الموضوع: تابع ومهارات (1) التاريخ: 7/10/2020

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

1. جد D_f مجموعة تعريف التابع f
2. ادرس نهايات f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f.
3. اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.
4. هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل اجابتك.
5. اكتب معادلتي نصفي المماسين T_1 و T_2 للخط C في المبدأ من اليمين ومن اليسار على الترتيب و أثبت أنهما متعامدان.
6. جد معادلة المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها سالبة تماماً و يوازي T_2.
7. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها.
8. ارسم في معلم متجانس مقاربات C و T_1 و T_2 و T ثم ارسم C.
9. ناقش بيانياً و بحسب قيم الوسيط الحقيقي λ عدد حلول المعادلة $f(x) = \lambda$.
10. ادرس نهاية التابع $f \circ f$ عند 1- وعند $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
11. جد ميل المماس للخط C في نقطة منه ترتيبها $\frac{2}{3}$.

الحل

$\boxed{1}$

$$\underbrace{x^3 + x^2} - \underbrace{x - 1} = 0$$

$$x^2(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2-1) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x+1)^2(x-1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$$

إذاً:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 - x - 1} = 0$$

ومنه فإن المستقيم $\Delta: y = 0$ مقارب أفقي للخط C عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$f(x)=\frac{x^2-|x|}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{|x|^2-|x|}{(x+1)(|x|^2-1)}$$

$$f(x)=\frac{|x|(|x|-1)}{(x+1)(|x|-1)(|x|+1)}$$

$$f(x)=\frac{|x|}{(x+1)(|x|+1)} \quad ; \; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4} \Rightarrow (1,\tfrac{1}{4})\notin C$$ نقطة مفارقة

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\Big(\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to-\infty}\times\underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{\to\frac{1}{2}}\Big)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\Big(\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to+\infty}\times\underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{\to\frac{1}{2}}\Big)=+\infty$$

ومنه فإن المستقيم $\Delta_2: x=-1$ مقارب شاقولي للخط C.

3

$$f(x)=\frac{|x|}{(x+1)(|x|+1)}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)(x+1)} & ; 1\neq x\geq 0\\[2ex] \dfrac{-x}{(x+1)(-x+1)} & ; -1\neq x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2} & ; 1\neq x\geq 0\\[2ex] \dfrac{x}{x^2-1} & ; -1\neq x<0\end{cases}$$

4 نعرف على $]-1,1[\setminus\{0\}$ التابع g وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-0}{x}=\frac{1}{x}\cdot f(x)$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2} & ; 1>x>0\\[2ex] \dfrac{1}{x^2-1} & ; -1<x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)^2}=1=f'(0^+)$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-1}=-1=f'(0^-)$$

لما كانت $\lim_{x\to 0^-} g(x)\neq\lim_{x\to 0^+} g(x)$

فليس لـ g نهاية عند الصفر

ومنه f غير اشتقاقي عند الصفر

الموضوع: تابع ومهارات (3) التاريخ: 7/10/2020

5 بما أن $f'(0^+)=1$ هو ميل نصف المماس T_1 في المبدأ من اليمين

معادلة T_1 : $y=f'(0^+)(x-0)+f(0) \ ; \ x\geq 0$

$\boxed{T_1 : y=x \ , \ x\geq 0}$ منصف الربع الأول

بما أن $f'(0^-)=-1$ هو ميل نصف المماس T_2 في المبدأ من اليسار

معادلة T_2 : $y=f'(0^-)(x-0)+f(0) \ ; \ x\leq 0$

$\boxed{T_2 : y=-x \ , \ x\leq 0}$ منصف الربع الثاني

لاحظ أن $m_1 \times m_2 = 1\times(-1)=-1$

فإن T_1 و T_2 متعامدان.

6 f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}$ ومشتقه

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1(x+1)^2-2(x+1).x}{(x+1)^4} & ; \ 1\neq x>0 \\[2ex] \dfrac{1(x^2-1)-2x.x}{(x^2-1)^2} & ; \ -1\neq x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{(x+1)^3} & ; \ 1\neq x>0 \\[2ex] \dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} & ; \ -1\neq x<0 \end{cases}$$

$(T \parallel T_2 \text{ و } x<0) \Rightarrow (m_T = m_{T_2} \text{ و } x<0)$

نبحث عن حلول المعادلة $f'(x)=-1$ حيث $-1\neq x<0$

$$\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=-1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}=1$$

$$(x^2-1)^2=x^2+1$$

$$x^4-2x^2+1=x^2+1 \Rightarrow x^4-3x^2=0$$

$$x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$

$x=0$ مرفوض

$x=\sqrt{3}$ مرفوض

$x=-\sqrt{3}$ مقبول ، $f(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{3-1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

معادلة المماس T : $y=f'(-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})$

$$y=-1(x+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T : y=-x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

7 دراسة التغيرات :

وجدنا أن ،

$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x+1)^3} & ; \ 1 \neq x > 0 \\ \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} & ; \ -1 \neq x < 0 \end{cases}$$

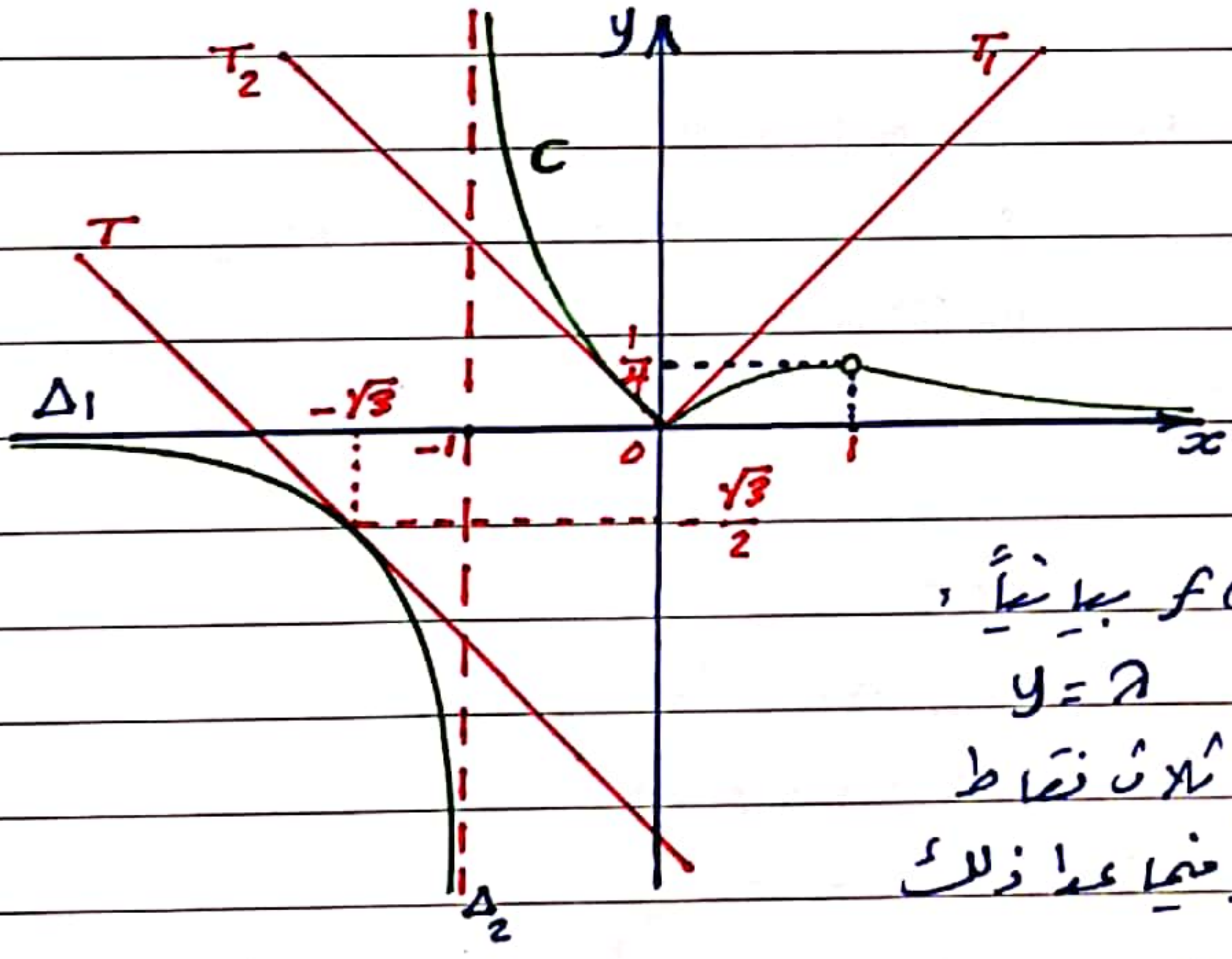
عندما $x > 0$ و $x \neq 1$ فإن إشارة $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$ تماثل إشارة البسط $1-x$

عندما $x < 0$ و $x \neq -1$ فإن $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$

ومنه فإن جدول التغيرات :

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 1	1 ... $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \searrow 0$

8 الرسم



$\Delta_1 : y = 0$ مقارب

$\Delta_2 : x = -1$ مقارب

نقطة مفرغة $(1, \frac{1}{4}) \notin C$

نصف مماس $T_1 : y = x , x \geq 0$

نصف مماس $T_2 : y = -x , x \leq 0$

مماس $T : y = -x - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

9 حل المعادلة $f(x) = \lambda$ بيانياً ،

المستقيم d الذي معادلته $y = \lambda$ يقطع الخط البياني C في ثلاث نقاط عندما $\lambda \in]0, \frac{1}{4}[$ وفيما عدا ذلك يقطعه في نقطة واحدة .

إذاً ، للمعادلة $f(x) = \lambda$:

1) حل وحيد عندما $\lambda \in]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{4}, +\infty[$

2) ثلاثة حلول مختلفة عندما $\lambda \in]0, \frac{1}{4}[$

10 أولاً: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$

لذا فإن $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(f(x)) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$

لذا فإن $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(f(x)) = 0$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to -1} f\circ f(x) = 0$

لاحظ أن: ليس لـ f خط تقارب عند -1

ثانياً: لدينا $f\left(-\frac{\sqrt5+1}{2}\right) = \dfrac{-\frac{\sqrt5+1}{2}}{\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2-1} = -1$

عندما $x \xrightarrow{<} -\frac{\sqrt5+1}{2}$ فإن $f(x) \xrightarrow{>} -1$ من الرسم

ومنه $f(f(x)) \to +\infty$

وعندما $x \xrightarrow{>} -\frac{\sqrt5+1}{2}$ فإن $f(x) \xrightarrow{<} -1$ من الرسم

ومنه $f(f(x)) \to -\infty$

ومنه نستنتج أن:

$f\circ f$ ليس له خط تقارب عند $-\frac{\sqrt5+1}{2}$

11 من الطلب التاسع نجد أن للمعادلة $f(x) = \frac{2}{3}$ حلاً وحيداً

في المجال $]-1,0[$ (من الرسم)

والمعادلة تكافئ $-1<x<0$ ، $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{2}{3}$

$$2x^2-2 = 3x$$

$$2x^2-3x-2 = 0$$

$$(2x+1)(x-2) = 0$$

$x = -\frac{1}{2}$ مقبول

$x = 2$ مرفوض

فيكون ميل المماس عند $x=-\frac12$ هو:

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-\left(\left(-\frac12\right)^2+1\right)}{\left(\left(-\frac12\right)^2-1\right)^2} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{9}{16}} = -\frac{20}{9}$$