac{12}{500} + \frac{6}{500} = \frac{18}{500}$$

③

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{100}} = \frac{12}{18}$$

6



30% من الطلاب يلعبون كرة المضرب

$$\frac{60}{100} \cdot \frac{45}{100} + \frac{40}{100} \cdot P = \frac{30}{100}$$

$$\frac{270}{10} + 40P = 30 \qquad 100\times$$

$$270 + 400P = 300 \qquad 10\times$$

$$\Rightarrow P = \frac{30}{400} \Rightarrow 1 - P = 1 - \frac{3}{40}$$

$$= \frac{37}{40}$$

* عندما نعطى ألوان وأرقام اذا سُئلت عن اللون لا نهتم بالرقم واذا سُئل عن الرقم لا نهتم باللون

* تمرينات ومسائل *

1 ممكن يجي

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{\dfrac{\binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}}{\dfrac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3 نفرض احتمال أن تكون أنثى G
نفرض احتمال أن يكون ذكر B

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\times 6 = \frac{6}{16}$$

$$= \frac{1}{2}$$

الأحداث مستقلة

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A\cap C)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(A\cap C) = \frac{1}{16}$$

⇐ مستقلة احتماليا

$$P(B\cap C) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\times 3$$

$$P(B\cap C) = \frac{3}{16}$$

$$P(C|B) = \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$P(B)\cdot P(C) = P(C\cap B)$$

⇐ مستقلان احتماليا

* شرطي لأنه سأل عن حدث بعد أن وقع حدث آخر

$$= \frac{\frac{85}{300}}{\frac{140}{300}} = \frac{85}{140}$$

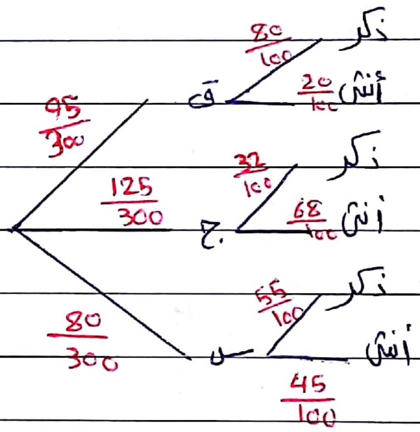
$\boxed{8}$

$\boxed{1}$

$$P(A) = \frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} =$$

$$P(B) = \frac{\binom{80}{3} + \binom{95}{3} + \binom{125}{3}}{\binom{300}{3}}$$

$\boxed{2}$



$$P_1 = \frac{95}{300} \times \frac{20}{100} = \frac{1900}{30000} = \frac{19}{300}$$

$$P_2 = \frac{95}{300} \times \frac{20}{100} + \frac{125}{300} \times \frac{68}{100} + \frac{80}{300} \times \frac{45}{100}$$

$$= \frac{140}{300} = \frac{14}{30}$$

$$P(E|G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$$

* لمسائل المتحول العشوائي نبحث عن جملة X يدل على أو نقترن بنتيجة التجربة ---

* مجموع الاحتمالات لازم يطلع واحد

* التوقع يجوز يطلع معدوم أو سالب أو موجب

* ب $X(\Omega)$ لا نكرر الحالات

سؤال الـ ١٠٠

* المتحولات العشوائية

تعريف: هو تابع منطلقه [نتائج التجربة] Ω ومستقره R

قيم $X(\Omega)$

* قانون الاحتمال:

نمثله بجدول كما يلي:

x_i (الحالات)	x_1	x_2	------	x_i
$P(X=x_i)$ (الاحتمالات)				

* التوقع [الأمل الرياضي]:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X=x_i)$$

حيث X متحول عشوائي

* التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

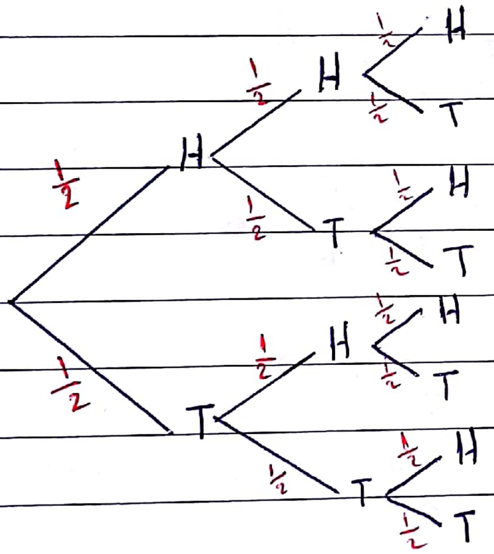
* الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال: نلقي ثلاث قطع نقود متوازنة مرقمة 1، 2، 3 ونسجل الوجه الظاهر [شعار - كتابة] نجري لعبة تقتضي بربح ليرة واحدة كلما ظهر T ونخسر ليرة كلما ظهر H وليكن X متحول عشوائي يدل على نتيجة الربح والمطلوب

سينة ← الربح والخسارة

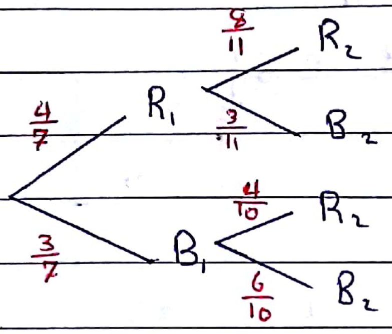
أوجد مجموعة قيم المتحول العشوائي $X(\Omega)$ ونظم جدول القانون الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه والانحراف.



$$\Omega = \left\{ \underbrace{(H,H,H)}_{-3}, \underbrace{(H,H,T)}_{-1}, \underbrace{(H,T,H)}_{-1}, \underbrace{(H,T,T)}_{1}, \underbrace{(T,H,H)}_{-1}, \underbrace{(T,H,T)}_{1}, \underbrace{(T,T,H)}_{1}, \underbrace{(T,T,T)}_{3} \right\}$$

* تمرينات ووسائك :

16



$$P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{32}{77} + \frac{12}{70}$$

$$P(B_1 | R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{10}}$$

$$X(\Omega) = \{-1, 3, -3, 1\}$$

$P(-1) = \frac{3}{8}$ $\quad P(3) = \frac{1}{8}$

$P(-3) = \frac{1}{8}$ $\quad P(1) = \frac{3}{8}$

k_i	-1	3	-3	1
$P(X=k)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
X^2	1	9	9	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} k \; P(X=k)$$

$$= -1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + (-3) \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8}$$

$$= 0$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{24}{8}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{24}{8} - 0 = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3}$$

الموضوع

* تمارين صفحة 184

1

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X(\Omega) = \{1, -2, 6\}$

x_i	1	-2	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_i^2	1	4	36

$E(x) = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(-2 \cdot \frac{4}{6}\right) + \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{-1}{6}$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ ⋆

$E(x^2) = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(4 \cdot \frac{4}{6}\right) + \left(36 \cdot \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{53}{6}$

نعوض في ⋆

$V(x) = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$

2 دورة 2014

مجموع النتائج $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(x = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

$P(x = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$

$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

x_i	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
x_i^2	0	1	4

$E(x) = \frac{8}{10}$ $\quad V(x) = \frac{9}{25}$

3

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(x = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

$P(x = 1) = 2 \times \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{12}{20}$

$P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

x_i	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$
x_i^2	0	1	4

$E(x) = \frac{16}{20}$, $\quad V(x) = \frac{9}{25}$

4

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

واحدان

$P(X=3) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{4}{10}$

$P(X=4) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$

ثنيتين
أو
(3,1)

$= \dfrac{3}{10}$

$P(X=5) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{2}{10}$

x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
x_i^2	4	9	16	25

$E(X) = \dfrac{36}{10}$ $\qquad V(X) = \dfrac{84}{100}$

5

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

$P(X=2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20}$

1 ثم 1

$P(X=3) = \left(\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{4}\right) \times 2 = \dfrac{8}{20}$

1 ثم 3 أو 3 ثم 1

$P(X=4) = \left(\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4}\right) \times 2$

(1 ثم 3 أو 3 ثم 1) أو (2 ثم 2)

$= \dfrac{6}{20}$

$P(X=5) = \left(\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4}\right) \times 2 = \dfrac{4}{20}$

x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$
x_i^2	4	9	16	25

$E(X) = \dfrac{72}{20}$ $\qquad V(X) = \dfrac{276}{20}$

6

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P(X=2) = \dfrac{1}{36}$, $P(X=3) = \dfrac{2}{36}$

$P(X=4) = \dfrac{3}{36}$, $P(X=5) = \dfrac{4}{36}$

$P(X=6) = \dfrac{5}{36}$, $P(X=7) = \dfrac{6}{36}$

$P(X=8) = \dfrac{5}{36}$, $P(X=9) = \dfrac{4}{36}$

$P(X=10) = \dfrac{3}{36}$, $P(X=11) = \dfrac{2}{36}$

$P(X=12) = \dfrac{1}{36}$

* $E(x) = n \times p$
* $V(x) = n \times p \times q$

$E(x) = \frac{252}{36}$, $V(x) =$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

X(Ω)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

* تجربة برنولي [المتحولات العشوائية الحدانية]:

* نستخدم تجربة برنولية عندما تجرى التجربة n مرة [على نحو مستقل]
ونهتم بوقوع [حدث محدد] احتماله p واحتمال عدم وقوعه q أي (1-p) ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً K من المرات.

نوع

* قانون برنولي:

$P(X=K) = \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$

عدد مرات تكرار التجربة ← n

عدد مرات تحقق الحدث ← k

احتمال عدم وقوع الحدث ← q

* مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة n ← 3 مرات احسب احتمال الحصول على K مرتين H الوجه
نرمز بالشعار

التجربة البرنولية:

$n = 3$, $k = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{8}$

* مثال:

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية
ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$ والمطلوب:
ما هي قيم المتغير العشوائي ونظم جدولاً بها
واحسب قيمة توقعه الرياضي وتباينه

برنولي

$q = \frac{2}{3}$ $p = \frac{1}{3}$ $k = 3,2,1,0$ $n = 3$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$

$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$

$\boxed{\delta_2}$

$P(X=0) = P(T,T,T) = \frac{8}{27}$

$P(X=1) = (H,T,T) \times 3$

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times 3 = \frac{4}{9}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
k^2				

$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$

$k = 0, 1, \ldots\ldots n$

Scanned by CamScanner

* متى نستخدم قانون الحدّاني؟
عندما نكرر اختبار (تجربة) ما عدداً n من المرات على نحو مستقل ونطلب هنا حساب احتمال تحقق حدث S عدداً k من المرات

مثال: نلقي قطعة نقود متوازنة ٥ مرات فما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط؟!

$n = 5$ عدد مرات الاختبار

$k = 3$ عدد مرات ظهور H

$p = \frac{1}{2}$ $\quad q = \frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

* مثال: نلقي ست مرات حجر نرد متوازن مثالي وليكن A حدث ظهور 5 أو 6 مرتين على الأقل فما احتمال وقوع الحدث A؟ $\Rightarrow k = 2, 3, 4, 5, 6$

$\frac{2}{6}$

$n = 6$ عدد مرات الاختبار أو أكثر

$k = 2$

هذه التجربة برنولية لأننا نهتم بوقوع حدث محدد وهو ظهور 5 أو 6

$p = \frac{2}{6}$ $\quad q = \frac{4}{6}$

اذاً X يخضع لقانون برنولي وسيطاه:

$p = \frac{1}{3}$, $n = 6$

نعتمد على A' عوضاً عن A وهو الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة فقط أي $(X=1)$

أو عدم الحصول على 5 أو 6 $X=0$

$$P(X=0) = \binom{6}{0}\left(\frac{2}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^6$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$P(X=1) = \binom{6}{1}\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$$

$$P(A') = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= \frac{256}{729}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{256}{729}$$

$$= \frac{473}{729}$$

* الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين:

نطبق ما يلي:

١- نوجد قيم المتحول العشوائي الأول X

٢- نوجد قيم المتحول العشوائي الثاني Y

٣- ننظم جدول ذي مدخلين أسطره تدل على أحد المتحولين والأعمدة على الآخر

٤- نوجد قانون الزوج (X,Y) كما يلي:

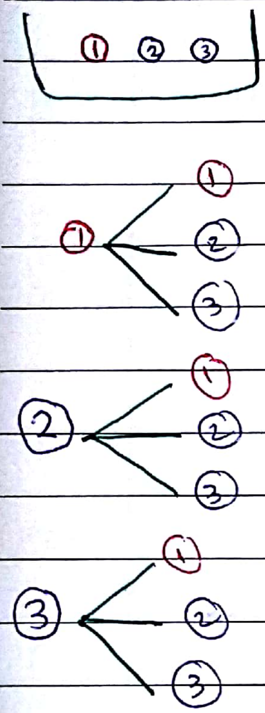
$$P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_i)\right]$$

ونملأ الجدول

٥- نختبر شرط الاستقلال الاحتمالي لمتحولين وهو

$$P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_i)\right] = P(X=x_i)\,.\,P(Y=y_i)$$

* مثال صفحة 185:



$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,2) & (2,3) & (2,1) \\ (3,2) & (3,3) & (3,1) \end{Bmatrix}$$

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

$$Y(\Omega) = \{2,3,4,5,6\}$$

X \ Y	2 (مجموعه زوجي 2)	3 (مجموعه فردي)	4	5	6	P_i
حمراوين 0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9} \to P_0$
زرقاء ثم حمرة 2 1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9} \to P_1$
زرقاوان 2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} \to P_2$
P'_j	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
	P'_2	P'_3	P'_4	P'_5	P'_6	

* لايجاد الخانات الفرعية نقسم الداخلية على الخارجية .

تدرب الصفحة 187

$\boxed{1}$

x \ y	0	1	2	قانون x
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون y	$\frac{20}{60}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{4}{24}$	1

$$P[(x=0)\cap(y=2)] \overset{?}{=} P_0 \times P'_2$$

$$P_{(0,2)} \overset{?}{=} P_0 \times P'_2$$

أو

$$P_{(0,2)} \overset{?}{=} P_0 \times P'_2$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9} \neq \frac{1}{81}$$

مساواة خاطئة ⇐ المتحولان غير مستقلان

*نوع 2016

$\boxed{2}$

x \ y	0	1	2	قانون x
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون y	0.3	0.5	0.2	1

$$P_{(2,6)} \overset{?}{=} P_2 \times P'_{(6)}$$

$$\frac{1}{9} \neq \frac{4}{9} \times \frac{1}{6}$$

$$P(1,2) = P_1 \times P'_2$$

$$0.04 = 0.2 \times P'_2 \Rightarrow P'_2 = \frac{0.04}{0.2}$$

$$= 0.2$$

* تمرينات ومسائل *

15

① احتمال المطلوب [إماأن الحدثين مستقلين]

$P(R')\times P(R')\times P(R')\times P(R')\times P(R)$

$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{16}{243}$

②

$P(\bar{H})=\left(\frac{4}{6}\right)^5$

$\Rightarrow P(H)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^5=211$

$X(\Omega)=\{0,\dots 5\}$

أي أن المتحول العشوائي X يخضع لقانون حداني بوسيطين

$B(5,\frac{4}{6})\quad , \quad q=\frac{2}{6}$

$P(X=K)=\binom{5}{K}\left(\frac{4}{6}\right)^K\left(\frac{2}{6}\right)^{5-K}$

9

$X(\Omega)=\{0,3,5\}$

$P(X=5)\Rightarrow P(R_3)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$

$=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

$P(X=3)=P(R_2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$

$=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$

$P(X=0)=1-\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\right)=\dots$

10 التجربة دون إعادة

$X(\Omega)=\{2,3,4\}$

$P(X=2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$

$P(X=3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+2\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\right]$

ازرق ثم ازرق ثم ازرق
احمر ازرق احمر

$=\frac{6}{60}+\frac{12}{60}=\frac{6}{20}$

$P(X=4)=1-\left(\frac{2}{20}+\frac{6}{20}\right)$

$=1-\frac{8}{20}=\frac{12}{20}$