النواس المرن- الهزازة التوافقية البسيطة

مراجعة و تذكرة :

الحركة المستقيمة

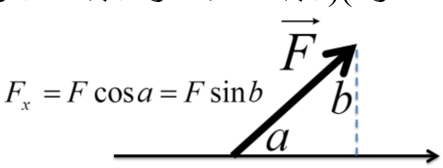
- عند حركة جسم m على خط مستقيم فإنه : للدراسة نحدد محور منطبق على منحى الحركة $\overrightarrow{x'x}$ مبدأ للحركة O و اتجاه موجب نحو $\overrightarrow{Ox}$.
- يحدد مكان الجسم في لحظة زمنية t بواسطة المطال أو الفاصلة .
- **المطال** :هو بعد الجسم عن المبدأ جبرياً (أي إن كان في الاتجاه الموجب نعطيه اشارة موجبة و إن كان بالاتجاه السالب يعطى إشارة سالبة) أي $x = \overline{Om}$
- **السرعة :** معدل تغير المطال بمرور الزمن و تساوي مشتق المطال بالنسبة للزمن : $v = \frac{dx}{dt} = (x)'_t$
- **التسارع** :هو معدل تغير السرعة بمرور الزمن و يساوي مشتق السرعة بالنسبة للزمن و بالتالي هو مشتق ثاني للمطال بالنسبة للزمن :

$$a = \frac{dv}{dt} = (v)'_t = (x)''_t$$

- أي الحركة تحدد بالمطال الذي باشتقاقه يعطي السرعة التي باشتقاقها تعطي التسارع .

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{v} \longrightarrow \boxed{a}$$

القوة : هي كل مؤثر قادر على تغيير الحالة الحركية .
القوة مقدار شعاعي أي له جهة. **تحدد بأربعة عناصر :** نقطة التأثير و الحامل و الجهة والشدة .
تقدر الشدة بوحدة نيوتن N .
لاستثمار القوة في التطبيقات العددية يجب اسقاطها لتحويلها لمقدار عددي .
مسقط قوة على محور = (اشارة + أو −) تدل على الاتجاه)(شدة القوة)(جيب المقابلة أو تجيب المجاورة)



قوانين التحريك :

- **مبدأ العطالة :** عندما تنعدم محصلة القوى المؤثرة بجسم يكون الجسم ساكن أو حركته مستقيمة منتظمة .
أي : سكون أو حركة مستقيمة منتظمة $\Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{0}$
- **قانون التحريك الأساسي :** محصلة القوى المؤثرة في جسم تساوي الكتلة مضروبة بالتسارع أي :

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

- مم يتألف النواس المرن ؟

نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k يعلق بشكل شاقولي من الطرف العلوي ويحمل في طرفه السفلي كتلة m و تزاح عن وضع التوازن مسافة شاقولية X_{max} و تترك دون سرعة ابتدائية فتهتز إلى جانبي وضع التوازن (مركز الاهتزاز) .

ملاحظة - ثابت الصلابة : يعبر عن صعوبة استطالة النابض و وحدته $(N.m^{-1})$ بحيث :

التوتر = قوة الشد = ثابت الصلابة × الاستطالة

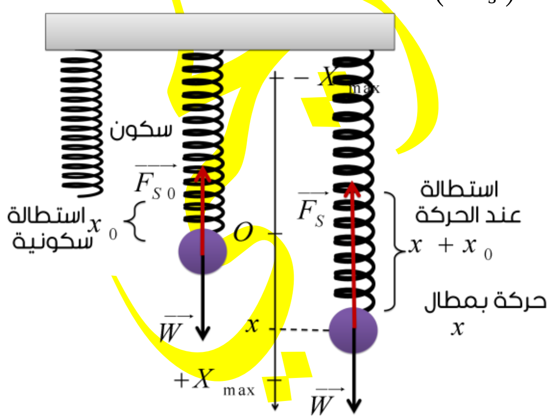
القوى في النواس المرن :

- **قوة الثقل** $\vec{W}$ **:** تؤثر في مركز عطالة الجسم حاملها شاقولي تتجه للأسفل و هي ثابتة و شدتها $W = m.g$
حيث مسقطها على $\overrightarrow{x'x}$: $+W$
- **توتر النابض** $\vec{F_s}$ **:** تعاكس الاستطالة و تتغير بتغيرها و تساوي شدتها قوة الشد $\vec{F_s}'$ أي أن الشدة :

الوضع	استطالة	الشدة	المسقط
سكون $\vec{F}_{s0}$	x_0	$F_{s0} = F_{s0}' = k.x_0$	$-F_{s0}$
حركة $\vec{F}_s$	$x_0 + x$	$F_s = F_s' = k(x_0 + x)$	$-F_s$

- في حالة السكون $F_{s0} = F_{s0}' = k.x_0$
- و في حالة الحركة $F_s = F_s' = k.(x_0 + x)$

مسقطها على $\overrightarrow{x'x}$: هو $(-F_{s0})$ عندالسكون ، أما بالحركة $(-F_s)$.



<u>الطاقة في النواس المرن</u>

- **الطاقة الحركية :** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- **الطاقة الكامنة المرونية :** $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
- **الطاقة الميكانيكية الكلية :** $E_{tot} = E_p + E_k$

استنتاج قوة الارجاع(محصلة القوى في نواس مرن):

• ندرس الجسم في وضع التوازن :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s0} = \vec{0}$$

بالاسقاط على $\overrightarrow{x'x}$:

$$W - F_{s0} = 0$$

$$W = F_{s0} = F_{s0}' = k.x_0 ....(1)$$

حيث أن النابض يخضع لقوة شد $\vec{F}_{s0}'$ سببت الاستطالة السكونية x_0 .

• في حالة الحركة عندما يكون الجسم بمطال x :

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W}+\vec{F}_s = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على $\overrightarrow{x'x}$ تكون محصلة القوى:

$$F = W - F_s = m.a \quad ....(2)$$

ولكن هنالك قوة شد النابض $\vec{F}_s'$ سببت الاستطالة الكلية $x_0 + x$ بالتالي :

$$F_s = F_s' = k(x+x_0)................(3)$$

بتعويض العلاقات $1,3$ في 2 نجد :

$$F = W - F_s = k.x_0 - k(x+x_0)$$

$$\boxed{F = -k.x}$$

وهي علاقة **قوة الارجاع** (محصلة القوى في النواس المرن) .

• **أكتب علاقة محصلة القوى في النواس المرن ؟**

$$\boxed{F=-k.x}$$

ماذا تسمى ؟ قوة ارجاع - **ولماذا ؟** لأنها تعيد الجسم إلي وضع التوازن كلما ابتعد عنه

ماذا تلاحظ من علاقتها ؟ تتناسب طرداً مع المطال و تعاكسه بالاشارة .

• **فسر : شعاع قوة الارجاع يتجه دوماً نحو مركز الاهتزاز و يتفق مع مع شعاع التسارع بالجهة**

لأن $F=-k.x : k>0$ بالتالي اشارة القوة بعكس المطال و شعاعها يتجه بالتالي نحو مركز الاهتزاز .

و $F = m.a : m>0$ فقوة الارجاع و التسارع بنفس الاشارة و شعاعيهما بنفس الجهة .

• **فسر:عند توقف النواس المرن في وضع التوازن فإنه لا يعود للحركة بعد زوال سبب الحركة**

$x=0 : F=-k.x=0$ لا يوجد قوة إرجاع فلا سبب للحركة

فسر:عند توقف النواس المرن في وضع التوازن فإنه لا يعود للحركة بعد زوال سبب الحركة

$x=0: F=-k.x=0$ لا يوجد سبب للحركة

فسر:عند توقف النواس المرن عند مطال بين المطال الأعظمي و وضع التوازن فإن زال سبب التوقف يعد الجسم للاهتزاز و لكن بسعة جديدة .

لأن $x\neq 0 : F=-k.x\neq 0$ يوجد قوة ارجاع فيتحرك الجسم ، و يصبح المطال الذي توقف عنده الجسم هو السعة الجديدة لانعدام السرعة عنده .

• **تابع الحركة الجيبية :**

التابع الزمني للمطال العلاقة بين المطال x والزمن t .

و في الحركة الجيبية النمط العام لتابع الحركة هو :

$$\boxed{x = X_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)}$$

و **ثوابت الحركة الجيبية** التي تحدد في المسائل هي :

✓ X_{max} **السعة أو المطال الأعظمي** : أبعد مسافة عن وضع التوازن وحدة قياسه متر m

✓ ω_0 : **نبض الحركة الخاص** يدل على مدى تكرار الاهتزاز بمرور الزمن وحدة قياسه $rad.s^{-1}$ ويعطى بالعلاقة :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

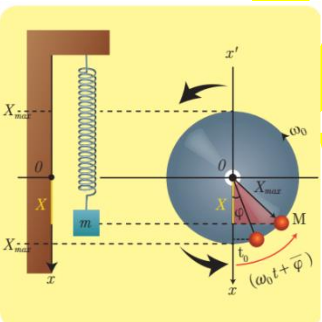
حيث **الدور الخاص** T_0 : زمن الهزة الواحدة بالثانية .

التواتر الخاص f_0 : عدد الهزات بالثانية يقدر بالهرتز Hz .

✓ φ : **الطور الابتدائي :** و يتعلق بشروط البدء ، وتدل على تأخير و تقديم الحركة مقارنة بغيرها . وحدته راديان rad

أما **متغيرات الحركة** هي : المطال x - الزمن t

أثبت أن مسقط الحركة الدائرية على محور حركة جيبية



بفرض متحرك M بحركة مستقيمة منتظمة سرعتها الزاوية ω_0 و على مسار دائري نصف قطره X_{max} مركزه O عند بدء الزمن كانت الزاوية التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{OM}$ مع المحور $\overrightarrow{x'x}$ عند بدء الزمن φ

الزاوية التي يصنعها الشعاع مع المحور في اللحظة t هي $(\omega_0 t+\varphi)$ فيكون مسقط الشعاع على هذا المحور :

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- **استنتاج طبيعة الحركة للنواس المرن و استنتاج علاقة الدور الخاص :**

$$F=-k.x$$

$$m.a=-k.x$$

$$m.(x)''_t=-k.x$$

$$\boxed{(x)''_t=-\frac{k}{m}.x}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً :

$$x=X_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

نشتق مرتين :

$$(x)'_t=-\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$(x)''_t=-\omega_0^2.\underbrace{X_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$\boxed{(x)''_t=-\omega_0^2.x}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بمقارنة $1,2$ نجد

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}>0 \quad : m>0, k>0$$

فالحركة توافقية بسيطة . نوجد الدور الخاص :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

الدور الخاص	s	T_0
الكتلة	kg	m
ثابت صلابة النابض	$N.m^{-1}$	k

- **أكتب علاقة دور النواس المرن الخاص و ماذا تلاحظ منها ؟**

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

الدور الخاص للنواس المرن :

1. لايتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} .
2. يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم m.
3. يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت الصلابة k.

- **ملاحظة :** علاقة تغيرة الدور أو النبض عند تغير مكونات النواس المرن :

$$\frac{\omega_0}{\omega_0'}=\frac{T_0'}{T_0}=\sqrt{\frac{m'.k}{m.k'}}$$

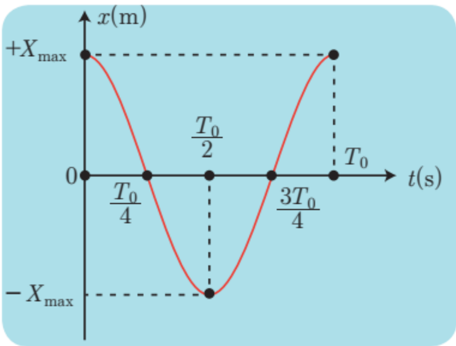
○ الدراسة الحركية للنواس المرن :

أولاً : المطـــال :

- **اكتب علاقة تابع المطال للنواس المرن عند انعدام الطور الابتدائي و مثل ذلك بيانياً خلال دور واحد .**

$$x=X_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad :\varphi=0$$

$$x=X_{max}.\cos(\omega_0 t)$$



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

ثانياً : الســـرعة :

- **أوجد تــابع الســرعة و بـين أيـن تكـون : أـ عظمـى ، بـ معدومـة و مثلهـا بيانيـاً خـلال دور واحـد و أكتب علاقة السرعة العظمى طويلةً.**

$$v=(x)'_t=-\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0 t)$$

- السرعة عظمى في وضع التوازن

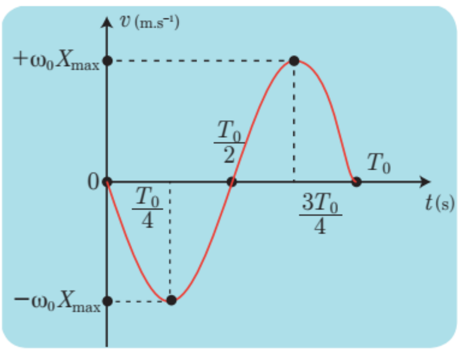
$$(v=\pm v_{max} : x=0)$$

- السرعة معدومة في الوضعين المتطرفين :

$$(v=0 : x=\pm X_{max})$$

علاقة السرعة العظمى $v_{max}=\omega_0.X_{max}$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0



ثالثاً : التســــارع

- **أوجد تابع التسارع و بين أين يكن: أ- أعظمي ، ب- معدوم و مثله بيانياً خلال دور واحد.**

$$v=(x)'_t=-\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0.t)$$

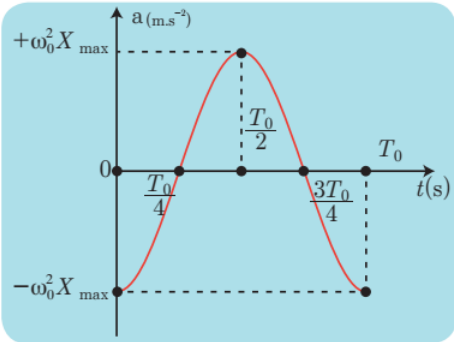
$$a=(v)'_t=-\omega_0^{2}.X_{max}.\cos(\omega_0.t)$$

$$\boxed{a=-\omega_0^{2}.x}$$

- التسارع أعظمي في الوضعين المتطرفين
$(a=\pm a_{max} : x=\mp X_{max})$
- التسارع معدوم في وضع التوازن
$(a=0 : x=0)$

علاقة التسارع الأعظمي : $a_{max}=\omega_0^{2}X_{max}$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^{2}X_{max}$	0	$\omega_0^{2}X_{max}$	0	$-\omega_0^{2}X_{max}$



○ **الطاقة الكلية _ الطاقة الميكانيكية في النواس المرن:**

الطاقة الميكانيكية = الطاقة الكامنة + الطاقة الحركية

$$E_{tot}=E_p+E_k\,..................(1)$$

الطاقة الكامنة المرونية :

$$E_p=\frac{1}{2}k.x^{2} \quad : x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$E_p=\frac{1}{2}k.X_{max}^{2}.\cos^{2}(\omega_0 t+\varphi).........(2)$$

الطاقة الحركية :

$$E_k=\frac{1}{2}m\,v^{2} \quad : v=-\omega_0.X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$E_k=\frac{1}{2}m.\omega_0^{2}.X_{max}^{2}.\sin^{2}(\omega_0 t+\varphi)$$

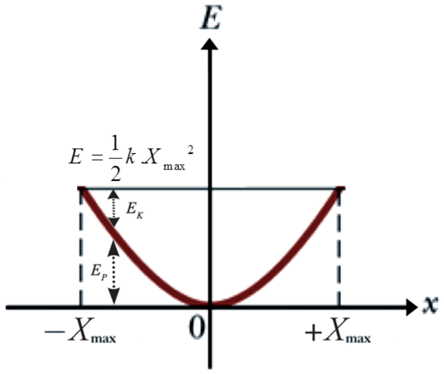
$$: \; k=m.\omega_0^{2}$$

$$E_k=\frac{1}{2}k.X_{max}^{2}.\sin^{2}(\omega_0 t+\varphi).............(3)$$

بتعويض $2,3$ في 1 نجد الطاقة الميكانيكية :

$$\boxed{E_{tot}=\frac{1}{2}k.X_{max}^{2}=const}$$

- رسم بياني لتغير الطاقة بتغير المطال:



✓ في الوضعين المتطرفين تكون الطاقة كامنة و تنعدم الطاقة الحركية

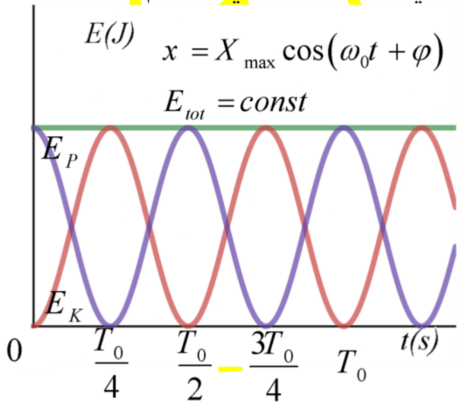
$$E_p=E=\frac{1}{2}k.X_{max}^{2}, E_k=0 : x=\pm X_{max}$$

✓ في وضع التوازن (مركز الاهتزاز) تكون الطاقة حركية و تنعدم الطاقة الكامنة

$$E_k=E=\frac{1}{2}k.X_{max}^{2}, E_p=0 : x=0$$

✓ عند الانتقال من وضع متطرف إلى مركز الاهتزاز تتحول الطاقة من كامنة إلى حركية و في الحركة بالاتجاه المعاكس يحدث تحول معاكس أي من حركية إلى كامنة و تبقى طاقة الهزازة الكلية ثابتة .

منحني تغير الطاقة بدلالة الزمن : في نواس خلال دور من أجل تابع جيبي طوره الابتدائي معدوم :



ملاحظة : بالقيم المطلقة تكون المقادير التالية .

تتناقص	تزداد	عظمى	معدومة	x,a,F,E_p
تزداد	تتناقص	معدومة	عظمى	v,E_k

أي مقادير المجموعة الأولى متفقة في ازديادها وتناقصها و لكنها تخالف المجموعة الثانية و التي مقاديرها متفقة في الازدياد والنقصان .. وذلك بالقيم المطلقة .

اثبت صحة العلاقة التالية للسرعة في نواس مرن :

$$v=\omega_0\sqrt{X_{\max}^2-x^2}$$

من قانون الطاقة الميكانيكية

$$E_{tot}=E_p+E_k$$

$$\frac{1}{2}kX_{\max}^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2=\frac{k\left(X_{\max}^2-x^2\right)}{m}\qquad :\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

$$v^2=\omega_0^2\left(X_{\max}^2-x^2\right)$$

$$\boxed{v=\omega_0\sqrt{X_{\max}^2-x^2}}$$

أثبت انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية للنواس المرن أن حركته جيبية انسحابية و أوجد الدور الخاص

$$E_{tot}=E_p+E_k$$

$$const=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

نشتق الطرفين :

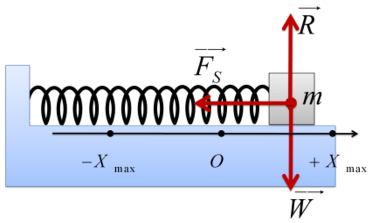
$$0=\frac{1}{2}k\left(2x\left(x\right)_t'\right)+\frac{1}{2}m\left(2v\left(v\right)_t'\right)$$

$$-kx\left(x\right)_t'=m\left(x\right)_t'\left(x\right)_t''\Rightarrow -kx=m\left(x\right)_t''$$

$$\boxed{\left(x\right)_t''=-\frac{k}{m}.x}\;..............(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي .. وتتابع

النـــواس المــــرن الأفقي : أثبـــت أن حركـــة النـــواس المبـــين جيبيـــة انسحـــابية و اوجد الدور الخاص



$$\Sigma\vec{F}=m.\vec{a}$$

$$\vec{W}+\vec{R}+\vec{F_s}=m.\vec{a}$$

بالاسقاط على محور أفقي بجهة الازاحة :

$$0+0-F_s=ma$$

قوة التوتر تساوي الشد $F_s=F_s'=kx$ بالتالي يكون :

$$m.a=-k.x\;\Rightarrow\; m.\left(x\right)_t''=-k.x$$

$$\boxed{\left(x\right)_t''=-\frac{k}{m}.x}\;..............(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل **حلاً جيبياً وتتابع**

خلاصة القوانين و أفكار المسائل :

- **ايجاد التابع الزمني للمطال x:**

$$x=X_{\max}.\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$$

تحدد الثوابت $X_{\max},\omega_0,\varphi$ عددياً و تعوض قيمتها و سنشرح أهم أفكار التابع الزمني للمطال ..

السعة – المطال الأعظمي : وحدته $\left(m\right)$

- عند ترك الجسم عند مطال معين l دون سرعة (أو الازاحة مسافة l وتركه دون سرعة ابتدائية) فإن هذا المطال هو المطال الأعظمي لأن السرعة تنعدم عند المطال الأعظمي $X_{\max}=l:\left(v=0,t=0\right)$
- طول المسار أو الخط الذي يرسمه المتحرك $=2X_{\max}$

أي أن : $X_{\max}=$ المسار $\div 2$

النبض الخاص : وحدته $\left(rad.s^{-1}\right)$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

إن علمنا m,k نحسب منها أو نلجأ للدور الخاص

- **الدور الخاص :** وحدته $\left(s\right)$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{t}{N}=\frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}}$$

حالات خاصة من الانتقالات تساعد بتحديد الدور والسعة :

- عند حركة الجسم بين $-X_{\max}\rightleftharpoons+X_{\max}$ مرة واحدة : الزمن $=\frac{T_0}{2}$ و المسافة $=2X_{\max}$
- و أما عند حركة الجسم بين $0\rightleftharpoons\pm X_{\max}$ مرة واحدة : الزمن $=\frac{T_0}{4}$ و المسافة $=X_{\max}$

كذلك تفيد السرعة العظمى $v_{\max}=\omega_0 X_{\max}$ في تحديد النبض أو المطال الأعظمي .

تحديد الطور الابتدائي : وحدته $\left(rad\right)$

من شروط البدء أي نأخذ قيم المطال و السرعة عندما $\left(t=0\right)$ و نحدد الطور الابتدائي من العلاقة :

$$x_{(t=0)}=X_{\max}\cos\varphi$$

نحسب $\cos\varphi$ ثم φ ، عند وجود حل وحيد نأخذه مباشرة ...ولكن في حال وجود حلين نناقش اشارة السرعة عند بدء الزمن : $v_{(t=0)}=-\omega_0.X_{\max}\sin\varphi$ لدينا حالتين :

$$v>0:\sin\varphi<0\quad\Rightarrow\pi<\varphi<2\pi$$

$$v<0:\sin\varphi>0\quad\Rightarrow 0<\varphi<\pi$$

أزمنة المرور في وضع التوازن : وحدته (s)

- **زمن المرور الأول** بالحالة العامة : بحل المعادلة الخاصة بالتابع الزمني للمطال

$$x = X_{\max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)=0 \Rightarrow$$

$$\omega_0 t+\varphi = \frac{\pi}{2}+\pi.n \qquad : n=0,1,2...$$

فيكون المرور الأول:

$$n=0 \;:\; \omega_0 t_1+\varphi=\frac{\pi}{2} .. \Rightarrow t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega_0}$$

- **حالات خاصة** : عندما

$$\varphi = 0 \, or \, \pi \Rightarrow t_1=\frac{T_0}{4}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \, or \, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_1 = 0$$

- أما زمن المرور الثاني $t_2=t_1+\frac{T_0}{2}$
- وزمن المرور الثالث $t_3=t_2+\frac{T_0}{2}$
- و هكذا ...

السرعة:

المقدار	السرعة $(m.s^{-1})$
بدلالة الزمن	$v=-\omega_0.X_{\max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$
بدلالة المطال	$v=\omega_0\sqrt{X_{\max}^2-x^2}$
العظمى	$v_{\max}=\omega_0.X_{\max}$

التسارع

المقدار	التسارع $(m.s^{-2})$
بدلالة الزمن	$a=-\omega_0^2 X_{\max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$
بدلالة المطال	$a=-\omega_0^2.x$
الأعظمي	$a_{\max}=\omega_0^2.X_{\max}$

ثابت الصلابة : وحدته $(N.m^{-1})$

$$k=m.\omega_0^2=m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

و يمكن استخدامه لحساب الكتلة وحدتها (kg) .

ويمكن حسابه من قوانين الطاقة .

قوة الارجاع : وحدتها (N)

$$F=-k.x$$

عند طلب الشدة نكتبها بعد الحساب بدون الاشارة الشدة =

الطاقات : الطاقة وحدتها جول (J)

- **الطاقة الكلية – الميكانيكية – عمل المجرب :**

$$E_{tot}=\frac{1}{2}k.X_{\max}^2$$

- **الطاقة الكامنة** عند مطال معين :

$$E_p=\frac{1}{2}k.x^2$$

- **الطاقة الحركية:**

$$E_k=E_{tot}-E_p=\frac{1}{2}mv^2$$

- **حساب الاستطالة السكونية :** وحدتها (m)

$$W=F_{s0}$$

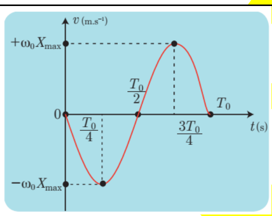
$$m.g=k.x_0 \Rightarrow x_0=\frac{m.g}{k}$$

عند عدم معرفة الكتلة و الثابت نتابع :..

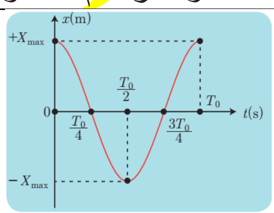
$$x_0=\frac{m.g}{m.\omega_0^2}=\frac{g}{\omega_0^2}=\frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2}$$

استنتاج التوابع من الرسوم البيانية

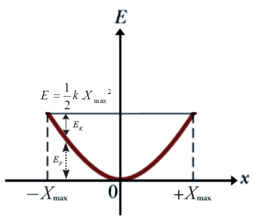
نكتب الشكل العام للتابع المطلوب و لحساب ثوابته و نقارن بين الرسم البياني المعطى (بالقيم العددية) و الرسم البياني الأساسي المقابل (بالقيم الرمزية) ونحسب الثوابت الخاصة بالتابع و نعوض لنحصل على التابع المطلوب أي الرسم البياني هو طريقة لقراءة المعطيات بدل كتابتها في نص المسألة . ونذكر أهم الخطوط البيانية :



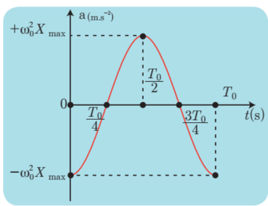
$$v=-\omega_0 X_{\max}\sin\omega_0 t$$



$$x=X_{\max}\cos\omega_0 t$$



$$E=\frac{1}{2}kX_{\max}^2=E_p+E_k$$



$$a=-\omega_0^2X_{\max}\cos\omega_0 t$$

نواس الفتل – الحركة الجيبية الدورانية

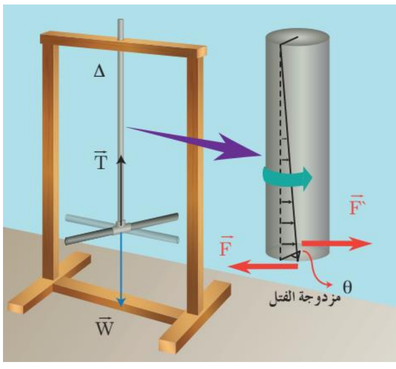
مقدمة : التشابه الشكلي بين الحركة المستقيمة الانسحابية و الحركة الدورانية

الحركة الانسحابية		وجه المقارنة	الحركة الدورانية	
m	مطال x	مقادير حركية	مطال زاوي θ	rad
$m.s^{-1}$	سرعة $v=(x)'_t$		سرعة زاوية $\omega=(\theta)'_t$	$rad.s^{-1}$
$m.s^{-2}$	تسارع $a=(x)''_t$		تسارع زاوي $\alpha=(\theta)''_t$	$rad.s^{-2}$
kg	كتلة m	**العطالة**	عزم عطالة I_Δ	$kg.m^2$
N	قوة $\vec{F}$	**سبب الحركة**	عزم القوة $\Gamma_{\vec{F}}$	$m.N$
$\Sigma\vec{F}=m.\vec{a}$		**قانون التحريك**	$\Sigma\Gamma=I_\Delta.\alpha$	
$\Sigma\vec{F}=\vec{0}$		**قانون التوازن**	$\Sigma\Gamma=0$	
J	$E_k=\frac{1}{2}m.v^2$	**الطاقة الحركية**	$E_k=\frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$	J
نواس مرن جسم معلق بنابض		**النواس النموذجي**	**نواس فتل** جسم معلق من مركز عطالته بسلك فتل	
$N.m^{-1}$	ثابت صلابة k	**ثابتة**	ثابت فتل k	$m.N.rad^{-1}$
N	قوة ارجاع $F=-k.x$	**العامل المحرك**	عزم ارجاع : $\Gamma=-k.\theta$	$m.N$
s	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	**الدور**	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$	s
J	$E_p=\frac{1}{2}k.x^2$	**الطاقة الكامنة**	$E_p=\frac{1}{2}k.\theta^2$	J
J	$E=\frac{1}{2}k.X_{max}^2$	**الطاقة الكلية**	$E=\frac{1}{2}k.\theta_{max}^2$	J

دراسة نواس الفتل :

مم يتألف نواس الفتل ؟

يتألف من جسم عزم عطالته I_Δ حول محور يمر بمركز عطالته يعلق بسلك فتل شاقولي ثابت فتله k و يزاح ليهتز في مستوي أفقي حول محور شاقولي منطبق على سلك الفتل ويمر بمركز العطالة .



القوى المؤثرة و عزومها :

بما أن الحركة دورانية سنهتم بعزوم القوى هنا

ثقل الجسم $\vec{W}$ شاقولي للأسفل و **توتر السلك** $\vec{T}$ شاقولي للأعلى عزميهما معدومين لأن حاملي الثقل والتوتر منطبقان على محور الدوران $\Gamma_{\vec{W}}=\Gamma_{\vec{T}}=0$.

مزدوجة الفتل $\vec{\eta}$ التي تعيق فتل السلك و عزمها يتناسب طرداً مع الزاوية و يعاكسها بالاشارة . و عزمها

$$\Gamma_{\vec{\eta}}=-k.\theta$$

الدراسة التحريكية لنواس الفتل واستنتاج عزم الإرجاع :

$$\Sigma\Gamma = I_\Delta.\alpha$$

$$\Gamma_{\vec W}+\Gamma_{\vec T}+\Gamma_{\vec \eta}=I_\Delta.\alpha$$

$\Gamma_{\vec W}=\Gamma_{\vec T}=0$ لأن حاملي الثقل والتوتر منطبقان على محور الدوران.

$\Gamma_{\vec \eta}=-k.\theta$: عزم مزدوجة الفتل

فالعزم الحاصل الكلي هو **عزم الارجاع :**

$$\boxed{\Gamma=-k.\theta=I_\Delta.\alpha}$$

دراسة طبيعة الحركة و إيجاد دورها الخاص :

$$\Gamma=-k.\theta=I_\Delta.\alpha$$

$$-k.\theta=I_\Delta.(\theta)''_t$$

$$\boxed{(\theta)''_t=-\frac{k}{I_\Delta}.\theta}...(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً :

$$\theta=\theta_{\max}.\cos(\omega_0.t+\varphi)$$

نشتق مرتين :

$$(\theta)'_t=-\omega_0.\theta_{\max}.\sin(\omega_0.t+\varphi)$$

$$(\theta)''_t=-\omega_0{}^2.\underbrace{\theta_{\max}.\cos(\omega_0.t+\varphi)}$$

$$\boxed{(\theta)''_t=-\omega_0{}^2.\theta}..............(2)$$

بمقارنة $1,2$ نجد

$$\omega_0{}^2=\frac{k}{I_\Delta}>0 \quad : I_\Delta>0,k>0$$

فالحركة جيبية دورانية

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$$

نلاحظ أن : الدور الخاص لنواس الفتل :

1. لايتعلق بسعة الاهتزاز الزاوية $\theta_{\max}$.
2. يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم العطالة I_Δ .
3. يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت الفتل k .

ملاحظة : تغير الدور والنبض بتغير مكونات النواس :

$$\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}=\frac{T_{02}}{T_{01}}=\sqrt{\frac{I_{\Delta 2}.k_1}{I_{\Delta 2}.k_2}}$$

تجربة :

سؤال : نواس فتل مكون من ساق معلقة من منتصفها بسلك فتل ماذا يحدث مع التعليل :

1. **عند اضافة كتلتين نقطيتين إلى جانبي الساق وعلى بعد متساوٍ من السلك :**
يزداد الدور لازدياد عزم العطالة
2. **عند زيادة بعد الكتلتين عن السلك :**
يزداد الدور لازدياد عزم العطالة
3. **عند انقاص طول السلك :**
ينقص الدور لازدياد ثابت الفتل لأنه يتناسب عكساً مع الطول .

$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$ و نكتب القانون لاكمال التعليل

عمل الميقاتية و النواسات :

الميقاتية هي آلة لقياس الزمن وتعتمد بعملها على حركة العقارب التي تشير للوقت ويضبط عمل هذه الميقاتية نواس ثقلي أو نواس فتل و يتميز النواس الذي يضبط العمل بأنه يدق الثانية أي دوره ثانيتان .

وحين يزداد الدور عن هذه القيمة تؤخر الميقاتية لأن ازدياد الدور يجعل عدد الهزات المنجزة في وقت معين أقل ، وحين تقدم الميقاتية ينقص الدور فيكون عدد الهزات في وقت معين أكثر .

حين نضبط عمل الميقاتية بنواس فتل يكون الدور الخاص

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

الخلل في عمل الميقاتية

الميقاتية تؤخّر	**الميقاتية تقدّم**
الدور ازداد لذلك أنجزت الميقاتية هزات أقل في زمن معين	الدور تناقص لذلك أنجزت الميقاتية هزات أكثر في زمن معين
الحل انقاص الدور و يتم ذلك عملياً :	**الحل زيادة الدور و يتم ذلك عملياً :**
إما : بانقاص عزم العطالة بانقاص الأبعاد أو الكتلة	**إما :** بزيادة عزم العطالة بزيادة الأبعاد أو الكتلة
أو : زيادة ثابت الفتل بانقاص الطول	**أو :** انقاص ثابت الفتل بزيادة الطول

سؤال : انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية أن حركة النواس الفتل جيبية دورانية و اوجد الدور الخاص

$$E_{tot}=E_p+E_k$$

$$const=\frac{1}{2}k\,\theta^2+\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

نشتق الطرفين :

$$0=\frac{1}{2}k\left(2\theta(\theta)'_t\right)+\frac{1}{2}I_\Delta\left(2\omega(\omega)'_t\right)$$

$$-k\,\theta(\theta)'_t=I_\Delta(\theta)'_t(\theta)''_t\Rightarrow$$

$$-k\,\theta=I_\Delta(\theta)''_t$$

$$\boxed{(\theta)''_t=-\frac{k}{I_\Delta}.\theta}...(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً :

$$\theta=\theta_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

نشتق مرتين :

$$(\theta)'_t=-\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$(\theta)''_t=-\omega_0^2.\underbrace{\theta_{max}.\cos(\omega_0 t+\varphi)}_{\downarrow}$$

$$\boxed{(\theta)''_t=-\omega_0^2.\theta}..............(2)$$

بمقارنة $1,2$ نجد

$$\omega_0^2=\frac{k}{I_\Delta}>0 \quad : I_\Delta>0, k>0$$

فالحركة جيبية دورانية

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$$

ملاحظات للمسائل :

ملاحظات خاصة بثابت الفتل k و سلك الفتل :

سلك الفتل هو سلك مشدود له طرف ثابت و طرف قابل للتدوير .. عند تدويره تنشأ مزدوجة الفتل التي تعيق الفتل عزمها $\Gamma_{\vec{\eta}}=-k.\theta$

ثابت الفتل لسلك أسطواني يعطى بدلالة الطول و القطر بالعلاقة : $\boxed{k=k'\frac{(2r)^4}{\ell}}$

- ومنه نجد أن **ثابت الفتل يتناسب عكساً مع الطول** أي منه يمكن نبين تغير الثابت بتغير الطول ..
- وعند تغير طول سلك الفتل يصبح قانون تغير الدور :

$$\frac{T_{02}}{T_{01}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}$$

مثال : نواس فتل نحذف ثلثي طوله أوجد علاقة الدور الجديد بالدور الأصلي .

حذفنا ثلثيه فبقي ثلث الطول و بما أن ثابت الفتل يتناسب عكساً مع الطول

$$\frac{T_{02}}{T_{01}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}=\sqrt{\frac{\frac{\ell_1}{3}}{\ell_1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\Rightarrow\boxed{T_{02}=\frac{T_{01}}{\sqrt{3}}}$$

- عند تعليق نواس فتل بسلكي فتل معاً أحدهما علوي و الآخر سفلي فإن ثابت الفتل الكلي هو حاصل جمع ثابتي الفتل للسلكين .

تمرين : نواس فتل قسمناه قسمنا سلك الفتل لقسمين متساويين و علقنا الجسم بالسلكين معاً ليكونا سلكي فتل أحدهما علوي و الآخر سفلي أوجد علاقة الدور الجديد بالدور الأصلي:

- ثابت فتل السلك الأصلي k_1
- ثابت الفتل لنصف سلك $2k_1$ ((ثابت الفتل يتناسب عكساً مع الطول))
- ثابت الفتل الاجمالي لجمع نصفي السلك من الطرفين هو $k_2=2k_1+2k_1=4k_1$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}=\sqrt{\frac{k_1}{4k_1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

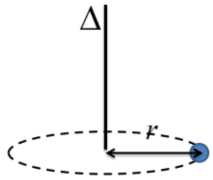
$$\boxed{T_{02}=\frac{T_{01}}{2}}$$

ملاحظات خاصة بعزم العطالة :

عزم العطالة هو مقدار يدل على ممانعة الجسم لتغيير سرعة دورانه حول محور و يتعلق بـ :شكل الجسم و أبعاده و كتلته و وضع محور الدوران .

قوانين عزم العطالة :

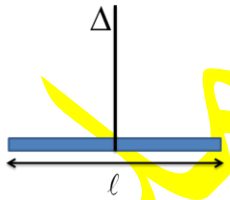
- **إن كان الجسم مهمل الكتلة فعزم عطالته صفر .**
- **عزم عطالة كتلة نقطية =** الكتلة × مربع نصف قطر دورانها



$$I_\Delta = m.r^2$$

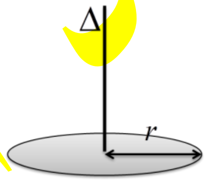
- **عزم العطالة للأجسام الشهيرة** يعطى في المسائل حول محور مار بمركز العطالة :

- عزم عطالة ساق حول منتصفها :



$$I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m.\ell^2$$

- عزم عطالة قرص حول مركزه:

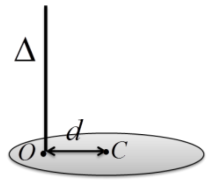


$$I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m.r^2$$

وحين يتم ازاحة محور الدوران عن مركز العطالة مسافة d نطبق نظرية هايغنز

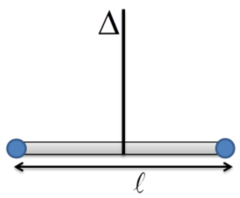
$$I'_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + m.d^2$$

و نستخدمها بالنواس الثقلي ..



- **وحين يتم جمع أجسام مختلفة لتكون جملة واحدة يكون عزم العطالة الكلي =مجموع عزوم عطالة المكونات.**

مثال :ساق طولها ℓ كتلتها m معلقة من مركزها بسلك فتل نضع في طرفيها كتلتين نقطيتين متساويتين $m_1 = m_2$ أوجد قانون عزم عطالة الجملة ..



$$I_\Delta = I_{\Delta\text{ساق}} + I_{\Delta m_1} + I_{\Delta m_2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta\text{ساق}} + 2I_{\Delta m_1} \quad :$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m.\ell^2 + 2m_1 r_1^2 = \frac{1}{12} m.\ell^2 + 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

و إن كانت كتلة الساق مهملة يكون :

$$I_\Delta = I_{\Delta m_1} + I_{\Delta m_2} = 2I_{\Delta m_1} = 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

مثال : ساق معلقة من منتصفها بسلك فتل نثبت في طرفيها كتلتين متساويتين أوجد علاقة الدور الجديد بالقديم و الكتل المضافة .

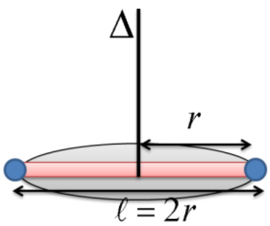
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \sqrt{\frac{I_{\Delta 2}}{I_{\Delta 1}}} = \sqrt{\frac{I_\Delta + 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{I_\Delta}} ....$$

وفي حال ربط الكتل بكتلة الساق نكمل ..

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}m.\ell^2 + 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\frac{1}{12}m.\ell^2}} ...$$

بالحل نحصل على المجهول . ..

مثال جملة مكونة من ساق منطبقة على قطر قرص تحمل بطرفيها كتلتين متماثلتين



$$I_\Delta = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} + I_{\Delta m_1} + I_{\Delta m_2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} + 2I_{\Delta m_1} \quad :$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} M_1 r^2 + \frac{1}{12} M_2 \ell^2 + 2m_1 r_1^2$$

القوانين العامة بنواس الفتل

الدور الخاص : وحدته (s)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = \frac{t}{N}$$

النبض الخاص : وحدته $(rad.s^{-1})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

السعة الزاوية- المطال الزاوي الأعظمي : وحدته (rad)

عند ترك الجسم عند مطال زاوي معين دون سرعة فإن هذا المطال هو المطال الزاوي الأعظمي لأن السرعة الزاوية تنعدم عنده

$$\theta_{max} = \theta : (\omega = 0, t = 0)$$

حركات خاصة :

✓ عند حركة الجسم بين $-\theta_{max} \rightleftharpoons +\theta_{max}$ مرة

واحدة : الزمن $= \frac{T_0}{2}$

✓ و أما عند حركة الجسم بين $0 \rightleftharpoons \pm\theta_{max}$ مرة

واحدة : الزمن $= \frac{T_0}{4}$

و هذا يفيد في حساب الدور الخاص .

تحديد الطور الابتدائي : وحدته (rad)

من شروط البدء أي نأخذ قيمة المطال الزاوي عندما $(t=0)$ و نحدد الطور الابتدائي من العلاقة :

$$\theta_{(t=0)} = \theta_{max}\cos\varphi$$

نحدد $\cos\varphi$ ومن ثم φ

التابع الزمني للمطال الزاوي : وحدته (rad)

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

تحدد الثوابت $\theta_{max}, \omega_0, \varphi$ كما أسلفنا وتعوض قيمها العددية في العلاقة .

أزمنة المرور في وضع التوازن وحدتها (s)

زمن المرور الأول

$$\varphi = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{T_0}{4}$$

أما المرور الثاني $t_2 = t_1 + \frac{T_0}{2}$

و **الثالث** $t_3 = t_2 + \frac{T_0}{2}$

السرعة الزاوية : وحدتها $(rad.s^{-1})$

من خلال التابع الزمني عند معرفة الزمن :

$$\omega = -\omega_0.X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

السرعة الزاوية العظمى :

$$\omega_{max} = \omega_0.X_{max}$$

التسارع الزاوي : وحدته $(rad.s^{-2})$

$$\alpha = -\omega_0^2.\theta$$

ثابت الفتل وحدته $(m.N.rad^{-1})$ و **عزم العطالة** وحدته $:(kg.m^2)$

$$k = I_\Delta.\omega_0^2 = I_\Delta.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

مع الأخذ بعين الاعتبار القوانين الخاصة) بثابت الفتل وعزم العطالة)التي شرحناها سابقاً .

عزم الارجاع : وحدته $(m.N)$

$$\Gamma = -k.\theta$$

الطاقات : وحدة الطاقة جول (J)

الطاقة الكلية – الميكانيكية – عمل المجرب :

$$E = \frac{1}{2}k.\theta_{max}^2$$

الطاقة الكامنة عند مطال معين :

$$E_p = \frac{1}{2}k.\theta^2$$

الطاقة الحركية عند مطال معين : حاصل طرح الطاقتين

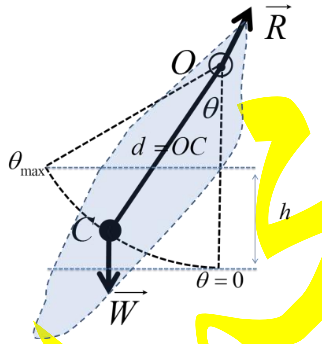
$$E_k = E - E_p$$

النواس الثقلي - الحركة الغير توافقية

مم يتكون النواس الثقلي ؟
هو جسم يهتز بتأثير عزم ثقله فقط حول محور أفقي ثابت لا يمر بمركز العطالة .

- **مصطلحات النواس الثقلي المركب**

بفرض جسم كتلته m مركز عطالته C قابل للدوران حول محور أفقي ثابت Δ لا يمر بـ C حيث يعلق بنقطة O تبعد عن مركز العطالة $(d = OC)$ و يكون عزم عطالة الجسم حول محور الدوران I_Δ .



إن أزيح الجسم عن وضع توازنه الشاقولي و ترك ليهتز بتأثير الثقل كون لدينا نواس ثقلي .
يكون النواس بصورة عامة **نواس ثقلي مركب** عدا حالة كرة معلقة بخيط يكون **نواس ثقلي بسيط** .

القوى المؤثرة بنواس ثقلي مركب وعزومها و أعمالها:

ثقل الجسم $\vec{W}$ و رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

القوة	ثقل الجسم $\vec{W}$	رد فعل المحور $\vec{R}$
العزم	$\Gamma_{\vec{W}} = -d\sin\theta.(W)$ $\Gamma_{\vec{W}} = -mgd\sin\theta$	$\Gamma_{\vec{R}} = 0$ لأن حامل رد الفعل مار بمحور الدوران
العمل	$W_{\vec{W}} = mgh =$ $mgd(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$	$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير رد الفعل لا تنتقل

الدارسة التحريكية للنواس الثقلي المركب و طبيعة الحركة بالحالة العامة :

$$\Sigma\Gamma = I_\Delta.\alpha$$

$$\Gamma_{\vec{W}} + \Gamma_{\vec{R}} = I_\Delta.\alpha$$

لكن : $\alpha = (\theta)''_t$

$$\Gamma_{\vec{W}} = (-d\sin\theta)W = -mgd\sin\theta$$

$\Gamma_{\vec{R}} = 0$ لأن حامل رد الفعل مار بمحور الدوران .

$$-m.g.d.\sin\theta + 0 = I_\Delta.(\theta)''_t$$

$$\boxed{(\theta)''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}.\sin\theta}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها غير جيبي لأنها حوت $\left[\sin\theta,(\theta)''_t\right]$ بدلاً من $\left[\theta,(\theta)''_t\right]$ فالحركة غير جيبية بالحالة العامة .

حالة خاصة : السعة الزاوية الصغيرة هي الزاوية التي قياسها يحقق : $\theta \le 0.24rad = 14°$

- وحين تقدر الزاوية الصغيرة بالراديان فإنه يكون : $\sin\theta = \tan\theta = \theta$ (rad)

كيف تصبح المعادلة وطبيعة الحركة بحالة السعة الزاوية الصغيرة ؟ وطبيعة الحركة والدور الخاص ؟

المعادلة التفاضلية بحالة السعة الزاوية الصغيرة

$$\boxed{(\theta)''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}.\theta}.......(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً :

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0.t + \varphi)$$

نشتق مرتين

$$(\theta)'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0.t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2.\underbrace{\theta_{max}.\cos(\omega_0.t + \varphi)}$$

$$\boxed{(\theta)''_t = -\omega_0^2.\theta}...............(2)$$

بمقارنة $1,2$ نجد

$$\omega_0^2 = \frac{m.g.d}{I_\Delta} > 0$$

I_Δ, m, g, d مقادير موجبة ، فالحركة جيبية دورانية بحالة السعة الزاوية الصغيرة

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}}$$

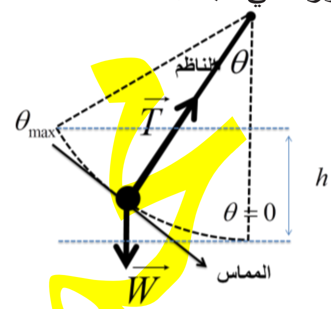
المقدار	الرمز	الوحدة
الدور الخاص	T_0	s
عزم العطالة حول المحور	I_Δ	$kg.m^2$
بعد مركز العطالة عن محور الدوران	d	m
الكتلة	m	kg
تسارع الجاذبية	g	$m.s^{-2}$

النواس الثقلي البسيط

مم يتألف عملياً و نظرياً ؟

النواس البسيط عملياً : كرة صغيرة كتلتها m، كثافتها النسبية كبيرة معلّقة بخيط خفيف لا يمتط طوله ℓ كبير أمام نصف قطر الكرة .

أما نظريّاً : فهو نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بُعد ثابت ℓ من محور أفقي ثابت.



القوى المؤثرة في نواس ثقلي بسيط و المساقط و العمل

القوة	ثقل الكرة $\vec{W}$	توتر الخيط $\vec{T}$
مماسيا	$\pm W \sin\theta = \pm mg \sin\theta$ المسقط سالب ان كان المماس بجهة الازاحة و هكذا..	0
ناظميا	$-W \cos\theta = -mg \cos\theta$	$+T$
العمل	$W_{\vec{W}} = mgh = mg\ell(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$	$W_{\vec{R}} = 0$ لأن حامل التوتر يعامد الانتقال بكل لحظة

التسارع و مساقطه

المسقط المماسي	المسقط الناظمي
$a_t = \alpha.\ell$ التسارع الزاوي α	$a_c = \dfrac{v^2}{\ell}$
مسؤولة عن تغير قيمة السرعة	مسؤولة عن تغير حامل السرعة (الانحناء)

الدراسة التحريكية للنواس الثقلي البسيط و طبيعة الحركة بالحالة العامة و بحالة السعة الصغيرة و الدور:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على مماس موجه بجهة الازاحة

$$-W.\sin\theta + 0 = m.a_t \Rightarrow -mg\sin\theta = ma_t$$

$$-g\sin\theta = a_t = \alpha\ell \qquad \Rightarrow \alpha = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{(\theta)_t'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها غير جيبي لأنها حوت $\left[\sin\theta,(\theta)''_t\right]$ بدلاً من $\left[\theta,(\theta)''_t\right]$ فالحركة غير جيبية بالحالة العامة .

المعادلة التفاضلية بحالة السعة الزاوية الصغيرة

$$\boxed{(\theta)''_t = -\frac{g}{\ell}.\theta}.......(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً :

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق مرتين

$$(\theta)'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2.\underbrace{\theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\downarrow}$$

$$\boxed{(\theta)''_t = -\omega_0^2\ .\theta}..............(2)$$

بمقارنة $1,2$ نجد

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} > 0$$

g,ℓ مقادير موجبة ، فالحركة جيبية بحالة السعة الزاوية الصغيرة

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

المقدار	الرمز	الوحدة
الدور الخاص	T_0	s
طول خيط النواس	ℓ	m
تسارع الجاذبية	g	$m.s^{-2}$

سؤال : اوجد الدور الخاص لنواس ثقلي بسيط بحالة السعة الزاوية الصغيرة بدءاً من علاقة دور النواس الثقلي المركب .

الدور الخاص بحالة السعة الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}} : \begin{cases} d = \ell \\ I_\Delta = m.\ell^2 \end{cases}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m.\ell^2}{m.g.\ell}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

- **نستنتج من علاقة دور النواس البسيط أن :**

1. لا علاقة لدور النواس بكتلة أو بنوع مادة الكرة .
2. النوسات الصغيرة السعة لها الدور نفسه (متواقتة فيما بينها)
3. دور النواس يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لطوله ℓ .
4. دور النواس يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضيّة g .

ملاحظات:

- ➢ إن مستوى النوسان ثابت خلال فترة إجراء التجربة .
- ➢ ملاحظات النواسان المتواقتان لهما نفس الدور .
- ➢ النواس الذي يدق الثانية دوره $2s$.

استنتاج السرعة الخطية للكرة و توتر الخيط للنواس الثقلي المركب أثناء اهتزازه

- ▪ **السرعة :** الوضع الابتدائي $\theta_{\max}$ ، الوضع النهائي θ

$$\Delta E_k = \Sigma W_{\vec{F}_{1\to 2}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = m.g.h + 0$$

حيث $W_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل التوتر يعامد الإنتقال في كل لحظة .

$$v^2 = 2gh = 2g\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right)$$

$$\boxed{v = \sqrt{2.g.\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right)}}$$

- ▪ **التوتر** $\Sigma \vec{F} = m.\vec{a} \qquad \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$

بالاسقاط على الناظم

$$-W\cos\theta + T = m a_c \Rightarrow$$

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m\frac{v^2}{\ell} + m.g\cos\theta$$

$$T = m\frac{2g\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right)}{\ell} + m.g\cos\theta$$

$$\boxed{T = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_{\max}\right)}$$

التوتر يزداد بازدياد $\cos\theta$

- **التوتر أعظمي** عند المرور بالشاقول $\theta = 0 : T_{\max} = mg\left(3 - 2\cos\theta_{\max}\right)$
- **التوتر أصغري** عند المرور بأحد الوضعين المتطرفين $\theta = \theta_{\max}\ T_{\min} = mg\cos\theta_{\max}$

الطاقة الميكانيكية في نواس ثقلي بسيط :

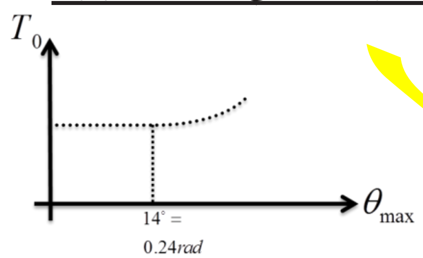
الطاقة الميكانيكية مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية

$$E = E_p + E_k = const : \left\{ \begin{array}{l} E_p = m.g.h \\ E_k = \frac{1}{2} m v^2 \end{array} \right\}$$

حيث مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الكرة عند المرور بالشاقول .

- ▪ في أحد الوضعين المتطرفين الطاقة الكامنة عظمى و الطاقة الحركية معدومة لانعدام السرعة . و في **وضع التوازن** الطاقة الحركية عظمى و الطاقة الكامنة معدومة .
- ▪ بالانتقال نحو وضع التوازن تزداد الطاقة الحركية و تنقص الطاقة الكامنة .. و العكس صحيح . .. وهكذا يحصل تبادل للطاقة الكامنة والحركية بحيث تبقى الطاقة الميكانيكية للجملة ثابتة

علاقة دور النواس الثقلي بسعة الاهتزاز :



✓ نلاحظ أن النوسات صغيرة السعة متواقتة أي لها نفس الدور لأن الحركة جيبية دورانية .

دور النواس البسيط $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

و المركب $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

✓ أما النوسات الكبيرة السعة يزداد الدور فيها بازدياد السعة الزاوية . لأنها غير جيبية

$$T_0' = T_0.\left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right)$$

الخلل في عمل الميقاتية ذات النواس الثقلي

• الميقاتية تؤخّر	• الميقاتية تقدّم
الدور ازداد لذلك أنجزت الميقاتية هزات أقل في زمن معين و **الحل انقاص الدور و يتم ذلك عملياً :**	الدور تناقص لذلك أنجزت الميقاتية هزات أكثر في زمن معين و **الحل زيادة الدور و يتم ذلك عملياً :**
- بانقاص عزم العطالة بانقاص الأبعاد .	- بزيادة عزم العطالة بزيادة الأبعاد .
- أو زيادة تسارع الجاذبية بزيادة الارتفاع	- أو انقاص تسارع الجاذبية بانقاص الارتفاع

في الميقاتية عند حدوث خلل الحل دوماً عكس السبب

أفكار مسائل النواس البسيط :

- **الدور الخاص**

1. بحالة سعة زاوية صغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
2. بحالة سعة زاوية كبيرة $T_0' = T_0 \cdot \left(1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

- **أفكار التابع الزمني للمطال الزاوي ـ حصراً بحالة السعة الزاوية الصغيرة :-**

التابع الزمني للمطال الزاوي : وحدته (rad) شكله العام:

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

تحدد الثوابت $\theta_{max}, \omega_0, \varphi$ وتعوض قيمها في التابع

النبض الخاص : وحدته $\left(rad.s^{-1}\right)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

السعة الزاوية ـ المطال الزاوي الأعظمي : وحدته (rad)

عند ترك الجسم عند زاوية ما دون سرعة فإن هذا المطال هو المطال الزاوي الأعظمي $\theta_{max} = \theta : (\omega = 0, t = 0)$

تحديد الطور الابتدائي : وحدته (rad)

من شروط البدء أي نأخذ قيمة المطال الزاوي عندما $(t = 0)$ و نحدد الطور الابتدائي من العلاقة :

$$\theta_{(t=0)} = \theta_{max} \cos\varphi$$

نحدد $\cos\varphi$ ومن ثم φ

- <u>**فكرة ازاحة النواس عن الشاقول بزاوية كبيرة**</u>

الوضع الابتدائي θ_{max}

الوضع النهائي $\theta = 0$ الشاقول

$$\Delta E_k = \Sigma W_{\vec{F}_{1\to2}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = m.g.h + 0$$

حيث $W_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل التوتر يعامد الإنتقال في كل لحظة .

$$v^2 = 2.g.h \quad : h = \ell(1-\cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2.g.\ell(1-\cos\theta_{max})$$

إن طلبت السرعة : $v = \sqrt{2.g.\ell(1-\cos\theta_{max})}$

إن طلبت الزاوية : $\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2.g.\ell}$

توتر الخيط عند المرور بالشاقول :

ندرس القوى المؤثرة في الكرة مع الاسقاط على الناظم

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} \qquad \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

$$-W + T = m.a_c \Rightarrow -m.g + T = m.\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m.\frac{v^2}{\ell} + m.g = m.\left(\frac{v^2}{\ell} + g\right)$$

تسارع الكرة المماسي و تسارعها الزاوي عند زاوية ما :

ندرس القوى المؤثرة بالكرة ونسقط على المماس :

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

$$W.\sin\theta + 0 = m.a_t \Rightarrow m.g.\sin\theta = m.a_t$$

التسارع المماسي : $\boxed{a_t = g.\sin\theta}$

التسارع الزاوي : $\boxed{\alpha = \frac{a_t}{\ell}}$

المقدار	توتر الخيط	تسارع مماسي	تسارع زاوي
الرمز	T	a_t	α
الوحدة	N	$m.s^{-2}$	$rad.s^{-2}$

الطاقة الميكانيكية ــ عمل المجرب (وحدته جول J)

$$E = m.g.h = m.g.\ell(1-\cos\theta_{max})$$

أفكار مسائل النواس الثقلي المركب :

1- دور الاهتزاز الخاص بحالة السعة الزاوية الصغيرة :

حالة عامة 1 : نواس مكون من جسم وحيد :

1. نكتب علاقة الدور الخاص .
2. نحدد بالرموز $d = OC$ من المعطيات .
3. نحدد بالرموز عزم العطالة انطلاقاً من نظرية هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2$.
4. نعوض في قانون الدور الخاص و نختصر نجد علاقة الدور الخاص بالرموز و من ثم نعوض عددياً و نحسب .

ندرس بعض الحالات الخاصة على سبيل المثال :

○ ساق معلقة من طرفها العلوي:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

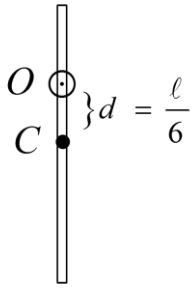
$$d = \frac{\ell}{2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}m.\ell^2 + m.\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m.\ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}m.\ell^2}{m.g.\frac{\ell}{2}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}}$$

○ ساق معلقة على بعد $\frac{\ell}{6}$ من مركز العطالة :



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

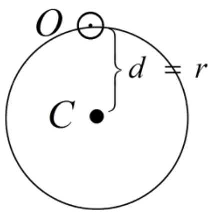
$$d = \frac{\ell}{6}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}m.\ell^2 + m.\frac{\ell^2}{36} = \frac{1}{9}m.\ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9}m.\ell^2}{m.g.\frac{\ell}{6}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}}$$

○ قرص معلق من نقطة من محيطه :



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

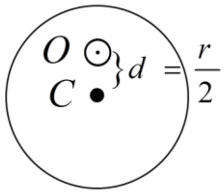
$$d = r$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2 =$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}m.r^2 + m.r^2 = \frac{3}{2}m.r^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m.r^2}{m.g.r}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}}$$

○ قرص معلق على بعد $\frac{r}{2}$ من المركز :



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

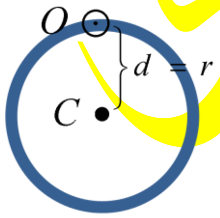
$$d = \frac{r}{2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2 =$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}m.r^2 + m.\frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}m.r^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}m.r^2}{m.g.\frac{r}{2}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}}$$

○ حلقة (أو دولاب) معلقة من نقطة من محيطها :



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

$$d = r$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m.d^2 =$$

$$I_\Delta = m.r^2 + m.r^2 = 2m.r^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2m.r^2}{m.g.r}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}}$$

حالةعامة 2 : نواس مكون من ربط أكثر من جسم

يفرض نواس مركب مكون من ربط أجسام كتلها $m_1, m_2, ...$ عزوم عطالتها حول محور الدوران هي $I_{\Delta 1}, I_{\Delta 2}, ...$ و تبعد مراكزها عنه مسافات $r_1, r_2, ...$ على الترتيب

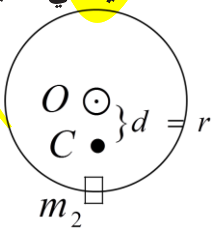
- كتلة النواس : $m = m_1 + m_2 + ...$
- عزم عطالته : $I_{\Delta} = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} + ...$
- بعد مركز عطالة النواس عن محور الدوران :

$$d = \frac{\mp m_1 r_1 \mp m_2 r_2 ...}{m_1 + m_2 + ...}$$

حيث نختار اشارة سالب للكتل التي تعلو المحور و الموجب للكتل التي أسفل المحور ، و الكتل المنطبقة على المحور نعوض عنها صفر .

<u>**أمثلة وحالات خاصة :**</u>

○ **قرص يدور حول مركزه ويحمل كتلة نقطية في محيطه**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m.g.d}}$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2}m_1.r^2 + m_2.r^2$$

$$d = \frac{0 + m_2 r}{m_1 + m_2}$$

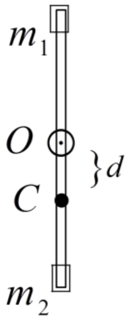
في حالة معرفة قيم عددية للكتل نحسب عدديا ثم نحسب الدور الخاص

<u>أما بحالة تساوي الكتل :</u>

$m_1 = m_2 :$

$$\begin{pmatrix} m = 2m_1 \\ I_{\Delta} = \frac{3}{2}m_1.r^2 \\ d = \frac{r}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}m_1.r^2}{2m_1.g.\frac{r}{2}}} \\ \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{3r}{2g}}} \end{array} \right.$$

○ **ساق مهملة الكتلة تحمل في طرفيها كتلتين نقطيتين ـ محور الدوران مار بمنتصفها :**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m.g.d}}$$

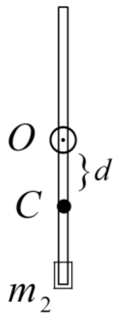
$$m = m_1 + m_2$$

$$I_{\Delta} = m_1.\frac{\ell^2}{4} + m_2.\frac{\ell^2}{4}$$

$$d = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{\ell}{2} + m_2\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2}$$

نعوض عدديا ثم نحسب الدور الخاص

○ **ساق لها كتلة تحمل كتلة نقطية بالطرف السفلي – محور الدوران مار بمنتصفها :**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m.g.d}}$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12}m_1.\ell^2 + m_2.\frac{\ell^2}{4}$$

$$d = \frac{0 + m_2\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2}$$

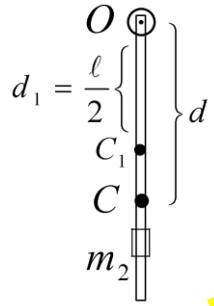
في حالة معرفة قيم عددية للكتل نحسب عدديا ثم نحسب الدور الخاص..

<u>أما بحالة تساوي الكتل :</u>

$m_1 = m_2 :$

$$\begin{pmatrix} m = 2m_1 \\ I_{\Delta} = \frac{1}{3}m_1.\ell^2 \\ d = \frac{\ell}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}m_1.\ell^2}{2m_1.g.\frac{\ell}{4}}} \\ \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\ell}{3g}}} \end{array} \right.$$

○ **حالة ساق لها كتلة معلقة بمحور مار بطرفها العلوي و تحمل كتلة نقطية**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

$$m = m_1 + m_2$$

نلاحظ أن محور الدوران لا يمر بمنتصف الساق نطبق عليه هايغنز

$$I_\Delta = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2}$$

$$I_\Delta = \overbrace{I_{1\Delta/C} + m.d_1^2}^{I_{\Delta 1}} + m_2.r_2^2$$

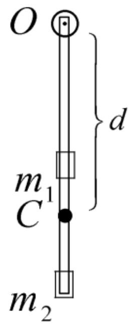
$$I_\Delta = \frac{1}{12}m_1\ell^2 + m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2.r_2^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}m_1\ell^2 + m_2.r_2^2$$

$$d = \frac{m_1\frac{\ell}{2} + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

نعوض عددياً ثم نحسب الدور الخاص

○ **ساق مهملة الكتلة تحمل في كتلتين نقطيتين أحدهما في المنتصف والآخرى بالطرف السفلي - محور الدوران مار بطرفها العلوي :**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

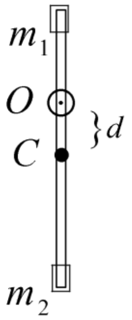
$$m = m_1 + m_2$$

$$I_\Delta = m_1.\frac{\ell^2}{4} + m_2.\ell^2$$

$$d = \frac{+m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\frac{\ell}{2} + m_2\ell}{m_1 + m_2}$$

نعوض عددياً ثم نحسب الدور الخاص

○ **حالة ساق مهملة الكتلة تحمل في طرفيها كتلتين نقطيتين متساويتين - محور الدوران مار بنقطة تبعد عن الطرف العلوي مسافة تساوي ربع الطول :**



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

$$m = m_1 + m_2 = 2m_1$$

$$I_\Delta = m_1.\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m_2.\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2$$

$$I_\Delta = m_1.\frac{\ell^2}{16} + m_2.\frac{9\ell^2}{16} = \frac{5}{8}m_1.\ell^2$$

$$d = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{\ell}{4} + m_2\frac{3\ell}{4}}{m_1 + m_2} = \frac{\ell}{8}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}m_1.\ell^2}{2m_1.g.\frac{\ell}{8}}} = \sqrt{\frac{5\ell}{2g}}$$

نعوض عددياً ثم نحسب الدور الخاص

ملاحظة : يعد طلب ايجاد الدور الخاص لسعة اهتزاز زاوية صغيرة طلب محوري في مسائل النواس الثقلي المركب و تعتمد الطلبات اللاحقة عليه في ايجاد الناتج .

لنذكر أفكار النواس المركب في المسائل

- دور الاهتزاز بسعة صغيرة و **حالاته** وتوسعنا به
- طول النواس البسيط الموافق
- التابع الزمني للمطال الزاوي
- فكرة الازاحة بزاوية كبيرة واستنتاج السرعة الزاوية و الخطية للمرور بالشاقول أو العكس
- دور الاهتزاز بسعة كبيرة

ولنكمل بقية الأفكار بعد أن شرحنا فكرة الدور الخاص للاهتزاز بسعة صغيرة ....

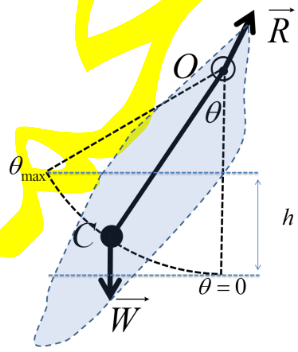
2- طول النواس البسيط المواقت :

$$T_{0\,\text{مركب}} = T_{0\,\text{بسيط}}' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}$$

$$\ell' = \frac{T_0^{\,2}.g}{4\pi^2}$$

3- <u>التابع الزمني للمطال الزاوي نفس حالات النواس الثقلي البسيط ..</u>

4- فكرة الازاحة :



الوضع الابتدائي $\theta_{\max}$

الوضع النهائي $\theta = 0$ الشاقول

$$\Delta E_k = \Sigma W_{\vec{F}_{1\to2}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta.\omega^2 - 0 = m.g.h + 0$$

حيث $W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير رد الفعل لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta.\omega^2 = m.g.d\left(1 - \cos\theta_{\max}\right)$$

إن طلبت السرعة : $\omega = \sqrt{\dfrac{2m.g.d\left(1-\cos\theta_{\max}\right)}{I_\Delta}}$

إن طلبت الزاوية : $\cos\theta_{\max} = 1 - \dfrac{I_\Delta.\omega^2}{2m.g.d}$

بعد ايجاد العلاقة نعوض قيم m, d, I_Δ من طلب الدور الخاص و نختصر ونحسب . .

5- **السرعة الخطية لنقطة** = نصف القطر للنقطة × السرعة الزاوية

$$v = r.\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

نصف قطر النقطة r أي بعدها عن محور الدوران و يختلف من حالة لأخرى . و تحدد من المعطيات .

ملاحظة في طلبات الازاحة :

قد نعطى زاوية الازاحة لنستنتج السرعة الزاوية ثم نحسب السرعة الخطية لنقطة ، أو نعطى السرعة الخطية لنقطة لنحسب السرعة الزاوية ثم نستنتج زاوية الازاحة

$$\boxed{\theta_{\max}} \underset{\Delta E_{k\,...}}{\overset{\Delta E_{k\,...}}{\rightleftarrows}} \boxed{\omega} \underset{\omega = \frac{v}{r}}{\overset{v = \omega r}{\rightleftarrows}} \boxed{v}$$

6- دور الاهتزاز بسعة كبيرة :

$$T_0' = T_0.\left(1 + \frac{\theta_{\max}^{\;2}}{16}\right)$$

الوحدة	الرمز	المقدار
s	T_0	الدور الخاص
m	ℓ'	طول النواس البسيط المواقت
s	T_0'	الدور الخاص بحالة سعة كبيرة
$m.s^{-2}$	g	تسارع الجاذبية
$kg.m^2$	I_Δ	عزم العطالة حول محور الدوران
m	d	بعد مركز العطالة عن محور الدوران
kg	m	الكتلة
$m.s^{-2}$	g	تسارع الجاذبية

مع التمنيات بالتوفيق

محمد المستريحي

0948395176