تطبيقات

① معادلة المماس ...

لإيجاد معادلة المماس يلزمنا نقطة وميل

تكون معادلة المماس بالشكل

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} t(x) = \tan\theta$$

$m = \frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ غير معرف: مماس شاقولي $x = x_0$

$m = 0$: مماس أفقي $y = y_0$

$m =$ عدد: مماس مائل $y - y_0 = m(x - x_0)$

$m > 0$

$m < 0$

الدالة تقبل اشتقاق عند x_0

$$t(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} t(x) = \mp\infty$$

f لا تقبل الاشتقاق عند x_0

ويكون المماس في هذه الحالة شاقولي ...

$$\lim_{x\to x_0^+} t(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} t(x)$$

f لا تقبل الاشتقاق عند x_0

ويكون لدينا نصفي مماس.

x	1
f'	‖
f	2

f لا تقبل الاشتقاق عند (1)

المماس شاقولي في النقطة (1,2)

$$\lim_{x\to x_0} t(x) = \mp\infty$$

x		1	
f'	+	3 ‖ −1	−
f	↗	2	↘

f لا تقبل الاشتقاق عند (1)

$$\lim_{x\to 1^+} t(x) \neq \lim_{x\to 1^-} t(x)$$

ولدينا نصفي مماس في (1,2)

$m_1 = 3$ $\quad$ $m_2 = -1$

مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$

أوجد f' اعتماداً على التعريف.

ثم جد معادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

$$t(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0}$$

$$t(x) = \frac{\frac{x_0 - x}{x\cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{-\cancel{(x_0 - x)}}{x\cdot x_0\cancel{(x - x_0)}} = \frac{-1}{x\cdot x_0}$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} t(x)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{x\cdot x_0}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$$

$$f(1) = 1$$

النقطة التماس (1,1)

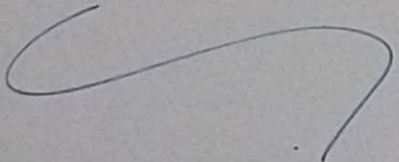
$$m = \lim_{x\to 1} t(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

ونكتب معادلة المماس

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y - 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 2$$



اشتقاق

مشتقة دالة مركبة

$g(x)=f(u(x))$

$g'(x)=u'(x)\times f'(u(x))$

$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$h(x)=f(\sin x)$ $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

ابين ان h تقبل الاشتقاق على I ثم احسب $h'(x)$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2}$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ومنه تقبل الاشتقاق على I.

$\sin x$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه تقبل الاشتقاق على I.

كذلك $\sin x\neq 1$ على I

ومنه h تقبل الاشتقاق على I.

$h'(x)=(\sin x)'\times f'(\sin x)$

$=\cos x\times\frac{-5}{(\sin x-1)^2}$

استنتج مشتق الدالة g حيث

$g(x)=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

$g(x)=f(\sqrt{x})$

$g'(x)=(\sqrt{x})'\times f'(\sqrt{x})$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}$

التقريب التآلفي

$f(x)=x^5+4x-2$

اوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,2)$

$1,2=\overset{a}{1}+\overset{h}{0,2}$

$f(a)=f(1)=1+4-2=3$

$f'(x)=5x^4+4$

$f'(a)=f'(1)=9$

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h$

$f(1,2)\simeq 3+9\times\frac{2}{10}$

$\simeq 3+\frac{18}{10}$

$\simeq\frac{48}{10}\simeq 4,8$

اوجد القيمة التقريبية لـ $(19,8)^2$

$f(x)=x^2$

$19,8=\overset{a}{20}+(\overset{h}{-0,2})$

$f(a)=f(20)=400$

$f'(x)=2x$

$f'(a)=f'(20)=40$

اشتقاق

اشتقاق تابع مركب

$g(x) = f(u(x))$

$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$h(x) = f(\sin x)$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

ادرس اشتقاق h على I ثم احسب $h'(x)$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ و

اشتقاقي على I.

$\sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

وهو اشتقاقي على I.

تحقق

على I $\sin x \neq 1$

نجد h اشتقاقي على I

$h'(x) = (\sin x)' \times f'(\sin x)$

$= \cos x \times \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}$

استنتج مشتق التابع $g(x)$ حيث

$g(x) = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

$g(x) = f(\sqrt{x})$

$g'(x) = (\sqrt{x})' \times f'(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}$

ع.ت

التقريب التآلفي

$f(x) = x^5 + 4x - 2$

اوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,2)$

$1,2 = \overset{a}{1} + \overset{h}{0,2}$

$f(a) = f(1) = 1+4-2 = 3$

$f'(x) = 5x^4 + 4$

$f'(a) = f'(1) = 9$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h$

$f(1,2) \simeq 3 + 9 \times \frac{2}{10}$

$\simeq 3 + \frac{18}{10}$

$\simeq \frac{48}{10} \simeq 4,8$

اوجد القيمة التقريبية لـ $(19,8)^2$

$f(x) = x^2$

$19,8 = \overset{a}{20} + (\overset{h}{-0,2})$

$f(a) = f(20) = 400$

$f'(x) = 2x$

$f'(a) = f'(20) = 40$

$f(19,8) \simeq f(a) + f'(a)h$

$\simeq 400 + 40 \times \frac{-2}{10}$

$\simeq 400 - 8 \simeq 392$

وظيفة

اوجد القيمة التقريبية لـ

1) $\sqrt[3]{8,1}$

2) $\sin(48^\circ)$

$f = \sqrt[3]{x}$

$8,1 = 8 + 0,1$

التوابع المثلثية

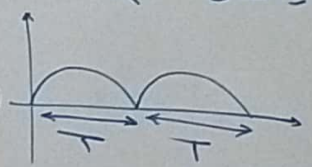
صفحة ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٢٣

تابع زوجي: $f(-x) = f(x)$ ومنحنيه البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

تابع فردي: $f(-x) = -f(x)$ ومنحنيه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

* $f(x+T) = f(x)$

f: تابع دوري دوره T



ملاحظة: إذا كان f فردي أو زوجي و دوري دوره T يكفي دراسته على المجال $[0, \frac{T}{2}]$

ملاحظة: $f(x) = \sin(ax+b)$ ، $\cos(ax+b)$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

تمرين: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

(1) أوجد T وبين هل f زوجي أم فردي

$= 2\sin x + 2\sin x \cos x$

$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$f(x+2\pi) = 2\sin(x+\cancel{2\pi}) + \sin 2(x+\cancel{2\pi})$

$= 2\sin x + \sin 2x$

$= f(x)$

$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin 2(-x)$

$= -2\sin x - \sin 2x$

$= -(2\sin x + \sin 2x)$

$= -f(x)$

منه f تابع فردي ومنحنيه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

لذلك يكفي دراسته على المجال

$[0, \frac{T}{2}] = [0, \pi]$

$f' = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$

$= 2(\cos x + \cos 2x)$

$f' = 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$ وهي محققة.

* ادرس تغيرات f على $[0, \pi]$ وارسمه على $[-\pi, \pi]$

$f(0) = 0$ $\quad$ $f(\pi) = 0$

$f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f' = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

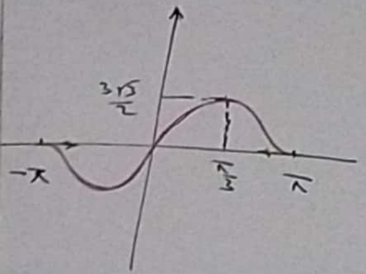
$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\Rightarrow \cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi k$

$k = 0 \Rightarrow x = \pi$ $\quad$ $f(\pi) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0



$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\rightarrow 2\cos^2\theta - 1$

$\rightarrow 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(120) = \sin(60)$