مؤسسة المتفوقين التربوية الدورة المكثفة ٢٠٢١

المراجعة المكثفة في الثالث الاعدادي

الجبر

مراجعة نموذجية شاملة للمنهاج تساعد الطالب على فهم وتثبيت المعلومات

من خلال عرض منظم ومترابط لأفكار الكتاب غني بالأسئلة والتدريبات الامتحانية

إعداد المدرس:

أيهم تميم - رام عبدو- لؤي المدني

مؤسسة المتفوقين التربوية

بكالوريا & تاسع مؤسسة المتفوقين التربوية

www.mutafwkenschool.com

المنصة التعليمية - مؤسسة المتفوقين التربوية

تطلب النسخة الأصلية فقط من:

(١)مؤسسة المتفوقين التربوية – دمشق – حلبوني – جانب ثانوية الأندلس – ٢٢١٤١١٥ – ٢٢٤٧٥٤٥-٠٩٣٠٨٢٥٠٤٢.

(٢) المكتبة الأندلسية – دمشق – حلبوني – جانب ثانوية الأندلس – ٢٢٣٥٥٦٧

الاسئلة والملاحظات التي تعطى داخل الصف غير موجودة في النوطة

الوحدة الأولى : مجموعات الأعداد

مجموعة الأعداد	رمزها	تعريفها
الطبيعية	$\mathbb{N}$	تحوي الأعداد الموجبة فقط دون فواصل أي هي: $\{0,1,2,\dots\}$
الصحيحة	$\mathbb{Z}$	تحوي الأعداد الموجبة والسالبة دون فواصل أي هي: $\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$
العشرية	$\mathbb{D}$	تحوي أي عدد يمكن كتابته بالشكل $a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح. أو هي الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الأعداد مع فواصل بحيث تكون منتهية.
العادية	$\mathbb{Q}$	تحوي أي عدد يمكن كتابته $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و $b \neq 0$ عدد طبيعي. أو هي الأعداد العشرية بالإضافة إلى الأعداد مع فواصل غير منتهية ولكن دورية.
الحقيقية	$\mathbb{R}$	هي الأعداد العادية والغير عادية (الأعداد مع الفواصل غير منتهية وغير دورية).

عند تحديد طبيعة عدد نختار أصغر مجموعة ينتمي إليها.

أي عدد ليس له إشارة إشارته موجب.

تدريبات: اختر الإجابة الصحيحة:

1) العدد π هو عدد:

A	عادي	B	صحيح	C	غير عادي

2) الشكل العشري للكسر $\frac{8}{5}$ هو:

A	0.16	B	1.6	C	0.016

3) العدد $\frac{11}{12}$ هو عدد:

A	عشري	B	غير عادي	C	غير عشري

4) عيّن طبيعة الأعداد التالية:

$\boxed{1}$ $\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

غير عادي

$\boxed{2}$ $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}=0.916..$

دوري – غير عشري

$\boxed{3}$ $\frac{7}{2}-\frac{8}{5}=\frac{35}{10}-\frac{16}{10}=\frac{19}{10}=1.9$

عشري

$\boxed{4}$ $\sqrt{2.25}=\sqrt{\frac{225}{100}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}}=\frac{15}{10}=1.5$

عشري

② القاسم المشترك الأكبر GCD:

هو أكبر عدد يقسم في ذات الوقت العددين معاً بدون باقي.

خواص هامة:

$\boxed{1}$ $GCD\,(a,a)=a$

$\boxed{2}$ $GCD\,(a,b)=1 \Leftrightarrow$ عددان أوليان فيما بينهما a,b

$\boxed{3}$ a قاسم لـ b $\Leftrightarrow$ ناتج $\frac{a}{b}$ عدد صحيح

$\boxed{4}$ $GCD\,(a,b)=b \Leftrightarrow a$ قاسم لـ b

هناك خوارزميتان لتحديد الـ GCD :

1) الطرح المتتالي:

① نحدد الكبير a، نحدد الصغير b.

② نوجد $a-b$

③ نخفي a ونطرح العددين الباقيين مع مراعاة الكبير والصغير.

④ نتابع عملية الطرح إلى أن نصل إلى آخر ناتج طرح غير معدوم $\boxed{\Leftarrow \text{ يكون هو GCD}}$

2) القسمة الإقليدية "إقليدس":

① نحدد الكبير a ونسميه المقسوم.

② نحدد الصغير b ويكون المقسوم عليه.

③ نأخذ باقي قسمتها.

④ في الخطوة التالية يصبح المقسوم عليه هو المقسوم والباقي هو المقسوم عليه ونوجد باقي قسمتهما.

⑤ نكرر العملية إلى أن نصل إلى آخر باقي غير معدوم $\boxed{\Leftarrow \text{ يكون هو GCD}}$.

مثال: أوجد القاسم المشترك الأكبر GCD للأعداد (312 , 546) بالطريقتين:

1) باستخدام خوارزمية الطرح المتتالي:

الكبير a	الصغير b	ناتج الطرح $a-b$
546	312	$546-312=234$
312	234	$312-234=78$
234	78	$234-78=156$
156	78	$156-78=78$
78	78	$78-78=0$

آخر ناتج طرح غير معدوم هو 78

$GCD\,(312\,,546)=78$

2) باستخدام خوارزمية إقليدس:

المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
546	312	234
312	234	78
234	78	0

آخر باقي قسمة غير معدوم هو 78

$GCD\,(312\,,546)=78$

③ الكسور المختزلة:

نقول عن $\frac{a}{b}$ أنه كسر مختزل عندما يكون (a,b) عددان أوليان فيما بينهما أي أن: $GCD\,(a,b)=1$

سؤال: اختزل الكسر (اكتب الكسر بأبسط صورة) كيف يُحل؟

1) نخرج GCD بين بسط ومقام الكسر.

2) نقسم كلاً من البسط والمقام عليه فنحصل على الكسر المختزل.

مثال: اختزل الكسر $\frac{312}{546}$ ؟

الحل: نعيد الخطوات المثال السابق بإيجاد GCD بين البسط (312) والمقام (546) بإحدى الطريقتين.

$\boxed{1}$ $GCD\,(546,312)=78$

$\boxed{2}$ $\dfrac{312\div 78}{546\div 78}=\dfrac{4}{7}$

تدريبات: اختر الإجابة الصحيحة:

1) أحد الكسور الآتية مختزلة:

A	$\frac{11}{31}$	B	$\frac{15}{33}$	C	$\frac{11}{33}$

2) قيمة a التي تحقق أن $GCD\,(39,a)=1$:

A	39	B	13	C	4

3) الكسر المختزل للكسر $\frac{80}{104}$ يساوي:

A	$\frac{40}{52}$	B	$\frac{10}{13}$	C	$\frac{4}{13}$

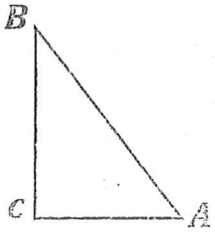
* ABC مثلث قائم في C فيه:

$AC=384\ \ ,BC=512$

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين: $(512\,,384)$

2) احسب $\tan(\widehat{ABC})$ واكتب النتيجة بشكل كسر مختزل.

الحل:



المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
512	384	128
384	128	0

آخر ناتج طرح غير معدوم هو 128

$GCD(512\,,384)=128$

$$tan(ABC)=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{AC}{BC}$$

$$=\frac{384\div 128}{512\div 128}=\frac{3}{4}$$

④ الجذر التربيعي لعدد موجب:

الجذر التربيعي لعدد موجب a ويرمز له $\sqrt{a}$ وهو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

خواص هامة:

في حال a عدد طبيعي موجب:

$\boxed{1}$ $(\sqrt{a})^2=a$, $\boxed{2}$ $\sqrt{a^2}=a$

$\boxed{3}$ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$, $\boxed{4}$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

مثال:

$$A = \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{48}$$

$$B = 5\sqrt{3} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$$

1) اكتب كلاً من المقادير الآتية (A , B) بأبسط شكل ممكن (اختزل المقادير الآتية)

2) احسب $A * B$

3) احسب $B - A$

الحل:

$\boxed{1}$ $A = \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{48}$

$B = 5\sqrt{3} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$

$\boxed{2}$ $A \times B =$

$\boxed{3}$ $B - A =$

تدريبات: اختر الإجابة الصحيحة:

1) ثلث العدد $\sqrt{48}$ هو:

A	$2\sqrt{3}$	B	$\sqrt{5}$	C	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2) أربع أضعاف العدد $\sqrt{5}$:

A	$5\sqrt{4}$	B	$4\sqrt{5}$	C	$\sqrt{\frac{5}{4}}$

3) المقدار $\sqrt{3} . \frac{3}{\sqrt{3}}$ يساوي:

A	0	B	3	C	$\sqrt{3}$

4) العدد $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ هو عدد:

A	عشري	B	غير عادي	C	صحيح

5) العدد $\left|\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{2}\right|$ هو عدد:

A	عادي	B	غير عادي	C	صحيح

مثال: لدينا العددان:

$$A = \frac{117}{63} \quad , B = \left(3 - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right)$$

1) اختزل الكسر A

2) اختزل B

3) احسب $A - B$

الحل:

1) لاختزال الكسر A نوجد GCD بين بسط ومقام الكسر أي بين $117 , 63$

المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
117	63	54
63	54	9
54	9	0

$$GCD(117 , 63) = 9$$

$$A = \frac{117 \div 9}{63 \div 9} = \frac{13}{7}$$

2) لاختزال B

$$B = \left(\frac{3}{1} - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{6}{2} - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{3}{2} - \frac{8}{7} = -\frac{21}{16}$$

3) لحساب $A - B$

$$\frac{13}{7} - \left(-\frac{21}{16}\right) = \frac{13}{7} + \frac{21}{16}$$

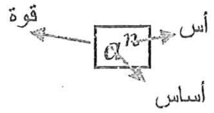
$$= \frac{208}{112} + \frac{147}{112} = \frac{355}{112}$$

انتهت الوحدة الأولى

الوحدة الثانية

① قوة عدد عادي:

تمهيد إذا كان a عدداً عادياً موجباً وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:



a أس n

قواعد أساسية:

-1 $a^0 = 1 \quad , a \neq 0$

-2 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

-3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a^{-n} مقلوب a^n)

مثال:

① $17^0 = 1$

② $5^2 = 5 \times 5 = 25$

③ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

④ $3^{-4} = \frac{1}{3^{+4}} = \frac{1}{81}$

ملاحظة أساسية (قوة العدد 10):

1) $10^n = 10 \ldots \ldots 0 \longrightarrow$ (n صفراً)

2) $10^{-n} = 0.0 \ldots \ldots 1 \longrightarrow$ (n صفراً)

$10^3 = 1000 \quad , 10^{-3} = 0.001$

مثال: قواعد حساب القوى:

ضرب القوى (جمع الأسس) بشرط لها ذات الأساس.

$\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$

قسمة القوى (طرح الأسس) بشرط لها ذات الأساس.

$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

قوة القوى ضرب الأسس

$\boxed{(a^m)^n = a^{n.m}}$

قوة جداء:

$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$

قوة قسمة:

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

أمثلة: اكتب ما يلي بصورة قوة عدد واحد:

① $4^3 \times 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$

② $(\sqrt{2})^3 . (\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^8 = 2^4$

③ $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

④ $\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^{5-(-2)} = 3^{5+2} = 3^7$

⑤ $\left[(\sqrt{3})^3\right]^2 = (\sqrt{3})^{3\times 2} = (\sqrt{3})^6 = 3^3$

⑥ $(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 . (\sqrt{2})^2 9 \times 2 = 18^1$

⑦ $\frac{16}{3^2} = \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

⑧ $\frac{30^4}{3^4} = \left(\frac{30}{3}\right)^4 = (10)^4$

ملاحظة: في الأمثلة السابقة إذا طلب منا إيجاد أبسط صورة نقوم بفك القوة (إيجاد الناتج النهائي).

مثال: احسب قيمة (A) بأبسط صورة:

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 15^2}$$

الحل:

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times (3 \times 5)^2} : \begin{cases} 15^2 = (3 \times 5)^2 \\ = 3^2 \times 5^2 \end{cases}$$

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$= 2^8 \times 2^{-3} \times 5^7 \times 5^{-2}$$

$$= 2^{8-3} \times 5^{7-2}$$

$$= 2^2 \times 5^5$$

$$= (2 \times 5)^5 = (10)^5 = 100000$$

تدريب: أكتب المقدار $P=\frac{3^7\times4^8\times5^4}{2^5\times5^{-7}\times9^3}$

بالصيغة: $P=2^a\times3^b\times5^c$

الحل:

$$P=\frac{3^7\times(2^2)^8\times5^4}{2^5\times(5)^{-7}\times(3^2)^3}$$
$$=3^7\times2^{16}\times5^4\times2^{-5}\times5^7\times3^{-6}$$
$$=2^{16--5}\times3^{7-6}\times5^{7+4}$$
$$P=2^{11}\times3^1\times5^{11}$$

النشر: هو عملية تحويل من جداء إلى مجموع $(X \longrightarrow \mp)$

أمثلة : انشر ما يلي / احسب ما يلي:

① $A=-3(2x+5)$
$=(-3\times2x)+(-3\times5)=6x-15$

② $B=2x(x-1)$
$=(2x\times x)+(2x\times-1)=2x^2-2x$

③ $E=(2x-3)(x+2)-5(2x-3)$
$=(2x\times x)+(2x\times2)+(-3\times x)+(-3\times2)+(-5\times2x)+(-5\times-3)$
$=2x^2+4x-3x-6-10x+15$

نجمع الحدود المتشابهة: $=2x^2-9x+9$

نشر المطابقات التربيعية:

1) مربع مجموع = مربع أول + ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني
$(a+b)^2=a^2+2(a)(b)+b^2$

2) مربع فرق = مربع الأول – ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني
$(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$

3) جداء ضرب مجموع حدين بفرقهما = مربع الأول – مربع الثاني
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

مثال: انشر ما يلي / احسب ما يلي:

① $(x+3)^2=(x)^2+2(x)(3)+(3)^2$
$=x^2+6x+9$

② $(2x-2)^2=(2x)^2-2(2x)(2)+(2)^2$
$=4x^2-8x+4$

③ $(t+5)(t-5)=(t)^2-(5)^2$
$=t^2-25$

تدريب: انشر ثم اختزل / احسب كلاً مما يلي:

① $A=(4x-2)^2-(x+3)^2$
$=[(4x)^2-2(4x)(2)+(2)^2]-[(x)^2+2(x)(3)+(3)^2]$
$=[16x^2-16x+4]-[x^2+6x+9]$

انتبه إشارة السالب قبل القوس تقلب جميع إشارات القوس

$=16x^2-16x+4-x^2-6x-9$

نجمع الحدود المتشابهة:

$=15x^2-22x-5$

② $B=(2y-3)(2y+3)-(y+2)(2y-4)$
$=[(2y)^2-(3)^2]-[2y^2-4y+4y-8]$
$=[4y^2-9]-[2y^2-8]$
$=4y^2-9-2y^2+8=2y^2-1$

* احسب قيمة B عندما $y=1+\sqrt{2}$

$B=2y^2-1=2\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1$
$=2\left[(1)^2+2(1)(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2\right]-1$
$B=2[1+2\sqrt{2}+2]-1$
$=2[3+2\sqrt{2}]-1$
$B=6+4\sqrt{2}-1=5+4\sqrt{2}$

التحليل: هو عملية تحويل من مجموع إلى جداء $(x \longrightarrow \pm)$

① التحليل بإخراج عامل مشترك:

ملاحظة مهمة: ....

مثال: حلل كثير الحدود:

① $5x^2+10x=5x(x+2)$

② $9xy^2-3x^2y^2=3xy^2(3-x)$

③ $8x^2y+20xy^2-40x^2y^2=4xy(2x+5y-10xy)$

④ $x^2(x+1)+5(x+1)=(x+1)(x^2+5)$

⑤ $(x-2)^2+3(x-2)=(x-2)(x-2+3)$
$=(x+2)(x+1)$

② **التحليل باستخدام المطابقات التربيعية:**

ملاحظة مهمة:..
....

مثال: حلل ما يلي:

① $x^2-9=(x+3)(x-3)$

② $x^2-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

③ $x^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

④ $x^2+8x+16=(x+4)^2$

⑤ $x^2-6x+9=(x-3)^2$

⑥ $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$

⑦ $25Z^2+30Z+9=(5Z+3)^2$

ملاحظة (1):
بالنسبة للأمثلة $(3+2+1)$ يجب أن يكون إشارة سالبة بين الحدين فنأخذ:
(جذر الثاني – جذر الأول) (جذر الثاني + جذر الأول)

ملاحظة (2):
بالنسبة للأمثلة $(7+5+4)$ نأخذ:
^{2}(جذر الثالث، إشارة الثاني، جذر الأول)

⑧ $3x^3-12x=3x(x^2-4)$
$=3x(x+2)(x-2)$

⑨ $-3x^3-30x^2-75x$
$=-3x(x^2+10x+25)=-3x(x+5)^2$
$=-3x(x+5)^2$

③ **التحليل بالطريقة المباشرة:**

مثال: حلل مايلي:

① $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

② $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

③ $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

④ $2x^3+20x^2+48x=2x(x^2+10x+24)=$
$2x(x+6)(x+4)$

ملخص طرق التحليل هام:

حدين {

ثلاث حدود {

مثال نموذج: لدينا المقدار

$$L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$$

1) انشر ثم اختزل L 2) حلل L

3) احسب قيمة L في حالة $\left(x=-\sqrt{3}\right)$

الحل:(1

$L=[(3x\times 2x)+(3x\times 5)+(-1\times 2x)+(-1\times 5)]$
$-[(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2]$

$L=[6x^2+15x-2x-5]-[9x^2-6x+1]$

$L=6x^2+15x-2x-5-9x^2+6x-1$

$L=-3x^2+19x-6$

(2 $L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$

$L=(3x-1)[(2x+5)-(3x-1)]$

$L=(3x-1)(2x+5-3x+1)$

$L=(3x-1)(-x+6)$

3) نعوض $\left(x=-\sqrt{3}\right)$ في قيمة L بعد النشر أو التحليل:

$L=-3x^2+19x-6$

$L=-3\left(-\sqrt{3}\right)^2+19\left(-\sqrt{3}\right)-6$

$L=-3(3)-19\sqrt{3}-6$

$L=-9-19\sqrt{3}-6=15-19\sqrt{3}$

إزالة الجذر من المقام:

* لإزالة الجذر من مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{b}$

* لإزالة الجذر من مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$

مثال: أزل الجذر من مقامات الكسور:

① $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{9}{\sqrt{21}}=\frac{9\times\sqrt{21}}{\sqrt{21}\times\sqrt{21}}=\frac{9\sqrt{21}}{21}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

③ $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{8\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$

$=\frac{8\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{8\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}$

$=4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

انتهت الوحدة الثانية

الوحدة الثالثة: المعادلات

مقدمة:

المعادلة: هي مساواة بين طرفين تحتوي مجهولاً (أو أكثر)

حل المعادلة:

* هو إيجاد جميع قيم المجهول التي تجعل المعادلة صحيحة.

* نسمي كل قيمة تحقق المعادلة $\Leftarrow$ جذراً للمعادلة، أو حل المعادلة.

* نقول أن معادلتين متكافئتين (إذا كان لهما الحلول نفسها)

توضيح لما سبق: نسمي $4 = 2 + 6x \Leftarrow$ (معادلة)

- إن حل المعادلة

حل المعادلات (حل المسائل): السؤال يكون حل المعادلة التالية: أوجد حلول المعادلة: أوجد قيمة مجهول:

① **المعادلة من الدرجة الأولى:**

$(a \neq 0)ax + b = c$

الشكل العام $hx + m = cx + d$

مثال : حل المعادلات التالية:

$5x - 4 = 3x + 2$

الحل: $5x - 3x = 2 + 4$

$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$

✍ **تدرب:** حل المعادلة التالية:

$\frac{y}{3} + 4 = \frac{y}{4} - 1$

ملاحظة: * إذا كانت المعادلة تحوي $\longleftarrow$ ( )

* إذا كانت المعادلة تحتوي تناسب $\longleftarrow$ ( ) ( )

② **المعادلة من الدرجة الثانية:** حلول المعادلة من الشكل

$(1)(ax \pm b)(cx \pm d) = 0$

نقول أن
إما $(ax \pm b) = 0$ ومنه: $x = \pm\frac{b}{a}$
أو $(cx \pm d) = 0$ ومنه: $x = \pm\frac{d}{c}$

فيكون $\begin{cases} x^2 = a^2 \\ x^2 = \pm\sqrt{a} \end{cases}$

في سؤال حل المعادلة (درجة ثانية) إما أن يكون لدينا أقواس مضروبة ببعضها أو معادلة على شكل حدود جبرية:

الحالة الأولى: الأقواس جاهزة

$(\square \pm \square)(\square \pm \square) = 0$

خاصة الجداء الصفري.

ملاحظة: أو من الشكل(2)

في حالة $a = 0$ (للمعادلة لها حل وحيد هو $x = 0$)

في حالة: $\boxed{a < 0}$ أي (a سالب) فالمعادلة مستحيلة الحل

مثال:

$x^2 = -9 \longleftarrow$ (مستحيلة الحل في R) مثال $x^2 = 5$

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

إما $x = +\sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

مثال: $(2x - 5)(x + 1) = 0$

إما $(2x - 5) = 0$

$2x = +5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$

أو: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

2) الحالة الثانية:

المعادلة على شكل حدود: ننقل الحدود جميعها إلى طرف واحد ثم نحولها إلى جداء صفري.

المعادلة على شكل حدود جبرية (الأقواس غير جاهزة)

② $\mathbf{(4x - 1)(x + 3) = 11x + 13}$

$4x^2 + 12x - x - 3 = 11x + 13$

$4x^2 + 12x - x - 11x = 13 + 3$

$4x^2 = 16$

$(\div 4)x^2 = 4 \longrightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

إما $x - 2 = 0 \longleftarrow 4 = +2$

أو $x + 2 = 0 \longleftarrow 4 = -2$

③ $\mathbf{9x^2 = 25}$

$9x^2 - 25 = 0$

$(3x + 5)(3x - 5) = 0$

إما $3x - 5 = 0 \longrightarrow +\frac{5}{3}$

أو $3e - 5 = 0 \longrightarrow x = +x^2$

تدرب على حل المعادلات التالية:

① $\left(\frac{y}{2}+2\right)\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$

....

....

② $3x(x-3)(3x+1)=0$

....

....

③ $3(x+5)^2-4x^2=0$

....

....

④ $(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$

....

....

⑤ $5-3(y+1)=(4y+3)^2$

....

....

⑥ $\frac{12x}{5}=3x-1$

....

....

تمرين: ليكن لدينا المقدارين:

$A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$

$B=(3x-10)(x+1)$

المطلوب: أثبت أن $A=B$

الحل:

لكي نعرف فيما إذا كان $A=B$، يجب أن نحسب A ثم نحسب B ثم نقارن النتائج.

$A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$

$=[4x^2-8x+5x-10]-x(x+4)$

$=4x^2-8x+5x-10-x^2-4x$

$\Longrightarrow A=3x^2-7x-10$

$B=(3x-10)(x+1)$

$=3x^2+3x-10x-10$

$B=3x^2-7x-10$

بالمقارنة بين نواتج A , B نجد أن: $A=B$

تدريب: ليكن لدينا المقدار:

$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

1) انشر واختزل E، ثم حلل المقدار E واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$

2) حل المعادلة $E=0$

الحل: 1) نشر واختزال E

$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

$E=9x^2+12x+4-3x^2-21x-2x-14$

$E=6x^2-11x-10$

نحلل E

$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

$=(3x+2)[(3x+2)-(x+7)]$

$=(3x+2)(3x+2-x-7)$

$=(3x+2)(2x-5)$

لنحسب قيمة E عندما $x=\frac{1}{2}$

$=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)+2\right]\left[2\left(\frac{1}{2}\right)-5\right]$

$=\left[\frac{3}{2}+2\right][1-5]$

$=\left(\frac{7}{2}\right)(-4)=\frac{-28}{2}=-14$

2) حل المعادلة $E=(3x+2)(2x-5)=0 \Leftrightarrow$

إما $3x+2=0 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{-2}{3}}$

أو $2x-5=0 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$

التعبير عن نص مسألة بمعادلة: "المسألة الكلامية":

ملاحظات للحل:

✍ تحليل المسألة: ....

....

✍ تشكيل المعادلة: ....

....

تمرين (1): في أحد المجالس عددٌ من الأشخاص، ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و30 سنة، وثلثهم تنقص أعمارهم عن 20 سنة، ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن 30 سنة، ما عدد الأشخاص في هذا المجلس؟

الحل: نحل المسألة ونرمز المجاهيل:

في أحد المجالس عدد من الأشخاص

⟵ نرمز لعدد الأشخاص في المجلس (x)

ربعهم : $\frac{x}{4}$ ، ثلثهم $\frac{x}{3}$

العدد الكلي : $20+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$

تشكيل المعادلة: إن عدد الأشخاص في المجلس هو نفسه الكلي

$$x=20+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$$

$$x=20+\frac{3x}{12}+\frac{4x}{12}\longrightarrow x=20+\frac{7x}{12}$$

بحل المعادلة: نطرح $\frac{7x}{12}$ من كلا طرفي المعادلة:

$$x-\frac{7x}{12}=20+\frac{7x}{12}-\frac{7x}{12}$$

$$x-\frac{7x}{12}=20 \text{(نوحد المقامات)}\longrightarrow\frac{5x}{12}=20$$

$$x=20\times\frac{12}{5}=48$$

فعدد الأشخاص 48 (في المجلس)

تمرين (2): ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسيه حصلنا على 460؟

الحل: نفرض أن العدد الذي نريد إيجاده هو (x)

تحليل المسألة
$$\begin{cases}\frac{3x}{4}=\left(\frac{3}{4}\times x\right) & \text{ثلاثة أرباعه}\\ \frac{2x}{5}=\left(\frac{2}{5}\times x\right) & \text{خمسية}\end{cases}$$

(نشكل المعادلة): إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسية =460؟

إذا : $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}=460$

$$\frac{15x+8x}{20}=460\longrightarrow\frac{23x}{20}=460$$

$$23x=20\times460\longrightarrow x=\frac{9200}{23}\longrightarrow x=400$$

تمرين (3): ليكن عمر خالد الآن 11 سنة وعمر غيث 26 سنة، بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر خالد؟

الحل: <u>تحليل المسألة: ما الذي نريد حسابه؟</u>

نريد حساب (بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر خالد)

<u>الآن</u>: عمر خالد 11 سنة، عمر غيث 26

بعد كم سنة ⟵ أي يجب أن نحسب عدد (السنوات): نرمزه x

بعد x سنة، سيكون: عمر خالد: $11+x$ ، عمر غيث: $26+x$

<u>السؤال هو</u>: (بعد كم سنة) يصبح عمر غيث (مساوياً) ضعفي عمر خالد $2(11+x)=26+x$

$$22+2x=26+x$$

$$2x-x=26-22\Longrightarrow x=4 \text{ سنوات}$$

تدريب (1):

قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها $x+4$ ومساحتها 64 أوجد قيمة x

2) أوجد عددين طبيعيين متتاليين مجموع مربعهما (181)

3) تضم مكتبة رولا أربعة أصناف من الكتب، نصف كتبها مدرسية، ربعها روايات، وخمسها علمية بالإضافة إلى معجمين، احسب عدد كتب رولا؟

مسألة: اشترك عدد من الأصدقاء لتنظيم عشاء مشترك يتقاسمون التكلفة بالتساوي، إذا دفع كل منهم 900 ليرة، زاد المبلغ عن التكلفة بمقدار 800 ليرة، وإذا دفع كل منهم 600 ليرة، نقص المبلغ عن الكلفة بمقدار 1300 ليرة، فما عدد هؤلاء الأصدقاء؟

الحل: لنفرض عدد الأصدقاء x ، ونفرض ثمن الطعام y:

في الحالة الأولى (إذا دفع كل منهم 900 ليرة)

$$(x) \times 900 - y = 800 \ldots \quad (1)$$

في الحالة الثانية (إذا دفع كل منهم 600 ليرة)

$$(x) \times 600 + 1300 = y \ \ldots (2)$$

ملاحظة:

بتعويض المعادلة (2) في (1):

$$900x - (600x + 1300) = 800$$

$$900x - 600x - 1300 = 800$$

$$300x = 800 + 1300$$

$$300x = 2100$$

$$(\text{عدد الأصدقاء})x = \frac{2100}{300} = 7$$

المتراجحات:

① المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x، هي كل متراجحة من النمط:

$$ax + b(<, >, \leq, \geq)cx + d$$

حيث: $a\,, c\,, b\,, d$ أعداد $(a \neq c)$

حلول المتراجحة: هي قيم x التي تجعل المتراجحة صحيحة

مثال: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{1}{3}x - 1 \geq 2$$

الحل:

$$\frac{1}{3}x - 1 + 1 \geq 2 + 1$$

$$\frac{1}{3}x \geq 3 \longrightarrow x \geq 3 \times \frac{3}{1}$$

مجموعة حلول المتراجحة هي قيم $x \geq 9$، (x) الأكبر أو تساوي (9)، $[9, +\infty[$

كيف نكتب حلول المتراجحة على شكل مجالات "أقواس":

* تفتح المجالات دوماً عند: $-\infty\ ,\ +\infty$

تفتح المجالات عند: $>$ أو $<$ (أكبر أو أصغر تماماً)

تغلق المجالات عند: $\leq$ أو $\geq$ (أكبر أو يساوي، أصغر أو يساوي)

جدول مساعد:

شكل المتراجحة	$x >$ عدد	$x \geq$ عدد	$x <$ عدد	$x \leq$ عدد
حلول المتراجحة	]عدد , +∞[	[عدد , +∞[	]−∞, عدد[	]−∞, عدد]

الإشارة (أكبر) نبدأ بالعدد وننتهي بـ $+\infty$

الإشارة (أصغر) نبدأ بـ $-\infty$ وننتهي بالعدد.

حل المتراجحات الآتية ومثل الحلول على خط الأعداد:

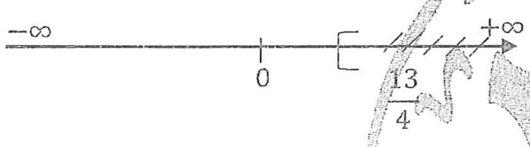
$$\frac{4x + 2}{5} < 3$$

نضرب طرفي المعادلة بالعدد (5) : $4x + 2 < 3 \times 5$

$$4x + 2 < 15$$

$$4x < 15 - 2 \longrightarrow 4x < 13$$

مجموعة الحلول $x < \frac{13}{4} \longrightarrow s = \left]-\infty, \frac{13}{4}\right[$



② $3(y - 1) - 2(4y - 1) \geq 0$

$$3y - 3 - 8y + 2 \geq 0$$

$$3y - 8y \geq +3 - 2$$

$$\Longrightarrow -5y \geq +1$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ (-1) ولكن يجب أن نتذكر أنه إذا ضربنا أو قسمنا المتراجحة على عدد سالب (نقلب إشارة المتراجحة)

$(\times -1) \quad 5y \leq -1$

$$y \leq -\frac{1}{5}$$

$$S = \left]-\infty\,, -\frac{1}{5}\right]$$

③ $\frac{1}{8}x - 3 \leq 5$

④ $4x - (22x - 1) > 3x + 2$

⑤ $5x + 1 \leq (2x + 1)$

ملاحظات حول المتراجحات:

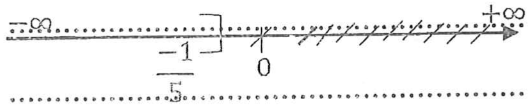
....

....

تمرين إضافي:

ليكن $A=\frac{4x+2}{5}$ ، احسب قيمة A عند $x=\frac{3}{4}$

أوجد حلول المتراجحة $3<\frac{4x+2}{5}$ ومثل الحل على محور الأعداد.



....

....

....

حل المسائل الكلامية باستخدام المتراجحات:

كيف نعرف أنه يجب علينا تشكيل متراجحة (وليس معادلة) بحل مسألة.

إذا قرأنا في نص المسألة أي كلمة أو جملة تدل على (مقارنة) مثال:

(أوفر، أربح، أكثر، أقل، أكبر، أصغر،...)

مسألة (1): هناك عرضان في محل لتأجير الأفلام:

استعارة: يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.

شراء: يدفع الزبون 800 ليرة عن كل فلم يشتريه.

بدءً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول الأوفر له؟

الحل: لنفترض أن عدد الأفلام هو x

استعارة: $550x+6000$

شراء: $800x$

بما أن المطلوب هو معرفة بدءً من أي عدد من الأفلام يكون العرض (أوفر له): فالعملية الحسابية تكون (متراجحة).

$$550x+6000<800x$$
$$550x-800x<-6000$$
$$-250x<-6000$$
$$x>\frac{-6000}{-250}$$
$$x>24$$

فإذا كان الشخص يشاهد أكثر من 24 فلماً في السنة فيكون العرض الأول أوفر له.

مسائل إضافية: تدرب على الحل:

ليكن لدينا المتراجحة $3x+7\leq-8$

والمطلوب:

1) أي من الأعداد الآتية: -6 , -4 حل لهذه المتراجحة.

2) حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

....

....

....

انتهت الوحدة الثالثة

الوحدة الرابعة: جمل المعادلات

الحل المشترك معادلتين خطيتين (جبرياً):

- من إحدى المعادلتين: نعزل أحد المجاهيل ونسميه بمعادلته (3).
- نعوض المجهول المعروف أي المعادلة (3) بالمعادلة الأخرى.
- بعد إيجاد قيمة المجهول الأول، نعوض بإحدى المعادلات لإيجاد الثاني.

مثال: حل جملة المعادلتين الخطيتين (جبرياً):

$$\begin{cases} x+y=1 & ① \\ 3x+y=5 & ② \end{cases}$$

الحل: من (1) نعزل أحد المجاهيل (3) ... $x=1-y$

نعوض (3) الناتجة في المعادلة (2)

$$3(1-y)+y=5$$

$$-3y+3+y=5 \Longrightarrow -3y+y=5-3$$

$$\Longrightarrow -2y=2$$

$$y=\frac{2}{-2}=-1 \text{ إذا } y=-1$$

نعوض قيمة y في (3):

$$x=1-(-1) \Longrightarrow x=2$$

فيكون الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $(2,-1)$

تدرب على الحل:

$$\begin{cases} 2x+y=-4 & \dots(1) \\ x-y=1 & \dots(2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=32 \\ 3x+5y=124 \end{cases}$$

---

1) طريقة الحذف بالجمع احذف أحد المجاهيل:

☜ طريقة الحل:

* نجعل أمثال x أو أمثال y في كلا المعادلتين نفسه (ومختلف بالإشارة).

* نجمع المعادلتين، فينتج لدينا قيمة أحد المجاهيل.

* نعوض قيمة المجهول في إحدى المعادلات لنحسب المجهول الآخر.

مثال: حل جملة المعادلتين الخطيتين (جبرياً):

$$2x+3y=1 \quad \dots(1)$$

$$x+y=-2 \quad \dots(2)$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد (-2) فينتج:

$$(-2)x+(-2)y=(-2)\times(-2)$$

$$-2x-2y=+4$$

نجمع المعادلة الناتجة (المكافئة لـ2) مع المتبقية (1):

$$\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ \underline{-2x-2y=4} \end{array}$$

$$\text{بالجمع} \Longrightarrow y=5$$

نعوض في أحد المعادلات لإيجاد x من (2):

$$x+(5)=-2$$

$$x=-2-5 \Longrightarrow x=-7$$

إذاً الثنائية (7,5--) هي حل للجملة السابقة.

تدرب على الحل:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \dots(1) \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=8 \dots(2) \end{cases}$$

كيف ننتقل من نص مسألة إلى جملة معادلتين خطيتين، ثم نحلها:

1) نختار المجاهيل ونرمزها
2) نؤلف جملة معادلتين ونحلها.
3) نجيب عن طلبات المسألة.

مسألة (1): مسألة نموذجية ـ الفحص الموحد:

زارت مها وسوسن مؤسسة استهلاكية لبيع الأدوات المدرسية، واشترت مها (مسطرتين وخمسة أقلام بمبلغ 600 ليرة سورية)، واشترت سوسن (أربعة مساطر وثلاثة أقلام بمبلغ 500 ليرة سورية)، إذا رمزنا إلى سعر المسطرة بـ x وإلى سعر القلم بـ y كانت المعادلة المعبرة عما اشترته مها بدلالة x, y هي $2x+5y=600$، والمطلوب:

1) اكتب المعادلة المعبرة عما اشترته سوسن بدلالة y, x

2) احسب سعر كل من المسطرة والقلم بحل جملة المعادلتين.

3) استنتج سعر أربعة مساطر وعشرة أقلام.

الحل: لنفرض أن سعر المسطرة x ، وسعر القلم y

1) المعادلة المعبرة عن مشتريات سوسن بدلالة x, y:

$4x+3y=500$

2) حساب سعر كل من المسطرة x، القلم y:

مها $2x+5y=600$ ... (1)

سوسن $4x+3y=500$ ... (2)

نضرب المعادلة الأولى بـ (−2):

$$\begin{array}{r} -4x-10y=-1200\ ...\ (1) \\ 4x+3y=500\ ...\ (2) \\ \hline -7y=-700 \end{array} +$$

بالجمع

$y=100 \longrightarrow$ (سعر القلم الواحد)

حساب سعر المسطرة:

نعوض قيمة y في إحدى المعادلات: ولتكن (1):

$2x+5(100)=600$

$2x+500=600$

$2x=600-500$

$2x=100 \longrightarrow x=\frac{100}{2}$

$x=50 \longrightarrow$ ثمن المسطرة الواحدة

3) سعر أربع مساطر:

$4\times(x)=4\times 50=200$ ليرة

سعر عشرة أقلام:

$10\times(y)=10\times 100=1000$ ليرة

مسألة (2):

عُمر أحمد 37 عاماً، لدى أحمد أخ اسمه خالد، وأخت اسمها ريم، مجموع عُمري خالد وريم يساوي (17 عاما)، إذا علمت أن ثلاثة أضعاف عُمر خالد مضافاً إلى عُمر ريم يساوي عُمر أحمد، فكم عُمر كل من خالد وريم؟

الحل:

لنفرض عُمر خالد: x وريم y مجموع عمريهما:

$x+y=17$ ... (1)

ثلاثة أضعاف عُمر خالد مضافاً إلى عُمر ريم $=37$

$3x+y=37$ ... (2)

من (1): $x=17-y$ ... (3)

نعوض (3) في (2):

$3(17-y)+y=37$

$51-3y+y=37$

$-2y=-51+37$

$-2y=-14$

$y=\frac{-14}{-2}=7$

$y=7 \longrightarrow$ عُمر ريم

فيكون عُمر خالد: نعوض y في (1):

$x+(7)=17$

$x=17-7$

$x=10 \longrightarrow$ عمر خالد

تدرب على الحل:

1) مجموع ما يقتني الصديقان ماهر وعامر 144 طابعاً بريدياً، إذا أعطى ماهر اثنين من طوابعه لعامر أصبح لدى عامر مثلي ما لدى ماهر.

ما عدد الطوابع التي لدى كل من الصديقين.

معادلة المستقيم:

كل معادلة من الشكل: $ax+by=c$

حيث: $(a,b)\neq(0.0)$

ملاحظات حول المتراجحات:

1) كل معادلة من الدرجة الأولى سواء كانت بمجهول واحد أو بمجهولين، تمثل بيانياً (بالرسم) معادلة مستقيم.

2) لرسم مستقيم نحتاج نقطتين منه.

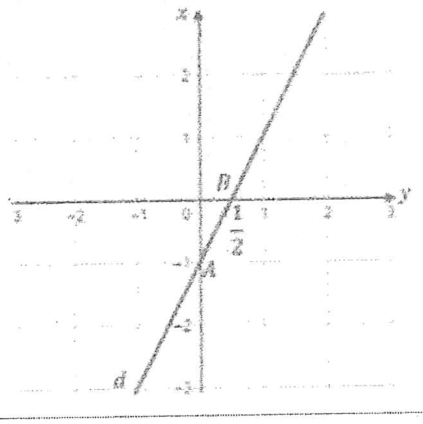
3) كل مستقيم يمر بمبدأ الإحداثيات ولا يوازي محور التراتيب $0y$ يمكن كتابة المعادلة بالشكل $y=mx$

تمرين:

ليكن لدينا المستقيم (d) الذي معادلته $2x-y=1$

1) ارسم المستقيم (d):

النقطة	x	y
$A(0,-1)$	0	-1
$B\left(\frac{1}{2},0\right)$	$\frac{1}{2}$	0



تدرب على الحل: ارسم المستقيم في الممثل للمعادلة:

ارسم المستقيم (d) الممثل بالمعادلة:

$$\begin{cases} y = x + 3 & (1 \\ 2x + y = 0 & (2 \\ x = 3 & (3 \\ y = -x & (4 \end{cases}$$

5) ليكن لدينا المعادلة:

(5) $3x + y = 1$ الممثلة للمستقيم (d)

ارسم (d) ثم تحقق فيما إذا كانت النقاط التالية تنتمي إلى (d) (جبرياً):

$A(2,5), B(1,-1), C(1,-2)$

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً:

*** طريقة الحل:**

☺ نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الأولى

☺ نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الثانية

إذا تقاطع المستقيمين في نقطة ⟵ [يوجد حل]

☺ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع ⟵ (نسقط النقطة) على المحور $0x$، نسقط على المحور $0x$

مثال:

حل جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين (بيانيا): (تأكد من الحل جبرياً) :

$$3x + y = 5 \quad \dots \quad (1)$$
$$x + 2y = 0 \quad \dots \quad (2)$$

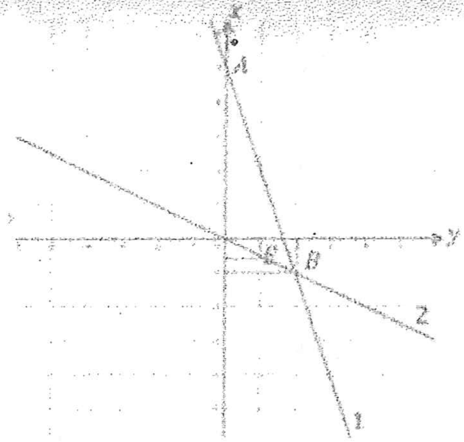
الحل:

$$3x + y = 5 \quad \dots \quad (1)$$

النقطة	x	y
$A(0,5)$	0	5
$B(2,-1)$	2	-1

$$x + 2y = 0 \quad \dots \quad (2)$$

النقطة	x	y
$E\left(1,-\frac{1}{2}\right)$	1	$-\frac{1}{2}$
$D(0,0)$	0	0



نلاحظ أن المستقيمين تقاطعهما في النقطة $(2,-1)$

طلب إضافي:

احسب مساحة المثلث المشكل بين المستقيمَ (1) والمحورين $0y$, $0x$ (لقد أوجدناها سابقاً بالصيغة)

حل جملة المعادلة الخطية التالية "جبرياً" ثم تأكد من حلها بيانياً:

① $\begin{cases} 5x + 2y = 12 & \dots \quad (1) \\ x + y = 8 & \dots \quad (2) \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x - y = 4 & \dots \quad (1) \\ x + 3y = 1 & \dots \quad (2) \end{cases}$

انتهت الوحدة الرابعة

الوحدة الخامسة: التابع

مقدمة: التابع:

التابع f هو إجرائية تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$، يُسمى $f(x)$ صورة x وفق التابع $f(x)$

مثال: ليكن لدينا التابع f المعرفة بقاعدة الربط:

$$f(x) = x + 1$$

لو عوضنا (1) بدل من:

$$f(1) = 2 \Leftarrow f(1) = (1) + 1 \Leftarrow x$$

* نقول أن: 2 هي صورة العدد (1) وفق التابع f

(أي أن قيمة التابع f عند العدد (1) هي العدد 2)

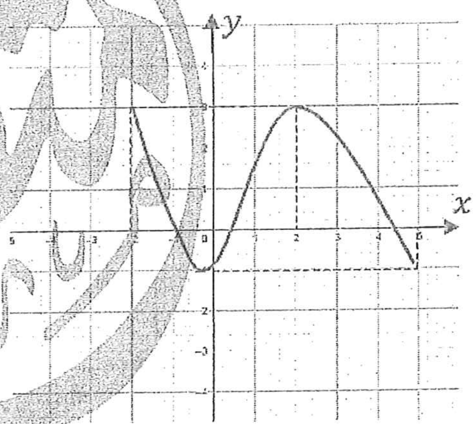
* نسمي (1) هو سلف للعدد (2).
* نسمي $[f(x) = x + 1] \Leftarrow$ قاعدة ربط التابع (صيغة التابع) ونسمي x متحولاً (أي يأخذ قيم مختلفة).
* منطلق التابع (مجموعة تعريفه): (هي مجموعة القيم التي نسمح بمتحول x أن يأخذها)

طريقة تعيين التابع:

1) التعيين بخط بياني:

بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال الرسم البياني:

مثال:



تعيين مجموعة تعريف التابع بهذه الطريقة:

نرسم عمودين على محور الفواصل وذلك من بداية ونهاية الخط البياني للتابع، فتكون مجموعة التعريف هي المجال المحصور بين هذين العددين (كما في الرسم أعلاه)

$\longleftarrow$ مجموعة التابع $[-2,5]$

إيجاد أسلاف العدد بهذه الطريقة:

نرسم من العدد الذي نريد إيجاد أسلافه مستقيم يوازي محور الفواصل، النقاط التي يتقاطع فيها مع الخط البياني نسقطها على محور الفواصل (فتكون هي أسلافا العدد)

أسلاف العدد (3) هي: (3) و (-2)

* تعيين أكبر قيمة يبلغها التابع وأصغر قيمة منه:

أكبر قيمة يبلغها التابع هي (3) عندما:

$$f(-2) = f(3) = 3 \text{ أي } x = 3 , x = -2$$

* أصغر قيمة يبلغها التابع هي $(1-)$ عندما:

$$f(0) = f(5) = -1 \text{ أي } x = 5 , x = 0$$

2) التعيين بجدول:

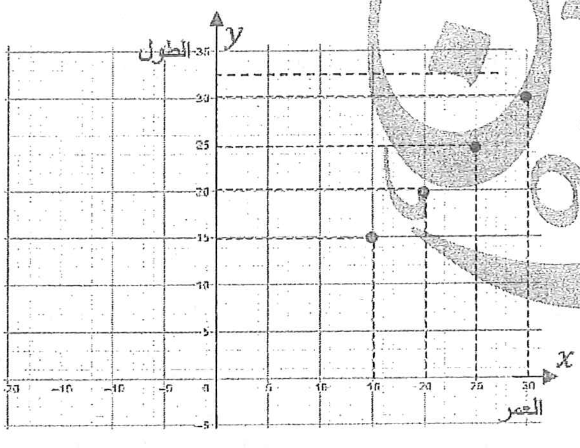
* بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال جدوله.
* الجدول يعرف التابع يربط كل عدد من السطر الأول عدداً من السطر الثاني.

مثال: الجدول المرافق يعرف تابعاً h يقرن طول شجرة بعمرها.

العمر	15	20	25	30
الطول	14	18	27	29

الجدول يتضح أن:

* عندما كان عمر الشجرة (15) عاماً كان طولها (14) متراً أي: $f(15) = 14$
* وعندما كان عمر الشجرة (25) عاماً كان طولها (27) متراً، أي: $f(25) = 27$



3) التعيين بإعطاء الصيغة:

بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال قاعدة تسمى (علاقة) الربط:

مثال: $h(x) = 3(x-1)^2$

احسب $h(1)$: اوجد صورة العدد (1)

نقول: $h(1) = 3(1-1)^2 = 0$

إيجاد أسلاف عدد ما بهذه الطريقة:

تساوي بين علاقة ربط التابع والقيمة التي نريد إيجاد أسلافها ونحل المعادلة (ونناقش حلول المعادلة)

مثال:

$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

عين أسلاف العدد (4) أي قيم x التي تحقق $f(x) = 4$

$3x^2 - 5x + 4 = 4$

$3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$

إما: $x = 0$ أو: $x = \frac{5}{3}$

أسلاف العدد 4 هما (0) $\left(\frac{5}{3}\right)$

ملاحظة:

* قد يأتي أسئلة من هذا البحث على شكل اختيار من متعدد أو إجابة صح أو خطأ حيث نناقش هذه الأسئلة فهمك لمفهوم التابع.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان التابع h المعرف بالقاعدة

$x \longrightarrow (x-2)(x+1)$

نعوض العدد (-1) في قاعدة ربط التابع:

① $k(-1) = 0$ صحيحة

② $k(-1) = 6$ خاطئة

③ $k(-1) = 2$ خاطئة

قل إذا كنت موافق أو غير موافق على الادعاء التالي واشرح رأيك:

f هو التابع: $x \longrightarrow (x+3)(x-4)$ صورة (-3) وفق هذا التابع (42)؟

الحل:

$(0)(-7) = 0 \leftarrow ((-3)+3)((-3)-4)$

إذاً الادعاء خاطئ.

مسألة (1): ليكن لدينا التابع المعرف بقاعدة الربط التالية:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

المطلوب:

1) اكتب التابع بالشكل $f(x) = (x-a)^2$

2) أوجد $f(1)$ ، $f(-2)$

3) أوجد أسلاف العدد (4)

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة.

الحل:

1)
$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

نحلل:
$$= (x-2)^2$$

2)
$$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 4$$
$$= 1 - 4 + 4 \longrightarrow = 1$$

إذاً $f(1) = 1$

$$f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 4$$
$$= 4 + 8 + 4 = 16$$

إذاً $f(-2) = 16$

3)
$$f(x) = 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 4$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$

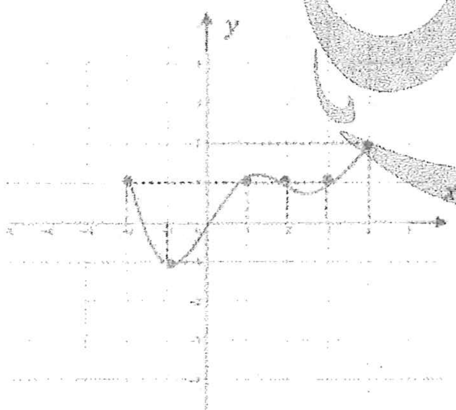
$$\begin{cases} \text{إما: } x = 0 \\ \text{أو: } x - 4 = 0 \longrightarrow x = 4 \end{cases}$$

إذاً أسلاف العدد (4): (0) ، (4)

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة أي أجد:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$(x-2) = 0$$
$$x = +2$$

مسألة (2): ليكن لدينا التابع المعرف بالحد البياني:



1) أوجد صورة كل من الأعداد: (1,0)

2) أوجد أسلاف العدد (1)

3) أوجد مجموعة تعريف التابع f

4) عين أصغر قيمة وأكبر قيمة يبلغها التابع.

تدرب (1): ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة:

$$f(x) = (x-2)(x+1)$$

1) أوجد صورة العدد (2)

2) أوجد $f(-1)$

3) ما هي قيم x التي تجعل قيمة التابع معدوم؟

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدرب (2):

الجدول الآتي يعرّف تابعاً f يربط بكل ساعة من ساعات أحد أيام شهر تموز درجة حرارة الطقس $(C°)$ في مدينة دمشق:

الساعة	12	1	2	3	4	5	6
درجة	36	37	38	39	38	37	36

1) ماذا تعني الكتابة $f(1) = 37$

2) أوجد $f(6)$

3) مثل بيانياً هذا التابع.

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

انتهت الوحدة الخامسة

الوحدة السادسة الاحتمال والإحصاء:

1) مفهوم الاحتمال:

* نقول عن تجربة أنها تجربة احتمالية عندما يكون لها عدد من النتائج أو الإمكانات لا نفرق بداية أي تلك النتائج هي التي ستقع.

* ونسمي مجموعة نتائج التجربة (فضاء العينة π)

* نسمي كل نتيجة لهذه التجربة بالحدث البسيط ومجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أي تجربة احتمالية يساوي (1).

* نسمي كل مجموعة من نتائج التجربة حدثاً، واحتمال كل حدث (A) عدد محصور بين الصفر والواحد.

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } (A)}{\text{عدد عناصر } (\pi)}$$ حيث $[0 \le p(A) \le 1]$

الحدث الغير قابل للتحقق نسميه الحدث المستحيل واحتماله يساوي الصفر ونرمز له بـ $(\emptyset)$ فيكون $[p(\emptyset) = 0]$

* الحدث الذي لا بد أن يتحقق نسميه الحدث الأكيد واحتماله يساوي الواحد ونرمز له بـ (π) فيكون $[p(\pi) = 1]$

* احتمال الحدث (D) الدال على وقوع الحدثين (B, A) معاً: $P(D) = P(A).P(B)$

* احتمال الحدث (C) الدال على وقوع الحدثين على الأقل $(A$ أو $B)$ معاً: $P(C) = P(A) + P(B)$

مثال (1): نرمي حجر نرد متزن مرة واحدة ونسجل مجموعة النتائج الظاهرة:

1) أوجد فضاء العينة (π)

2) أوجد احتمال (A) الحدث الدال على سحب عدد فردي.

3) أوجد احتمال (B) الحدث الدال على سحب عدد زوجي.

4) أوجد احتمال ظهور عدد (n): $(1 \le n \le 6)$ ماذا نسمي هذا الحدث؟

5) أوجد احتمال ظهور عدد (m) : $(m > 6)$ ماذا نسمي هذا الحدث؟

الحل:

1) $\pi = \{1,2,3,4,5,6\}$

2) $A = \{1,2,5\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) $B = \{2,4,6\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ملاحظة: نسمي الحدثين A , B حدثان متعاكسان

4) $(1 \le n \le 6) \Leftrightarrow \pi \Longrightarrow P(\pi) = \frac{6}{6} = 1$

وهو الحدث الأكيد

5) $(m > 6) \Leftrightarrow \emptyset = [\quad] \Longrightarrow P(\emptyset) = \frac{6}{6} = 0$

وهو الحدث المستحيل.

---

2) أحداث متنافية وأحداث متعاكسة:

* نقول أن حدثين متنافيان إذا استحال تحققهما في آن معاً.

* نقول عن الحدث المعاكس لحدث A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A ونرمز له بـ $(\overline{A})$، ومجموع احتمالي حدثين متعاكسين يساوي $(1)\left[P(A) + P(\overline{A}) = 1\right]$

ملاحظة: الفرق بين الحدثين المتنافيان والمتعاكسان.

* **الحدثان المتنافيان يتحقق فيها الشرطان:**

1) تقاطعهما $(\emptyset)$ 2) اجتماعهما ليس (π)

* **الحدثان المتعاكسان يتحقق فيها الشرطان:**

1) تقاطعهما $(\emptyset)$ 2) اجتماعهما هو (π)

مثال (2): في تجربة الدولاب المرافق:

ندور الدولاب حتى يتوقف عند السهم:

1) ارسم شجرة الإمكانات وضع الاحتمالات على فروعها.

2) الحدث A: ظهور الرقم (1).

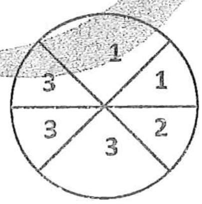
الحدث B: ظهور عدد زوجي.

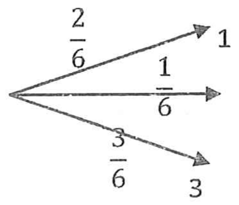
الحدث C: ظهور عدد أكبر من 1.

هل B, A متنافيان أو متعاكسان ولماذا؟

هل C, A متنافيان أو متعاكسان ولماذا؟

الحل:





$\pi = [1,2,3]$

2) $A = [1] \quad , B[2] \, , C[2,3]$

* إن B, A متنافيان وليس متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما ليس (π)

$P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \neq 1$

* إن A, C متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما هو (π).

$P(A) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$

مثال (3): نلقي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة نعرف الأحداث:

T: ظهور الوجه ذات الكتابة

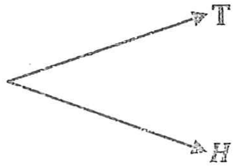
H: ظهور الوجه ذات الشعار.

1) راسم شجرة الإمكانات

2) H, T حدثان متعاكسان لماذا؟ احسب احتمال T ثم احتمال H بطريقتين.

الحل:

1)



2) إن H, T متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما هو (π)

$P(T) = \frac{1}{2}$

حساب احتمال H:

طريقة (1): $P(H) = \frac{1}{2}$

طريقة (2): لأن H, T متعاكسان $P(T) + P(H) = 1$

$\frac{1}{2} + P(H) = 1$

$P(H) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

التجارب العشوائية المركبة:

نقول عن تجربة عشوائية أنها مركبة إذا كانت تتم على أكثر من مرحلة (مرحلتين وأكثر).

* على شجرة الإمكانات لتجربة عشوائية نسمي فرعين متتاليين مساراً.

* احتمال حدث في نهاية أي مسار يساوي جداء ضرب احتمالات المسار.

مثال (3): صندوق يحوي (3) كرات بيضاء اللون (W) و (5) كرات سوداء اللون (B) نسحب كرة من الصندوق عشوائياً ثم نضيفها إلى الصندوق ثم نسحب منه كرة مرة ثانية ونسجل لوني الكرتين المسحوبتين.

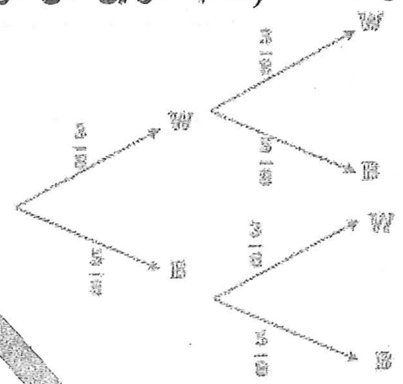
1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها باحتمالات النتائج.

2) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين بيضاويتين).

3) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين من ذات اللون)

4) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين من لونين مختلفين)

الحل: 1)



(W,W)

(W,B)

(B,W)

(B,B)

2) سنرمز للحدث المطلوب بـ A:

$$P(A) = P(W,W) = P(W).P(W) = \frac{3}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

3) سنرمز للحدث المطلوب بـ E:

$$P(E) = P(W,W) = P(B,B)$$
$$= P(W).P(W) + P(B).P(B)$$
$$= \frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}$$
$$= \frac{9}{64}+\frac{25}{64} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

4) سنرمز للحدث المطلوب بـ (F):

$$P(F) = P(W,B) = P(B,W)$$
$$= P(W).P(B) + P(B).P(W)$$
$$= \frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}$$
$$= \frac{15}{64}+\frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

ملاحظة: يمكن حل الطلب (4) بملاحظة أن الحدثين E , F متعاكسين أي:

$$P(E) + P(F) = 1$$

$$\frac{34}{64} + P(F) = 1 \Rightarrow P(F) = 1 - \frac{34}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{64}$$

مثال (4): الجدول التالي يبين مجموعة من الطلاب عددهم (50) (ذكور وإناث) والتي تلعب أو لا تلعب كرة السلة.

	ذكور M	إناث F
ممن يلعبون كرة سلة L	**18**	**6**
ممن لا يلعبون كرة السلة `L	**12**	**14**
المجموع	**30**	**20**

نسأل عشوائياً أحد الطلبة:

1) ما احتمال أن يكون ذكر، ما احتمال أن يكون أنثى.

2) ما احتمال أن يكون ممن يلعبون كرة السلة.

3) ما احتمال أن يكون يلعب كرة سلة ومن الذكور.

4) نعلم أنها طالبة، ما احتمال أنها لا تلعب كرة السلة.

5) أوجد شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

الحل:

1)
$$P(M) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$
$$P(F) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

2)
$$P(L) = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

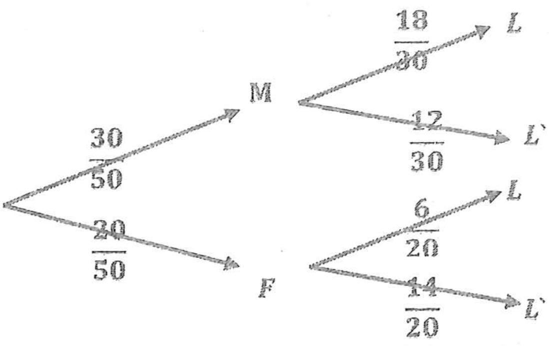
3) D: حدث أن يكون يلعب كرة السلة من الذكور

$$P(D) = \frac{30}{50}\times\frac{18}{30} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$$

بما أنها طالبة (F) يصبح فضاء عينة F:

4)
$$P(L') = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

5)



(M,L)

$(M,L`)$

(F,L)

$(F,L`)$

الوسيط والربيعات:

تذكر:

* **المدى (E):** هو الفرق بين أكبر مفردات العينة وأصغرها
* **المتوسط الحسابي** $\overline{x}$ هو ناتج جمع المفردات تقسيم عددها
* **الوسيط (D):** بعد ترتيب المفردات تصاعدياً يمكن تحديد رتبة الوسيط:

1) إذا كان عدد المفردات (n فردي)
فإن مكان الوسيط يعطى بالعلاقة

$$\frac{n+1}{2}$$

2) إذا كان عدد المفردات (n زوجي)
فإن مكان المفردتين الوسيطتين يعطى بالعلاقة:

$$\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right)$$

ملاحظة لإيجاد الربيعات:

الربيع الثاني: $Q_2 = D$:

الربيع الأول Q_1 (وسيط النصف الأول) (الأدنى)

الربيع الثالث Q_3 (وسيط النصف الثاني) (الأعلى)

مثال (1): البيان الإحصائي التالي يدل على درجات عدد من الطلاب:

$$\{6,7,9,9,9,10,12,12,14,15\}$$

1) احسب مدى هذه الدرجات.
2) احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.
3) ما هي الدرجة الوسيط، أوجد الربيع الأول والثاني.

الحل: المفردات مرتبة

$$\underbrace{6,7,9,9,(9}\,,\underbrace{10),12,\boxed{12},14,15}$$

(1 $E = 15 - 6 = 9$

(2

$$\overline{x} = \frac{6+7+9+9+9+10+12+12+14+15}{10}$$

$$= \frac{103}{10} = 10.3$$

$$n = 10\begin{Bmatrix} \dfrac{n}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{n}{2} + 1 = 6 \end{Bmatrix}$$

$$D = \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$Q_2 = D = 9.5$$

حساب Q_1 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 5 \Longrightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Longrightarrow Q_1 = 9$$

حساب Q_2 : عدد مفردات النصف الثاني.

$$n = 5 \Longrightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Longrightarrow Q_3 = 12$$

مثال (2): البيان الإحصائي التالي يبين عدد حالات الإسعاف لعدد من المشافي

$$\{2,8,4,11,16,7,19,3,11\}$$

1) احسب المدى والمتوسط الحسابي.
2) احسب الوسيط والربيع الأول والثالث.

الحل: نرتب المفردات تصاعدياً

(1 $\underbrace{2,3,4,7},\boxed{8},\underbrace{11,11,16,19}$

$$E = 19 - 2 = 17$$

$$\overline{x} = \frac{2+3+4+7+8+11+11+16+19}{9}$$

$$= \frac{81}{9} = 9$$

$$n = 9 \Longrightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Longrightarrow Q_2 = D = 8$$

حساب Q_1 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 4\begin{Bmatrix} \dfrac{n}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{n}{2} + 1 = 3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow Q_1 = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

حساب Q_3 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 4\begin{Bmatrix} \dfrac{n}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{n}{2} + 1 = 3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow Q_3 = \frac{11+16}{2} = 13.5$$

انتهت الوحدة السادسة

مؤسسة المتفوقين التربوية الدورة المكثفة ٢٠٢١

الثالث الاعدادي

المراجعة المكثفة في

الهندسة

مراجعة نموذجية شاملة للمنهاج تساعد الطالب على فهم وتثبيت المعلومات

من خلال عرض منظم ومترابط لأفكار الكتاب غني بالأسئلة والتدريبات الامتحانية

إعداد المدرس:

أيهم تميم - رام عبدو - لؤي المدني

الاسئلة والملاحظات التي تعطى داخل الصف غير موجودة في النوطة

الوحدة الأولى : النسب المثلثية لزاوية حادة

أولاً: التناسب وخواصه

1- التناسب: هو مساواة بين نسبتين أو أكثر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث الحدود الأربعة غير معدومة.

نسمي a و d : طرفي التناسب ، b و c : وسطي التناسب

2- خواص التناسب:

الخاصة	استخدامها
1- خاصة الضرب التقاطعي: (جداء الطرفين = جداء الوسطين)	• لحساب مجهول في تناسب علم فيه ثلاث حدود • لحساب مجهول متكرر في تناسب علم فيه حدين
2- إذا ثبتنا البسوط وجمعنا (أو طرحنا) كل بسط إلى مقامه الموافق نحصل على تناسب جديد محقق. 3- إذا ثبتنا المقامات وجمعنا (أو طرحنا) كل مقام إلى بسطه الموافق نحصل على تناسب جديد	• لحساب مجهولين في تناسب علم فيه حدين عند تحقق الشرطين: 1- وجود المجهولين في نسبة واحدة 2- وجود علاقة جمع أو طرح بينهما • في المسائل الكلامية التي تحوي كلمة نسبة.
4- إذا بادلنا الطرفين أو الوسطين نحصل على تناسب جديد.	• لجعل المجهولين في نسبة واحدة حتى نتمكن من استخدام الخاصتين السابقتين
5- إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد .	• اختر الإجابة الصحيحة أو صح أو خطأ

تمرين (1): مثلث ABC قائم في $\hat{B}$ فيه $\frac{\hat{A}}{\hat{C}} = \frac{2}{3}$ احسب قياس كلا من $\hat{C}$ و $\hat{A}$

الحل:بما أن مجموع زوايا المثلث $180°$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{A} + 90° + \hat{C} = 180°$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180° - 90° \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 90°$$

لدينا $\frac{\hat{A}}{\hat{C}} = \frac{2}{3}$ نثبت المقامات ونجمع كل مقام إلى البسط الموافق

$$\frac{\hat{A} + \hat{C}}{\hat{C}} = \frac{2 + 3}{3}$$

$$\frac{90}{\hat{C}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \hat{C} = \frac{90 \times 3}{5} = 54°$$

بما أن $\hat{A} + \hat{C} = 90°$

$$\Rightarrow \hat{A} + 54° = 90° \Rightarrow \hat{A} = 90 - 54° = 36°$$

إذاً : $\hat{A} = 36°$ ، $\hat{C} = 54°$

تمرين (2): إذا كان $\frac{b}{3} = \frac{a}{2}$ وكان $a + b = 15$ احسب a و b

الحل:

لدينا $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \xrightarrow{\text{نبدل بين الوسطين}} \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

نثبت البسوط ونجمع كل بسط إلى مقامه الموافق:

$$\frac{a}{b + a} = \frac{2}{3 + 2} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{15 \times 2}{5} = 6$$

لدينا $a + b = 15 \Rightarrow 6 + b = 15 \Rightarrow b = 15 - 6 = 9$

إذاً: $a = 3$ و $b = 9$

تمرين (3): جد عددين موجبين فرقهما 4 ونسبتهما $\left(\frac{4}{3}\right)$

الحل:

نفرض العدد الكبير: x العدد الصغير: y

فرقهما (4) : $x - y = 4$ نسبتهما: $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

نثبت المقامات ونطرح كل مقام من البسط الموافق له:

$$\frac{x - y}{y} = \frac{4 - 3}{3} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 12$$

لدينا: $x - y = 4 \Rightarrow x = 4 + 12 = 16$

إذاً: العدد الكبير: 16 العدد الصغير: 12

تدرب 1: يزيد عمر خالد على عمر أحمد بمقدار 3 سنوات، إذا علمت أن نسبة عمريهما $\frac{5}{4}$ احسب عمر كل منهما.	تدرب 2 : صندوق فيه 30 كرة صفراء وحمراء، نسبة الكرات الحمراء إلى الصفراء $\frac{3}{2}$ ، احسب عدد الكرات الحمراء والكرات الصفراء

ملاحظات هامة للحل:

....

....

....

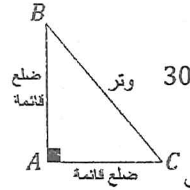
....

....

....

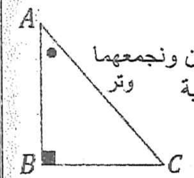
ثانيا: النسب المثلثية لزاوية حادة

1- تذكرة في المثلث القائم:



1. مبرهنة الزاوية $30°$: الضلع المقابلة للزاوية $30°$ تساوي نصف طول الوتر.
2. عكس مبرهنة الزاوية $30°$: إذا كانت إحدى الأضلاع القائمة تساوي نصف طول الوتر فالزاوية المقابلة لتلك الضلع تساوي ($30°$)
3. المتوسط المتعلق بالوتريساوي نصف طول الوتر
4. جداء الضلعين القائمتين = جداء الوتر بالارتفاع المتعلق به
5. مبرهنة فيثاغورس : ^{2}(الوتر)=^{2}(ضلع قائمة) + ^{2}(ضلع قائمة)

2- تذكرة في كيفية إثبات أن المثلث قائم:



1. عكس مبرهنة فيثاغورس:
*نربع أطول ضلع * نربع طولي الضلعين الباقيتين ونجمعهما
*إذا تساوت القيمتين السابقتين فالمثلث قائم في الزاوية المقابلة لأطول ضلع
2. إذا مرت دائرة من رؤوس مثلث وكان أحد أضلاعه قطرفيها فالمثلث قائم في الزاوية المقابلة للقطر

3-النسب المثلثية لزاوية حادة: ((في المثلث القائم حصراً))

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC} \quad ((\text{جيب}))$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} \quad ((\text{تجيب}))$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AB} \quad ((\text{ظل}))$$

ملاحظة هامة جداً:

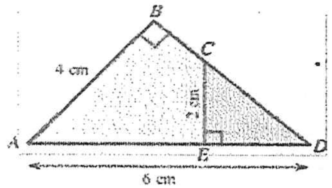
النسب المثلثية لزاوية حادة ليس لها واحدة قياس وهي مقادير موجبة تماماً وجيب وتجيب زاوية حادة فقط هما عددان محصوران بين الصفر والواحد. $0 < \cos\theta < 1$, $0 < \sin\theta < 1$

تمرين : في الشكل المرافق:

اكتب عبارة $\sin\widehat{D}$ في كل من المثلثين القائمين ABD , CED.

1- استنتج الطول CD

2- احسب الأطوال BC, AE, ED



الحل:

1- في المثلث ABD:

$(1)\ \ldots\ldots \sin\widehat{D} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

في المثلث CDE: $\sin\widehat{D} = \frac{CE}{CD} = \frac{2}{CD}\ \ldots\ldots (2)$

2- من (1) و (2) وبما أن $\widehat{D}$ مشتركة بين المثلثين ABD و CDE:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{CD} \Rightarrow CD = 3\ cm$$

3- حساب ED: من المثلث CDE القائم وحسب مبرهنة فيثاغورس:

$$(CD)^2 = (EC)^2 + (ED)^2 \Rightarrow (3)^2 = (2)^2 + (ED)^2$$

$$\Rightarrow 9 = 4 + (ED)^2 \Rightarrow (ED)^2 = 9 - 4 \Rightarrow (ED)^2 = 5$$

بجذر الطرفين $\Rightarrow ED = \sqrt{5}\ cm$

حساب AE: $AE = AD - ED = 6 - \sqrt{5}\ cm$

حساب BC: من المثلث ABD القائم وحسب مبرهنة فيثاغورس:

$$(BD)^2 + (BA)^2 = (AD)^2 \Rightarrow (BD)^2 + (4)^2 = (6)^2$$

$$\Rightarrow (BD)^2 + 16 = 36 \Rightarrow (BD)^2 = 36 - 16$$

$$\Rightarrow (BD)^2 = 20$$

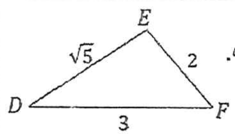
بجذر الطرفين $\Rightarrow BD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ cm$

ولدينا: $BC = BD - CD \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} - 3\ cm$

تدرب 1 : في الشكل المرافق:

1- أثبت أن المثلث FED قائم وعين وتره.

2- احسب النسب المثلثية للزاوية $\widehat{F}$



تدرب 2: ABC مثلث قائم في A احسب:

1- الطول AB في حالة $BC = 7\ cm$ و $\sin\widehat{C} = 0.4$

2- الطول AC في حالة $AB = 8\ cm$ و $\tan\widehat{B} = 0.5$

4- علاقات مهمة بين النسب المثلثية:

$\sin\theta = \cos(90-\theta)$ $\cos\theta = \sin(90-\theta)$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
زاويتا الوتر في المثلث القائم حادتان ومتتامتان (مجموعهما 90°) $\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$ $\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$	تستخدم عند معرفة نسبتين ونريد حساب الثالثة	تستخدم عند معرفة sin ونريد حساب cos أو بالعكس

ملاحظة: إذا أعطانا tan وطلب حساب sin و cos: نرسم مثلث قائم بمعرفة طولي الضلعين القائمتين من tan نحسب طول الوتر ثم نحسب sin و cos.

تمرين 1: لتكن A زاوية حادة و $\cos A = \frac{4}{5}$ احسب $\sin A$ و $\tan A$

الحل: نعلم أن

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 A + \frac{16}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{25-16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{9}{25}$$

بجذر الطرفين $\Rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

نعلم أن

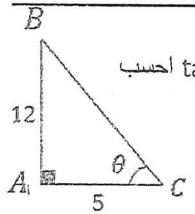
$$\tan\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$$

$$\Rightarrow \tan\hat{A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

تمرين (2):

إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان $\tan\theta = \frac{12}{5}$ احسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$

الحل: نرسم مثلث قائم وليكن ABC حيث:



$\tan\theta = \frac{12}{5}$ $\Rightarrow$ مقابل θ $= 12$ ، مجاور θ $= 5$

نحسب AC حسب مبرهنة فيثاغورس:

$$\Rightarrow AC = 13$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13} \qquad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$$

تدرب: إذا كان A قياس زاوية حادة و $\sin\hat{A} = \frac{1}{2}$ احسب $\cos\hat{A}$ و $\tan\hat{A}$

5- النسب المثلثية للزوايا الشهيرة:

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ملاحظات هامة للحل:

....

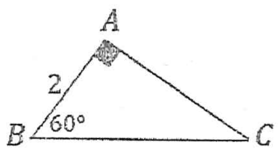
....

....

تمرين: تأمل الشكل المرافق ثم:

1- احسب الطول BC

2- احسب الطول AC



الحل:

1- $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{2}{BC}$

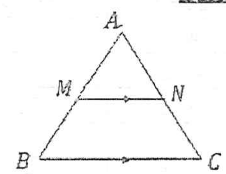
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 4\ cm$$

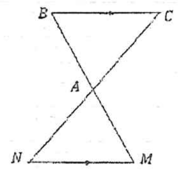
2- $\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AC}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}\ cm$$

الوحدة الثانية : مبرهنة النسب الثلاث

أولاً: مبرهنة النسب الثلاث ((مبرهنة تالس))





المستقيمان (CN) و(BM) مستقيمان متقاطعان في A والمستقيمان (MN) و(BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين AMN و ABC نستطيع كتابة تناسب بين أطوال الأضلاع المثلثين

A	M	N	$\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$
A	B	C	

عند كتابة جدول التناسب يجب مراعاة أنَّ النقاط التي تنتمي إلى مستقيم واحد تقع في عمود واحد.

متى نستخدم مبرهنة النسب الثلاث؟ وكيف نستخدمها؟

تستخدم مبرهنة النسب الثلاث:

1- عند وجود مستقيمين متقاطعين في نقطة ووجود مستقيمين متوازيين لا يمر أحدهما من نقطة تقاطع المستقيمين.

أي: ....

2- لحساب طول قطعة مستقيمة عند تحقق الشرط السابق

كيف يتم الاستخدام؟

1 يتم ذكر المستقيمين المتقاطعين وذكر المستقيمين المتوازيين وذكر المثلثين اللذين سنطبق عليهما المبرهنة.

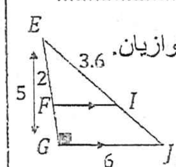
2- يتم كتابة تناسب بين أطوال أضلاع المثلثين مع مراعاة الترتيب ثم حساب الضلع المطلوب.

ملاحظة هامة في كتابة التناسب:

....

....

تمرين (1): في الشكل المرافق لدينا (FI) و (GJ) متوازيان.



احسب كلاً من الطولين EJ و FI

الحل:

المستقيمان (IJ) و(FG)متقاطعان في E والمستقيمان (FI) و(GJ) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين EFI و EGJ

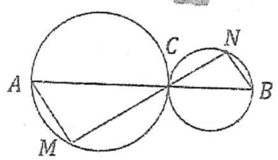
$$\frac{EF}{EG}=\frac{EI}{EJ}=\frac{FI}{GJ}\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{3.6}{EJ}=\frac{FI}{6}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{3.6}{EJ}\Rightarrow EJ=\frac{3.6\times5}{2}=9\ cm$$

$$\frac{2}{5}=\frac{FI}{6}\Rightarrow\frac{6\times2}{5}=\frac{12}{5}=2.4\ cm$$

تمرين (2): الدائرتان المتجاورتان قطراهما $[AC]$ و$[CB]$حيث:

$CB=4\ cm\ ,AC=6\ cm$



النقاط A و C و B على استقامة واحدة وكذلك النقاط M و C و N إذا علمت أن $AM=3\ cm$ احسب NB

الحل:

المثلث AMC قائم في M لأن المثلث AMC تمر من رؤوسه دائرة وأحد أضلاعه قطراً فيها. إذاً $(AM)\perp(MN)$ .... (1)

المثلث CNB قائم في N لأن المثلث CNB تمر من رؤوسه دائرة وأحد أضلاعه قطراً فيها. إذاً

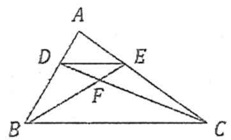
$(NB)\perp(NM)$ .... (2)

من (1) و (2) نجد: $(NB)//(AM)$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين CMA و CNB:

$$\frac{NB}{AM}=\frac{CB}{CA}=\frac{CN}{CM}\Rightarrow\frac{NB}{3}=\frac{4}{6}$$

$$NB=\frac{4\times3}{6}=2\ cm$$

تمرين (3): في الشكل المرافق المستقيمان (DE) و(BC) متوازيان. إذا علمت أن $BF=4\ cm\ ,DB=3\ cm\ ,AD=2$



1- اكتب تناسبين كل منهما يحوي النسبة $\frac{DE}{BC}$

2- استنتج أن $\frac{EF}{4}=\frac{2}{5}$ ثم احسب EF

الحل:

1- المستقيمان (EB) و(DC) متقاطعان في F والمستقيمان (DE) و(BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين FDE و FCB نجد:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{EF}{FB}=\frac{DF}{FC}\ ......\ (1)$$

المستقيمان (CE) و(BD) متقاطعان في A والمستقيمان (DE) و(BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث ففي المثلثين ADE و ABC نجد:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\ ......\ (2)$$

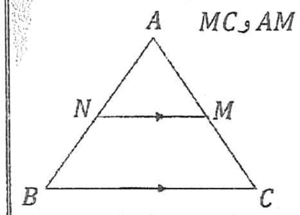
2- من (1) و (2) نجد أن:

$$\frac{EF}{FB}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{EF}{4}=\frac{2}{5}\Rightarrow EF=\frac{2\times4}{5}=\frac{8}{5}=1.6\ cm$$

تمرين (4): في الشكل المرسوم جانباً $(BC)//(NM)$

$AN=2\ ,MC=x+3\ ,AM=x-3\ ,NB=5$

احسب قيمة x ثم احسب طولي الضلعين AM وMC



الحل:

المستقيمان (BN) و (CM) متقاطعان في A والمستقيمان (MN) و(BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين ANM و ABC نجد:

$$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{NM}{BC}\Rightarrow\frac{2}{2+5}=\frac{x-3}{x-3+x+3}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{7}=\frac{x-3}{2x}$$

$$\Rightarrow 7(x-3)=2\times2x\Rightarrow 7x-21=4x$$

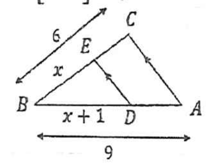
$$\Rightarrow 7x-4x=21$$

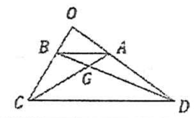
$$\Rightarrow 3x=21\Rightarrow x=\frac{21}{3}=7$$

$$AM=x-3\Rightarrow AM=7-3=4\ cm$$

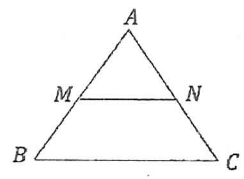
$$MC=x+3\Rightarrow MC=7+3=10\ cm$$

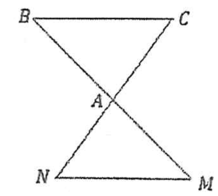
تدرب (2)	تدرب (1)
في الشكل المرافق المستقيمان (AC) و(DE) متوازيان. 1- احسب قيمة x 2- احسب طول القطعة المستقيمة $[BD]$	$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و$[DC]$ نعلم أن: $GA = 4\,cm, GC = 6\,cm, OB = 8\,cm$ 1- وازن النسبتين $\frac{OB}{OC}, \frac{GA}{GC}$ 2- استنتج الطول BC





ثانياً: عكس مبرهنة النسب الثلاث





إذا تحقق أن $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وكانت النقاط B, M, A على المستقيم (MB) متماثلة بالتركيب مع النقاط C, N, A على المستقيم (NC) فحسب عكس مبرهنة النسب الثلاث يكون: $(MN)//(BC)$.

متى وكيف تستخدم عكس مبرهنة النسب الثلاث؟؟

تستخدم عكس مبرهنة النسب الثلاث

لإثبات توازي مستقيمين من عدمه عند وجود مستقيمين متقاطعين في نقطة ومعرفة أطوال الأضلاع.

كيف يتم الاستخدام؟

1- نحسب نسبة طولي قطعتين مستقيمتين من المستقيم الأول

2- نحسب نسبة طولي قطعتين مستقيمتين من المستقيم الثاني "شرط تركيب النقاط على المستقيمين"

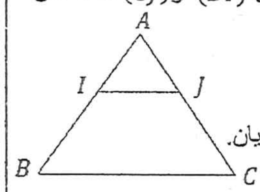
3- إذا تساوت النسبتين السابقتين فالمستقيمين (الغير مشمولين في النسبتين السابقتين) متوازيين

إذا لم تتساوى النسبتين السابقتين فالمستقيمين غير متوازيين "متقاطعين"

تمرين (1): في الشكل المجاور المستقيمان (BI) و(CJ) متقاطعان في A

$JC = 1\,cm, AC = 1.6\,cm$
$, AB = 4\,cm, AI = 1.5\,cm$

أثبت أن المستقيمان (IJ) و(BC) متوازيان.



الحل:

$AJ = AC - JC \Rightarrow AJ = 1.6 - 1$

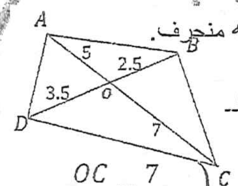
$\Rightarrow AJ = 0.6\,cm$

بما أن النقاط A وB وI على (AB) متماثلة بالترتيب مع النقاط A وC وJ على AC

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{AI} = \frac{4}{1.5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \\ \frac{AC}{AJ} = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AJ}$$

فالمستقيمان (IJ) و(BC) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

تمرين (2): أثبت أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.



ملاحظة هامة:

بما أن A, C, O على المستقيم (AC) متماثلة بالترتيب مع النقاط B, D, O على المستقيم (DB) و

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OC}{OA} = \frac{7}{5} \\ \frac{OD}{OB} = \frac{3.5}{2.5} = \frac{7}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$$

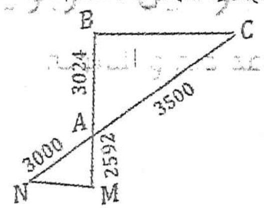
فالمستقيمان (AB) و(DC) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث فالرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

تمرين (3): (BM) و(CN) متقاطعان في A

1- باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي أوجد GCD للعددين 2592 و 3024.

2- اختزل الكسرين $\frac{3000}{3500}, \frac{2592}{3024}$

3- قل إن كان المستقيمان (MN) و(BC) متوازيان أم متقاطعان مع شرح اجابتك.



الحل:

-1

العدد الكبير	العدد الصغير	العدد الكبير – العدد الصغير
3024	2592	432
2592	432	2160
2160	432	1728
1728	432	1296
1296	432	864
664	432	432
432	432	0

$\Rightarrow GCD(3024,2592) = 432$

-2 $\frac{3000}{3500} = \frac{6}{7}, \frac{432 \div 2592}{432 \div 3024} = \frac{6}{7}$

-3 بما أن $\frac{2592}{3024} = \frac{3000}{3500}$ وهي تمثل $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

فالمستقيمان (MN) و(BC) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

ثالثاً: التشابه

قواعد التشابه : اذا تناسبت اطوال الاضلاع المتقابلة في مثلثين قلنا ان المثلثين متشابهين ويكون احدهما مكبر او مصغر أو مطابق للاخر.

نسبة التشابه (K): (معامل التكبير او معامل التصغير) هي نسبة طولي ضلعين متقابلين من التشابه

ملاحظة هامة جدا :

انتبه:

-اذا كانت $K > 1$ يؤول التشابه الى تكبير .

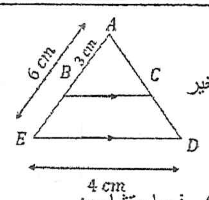
-اذا كانت $0 < K < 1$ يؤول التشابه الى تصغير .

-اذا كانت $K = 1$ يؤول التشابه الى تطابق .

خواص التشابه: في تشابه نسبته $K > 0$

1-تضرب الاطوال بالعدد (K)

مثال :المثلثان AED وABC متشابهان، احسب نسبه التصغير ثم احسب الطول $[BC]$



الحل: بما ان $(ED)//(BC)$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث فان اطوال الاضلاع المتقابلة متناسبة في المثلثين AED و ABC فهما متشابهين

$k = \frac{AB}{AE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

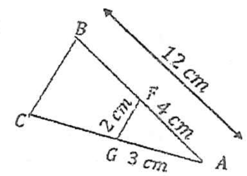
$[BC] = K \times [ED]$

$= \frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow BC = 2cm$

2- نضرب محيط المضلع بالعدد (K)

مثال : اذا علمت ان المثلثين AFG و ABC متشابهين احسب محيط المثلث ABC.

الحل : بما ان المثلثين AFG و ABC متشابهين



$\Rightarrow p(ABC) = K \times P(AFG)$

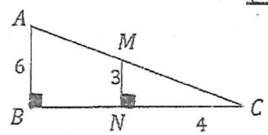
$K = \frac{AB}{AF} = \frac{12}{4} = 3$

$P(AFG) = AG + GF + FA$

$= 4 + 3 + 2 = 9\ cm$

$\Rightarrow P(ABC) = 3 \times 9 = 27cm$

3- نضرب مساحة السطح بالعدد (K^2)



مثال : المثلث ABC تكبير المثلث MNC احسب نسبة التكبير ثم احسب مساحة المثلث ABC

الحل :

العمودان على مستقيم واحد متوازيان

$(BC)//(MN) \Leftarrow \begin{bmatrix} MN \perp BC \\ AB \perp BC \end{bmatrix}$

ومنه فاطوال الاضلاع المتقابلة في المثلثين ABC و MNC متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث فهما متشابهين والمثلث ABC هو تكبير المثلث MNC

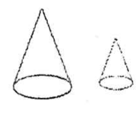
$S(ABC) = K^2 \times S(MNC)$

$K = \frac{AB}{MN} = \frac{6}{3} = 2$

$S(MNC) = \frac{MN \times NC}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow S(ABC) = 4 * 6 = 24\ cm^2$

4- نضرب حجم المجسم بالعدد (k^3)



مثال : اذا علمت ان المخروطين المجاورين متشابهين وحجم المخروط الصغير ($3\ cm^3$) ونسبة التكبير 2 احسب حجم المخروط الكبير

الحل :

ليكن (V') حجم المخروط الكبير و (V)حجم المخروط الصغير

$V' = K^3 * V$

$\Rightarrow V' = (2)^3 * 3 = 8 * 3 = 24\ cm^3$

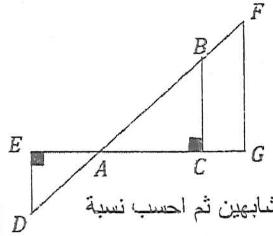
التشابه يحافظ على قياسات الزوايا للمضلعين المتشابهين .

مثال : اختر الاجابة الصحيحة :

اذا ضربنا اطوال اضلاع المثلث بنسبة التشابه (K=2) فان زواياه :

a- تضرب بالعدد   b- $\boxed{\text{لا تتغير}}$ c- تضرب بالعدد 4

مسألة شاملة :



في الشكل المرافق لدينا :

$AD = 5\ cm, AC = 6\ cm$,

$AB = 10\ cm, AG = 9\ cm$,

$BF = 5\ cm$, $BC = 8\ cm$

1-اثبت ان المثلثين (ABC) و(AED)متشابهين ثم احسب نسبة التصغير

2-احسب محيط ومساحة المثلث (AED)

3-اثبت ان الرباعي (BCGF) شبه منحرف ثم احسب مساحته

4-احسب النسب المثلثية للزاوية ($B\hat{A}C$)

الحل : 1-

$\begin{matrix} BC \perp CE \\ DE \perp CE \end{matrix} \Rightarrow (ED) \parallel (BC)$ لان العمودان على مستقيم واحد متوازيان

ومنه فاطوال الاضلاع المتقابلة في المثلثين ABC و AED متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث فهما متشابهان

$K = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2- بما ان ABC و AED متشابهان :

$P(AED) = K \times P(ABC)$

$P(ABC) = AB + BC + CA = 10 + 8 + 6 = 24\ cm$

$\Rightarrow P(ABC) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\ cm$

$S(AED) = K^2 \times S(ABC)$

$S(ABC) = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = \frac{48}{2} = 24\ cm^2$

$\Rightarrow S(AED) = \frac{1}{4} \times 24 = 6cm^2$

3- حتى يكون BCGF شبه منحرف يجب ان يكون $(FG)//(BC)$

بما أن النقاط F, B, A على المستقيم (AF) متماثلة بالترتيب مع النقاط A, C, G على المستقيم (AO)

$\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AO}$ فالمستقيمين (BC) و(FG) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث فالرباعي $BCGF$ شبه منحرف

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{AC}{AG} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{AF} = \frac{10}{AB+BF} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

<u>مساحة شبه المنحرف</u> = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى+القاعدة الصغرى})}{2} \times$ الارتفاع

$$\Rightarrow S(BCGF) = (\frac{BC + GF}{2}) \times GC$$

<u>حساب GF</u>: من المثلثين ABC و AFG لدينا $(FG)//(BC)$

فحسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{8}{FG} \Rightarrow FG = \frac{9 \times 8}{6} = 12\ cm$$

<u>حساب GC</u>: $GC = AG - AC = 9 - 6 = 3\ cm$

$$S(BCGF) = (\frac{8 + 12}{2}) \times 3 = 10 \times 3 = 30\ cm^2$$

-4 $\cos B\hat{A}C = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \sin B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

الوحدة الثالثة: الزوايا والمضلعات في الدائرة والمضلعات المنتظمة

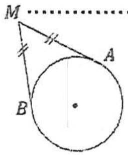
أولاً: مفاهيم أساسية في الدائرة:

1. يرمز للدائرة بالرمز $c(o,R)$ حيث :
   - O: مركز الدائرة ، R : نصف قطرها.
   - مثال : $c(A,3)$ دائرة مركزها A ونصف قطرها 3
2. أنصاف أقطار الدائرة متساوية أي $OA = OB = R$
3. القطر يقسم الدائرة إلى قوسين طبوقين قياس كل منهما $180°$
4. المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس .

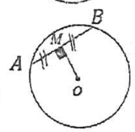
ملاحظة هامة :

....

....



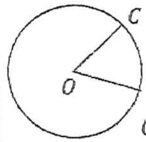
5. من نقطة M خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها وتكون المسافتين بين M ونقطتي التماس متساويتين أي $MA = MB$



6. المستقيم المار من مركز دائرة عمودياً على وتر فيها ينصف ذلك الوتر .
7. المستقيم المار من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يكون عمودي على ذلك الوتر .
8. دائرة نصف قطرها R عندئذ تكون مساحتها S ومحيطها P :

$$P = 2\pi R \text{ ، } S = \pi R^2$$

ثانياً : الزوايا في الدائرة :



-الزاوية المركزية :

هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة وضلعيها أنصاف أقطار مثال : $C\hat{O}B$ مركزية قوسها CB

ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المركزية

1- قياس الزاوية المركزية في دائرة يساوي قياس التوس المقابل لها والعكس صحيح

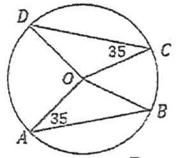
2- الزوايا المركزية المتساوية تحصر أقواساً متساوية

3- إذا تساوى وتران في الدائرة تساوى قوساهما والعكس صحيح.

قوساهما متساويان ⟺ زاويتان مركزيتان متساويتان ⟺ وتران متساويان

4- الزاوية المركزية المنعكسة : المركزية $- 360 =$ المركزية المنعكسة

تمرين (1) في الشكل المجاور لدينا:$o\hat{C}D = o\hat{A}B = 35°$



والمطلوب:

1- احسب قياس الزاويتين $A\hat{O}B, D\hat{O}C$.

2- أثبت أن $[AB] = [DC]$ و $CD = AB$

الحل:

1- المثلث DoC متساوي الساقين لأن $oD = oC = R$

وبما أن زاويتا القاعدة في المثلث متساوي الساقين متساويتان

$$o\hat{C}D = o\hat{D}C = 35°$$

ومنه $D\hat{O}C = 180° - (o\hat{C}D + o\hat{D}C)$

$= 180° - 70°$

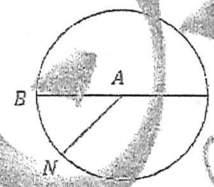
$= 110°$ (لأن مجموع زوايا المثلث $180°$)

ونحسب $A\hat{O}B$ بنفس الطريقة فنجد أن $A\hat{O}B = 110°$

2- بما أن $D\hat{O}C = A\hat{O}B$ فإن: $DC = AB$ ومنه $[DC] = [AB]$

لأن الزوايا المركزية المتساوية تقابلها أقواس متساوية والأقواس المتساوية تحددها أوتار متساوية.

تمرين(2): في الشكل المجاور لدينا: $NC = 2NB$



احسب قياس كل من الزوايا

$N\hat{A}C, N\hat{A}C, B\hat{A}N$ المنعكسة

الحل:

بما أن $[BC]$ قطر في الدائرة فهو يقسمها إلى قوسين طبوقين كل منهما $180°$

لدينا:

$$NC + NB = 180° \Rightarrow 2NB + NB = 180°$$

$$\Rightarrow 3NB = 180°$$

$$\Rightarrow NB = 60°$$

$$\Rightarrow NC = 2 \times 60° = 120°$$

ومنه : $B\hat{A}N = NB = 60°$

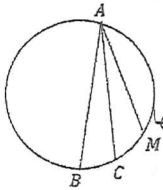
$$N\hat{A}C = NC = 120°$$

لأن كل زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها

المنعكسة$N\hat{A}C = 360° - N\hat{A}C$

المنعكسة $N\hat{A}C = 360° - 120° = 240°$

الزاوية المحيطية:



هي الزاوية التي:

- يقع رأسها على محيط الدائرة
- ضلعيها عبارة عن وترين في الدائرة أو وتر وقطر فيها

مثال: $M\hat{A}C$ المحيطية قوسها MC

$M\hat{A}B$ محيطية وقوسها MB

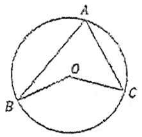
ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المحيطية

1- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها والعكس صحيح

2- الزوايا المحيطية التي تحصر القوس ذاته متساوية

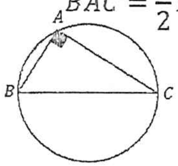
3- الزوايا المحيطية المتساوية تحصر أقواسا متساوية والعكس صحيح

4- الزاوية المحيطية في دائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس



أي:

$$B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C \Leftarrow \begin{cases} B\hat{O}C \text{ مركزية تحصر } BC \\ B\hat{A}C \text{ محيطية تحصر } BC \end{cases}$$



5- الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف دائرة قائمة

خوارزمية التفكير في حل مسائل الزوايا

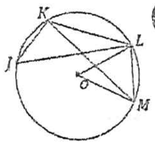
....

....

....

....

تمرين (1): M, K, J, L نقاط من دائرة مركزها (o)



$$k\hat{J}L = L\hat{O}M = 52°$$

احسب قياسات زوايا المثلث LMK

الحل:

حساب قياس $L\hat{M}K$

$$L\hat{M}K = K\hat{J}L = 52° \begin{cases} L\hat{M}K \text{ محيطية تحصر } KL \\ K\hat{J}L \text{ محيطية تحصر } KL \end{cases}$$

(الزوايا المحيطية التي تحصر القوس نفسه متساوية)

حساب قياس $L\hat{K}M$

$$L\hat{K}M = \frac{1}{2}L\hat{O}M = \frac{1}{2} \times 52° = 26° \begin{cases} LM \text{ محيطية تحصر } L\hat{K}M \\ LM \text{ مركزية تحصر } L\hat{O}M \end{cases}$$

(الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

حساب قياس $K\hat{L}M$

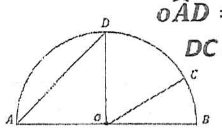
$$K\hat{L}M = 180° - (L\hat{M}K - L\hat{K}M)$$
$$= 180° - (52° + 26°) = 180 - 78$$
$$K\hat{L}M = 102°$$

(لأن مجموع زوايا المثلث $180°$)

تمرين (2):

C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها o وقطرها $[AB]$ تحققان:

$$o\hat{A}D = 45°, B\hat{o}C = 30°$$



1- احسب قياس الزاوية $D\hat{o}C$ وقياس القوس DC

2- مانوع المثلث ABD و CoD؟

الحل:

1- المثلث oAD متساوي الساقين لأن $oA = oD = R$ أي:

$o\hat{A}D = o\hat{D}A = 45°$ (زاويتا القاعدة متساويتان)

$$A\hat{o}D = 180° - (45° + 45°) = 180° - 90° = 90°$$

إذاً : $D\hat{o}B = 90°$

$$D\hat{o}C = D\hat{o}B - C\hat{o}B = 90° - 30° = 60°$$
$$DC = D\hat{o}C = 60°$$

(لأن القوس يقاس بقياس زاويته المركزية)

2- المثلث ADB:

$A\hat{D}B = 90°$ (لأنها محيطية تحصر قوس نصف دائرة فهي قائمة)

$$A\hat{B}D = 180° - (A\hat{D}B + D\hat{A}B)$$
$$= 180° - (90° + 45°)$$
$$= 180° - 135° = 45°$$

فالمثلث ABD قائم في D فيه زاويتان $D\hat{A}B$ و $D\hat{B}A$ متساويتان فهو متساوي الساقين أيضاً.

المثلث DoC:

$$D\hat{o}C = 60° \quad oC = oD = R$$

فهو متساوي الساقين فيه زاوية $60°$ ومنه يكون المثلث DoC متساوي الأضلاع.

تمرين (3):

في الشكل المجاور $c(o,R)$ فيها:

DA و DC مماسين للدائرة في A و C على الترتيب و $AB = 60°$ والمطلوب:

1- احسب قياسات زوايا المثلث ABC

2- أثبت أن المثلث DAC متساوي الأضلاع

الحل:

$B\hat{A}C = 90°$ (لأنها محيطية تحصر قوس نصف دائرة فهي قائمة).

$A\hat{C}B = \frac{1}{2}AB = 30°$ (لأن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

$$A\hat{B}C = 180° - (B\hat{A}C - B\hat{C}A)$$
$$\Rightarrow A\hat{B}C = 180° - (90° + 60°) = 30°$$

$[BA]$ قطر في الدائرة فهو يقسمها لقوسين طوقين كل منهما $180°$

$$AC = BAC - AB = 180° - 60° = 120°$$

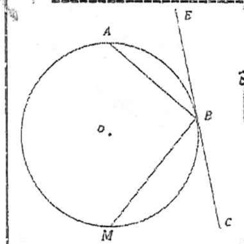
-2 $AC = BAC - AB = 180° - 60 = 120$

$$DAC = \frac{1}{2}AC = 60°$$

لدينا DC, DA مماسان مرسومان من نقطة خارج دائرة إذاً $[DA] = [DC]$

فالمثلث DAC فيه ضلعان متساويان و $D\hat{A}C = 60°$ فهو متساوي الأضلاع.

الزاوية المماسية



هي الزاوية التي تقع على محيط الدائرة ضلعيها عبارة عن وتر ومماس عند اطراف هذا الوتر (او قطر ومماس)

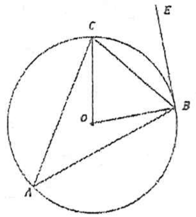
مثال : $A\hat{B}E$ مماسية قوسها AB

$M\hat{B}C$ مماسية قوسها BM

ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المماسية

1-قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

2-الزاوية المماسية في دائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس .



$$\begin{cases} BC \text{ مماسية قوسها } E\hat{B}C \\ BC \text{ مركزية قوسها } C\hat{O}B \end{cases}$$
$$E\hat{B}C = \frac{1}{2}C\hat{O}B \Leftarrow$$

3-الزاويتان المحيطية والمماسية اللتان تحصران نفس القوس متساويتان .

$$E\hat{B}C = B\hat{A}C \Leftarrow \begin{cases} BC \text{ مماسية قوسها } E\hat{B}C \\ BC \text{ محيطية قوسها } B\hat{A}C \end{cases}$$

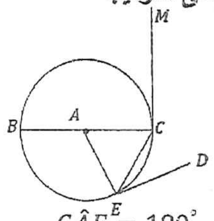
تمرين :

[BC] قطر في دائرة مركزها A

E نقطة من هذه الدائرة تحقق $B\hat{A}E = 120°$

(ED), (CM)مماسان للدائرة في E و C على الترتيب

1-احسب قياسات الزوايا



$B\hat{C}M, C\hat{E}D, C\hat{B}E, E\hat{C}B, C\hat{A}E$

2- ما طبيعة المثلثات AEC, CEB ,

الحل:

1-حساب $C\hat{A}E$

$$C\hat{A}E = 180° - B\hat{A}E = 180° - 120° = 60°$$

(لانهما تشكلان زاوية مستقيمة)

حساب $E\hat{C}B$:

$$E\hat{C}B = \frac{1}{2}E\hat{A}B = 60° \Leftarrow \begin{cases} EB \text{ محيطية تحصر } E\hat{C}B \\ EB \text{ مركزية تحصر } E\hat{A}B \end{cases}$$

(الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

حساب $C\hat{E}D$:

$$C\hat{E}D = \frac{1}{2}C\hat{A}E = 30° \Leftarrow \begin{cases} CE \text{ مماسية تحصر } C\hat{E}D \\ CE \text{ مركزية تحصر } C\hat{A}E \end{cases}$$

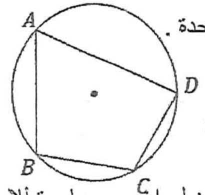
(الزاوية المماسية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس).

حساب $B\hat{C}M$:
$B\hat{C}M = 90^\circ$ (لان المماس MC عمودي على القطر BC في نقطة التماس C)

2-المثلث CEB: قائم في E لأن $C\hat{E}B = 90^\circ$
(محيطية تحصر قوس نصف دائرة فهي قائمة)

المثلث AEC: $AE = AC = R$ ، $C\hat{A}E = 60^\circ$
فالمثلث CAE متساوي الاضلاع لانه متساوي الساقين فيه زاوية قياسها 60° .

ثالثا [الرباعي الدائري]

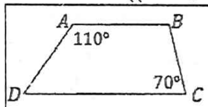


- هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة واحدة .
- مجموع زوايا اي مضلع رباعي 360° .
- كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان .
- قياس الزاوية الخارجية تساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة لمجاورتها .

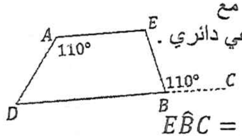
(الزاوية الخارجية محصورة بين ضلع وامتداد ضلع اخرى مجاورة للاولى)

[كيف نثبت ان الشكل رباعي]
((اربع نقاط تقع على دائرة واحدة))

اذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي كان الرباعي دائري
الرباعي $ABCD$ دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه

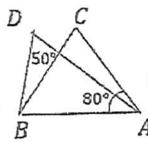


اذا تساوت زاوية خارجية في رباعي مع الزاوية المقابلة لمجاورتها كان الرباعي دائري .
مثال: هل الرباعي $ADBE$ دائري ؟



$E\hat{B}C = E\hat{A}D = 110^\circ$
تساوت زاوية خارجية لرباعي مع المقابلة لمجاورتها فالرباعي $ADBE$ دائري .

اذا تساوت زاويتان واقعتان في جهة واحدة وتحصران نفس القطعة المستقيمة فالرباعي دائري .
مثال: في الشكل المجاور لدينا :



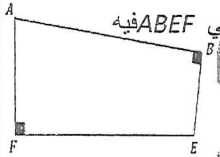
$AB = AC$ و $CA'B = 80^\circ$
هل النقاط C,D,B,A تقع على دائرة واحدة ؟
ACB متساوي الساقين فزاويتا القاعدة متساويتان

$$A\hat{C}B = A\hat{B}C = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50$$

ومنه $B\hat{D}A = A\hat{C}B$
هما تقعان في جهة واحدة بالنسبة ل $[AB]$ فالنقاط C,D,B,A تقع على دائرة واحدة .

ملاحظة هامة :

تمرين : في الشكل المرسوم جانبا لدينا الرباعي $ABEF$ فيه $FE=4$, $\hat{B} = \hat{F} = 90^\circ, FA = 3$ و



1-اثبت ان النقاط A,B,E,F تقع على دائرة واحدة
2-عين مركز هذه الدائرة واحسب نصف قطرها .

الحل :
1- لدينا $\hat{B} + \hat{F} = 180^\circ$ فالرباعي $ABEF$ دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه فالنقاط A,B,E,F تقع على دائرة واحدة .
2- مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي تقع في منتصف الوتر المشترك $[AE]$.

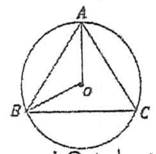
حساب نصف القطر :
نحسب AE من المثلث AFE حسب مبرهنة فيثاغورث :

$$(AE)^2 = (FA)^2 + FE^2 \Rightarrow (AE)^2 = 9 + 16$$
$$(AE)^2 = 25 \Rightarrow AE = 5$$
$$R = \frac{AE}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

رابعا :[المضلعات المنتظمة]

خواص وقواعد
1- المضلع المنتظم هو كل مضلع قياسات زواياه متساوية واطوال اضلاعه متساوية ((مربع,مثلث متساوي الاضلاع,مخمس منتظم)).
2- مركز المضلع المنتظم:هو مركز الدائرة المارة برؤوسه
3- قياس كل زاوية مركزية تحصر ضلعا من المضلع المنتظم تعطى بالقانون $\frac{360}{n}$ حيث n هي عدد اضلاع المضلع المنتظم .
4- لحساب قياس زاوية من زوايا المضلع المنتظم نطبق القانون: $\frac{180(n-2)}{n}$
5- مجموع قياس زوايا المضلع المنتظم $180(n-2)$.
6- حساب طول ضلع من اضلاع المضلع المنتظم :
خطوات الحل :

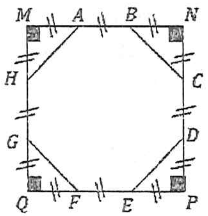
مثال : ABC مثلث متساوي الاضلاع مرسوم في دائرة مركزها (O) ونصف قطرها $\sqrt{3}$
احسب الطول AB



الحل :
المثلث OAB فيه OA=OB=R فهو متساوي الساقين راسه O نرسم ارتفاع هذا المثلث المتعلق بالقاعدة وليكن [OH] فيكون منصف وارتفاع ومتوسط :

$$A\hat{O}B = \frac{360}{3} = 120^\circ \Rightarrow H\hat{O}B = \frac{120}{2} = 60^\circ$$
$$\sin H\hat{O}B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \frac{3}{2}$$
$$AB = 2BH = 2 \times \frac{3}{2} = 3\ cm$$

تمرين: $MNPQ$ مربع و $ABCDEFGH$ مثمن مشار اليه في الشكل المجاور



1-هل هذا المثمن منتظم مع الشرح .
2-S هي مساحة المربع $MNPQ$
S' هي مساحة المثمن.
اشرح لماذا $S' = \frac{7}{9}S$؟

الحل :
1- المثلث BCN قائم في N وتره BC وهو اطول الاضلاع اي :
$BC > BN$
نعلم ان $BN = BA \Leftarrow BC > BA$ فالمثمن غير منتظم
2- بفرض ان طول ضلع المربع $MNPQ$:$3X$

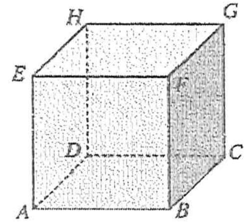
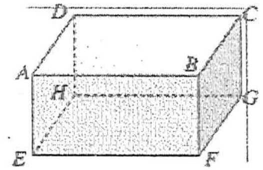
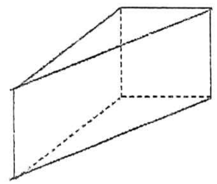
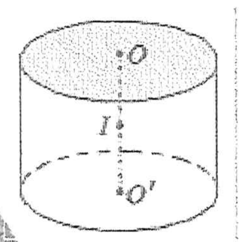
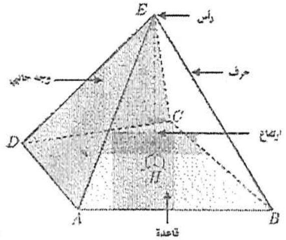
$$S(MNPQ) = (3X)^2 = 9X^2$$

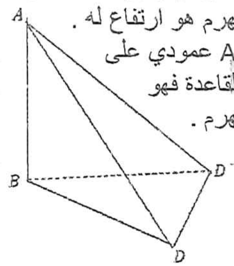
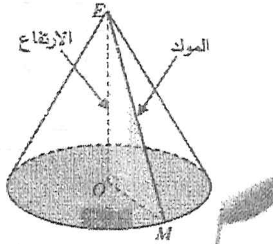
مساحة المثمن =مساحة المربع-مساحة المثلث القائم ×4

$$S(BNC) = \frac{X * X}{2} = \frac{X^2}{2}$$
$$S' = S - 4 \times S(BCN)$$
$$\Rightarrow S' = 9X^2 - \frac{4X^2}{2} \Rightarrow S' = 9X^2 - 2X^2 \Rightarrow S' = 7X^2$$
$$\frac{S'}{S} = \frac{7X^2}{9X^2} \Rightarrow S' = \frac{7}{9}S$$

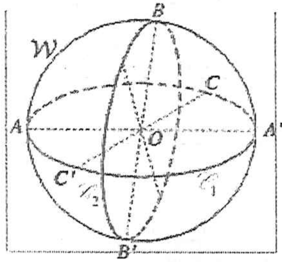
الوحدة الرابعة: المجسمات والمقاطع

أولاً: المجسمات الفراغية

<table>
<tr><th>الموشور القائم</th><th>الاسطوانة الدورانية القائمة</th><th>الهرم</th><th>المخروط الدوراني القائم</th><th>الكرة</th></tr>
<tr>
<td>


- هو مجسم قاعدتاه طبوقتان ومتوازيتان وأوجهه الجانبية مستطيلات او مربعات
- ارتفاع الموشور هو المسافة بين القاعدتين</td>
<td>
- هو مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة
- ارتفاع الاسطوانة هو المسافة بين مركزي القاعدتين
- القاعدتين هما دائرتين طبوقتين ومتوازيتين</td>
<td>

- هو مجسم يتألف من مضلع يدعى القاعدة ونقطة لا تنتمي إلى القاعدة تدعى راس الهرم
- أوجه الجانبية عبارة عن مثلثات بعدد أضلاع القاعدة
- ارتفاع الهرم هو العمود النازل من الرأس على مستوي القاعدة .
<u>حالات خاصة</u>
1-الهرم المنتظم :هو هرم قاعدته مضلع منتظم (مربع مخمس منتظم.......)
ارتفاعه هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسه ومركز قاعدته.
2- رباعي الوجوه المنتظم :هو هرم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع وكل وجه من وجوهه مثلث متساوي الأضلاع ويصلح أن يكون قاعدة له .
3-من الممكن ان يكون أحد الأحرف الجانبية للهرم هو ارتفاع له .
إذا كان AB عمودي على مستوي القاعدة فهو ارتفاع للهرم .
</td>
<td>

- المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O حول المستقيم OE
- القرص المتولد من جوران OM هو قاعدة المخروط
- ارتفاع المخروط الدوراني هو المسافة بين الرأس ومركز القاعدة EO</td>
<td>- السطح الكروي :السطح الكروي ذو المركز (O) ونصف القطر (R) هو مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق
$OM = R$

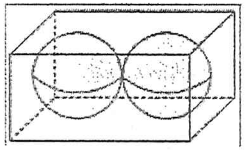
- المجسم الكروي :المجسم الكروي ذو المركز (O)ونصف القطر (R)هو مجموعة نقاط الفراغ التي يحقق
$OM \leq R$

- قطر الكرة هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة (O)وطرفاها نقطتان من الكرة .
-الدائرة الكبرى :قطرها يساوي قطر الكرة ومركزها هو مركز الكرة .</td>
</tr>
</table>

ثانياً: قوانين الحساب

الشكل الهندسي	المساحة
المثلث	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع المتعلق بها}}{2}$
المثلث القائم	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$
المثلث المتساوي الأضلاع	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (a: طول ضلع المثلث)
شبه المنحرف	$\left(\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2}\right) \times$ الارتفاع
متوازي الأضلاع	القاعدة × الارتفاع المتعلق بها.
المعين:	$\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$
المستطيل	الطول× العرض
المربع	$(\text{طول الضلع})^2$

الشكل الهندسي الفراغي	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الموشور القائم	$S_l = P \times h$	$S_T = S_l + 2S_b$	$v = S_b \times h$
متوازي المستطيلات	$S_l = P \times h$	$S_T = S_l + 2S_b$	$v = x.y.z$ (جداء أبعاده الثلاثة)
المكعب	$S_l = 4x^2$	$S_T = 6x^2$	$v = x^3$
الأسطوانة	$S_l = P \times h = 2\pi R.h$	$S_T = S_l + 2S_b = 2\pi Rh + 2\pi R^2$	$v = S_b \times h = \pi R^2.h$
الهرم			$v = \frac{1}{3}S_b \times h$
المخروط			$v = \frac{1}{3}S_b \times h = \frac{1}{3}\pi R^2.h$
الكرة		$S = 4\pi R^2$ أو $S = \pi d^2$	$v = \frac{4}{3}\pi R^3$ أو $v = \frac{1}{6}\pi d^3$

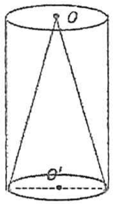
مثال: علبة شكل متوازي مستطيلات، أبعادها $8\ cm, 4\ cm, 4\ cm$ تحوي هذه العلبة كرتين متساويتين نصف قطر كل منهما $2\ cm$ تمسان أوجه العلبة احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.



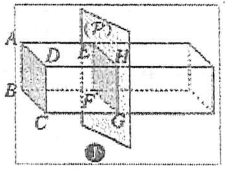
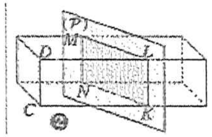
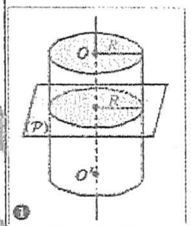
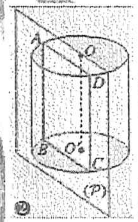
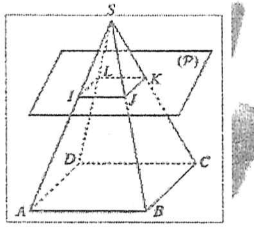
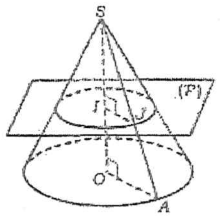
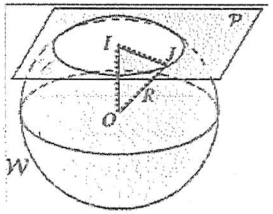
مثال 2: أسطوانة دورانية نصف قطرها 3 cm وارتفاعها 8 cm تحوي بداخلها مخروط دوراني قاعدته هي القاعدة السفلية للاسطوانة ورأس المخروط هو مركز القاعدة العلوية للاسطوانة والمطلوب:

1- احسب حجم الأسطوانة ومساحتها الكلية

2- احسب حجم الفراغ المحصور بين الأسطوانة والمخروط



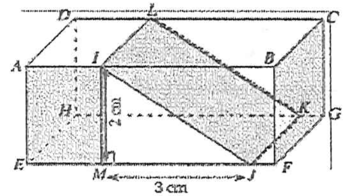
ثالثاً: مقاطع المجسمات

مقطع متوازي مستطيلات		مقطع اسطوانة		مقطع هرم	مقطع مخروط دوراني	مقطع كرة
بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه  إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه ABCD هو مستطيل EFGH طبوق على المستطيل ABCD	بمستوي يوازي أحد الأحرف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف  إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الحرف CD هو مستطيل MNKL فيه $KL = NM = CD$	بمستوي يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة  إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على القاعدة	بمستوي يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة  إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي المحور هو مستطيل ABCD فيه $AB = CD = OO'$	إن مقطع هرم بمستوي يوازي القاعدة هو مضلع مصغر عن القاعدة  المقطع IJKL مصغر عن القاعدة ABCD ونسبة التصغير $k = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$ الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع الهرم	إن مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة  الدائرة التي نصف قطرها IJ هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير $k = \frac{SI}{So} = \frac{IG}{OA} = \frac{SG}{SA}$ الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع المخروط. يمكننا استخدام مبرهنة النسب الثلاث لكتابة تناسب.	إن مقطع كرة بمستوي هو دائرة إن مقطع مجسم كروي بمستوي هو قرص دائري عندما يمر المستوي القاطع بمركز الكرة فالمقطع هو دائرة كبرى أما إذا كان مماس للكرة فالمقطع هو نقطة  IJ هو نصف قطر دائرة المقطع OJ هو نصف قطر الكرة المثلث IOJ قائم في I مركز الدائرة

ABCDEFGH متوازي مستطيلات و $GC = 2\ cm\ ,FG = 2.5\ cm\ ,EF = 5\ cm$ و I نقطة تحقق $AI = 1.5\ cm$. J نقطة تحقق $FJ = 0.5\ cm$.
قطع هذا المجسم بمستوٍ مار بالنقطتين I و J وموازٍ للحرف $[BC]$

1- ماطبيعة المقطع؟

2- ارسم المقطع بأبعاده التامة.



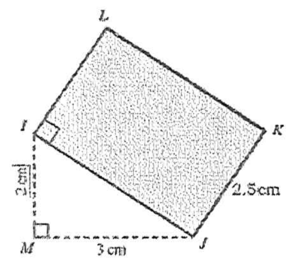
1- مقطع المجسم بمستوٍ مار بالنقطتين I و J موازٍ للحرف $[BC]$ هو مستطيل IJKL ويكون:

$$IL = BC = FG = 2.5\ cm$$

2- نرمز إلى مسقط I على $[EF]$ بالرمز M، فيكون $[IJ]$ وتراً في المثلث IMJ القائم في M لدينا $IM = AE = 2\ cm$ و

$$MJ = EF - (EM + JF)$$
$$= 5 - (1.5 + 0.5 = 3\ cm$$

* نرسم المثلث IMJ القائم في M ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل IJKL بحيث يكون طول $[JK]$ مساوياً $2.5\ cm$

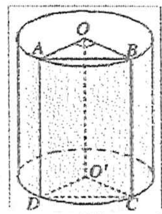


الشكل المرافق يمثل أسطوانة دورانية ارتفاعها $7cm$ ونصف قطرقاعدتها $3\ cm$ ، ABCD هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي محورها OO'

1- ما طبيعة هذا المقطع؟

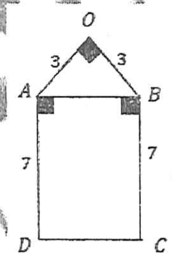
2- نعلم أن $A\hat{O}B = 90°$ ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة

3- احسب الطول AB



1- المقطع ABCD هو مستطيل

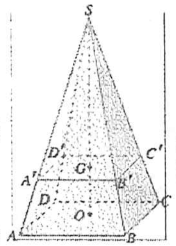
2- المثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين نرسمه ثم نرسم على وتره المستطيل ABCD حيث
$AB = OO' = 7$



3- حساب AB حسب مبرهنة فيثاغورث من المثلث AOB القائم فيكون
$AB = 3\sqrt{2}\ cm$

SABCD هرم منتظم رأسه S وقاعدته ABCD مربع طول ضلعه 6cm.
$SO = 12\ cm,$
$SG = 9\ cm$ مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً القاعدة هو المربع A'B'C'D'.

1- احسب V_1 حجم الهرم SABCD.



2- احسب V_2 حجم الهرم SA'B'C'D' ثم استنتج حجم جذع الهرم.

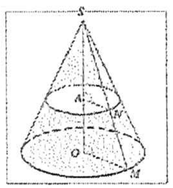
1- $V_1 = \frac{1}{3}S.h$
$h = SO = 12$
$S = AB^2 = 36$
ومنه: $V_1 = \frac{1}{3} \times 36 \times 12 = 144\ cm^2$

2- الهرم SA'B'C'D' هو تصغير للهرم SABCD بنسبة
$K = \frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
ومنه: $V_2 = K^3 \times V_1$
أي: $V_2 = (\frac{3}{4})^3 \times 144 = 60,75\ cm^3$
حجم جذع الهرم هو الفرق بين حجمي الهرمين SABCD و SA'B'C'D' أي:
$V = V_1 - V_2$
$= 144 - 60,75$
$= 83,25\ cm^3$

مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاعه 10 cm ونصف قطر قاعدته 4 cm. A نقطة من SO تحقق SA=6 cm. إن مقطع المخروط بمستوي يوازي القاعدة هي الدائرة التي نصف قطرها AM.

1- احسب نصف قطر المقطع.

2- احسب مساحة المقطع بطريقتين.



1- حسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM}$$
$$\frac{6}{10} = \frac{AN}{4} \Rightarrow$$
$$AN = \frac{24}{10} = 2,4\ cm$$

2- المقطع هو تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير:

$$K = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10}$$
$$S = \pi(OM)^2$$
$$= 16\pi\ CM^2$$

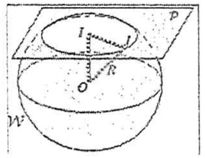
ومنه $S' = K^2 \times S$
إذاً: $S' = (\frac{6}{10})^2 \times 16\pi = 5,76\pi\ cm^2$

لدينا سطح كروي مركزه O ونصف قطره $3\ cm$، I نقطة تحقق $OI = 2\ cm$ وليكن (P) مستوياً يمر بالنقطة I ويعامد المستقيم (OI) ولتكن J نقطة مشتركة بين المستوي (P) والسطح W.

1- ارسم المثلث OIJ بقيم تامة الأطوال.

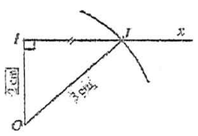
2- ارسم المقطع بأبعاده التامة.

3- احسب نصف قطر المقطع.



الحل:

- نرسم ضلعين قائمين في I ثم نعين IO=2 cm على أحدهما



- نفتح الفرجار 3 cm ونثبته في O ونرسم قوس يقطع الضلع القائمة الأخرى في J

2- نرسم دائرة نصف قطرها IJ

3- حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIJ القائم في I نجد أن
$IJ = \sqrt{5}$