• التحليل التوافقي :

1) العاملة : !

$$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1$$

$$6! = 6\times\underbrace{5\times4\times3\times2\times1}_{5!}$$

$$6! = 6\times5!$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

اختزل

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 7\times6 = 42$$

1

تطبيقات خاطئة

$$2! + 3! = 5!$$

$$4! \times 2! = 8!$$

$$6! - 3! = 3!$$

$$\frac{9!}{3!} = 3!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

2) التباديل :

$$E = \{a, b, c\}$$

(a,b,c) (a,c,b)

(b,a,c) (b,c,a)

(c,a,b) (c,b,a)

عدد التباديل = $3! = 6$

عدد التباديل لمجموعة مؤلفة من n عنصر مختلف = $n!$ تبديل

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$4! = 24$ تبديلة

2

$$E = \{a, a, b\}$$

(a,a,b) (a,b,a)

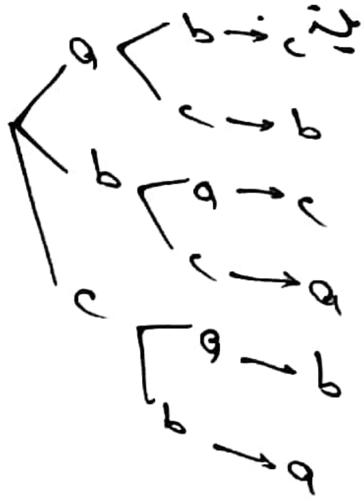
(b,a,a)

عدد التباديل $= \frac{3!}{2!\times1!} = \frac{6}{2} = 3$

$$E = \{a, a, b, b, c\}$$

عدد التباديل $= \frac{5!}{2!\times2!\times1!} = \frac{120}{2\times2} = 30$

تبديلة



3

$E = \{a, a, b\}$

$(a,a,b)\ (a,b,a)$
(b,a,a)

عدد التباديل $= \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$

$E = \{a, a, b, b, c\}$

عدد التباديل $= \dfrac{5!}{2! \times 2! \times 1!} = \dfrac{120}{2 \times 2} = 30$

تبديلة:

$a \to b \to c$
$a \to c \to b$
$b \to a \to c$
$b \to c \to a$
$c \to a \to b$
$c \to b \to a$

③ السحب دون إرجاع بالعد

مثال: مدرسة فيها ١٢ مدرسا نريد اختيار ثلاث مدرسين لإجراء مقابلة الأول مدير والثاني معاون مدير والثالث أمين سر، كم طريقة يمكننا ذلك.

عدد طرق اختيار المدير $= 12$

عدد طرق اختيار معاون المدير $= 11$

عدد طرق اختيار أمين السر $= 10$

وحسب المبدأ الأساسي بالعد عدد الطرق الكلية يساوي $12 \times 11 \times 10$

1320 طريقة.

مثال: $E = \{2, 3, 4, 5\}$

١) كم طريقة يمكننا اختيار عدد مكون من منزلتين.

وحسب المبدأ الأساسي بالعد: $4 =$ آحاد، $4 =$ العشرات

عدد طرق اختيار العدد $= 4 \times 4 = 16$ طريقة.

٢) كم طريقة يمكننا اختيار عدد مكون من منزلتين مختلفين.

وحسب المبدأ الأساسي بالعد: $4 =$ آحاد، $3 =$ العشرات

$= 3 \times 4 = 12$ طريقة.

١٥٤

٤) التراتيب

$P_n^r \quad n \ge r$

$P_8^2 = 8 \times 7 = 56$

$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$P_n^n = n!$

$P_n^1 = n \qquad P_n^0 = 1$

وتستخدم التراتيب اذا كان هناك أهمية للترتيب في نص المسألة.

مثال: مدرسة فيها 12 مدرس ....

$P_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10$
$= 1320$ طريقة.

مثال: احسب قيمة n من الآتي

$8P_n^2 = 4P_n^3$

$\left.\begin{array}{l} n \ge 2 \\ n \ge 3 \end{array}\right\} n \ge 3$

$8\cancel{n(n-1)} = 4\cancel{n(n-1)}(n-2)$

$8 = 4(n-2)$

$8 = 4n - 8$

$4n = 16$

$n = 4$

$P_{n+2}^4 = 14 P_n^3$

$\left.\begin{array}{l} n+2 \ge 4 \Rightarrow n \ge 2 \\ n \ge 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ شرط الحل $n \ge 3$

$(n+2)(n+1)\cancel{(n)(n-1)} = 14\cancel{n(n-1)}(n-2)$

$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$

$n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$

$n^2 - 11n + 30 = 0$

$(n-6)(n-5) = 0$

$n = 6$ مقبول

$n = 5$ مقبول

٥) التوافيق

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} \quad n \ge r$

$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

$(n+2)(n+1)\cancel{(n)(n-1)} =$

$14\cancel{n(n-1)}(n-2)$

$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$

$n^2+3n+2 = 14n-28$

$n^2-11n+30 = 0$

$(n-6)(n-5) = 0$

إما $n=6$ مقبول

أو $n=5$ مقبول

(5) التوافيق

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} \quad n \geq r$

$\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

$\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

٨

توافيق :

1) $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

تكرار نفس n

$\binom{12}{8} = \binom{12}{4}$

$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$

3) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

يستخدم بالأصل

٩

تمارين: أثبت

$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

$L = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} =$

$= \frac{(n+1)!}{\cancel{r!}(n+1-r)!} \times \frac{\cancel{r!}(n-r)!}{n!}$

$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1-r)\cancel{(n-r)!}} \times \frac{\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}}$

$= \frac{n+1}{n+1-r}$

يستخدم التوافيق

إن لم يذكر عامل

أهمية للترتيب

(ب ، أ) (أ ، ب)

155

١٠

• منشور ذات الحدين:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

$(a+b)^4 =$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = (a+(-b))^2$

$= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

مثلث باسكال:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & &
\end{array}$$

الحد العام ...

لمنشور ذات الحدين ...

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

r

$r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$

$r = ?$

$r = 3$ الحد الرابع

$r = 5$ ← الحد السادس

$$\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12} \quad *$$

جد الحد الثابت

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$a = x \quad b = \frac{1}{x^3} \quad n = 12$

$T_r = \binom{12}{r} (x)^{12-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r$

$= \binom{12}{r} x^{12-r} \cdot x^{-3r}$

$= \binom{12}{r} x^{12-4r}$

$x^0 = x^{12-4r}$

$12 - 4r = 0 \Rightarrow r = 3$

مهم الحد الرابع ص 109

$$\frac{6!+7!}{2!\times3!\times4!} = \frac{6!+7\times6!}{2!\,3!\,4!}$$

$$= \frac{6!(1+7)}{2!\,3!\,4!} = \frac{6!\cdot 8}{2!\,3!\,4!}$$

$$= \frac{6\times5\times\cancel{4!}\times8}{2!\,\cancel{3!}\,\cancel{4!}} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

$$=(n+1)n$$

$$=n^2+n$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!}}$$

$$=4n^2+2n$$

$$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$$

$$=\frac{2n(2n-1)!-(2n-1)!}{2(n)(n-1)!-(n-1)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!\,\cancel{(2n-1)}}{(n-1)!\,\cancel{(2n-1)}} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!} = \frac{1}{5!}-\frac{\cancel{42}}{\cancel{7\times6}\times5!}$$

$$=\frac{1}{5!}-\frac{1}{5!}=0$$

$$\frac{6!}{(3!)^2} = \frac{6!}{3!\times3!}$$

$$=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times\cancel{3!}}$$

$$=20$$

$$\frac{9!}{5!\times4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times4!}$$

$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times\cancel{2}\times1}$$

$$=3\times7\times6$$

$$\frac{9!}{6!\times3!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3!}$$

$$=\frac{9\times8\times7}{3!}$$

$$\frac{21!}{20!} = \frac{21\times\cancel{20!}}{\cancel{20!}}$$

$$=21$$

$$\frac{17!}{15!} = \frac{17\times16\times\cancel{15!}}{\cancel{15!}}$$

$$=17\times16=$$

$$\frac{6!-5!}{5!} = \frac{6\times5!-5!}{5!}$$

$$=\frac{5!(6-1)}{5!} = 5$$

$$\frac{6\times4!}{5!} = \frac{6\times4!}{5\times4!}$$

$$=\frac{6}{5}$$

$$\frac{7!\times5!}{10!} = \frac{\cancel{7!}\times5!}{10\times9\times8\times\cancel{7!}}$$

$$=\frac{5!}{10\times9\times8}$$

$$=\frac{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}{\cancel{10}\times\cancel{9}\times\cancel{8}}$$

$$=\frac{1}{6}$$

$\underbrace{2\times2\times\dots\times2\times2\times2}\ \underbrace{\times n(\dots 3\times2\times1)}$

$\cdot\ 2^n \times n!$

$E=\{a,b,c,d\}$ (3)

تباديل E

عدد التباديل $=4!=24$

$E=\{a,b,c\}$

$(a,b,c)\ (a,c,b)$

$(b,a,c)\ (b,c,a)$

$(c,a,b)\ (c,b,a)$

$S=\{1,2,5,8,9\}$ (4)

آحاد $=5$

عشرات $=5$ } إيجاد ① بالتكرار

عدد الطرق $=5\times5=25$

$$\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\frac{\cancel{(n-1)!}}{n\cancel{(n-1)!}}-\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{(n)!}}$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{n!}_{\,n+1}-\frac{1}{(n+1)n!}_{\,1}$$

$$\frac{n}{(n+1)n!}$$

$$\frac{(2n)!}{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}$$

$$\frac{2n\cancel{(2n-1)}(2n-2)\dots6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times3\times5\times\dots\times\cancel{(2n-1)}}$$

$2\times n\quad 2(n-1)\quad 2\times3\quad 2\times2\quad 2\times1$

$2n(2n-2)\dots\times6\times4\times2$

$$\frac{6!+7!}{2!\times3!\times4!}=\frac{6!}{\dots}$$

$$=\frac{6!(1+7)}{2!\,3!\,4!}=\dots$$

$$=\frac{6\times5\times\cancel{4!}\times8}{2!\,3!\,\cancel{4!}}=\frac{4\dots}{2\dots}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

$=(n+1)n$

$=n^2+n$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!}}$$

$=4n^2+2n$

$$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$$

$$\frac{2n(2n-1)!-(2n-1)!}{2(n)(n-1)!-(n-1)!}$$

$$\frac{(2n-1)!\cancel{(2n-1)}}{(n-1)!\cancel{(2n-1)}}=\frac{(2n\dots}{(n\dots}$$

$\frac{7}{152}$

$100 \times 99 \times 98 = \text{---}$

حسب المبدأ الأساسي بالعد

2)

آحاد $= 5$

العشرات $= 4$

$\}$ 20 طريقة

حسب المبدأ الأساسي بالعد.

4)

آحاد $= 2$

العشرات $= 5$

$\}$ 10 طرق

حسب المبدأ الأساسي بالعد.

4) لم يحدد زوجًا مختلف الأرقام يمكن تشكيله من عناصر S.

آحاد $= 2$

العشرات $= 4$

$\}$ 8 طرق

5)

عدد طرق اختيار القميص $= 2$

عدد طرق اختيار السروال $= 4$

$2 \times 4 = 8$ حسب المبدأ الأساسي بالعد

6) $\frac{6}{152}$

رئيس $= 7$

نائب $= 6$

أمين سر $= 5$

$7 \times 6 \times 5 = 210$ طريقة حسب المبدأ الأساسي بالعد.

$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2}\underbrace{\times n(n-1) \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$

$2^n \times n!$

3)

$E = \{a, b, c, d\}$

ترتيبات لـ E

عدد التبديل $= 4! = 24$

$E = \{a, b, c\}$

(a,b,c) (a,c,b)

(b,a,c) (b,c,a)

(c,a,b) (c,b,a)

4) $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

1)

آحاد $= 5$

العشرات $= 5$

$\}$ حسب المبدأ الأساسي بالعد

عدد الطرق $= 5 \times 5 = 25$

ج

$\binom{n}{2} = 36$

شرط $n \geq 2$

$$\frac{n(n-1)}{2\times 1} = 36$$

$n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0$

$n = 9$ مقبول

$n = -8$ مرفوض

$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شرط $\left.\begin{array}{l} n \geq 4 \\ n \geq 2 \end{array}\right\}$ $n \geq 4$

$$3\,\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)(n-3)}{4\times \cancel{3}\times 2\times 1} = \overset{7}{\cancel{14}}\,\frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\times 1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{4\times 2} = 7$$

$(n-2)(n-3) = 56$

$n^2 - 5n + 6 - 56 = 0$

$n^2 - 5n - 50 = 0$

$(n-10)(n+5) = 0$

$n = 10$ مقبول

$n = -5$ مرفوض

٢٢

$$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} = \frac{1}{10}$$

ع برهن صحة العلاقة التالية

$$n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$$

$$\ell_1 = n\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= r\,\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= r\,\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$= r\binom{n}{r} = \ell_2$$

٢١

$$\binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

$\frac{1}{155}$

$$\binom{12}{8} = \binom{12}{12-8} = \binom{12}{4} = \frac{\cancel{12}\times 11\times \overset{5}{\cancel{10}}\times 9}{\cancel{4\times 3\times 2\times 1}}$$

$= 11\times 5\times 9 =$

$$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{7\times 6}{2\times 1}}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}} = \text{—}$$

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} = \frac{10\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{10\times \frac{6\times 5}{2\times 1}}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}} = \frac{150}{84}$$

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{8\times 7\times 6}{\cancel{3\times 2\times 1}}}{\frac{9\times 8\times 7}{\cancel{3\times 2\times 1}}}$$

$$= \frac{8\times 7\times 6}{9\times 8\times 7} = \frac{6}{9}$$

٢٠

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

$$10 \geq 3n \Rightarrow n \leq \frac{10}{3} \Rightarrow n \leq 3$$

$$10 \geq n+2 \Rightarrow n \leq 8$$

ومنه $n \leq 3$

$\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$

إما $r_1 = r_2$

أو $r_1 + r_2 = n$

إما $3n = n+2$

$2n = 2 \Rightarrow \boxed{n=1}$

أو $3n+n+2=10$ مقبول

$4n = 8$

$\boxed{n=2}$

مقبول

٣٣

٢

$$\binom{n}{2} = 36$$

شرط أن $n \geq 2$

$$\frac{n(n-1)}{2\times 1} = 36$$

$$n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$(n-9)(n+8) = 0$

$n=9$ مقبول

$n=-8$ مرفوض

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$$

شرط أن $n \geq 4$ ، $n \geq 2$ ، $n \geq 4$

$$3\,\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)(n-3)}{4\times \cancel{3}\times 2\times 1} = \cancel{14}^{\,7}\,\frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\times 1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{4\times 2} = 7$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n + 6 - 56 = 0$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$(n-10)(n+5) = 0$

$n=10$ مقبول

$n=-5$ مرفوض

٢٢

٤ 15 رجل 14 امرأة

لجنة مكونة من 4 أشخاص

1) كم لجنة 2) رجلين وامرأتين

i) $\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \ldots$

ii) $\binom{15}{2} \times \binom{14}{2} =$

$\frac{15 \times 14}{2 \times 1} \times \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = \ldots$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}x^4\left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}x^3\left(\frac{1}{x}\right)^1$$

$$+\binom{4}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}x\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+\binom{4}{4}x^0\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= x^4 + x^2 + 6 + 4\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

$$(1+2i)^3 = (1)^3 + 3(1)^2(2i) + 3(2i)^2(1)$$

$$+(2i)^3$$

$$= 1 + 6i - 6 - 8i$$

$$= -5 - 2i$$

<7

$(2+x)^4$

$\frac{1}{159}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
$n=4$ ← 1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$(2+x)^4 = 2^4x^0 + 4\cdot2^3x^1 + 6\cdot2^2\cdot x^2$$

$$+4\cdot2^1\cdot x^3 + 2^0\cdot x^4$$

$$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$$

$$(1-x)^5 = (1+(-x))^5$$

$$= (1)^5(-x)^0 + 5(1)^4(-x)^1$$

$$+10(1)^3(-x)^2 + 10(1)^2(-x)^3$$

$$+5(1)^1(-x)^4 + (1)^0(-x)^5$$

$$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3$$

$$+5x^4 - x^5$$

<0

ج / ١٠٩ الحد الذي يحوي x^2 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad \begin{cases} n = 10 \\ a = x \\ b = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$= \binom{10}{r} x^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r \qquad r = ?$$

$$= \binom{10}{r} x^{10-r} \cdot x^{-r} \qquad \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$= \binom{10}{r} x^{10-2r}$$

$$x^2 = x^{10-2r} \Rightarrow 2 = 10 - 2r \Rightarrow$$

$$2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

الحد الذي يحوي x^2 هو الحد الخامس.

• الحد المستقل عن x (الحد الثابت)

$$x^0 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 0$$

$$2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

الحد المستقل عن x هو الحد السادس.

$(1+x)^6 + (1-x)^6$ ④

$n=0 \leftarrow$ 1

$n=1 \leftarrow$ 1 1

$n=2 \leftarrow$ 1 2 1

$n=3 \leftarrow$ 1 3 3 1

$n=4 \leftarrow$ 1 4 6 4 1

$n=5 \leftarrow$ 1 5 10 10 5 1

$n=6 \leftarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

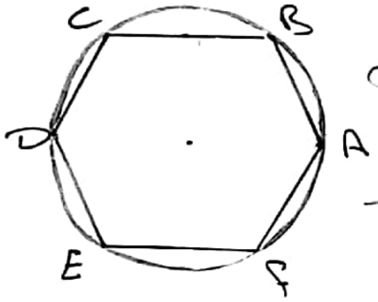
$$(1+x)^6 = 1^6 (x)^0 + 6 \cdot 1^5 x^1 + 15 \cdot 1^4 \cdot x^2 + 20 \cdot 1^3 \cdot x^3 + 15 \cdot 1^2 \cdot x^4 + 6 \cdot 1^1 x^5 + 1^0 \cdot x^6$$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

$$(1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6 \quad +$$

$$(1+x)^6 + (1-x)^6 = 2 + 30x^2 + 30x^4 + 2x^6$$

نشاط ٢ / ص١٢٦



مسدس منتظم: أي أنه

ينقسم الى ست مثلثات

متساوية الأضلاع.

ومقياس كل زاوية داخلية من

زواياه = 120°.

① عدد المثلثات.

عدد المثلثات $= \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ مثلثاً

② عدد المثلثات القائمة.

المثلث قائم اذا كان احد اضلاعه قطراً للدائرة.

قطر الدائرة يكون اربع مثلثات قائمة.

مثلاً القطر AD يكون المثلثات

ABD - ACD

AFD - AED

عدد المثلثات القائمة = عدد اقطار الدائرة $\times 4$

$= 4 \times 3$

$= 12$

AD, CF, BE

② ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية
(3) كم عدد المثلثات يمكن تكوينها من رؤوس المسدس
المنتظم بحيث يكون كل منها مثلثاً منفرج الزاوية.

عدد المثلثات المنفرجة = 6

DEF - CDE - BCD - ABC
FAB - EFA .

نشاط ٣/٣ ص١٦٢
التكوين عدد أرقام سرية من الأرقام 0, 1, 2, ... , 8, 9

a) الخانة الأولى = 10
الخانة الثانية = 10
الخانة الثالثة = 10
الخانة الرابعة = 10

عدد الإمكانات = 10 000

عدد الإمكانات التي تسبب الإغلاق إذاً:
10 000 − 1 = 9999
العدد الصحيح.

---

b)
الخانة الأولى = 10
الخانة الثانية = 9
الخانة الثالثة = 8
الخانة الرابعة = 7

$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

c) 9 9 5 1

$$\text{عدد التبادل} = \frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} = \frac{24}{2} = 12$$

نشاط $\frac{1}{161}$ 6 7 8 9

* دون اعادة

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة

الكرة الأولى = 4
الثانية = 3
الثالثة = 2

$4 \times 3 \times 2 = 24$ نتيجة

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات

a) الأولى 6 الثانية 9 الثالثة 7

الأولى = 1
الثانية = 1
الثالثة = 1

$1 \times 1 \times 1 = 1$

b) الأولى 8 الثانية 7

الأولى = 1
الثانية = 1
الثالثة = 2

$1 \times 1 \times 2 = 2$

(8,7,6) (8,7,9)

c) الثانية 9 الثالثة 8

الأولى = 2
الثانية = 1
الثالثة = 1

$2 \times 1 \times 1 = 2$

٣١

d) الكرة الثانية تحمل الرقم 7

الأولى = 3
الثانية = 1
الثالثة = 2

$3 \times 1 \times 2 = 6$

* مع اعادة

①

الأولى = 4
الثانية = 4
الثالثة = 4

$4 \times 4 \times 4 = 64$ حسب المبدأ الأساسي بالعد

② a)

الأولى = 1
الثانية = 1
الثالثة = 1

$1 \times 1 \times 1 = 1$

b)

الأولى : 1
الثانية : 1
الثالثة : 4

4

c)

الأولى : 4
الثانية : 1
الثالثة : 1

4

٣٢

d)

الأولى = 4
الثانية = 1
الثالثة = 4

16 حسب المبدأ الأساسي بالعد

مع ٣ سحب معاً

① كم عدد النتائج الممكنة

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$$

② يظهر فيها الرقم 7

$$\binom{1}{1}\binom{3}{2} = 3 \quad 7 \quad 6\,8\,9$$

③ يظهر 8 ، 9

$$\binom{2}{2}\binom{2}{1} = 2 \quad 8\,9 \quad 6\,7$$

نشاط ٤ اكتب $\cos^3\theta$ باستخدام دستوري اويلر ومفكوك ذات الحدين

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3\theta i} + 3e^{2\theta i} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{-2\theta i} \cdot e^{i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3\theta i} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta + 3 \cdot 2\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

٣٣

$$\ell_1 = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(r+1)\cancel{r!}\,\cancel{(n-r)!}} \times \frac{\cancel{r!}\,\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{n+1}{r+1}$$

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$ (۱) رابطه

$$3\frac{\cancel{n!}}{r!(n-r)!} = 8\frac{\cancel{n!}}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r\cdot\cancel{(r-1)!}\,\cancel{(n-r)!}} = \frac{8}{\cancel{(r-1)!}(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$$

$$8r = 3n - 3r + 3$$

$$\boxed{3n - 11r + 3 = 0} \quad (1)$$

۳۵

۱/۱۲

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

حل

$$\ell_1 = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{\cancel{r!}(n+1-r)!}}{\frac{n!}{\cancel{r!}(n-r)!}}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}(n+1-r)\cancel{(n-r)!}}$$

$$= \frac{n+1}{n+1-r}$$

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

$$\ell_1 = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n+1-r-1)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!}$$

۳۶

$P^{3}_{n+1} = 2\,P^{2}_{n+2}$ $\frac{3}{164}$

$n+1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 2$
$n+2 \geq 2 \Rightarrow n \geq 0$ $\Big\}\ n \geq 2$

$\cancel{(n+1)}(n)(n-1) = 2(n+2)\cancel{(n+1)}$

$n^2 - n = 2n + 4$

$n^2 - 3n - 4 = 0$

$\therefore n = -1$ مرفوض

$\therefore n = 4$ مقبول

$P^{3}_{n+2} = 6\,P^{1}_{n+2}$

$n+2 \geq 3 \Rightarrow n \geq 1$
$n+2 \geq 1 \Rightarrow n \geq -1$ $\Big\}\ n \geq 1$

$\cancel{(n+2)}(n+1)(n) = 6\cancel{(n+2)}$

$n^2 + n - 6 = 0$

$(n+3)(n-2) = 0$

$\therefore n = -3$ مرفوض

$\therefore n = 2$ مقبول

٣٧

أوجد (٢):

$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

$2\frac{\cancel{(n+1)!}}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!} = 5\frac{\cancel{(n+1)!}}{r!\,(n+1-r)!}$

$\frac{2}{(r+1)\cancel{r!}\,\cancel{(n-r)!}} = \frac{5}{\cancel{r!}\,(n+1-r)\cancel{(n-r)!}}$

$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r}$

$5r + 5 = 2n + 2 - 2r$

$\boxed{2n - 7r - 3 = 0}$ - - (2)

نضرب الأولى بـ 2

الثانية بـ -3

$6n - 22r + 6 = 0$

$-6n + 21r + 9 = 0$ $+$

$-r + 15 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 15}$

نعوض في (1)

$2n - 105 - 3 = 0$

$2n = 108$

$\boxed{n = 54}$

٣٦

$\ell = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(r+1)\cancel{r!}\,\cancel{(n-r)!}} \times \frac{\cancel{r!}\,\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}}$

$= \frac{n+1}{r+1}$

$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

أوجد (١):

$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$3\frac{\cancel{n!}}{r!\,(n-r)!} = 8\frac{\cancel{n!}}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$

$\frac{3}{r\cancel{(r-1)!}\,\cancel{(n-r)!}} = \frac{8}{\cancel{(r-1)!}\,(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}$

$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$

$8r = 3n - 3r + 3$

$\boxed{3n - 11r + 3 = 0}$ (1)

٣٥

$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ $\frac{4}{164}$

مصافحة

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ع.١٧
ع

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$ $\frac{5}{164}$

$= 120$

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

٢٠ طالب ٨ طالبات $\frac{6}{164}$

لجنة 5 أشخاص

① $\binom{12}{3} \times \binom{8}{2} = \dots$

② طالبتان على الأكثر

$\binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{1}\binom{12}{4} +$
$\binom{8}{0}\binom{12}{5} = \dots$

③ طالبتان على الأقل

٣٨

$\binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{1}$
$+ \binom{8}{5}\binom{12}{0} = \dots$

x^3 معامل الحد الذي يحتوي على $\frac{7}{164}$ في مفكوك

$(2+3x)^5$

$n=5$
$a=2$
$b=3x$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$= \binom{5}{r}(2)^{5-r}(3x)^r$

$= \binom{5}{r}(2)^{5-r} \cdot 3^r \cdot x^r$

$x^3 = x^r \Leftrightarrow r = 3$

x^3 معامل $= \binom{5}{3} \cdot 2^2 \cdot 3^3$

$= 10 \times 4 \times 27$

$= 1080$

الحد الخالي من x في $\frac{9}{164}$

$(x + \frac{1}{x^3})^{12}$

$n = 12$
$a = x$
$b = \frac{1}{x^3}$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$= \binom{12}{r}(x)^{12-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r$

٣٩

$= \binom{12}{r} x^{12-r} \cdot x^{-3r}$

$= \binom{12}{r} x^{12-4r}$

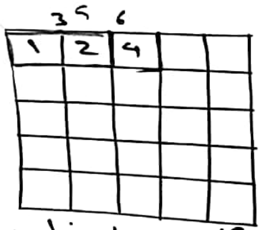
$x^0 = x^{12-4r} \Leftrightarrow 12 - 4r = 0$

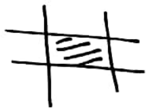
$\boxed{r = 3}$

والحد الذي يحتوي x^3 هو الحد الرابع.

ع.١٨

$\frac{11}{165}$





بإنشاء مستطيل يلزمنا خطين أفقيين وخطين متوازيين.

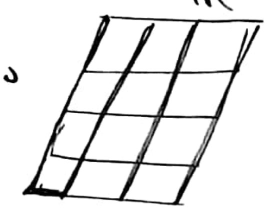
$\binom{6}{2}\binom{6}{2} = 15 \times 15$

$= 125$

مستطيل.

ع.١٨

$\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 60$



٤٠

٨) آحاد، عشرات

$5\times 99 = 5(100-1) = 500-5 = 595$

$11^{11} = (1+10)^{11}$

$= \binom{11}{0}(1)^{11}(10)^{0} + \binom{11}{1}(1)^{10}(10)^{1}$

$+ \binom{11}{2}(1)^{9}(10)^{2} + \dots$

$= 1 + 110 + 5500 + \dots$

آحاد = 1 العشرات = 1

المئات = 6

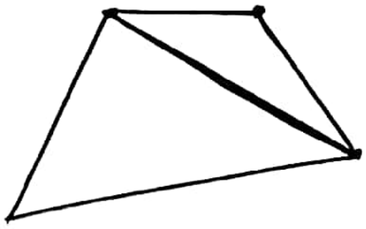
١٠) عدد أقطار = $\frac{n(n-3)}{2}$

مضلع: خط منكسر مغلق بسيط.

محدب: يقع في جهة واحدة بالنسبة لحواف أضلاعه

قطر المضلع: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متجاورين.

٤١



عدد أقطار مضلع له n رأس

$= \binom{n}{2} - n$

جميع الأوتار

عدد الأضلاع

$= \frac{n(n-1)}{2} - n$

$= \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$

$= \frac{n(n-3)}{2}$

المضلع الذي عدد رؤوسه = n فإن عدد أضلاعه = n

13) $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$

معامل $x = 62$

فما قيمة $a+b = ?$

مثلاً: $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 4$

٤٢

$a+b \geq 12.4$

$\therefore \boxed{a+b \geq 13}$ --- (1)

$4(a+b) \leq 62$

$a+b \leq \frac{62}{4}$

$a+b \leq 15.5$

$\boxed{a+b \leq 15}$ (2)

(2) − (1) من

$13 \leq a+b \leq 15$

$a+b = \{13, 14, 15\}$

$f'(x) = 9x^2 + 8x - 5$

$f'(0) = -5$

$f'(0) =$ أمثال x

$\frac{1}{2} f''(0) =$ أمثال x^2

$\frac{1}{6} f'''(0) =$ أمثال x^3

$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) =$ أمثال x^n

$f'(x) = 5(1+ax)^4(a)(1+bx)^4 + 4(1+bx)^3(b)(1+ax)^5$

$f'(0) = 5a + 4b$

أمثال $x = 5a + 4b \iff$

$5a + 4b = 62$

$4a + 4b \leq 5a + 4b \leq 5a + 5b$

$4(a+b) \leq 62 \leq 5(a+b)$

$62 \leq 5(a+b) \Rightarrow$

$a+b \geq \frac{62}{5}$

Scanned by CamScanner

$\frac{٦}{١٧٦}$

B	w	R
1	3	6

في الحقيبة

١) عدد الأعداد الممكنة

الرقم الأول = 10

الثاني = 10

الثالث = 10

$10 \times 10 \times 10 = 1000$

٢) ع س ذ غ

$\begin{array}{cccc} R & R & غ & \\ 6 \times & 6 \times & 4 \times & 3 \end{array}$

عدد النتائج $= 6 \times 6 \times 4 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 \times 3$

$\begin{array}{ccc} B & B & غ \end{array}$

$1 \times 1 \times 9 \times 3 = \dots$

٣) عدد النتائج $= 3 \times 6 \times 1 \times 3!$

٤) ليست تفيد التضاد..

ليست جميعها من لون واحد = الكل − جميعها من لون واحد

$= 1000 - (6 \times 6 \times 6 + 3 \times 3 \times 3 + 1 \times 1 \times 1)$

$= \dots$

٥) كرتان على الأقل حمراء

R غ غ   R R غ

$= 6 \times 4 \times 4 \times 3 + 6 \times 6 \times 4 \times 3$

R R R

$+ 6 \times 6 \times 6 = \dots$

٦) سوداء على الأقل.

B غ غ   B B غ

$= 1 \times 9 \times 9 \times 3 + 1 \times 1 \times 9 \times 3$

B B B

$1 \times 1 \times 1 = \dots$

٧) كرتان على الأكثر.

R غ غ + غ غ غ

$= 6 \times 4 \times 4 \times 3 + 4 \times 4 \times 4$

$= \dots$

٧) دون إعادة

1	3	6
B	w	R

أ) 10 = الكرة الأولى
9 = " الثانية
8 = " الثالثة

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

ب) R R ع

عدد النتائج $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 +$

w w ع

$3 \times 2 \times 7 \times 3$

ج) w R B

عدد النتائج $= 3 \times 6 \times 1 \times 3!$

د) ليست جميعها = الكل − جميعها من لون واحد

$$= 720 - \left(\begin{array}{ccc} R & R & R \\ 6 \times & 5 \times & 4 \end{array} \right.$$

w w w

$$\left. + 3 \times 2 \times 1 \right) = \ldots$$

٥) R ع ع   R R ع

$= 6 \times 4 \times 3 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 \times 3$

R R R

$+ 6 \times 5 \times 4 = \ldots$

٦) سوداء لا الأكثر

B ع ع

$1 \times 9 \times 8 \times 3$

R ع ع + ع ع ع

$= 6 \times 4 \times 3 \times 3 + 4 \times 3 \times 2$

$= \ldots$

١٨ • ( )

$S = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3

تذكر : 8 من مضاعفات 2 لأنه

$2 \overline{)8}$ = 4 ، الباقي 0

7 ليس من مضاعفات 2 لوجود باقي.

$a \cdot b = c$

بأن c من مضاعفات b , a

$$4 = 3 \times 1 + 1$$
$$7 = 3 \times 2 + 1$$
$$+\ 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$= 3 \times 1 + 1 + 3 \times 2 + 1 + 3 \times 3 + 1$$
$$= 3(1+2+3) + 3 = 3(1+2+3+1)$$

$3 \overline{)1}$ = 0 ، الباقي 1

$$A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

$$A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

$$A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$$

عدد المجموعات : $\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 120 + 120 + 120 + 1000$

$= 1360$

٩

$$A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

(1) A_3 ، A_4 عددان صحيحان

(2) A_n صحيح

$\frac{19}{1-7-4}$

نفرض $a = 2+\sqrt{3}$

$b = 2-\sqrt{3}$

$a + b = 4$

$a - b = 2\sqrt{3}$

$a\,b = 4 - 3 = 1$

$A_3 = a^3 + b^3$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$16 = a^2 + b^2 + 2$

$a^2 + b^2 = 14$

$A_3 = 4(14 - 1)$

$= 4(13)$. وهو صحيح

٥٠

$A_4 = a^4 + b^4$

نربع $(a^2+b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$

$= a^4 + b^4 + 2(a\,b)^2$

$196 = a^4 + b^4 + 2$

$a^4 + b^4 = 194$

$A_4 = 194$ وهو صحيح.

$A_n = T_r + T'_r$

$= \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r + \binom{n}{r} 2^{n-r} (-\sqrt{3})^r$

$= \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r + \binom{n}{r} 2^{n-r} (-1)^r (\sqrt{3})^r$

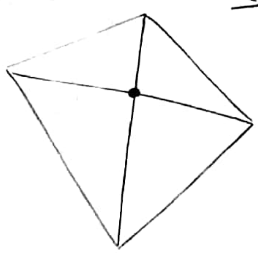
$A_n = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r \left(1 + (-1)^r\right)$

• r زوجي A_n صحيح

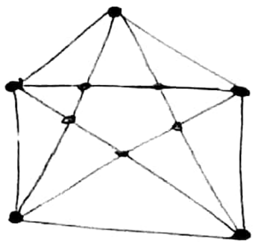
• r فردي $A_n = 0$ وهو صحيح

• $r = 0$ $A_n = 2^n \cdot 2$ وهو صحيح

٥١



$\binom{n}{4}$



$\binom{n}{4} + n$

عدد نقاط تقاطع الاقطار داخليا	عدد نقاط تقاطع الاقطار خارجيا

٥٢