الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم

الإحصاء والاحتمالات

إعداد

هيئة التأطير بالمعهد:

الأستاذة بوساحة حورية

(المدرسة العليا للأساتذة)

السنة: 2008

4- شارع أولاد سيدي الشيخ – الحراش– الجزائر

الموقع على الأنترنت: **http//www.infpe.edu.dz**

البريد الإلكتروني: **contact@infpe.edu.dz**

الفـهـرس

مقدمة

هذا الكتاب مخصص إلى الطلبة المتكونين بالمعهد الخاص بوزارة التربية الوطنية وإلى كل من يريد الإلمام بالمبادئ الأولية في الإحصاء والاحتمالات من مختلف المستويات و كل الأطوار من التعليم الثانوي و الجامعي فهو يحتوي على كثير من المعلومات الضرورية لدراسة هذه المادة سواء أكانت نظرية أو تطبيقية أي أنه يحاول الجمع بين الدروس من جهة وبين التطبيقات من جهة أخرى.

لقد رأينا أنه من المفيد أن يكون للباحثين المتخصصين في هذه المادة ذات البرنامج الواسع مرجعا مساعدا في مقرر الرياضيات وبالضبط في الإحصاء و الاحتمالات يساعدهم على استيعاب هذه المادة أكثر و يجدون فيه المعلومات الكافية للتحصيل العلمي الوافي سواء كان ذلك من الناحية النظرية أو التطبيقية و هو ما دفعنا إلى تقديم هذه المجموعة من الفقرات التي تغطي جزءا أساسيا من هذا المادة و الأمل يحدونا في أن يكون هذا العمل المتواضع إضافة إلى المجهودات المخلصة في هذا الميدان.

و لترسيخ الأفكار و استيعابها فقد تم تزويد ذلك بأمثلة مناسبة و واضحة وأحيانا متبوعة بتمرينات محلولة في قالب سهل و بسيط مراعاة لإمكانات الباحث

و هو في هذا المستوى .

أما منهاج الإحصاء الذي تناولناه بشكل واسع فهو ما يسمى بالإحصاء الوصفي و هذا يتمثل في إعطاء المعطيات و المعلومات على شكل جداول أو بيانات كما يحدد لنا النزعات المركزية لهذه البيانات و يفسر لنا بعض المعايير التي يمكن إيجادها بين الظواهر المختلفة منها الانحراف و التشتت و سنحاول الإحاطة بهذا الموضوع بشكل مناسب و أوسع كما لا يفوتنا أن نقدم نبذة عن نظرية العينة و نظرا للعلاقة الوطيدة بين الإحصاء و نظرية الاحتمالات سنحاول تقديم القواعد الأساسية التي لا يمكن الاستغناء عنها و نحن نقدم هذا الموضوع (الاحتمالات) *probabilité* التي هي أساسية عند دراستنا للإحصاء أو عند قيامنا بتجربة ما و إلى جانب ذلك التذكير بموضوع التحليل التوافقي و خاصة التعداد والذي يتضمن تعريف التباديل و التراتيب و التوافيق، وقبل التطرق إلى هذا الموضوع فكرنا في إعطاء لمحة قصيرة عن مفهوم الإحصاء عبر التاريخ.

1 . لمحة مختصرة عن مفهوم الإحصاء عبر التاريخ

يؤكد بعض العلماء و كثير من مؤرخي علم الرياضيات أن مصطلح الإحصاء قد ظهر منذ ألفي سنة قبل الميلاد لدى المصريين و ذلك عند قيامهم بإحصاء السكان و الشعوب في ذلك الوقت وحينما بدء الصينيون بدراسة الأرقام الخاصة بمنتوجهم الزراعي. لقد ظهرت الصور الأولى البسيطة في حياة الإنسان عبر التاريخ لمفهوم الإحصاء و استخدامه فتمثلت في تعداد القبائل والشعوب القريبة

إلى بعضها البعض كذلك في تجميع الأسلحة للقيام بالحروب بين بعضها البعض في تلك الأزمنة الغابرة و في و كذلك في التجارة، ... الخ.

في القرون الوسطى تطور مفهوم الإحصاء إلى كتابة و تسجيل المعلومات في دفاتر فمثلا في *سنة 1086* اصدر *Guillaume 1er le conquérant* أمر بكتابة و حساب عدد الأراضي البريطانية و سجلت تحت العنوان التالي : *domesdey book*.

لكن انطلاقا من القرن التاسع عشر (xix) اكتشفت نظرية الاحتمالات التي تعتبر المساعد الكبير للعمل الإحصائي و يعتبر العالم *Laplace* أحد مؤسسيها إن أول عمل إحصائي قدم بشكل علمي كان سنة *1853* من طرف العالم *Adolphe Quetelet* في المؤتمر الأول العالمي للإحصاء .

و إبتداء من ذلك الوقت بدأ الإحصاء يبرز كعلم له فوائده و قيمته الكبيرة في مختلف المجالات و البحوث العلمية كالزراعة و الصناعة و الاقتصاد والسياسة بل تعدى ذلك إلى إعطاء حسابات صحيحة يعتمد عليها في التنبؤ بقضايا مستقبلية في مختلف الميادين مستندا في ذلك على قوانين علمية، و لتحليل المعطيات و تفسيرها تدرج المعطيات في كثير من الأحيان على شكل بيانات و جداول وهذا لأجل تسهيل الوصول إلى النتائج المراد تحقيقها و على ضوء هذا عرف الإحصاء على أنه مجموعة الطرق التي من خلالها نجمع و نرتب و نكثف المعطيات و من بين الوسائل التي سهلت هذا العمل في وقتنا الحالي هو الحاسوب .

ومما سبق يمكن القول أن الإحصاء هو ذلك العلم الذي يقوم بجمع المعلومات مهما كان مصدرها سواء في الزراعة، الصناعة، الطب، الصيدلة، ... كما انه يعتبر من العلوم الأساسية الواسعة التطبيق في مجال علوم المكتبات. و إلى جانب ذلك فهو يمثل إحدى الأدوات البالغة الأهمية و الفائدة لتسيير اكبر الشركات المتعدد الخدمات و المساعد الكبير لاتخاذ قرار عند القيام بتجربة أو أي عمل علمي .

إن المعطيات التي يتناولها الاحصائيون قد تكون عددية أو غير عددية قابلة للقياس أو غير قابلة للقياس وهو يعمل على وصفها وشرحها ضمن جداول و بيانات مدعمة بنظريات و أدوات علمية تجعل عرضها سهلا و واضحا و منظما و نتائجها مضبوطة و كاملة من حيث التقييم و التحليل للدراسة التي هي بصدد الإنجاز و أكثر من هذا قد يؤدي إلى استنتاجات أعمال مستقبلية، أما المراحل التي يتبعها الباحث و هو يقوم بأي تجربة في الإحصاء فهي كالتالي :

- تعريف و تجميع المعطيات

أول عمل يقوم به الإحصائي هو جمع المعطيات وإعطاء فكرة عن طبيعتها و عددها .

- تمثيل المعطيات في جداول

المعطيات التي تم جمعها تعرض في جداول بحيث يمكن أن تفسر بشكل واضح.

- تحليل المعطيات

بعدما نجمع و نمثل المعطيات في جداول نلجأ إلى ما يسمى بتحليل المعطيات و

التي هي تحديد النزعة المركزية و هذا ما سنشرحه بشكل واسع في دروسنا التالية و هي تتضمن تعريف المتوسط الحسابي و الوسيط و النوال و التشتت، ... الخ .

ملاحظة

تسليط الضوء على مفهوم التشتت هو دراسة مدى تبعثر القيم الإحصائية حول متوسطها أو مركزها و من أسهل الحسابات التي يمكن الرجوع إليها هي ما نسميه بالانحراف و هو الفرق بين القيمة و متوسطها الحسابي الذي غالبا ما نرمز له بـ $\bar{x}$ و كذلك نتعرض إلى تعريف التباين و الانحراف المعياري و ... و نظرا للعلاقة الوطيدة بين الإحصاء و نظرية الاحتمالات سنحاول تقديم أهم القواعد الأساسية التي لا يمكن الاستغناء عنها و نحن نقدم هذا الموضوع ولأجل الإلمام بموضوع الإحصاء نحتاج في البداية إلى تعريف مفهومين أساسيين هما المجتمع و العينة وبعض التعاريف الأساسية التي سندرجها في فقراتنا اللاحقة .

I

الإحصاء

<u>المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء</u>

- **<u>تعريف المجتمع الإحصائي</u>** ***(population)***

المجتمع الإحصائي هو مجموعة العناصر التي تشكل هدف الدراسة. و كل شخص من المجتمع يدعى وحدة إحصائية *unite statistique* أو *فرد* *individu* وهو العنصر الأساسي عند القيام بتجربة ما .

<u>مثال</u>

عند دراسة عدد التلاميذ المتفوقين في شهادة التعليم المتوسط في كل القطر الجزائري فان المجتمع الإحصائي هو عدد تلاميذ الجزائر المتفوقين في هذه الشهادة ويعتبر كل تلميذ متفوق في هذه الشهادة وحدة إحصائية .

- **<u>تعريف العينة الإحصائية</u>** ***(échantillon)***

كل مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي ندعوها بالعينة الإحصائية. في الدراسات الإحصائية يفضل دائما إجراء البحوث على مجوعة جزئية أي على عينة وبعد استخلاص النتائج تعمم على المجتمع الإحصائي الذي أخذنا منه تلك العينة .

<u>مثال</u>

من المثال السابق إذا أخذنا مجموعة التلاميذ الذين تحصلوا على الشهادة بملاحظ امتياز فيمكن اعتبار هذه المجموعة عينة من المجتمع الذي هو محل الدراسة بالأخص فإن عددها محدود و يمكن جدا عدها و الوصول بواسطتها إلى

نتائج دقيقة و صادقة .

ملاحظة

- كثيرا ما تتبع كلمة العينة بالعشوائية نقصد بذلك أن اختيارنا للعناصر يتم بفعل المصادفة .
- لماذا يتم اختيار العينة ؟. في الواقع يلجأ الإحصائيون إلى اخذ عينة بدلا من المجتمع كله وهذا راجع لصعوبة تطبيق المراحل الأربعة التي ذكرناها أعلاه على المجتمع بأكمله .

كذلك فإن النتائج التي نحصل عليها تكون أكثر دقة واقل تكلفة من تلك التي يقدمها المجتمع .

- **الميزة الإحصائية (الصفة)** *(caractère statistique)*

هي الصفة التي تميز الفرد في المجتمع و هي مشتركة لكل وحدات المجتمع.

فمثلا

الصفة التي تسند للتلميذ في المثال السابق هي (التفوق) .

مثال

إذا أخذنا مثلا إنتاج السيارات فإننا قد نصفها بعدة ميزات كاللون، قوة المحرك، ... ، الخ و أكثر من هذا فللميزة الإحصائية أنواع نذكر منها ما يلي :

- **الميزة الإحصائية النوعية**

هي صفة غير قابلة للقياس .

<u>مثال</u>

عند القيام بعملية عد المتحصلين على شهادة الإعلام الآلي في الجزائر نحتاج إلى معرفة الجنس (ذكر) أو (أنثى) كذلك يمكن أن نطلب معرفة الحالة العائلية (أعزب، متزوج، ... الخ) فمثل هذه الميزات أو الصفات نلاحظ أنها غير قابلة للقياس.

- **<u>الميزة الإحصائية الكمية</u> (العددية) *(Quantitatif caractère)***

هي الوحدات التي تكون قابلة للقياس .

<u>ملاحظة</u>

العمر ، عدد الأولاد ، القامة taille ، كل هذه الميزات القابلة للقياس ندعوها بالمتغيرات الإحصائية .

المتغيرات الإحصائية تنقسم إلى نوعين :

- **<u>المتغير الإحصائي المنقطع</u>**

هو المتغير القابل للقياس بواسطة أعداد معزولة مثل (..... ,1 ,0) كذلك إذا أردنا معرفة عدد الأطفال عند أسرة ما ، أو عدد الغرف في سكن ، أو علامات الامتحان لتلميذ ، ...

- **<u>المتغير الإحصائي المستمر</u>**

هذا عندما تكون القيم غير منتهية كما هو الحال القيم في مجال. كما هو

الحال في دراستنا للوزن ، الطول ، العمر ، ...

مثال

عين المجتمع ، الوحدة الإحصائية ، الميزة ، (الطبيعة و النوعية) ، الوحدة القياسية للمعطيات التالية :

1. طول 300 أعمدة حديدية لإحاطة محيط البيوت البلاستيكية .
2. الرياضة التي يمارسها التلاميذ في القسم .
3. قامة التلاميذ .
4. الراتب الشهري لعمال مؤسسة ما .

من أجل توضيح ذلك نعرض كتابة الجدول التالي :

وحدة القياس	النوعية	الطبيعة	الميزة	الوحدة الإحصائية	المجتمع
cm	مستمر	كمي	الطول	عمود	300 أعمدة
	مستمر	غير كمية أو نوعية	الرياضة الممارسة	تلميذ	التلاميذ
m	مستمرة	كمية	القامة	تلميذ	التلاميذ
DA	مستمر	كمي	الراتب الشهري	الراتب الشهري للمعلم	المعلمين

♦ **<u>عرض البيانات الإحصائية</u>**

إن النتائج التي نحصل عليها عند القيام بتجربة أو من خلال مراقبة لظاهرة معينة هي بيان إحصائي مفرداته عبارة عن قياسات عددية (كمية) أو نوعية و من بين الطرق التي تساعدنا على فهم البيان الإحصائي هي :

♦ **<u>جدول التوزيع التكراري</u>**

لنفرض أن البيان الإحصائي لتجربة ما يحوي على n قياس أو مشاهدة فالخطوة الأولى التي يجب القيام بها هي ترتيب هذه القياسات تصاعديا أو تنازليا فإذا كان لدينا r قياس بحيث أن $r \le n$ و ليكن لدينا القياسات التالية :

$$\boxed{x_1, x_2, \ldots.., x_n}$$

مع العلم أن تكراراتها هي بالتتالي:

$$\boxed{n_1, n_2, \ldots.., n_r}$$

فإن حجم البيان الإحصائي بالتعريف هو :

$$\boxed{n = n_1 + n_2 + \ldots.. + n_r}$$

كما أننا نسمي n_i تكرار القيمة x_i حيث $(i = 1,2,\ldots..,r)$ أما النسبة :

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n}}$$

فهي تدعى بالتكرار النسبي أو التواتر .

نتيجة

نستنتج أن:

$$\boxed{f_1 + f_2 + ... + f_r = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_r}{n} = 1}$$

إلى جانب هذا يمكن أن نفسر ذلك عن طريق الجدول التالي الذي ندعوه بجدول التوزيع التكراري النسبي .

x_i **القيم**	x_1	x_2	...	x_r
n_i **التكرار**	n_1	n_2	...	n_r
التواتر	f_1	f_2	...	f_r

يمكن الاكتفاء بإعطاء الجدول التكراري فقط ، حسب ما هو معطى و مطلوب .

مثال

فيما يلي قياسات عشرة أنواع من النباتات من خلال طول الساق بالسنتم .

62, 59, 68, 62, 58, 59, 65, 62, 65, 65

المطلوب حساب التكرار و التكرار النسبي .

من أجل هذا نشكل الجدول التالي :

القيم x_i	التكرار n_i	التواتر أو التكرار f_i النسبي
58	1	0,1
59	2	0,2
62	3	0,3
65	3	0,3
68	1	0,1
المجموع	10	1

ملاحظة

نلاحظ أن العمود الثاني يحوي تكرارات القيم و التي مجموعها يساوي عشرة أما العمود الثالث فيمثل مجموع التكرارات النسبية (التواترات) الذي يساوي 1.

- **تعريف**

ندعو التكرار المجمع عند النقطة x_i العدد الذي نرمز له بـ :

$$\boxed{n_{icum} = \tilde{n}_i}$$

(حيث أن كلمة Cummulé cum نقصد بها المتجمع و لهذا نرمز لها بهذا الرمز)

المعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\tilde{n}_i = n_1 + n_2 + ... + n_i}$$

مع العلم أن :

$$.\tilde{n}_r = n_{r-1} + n_r ,........, \tilde{n}_2 = n_1 + n_2\ \tilde{n}_1 = n_1$$

♦ **تعريف**

ندعو التواتر المتجمع عند النقطة x_i العدد التالي :

$$\boxed{f_{icum} = \tilde{f}_i = f_1 + f_2 + ... + f_r}$$

حيث أن:

$$\boxed{\tilde{f}_i = \frac{\tilde{n}}{n}}$$

أما $\tilde{f}_r$ فهو يساوي الواحد .

الخلاصة هي أن التكرار المتجمع الصاعد نحصل عليه بحساب مجموع التكرار من السطر لآخر حتى نصل إلى مجموع التكرارات أما التكرار المتجمع النازل فإننا ننطلق من مجموع التكرارات و نطرح منه التكرار في كل مرة حتى نصل إلى الآخر و سنفصل ذلك بالمثال التالي :

القيم	التكرار	التكرار الصاعد	التكرار النازل
5	1	1	9
6	3	4 = 3 + 1	8 = 1 - 9
7	2	6 = 2 + 4	5 = 3 - 8
8	3	9 = 3 + 6	3 = 2 - 5
المجموع	9		0 = 3 - 3

<u>مثال</u>

القيم	1	2	3	4	5	6
التكرار	6	11	25	19	15	5
التكرار المتجمع	6	17	42	61	76	81

<u>ملاحظة</u> (التقسيم إلى فئات)

إذا كانت مفردات البيان الإحصائي كبيرة العدد كما هو الحال عند دراستنا للمتغير الإحصائي المستمر مما يجعل عملية تصنيف القياسات عملية صعبة نلجأ إلى ترتيبها ضمن فئات من الشكل:

$$[e_{i-1}, e_i[\vee]e_{i-1}, e_i[$$

هذا التكثيف له فوائده في تبسيط عملية حساب المقاييس الإحصائية و قبل القيام بذلك يجب مراعاة بعض الشروط التي تتمثل فيما يلي :

1. يجب أن تكون الفئات منفصلة مثنى مثنى أي أنه لا يجب لأي قياس أن يقع في أكثر من فئة.

2. يجب أن تغطي الفئات جميع القياسات.

3. محاولة جعل هذه الفئات ذات أطوال متساوية و ندعو التوزيعات في هذه الحالة بالتوزيعات المنتظمة كما أننا سنتعرض للحالات لما تكون الفئات ذات

أطوال مختلفة .

وللقيام بهذه المراحل نحتاج إلى التعاريف التالية :

- **تعريف المدى**

هو الفرق بين أكبر وأصغر قياس نرمز له بـ M . أما بالنسبة للفئة فإن تعريف المدى هو نفسه ما نسميه بمدى الفئة أو طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى . كما نذكر بتعريف مركز الفئة =(الحد الأعلى + الحد الأدنى) / 2 .

ملاحظة

إذا كان عدد العناصر الذي يتكون منه البيان الإحصائي هو n فإن عدد الفئات يعطى بالعلاقة:

$$N = \sqrt{n}$$

و غالبا ما يكون :

$$\boxed{5 \leq N \leq 15}$$

كما أنه يجب الإشارة إلى تعريف مجال الفئة الذي يعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{K = \frac{M}{N}}$$

مثال

أوجد التوزيع إلى فئات في كل حالة من الحالات التالية :

أ– القيم هي 32 قيمة تتراوح بين 12,5 و 27,5.

ب– القيم هي 50 قيمة تتراوح بين 1,25 و 1,90.

حل الجزء (ب)

لدينا المدى يساوي:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= 1,90 - 1,25 \\ &= 0,65 \end{aligned}}$$

أما إذا أردنا معرفة عدد الفئات فحسب ما سبق فهو يساوي :

$$\boxed{N = \sqrt{50} \cong 7}$$

أما مجال الفئة:

$$\boxed{K = \frac{0,65}{7} = 0,10}$$

انطلاقا من هذا يكون التوزيع إلى فئات كالتالي :

$$\boxed{\begin{aligned} &[1,25 \to 1,35[\ ; [1,35 \to 1,45[\ ; \\ &[1,45 \to 1,55[\ ; [1,55 \to 1,65[\ ; [1,65 \to 1,75[\\ &; [1,75 \to 1,85[\ ; [1,85 \to 1,95[\end{aligned}}$$

ملاحظة 1

هناك سبعة فئات و هي كما نرى تغطي كل القياسات التي أعطيت لنا بالإضافة إلى هذا القياس الأخير ينتمي إلى الفئة الثانية وهو خارج عن الفئة الأولى لأن كل فئتين يجب أن تكونا منفصلتين.

بنفس الأسلوب يكون حل الجزء (أ) .

ملاحظة 2

يجب التنبيه إلى أنه من أجل بيان إحصائي واحد يمكن أن يختلف جدول التوزيع بإختلاف عدد الفئات و يمكن القول دائما أن هنالك جداول أحسن من غيرها و ذلك راجع لقدرتها على بيان كل النواحي المهمة في البيان الإحصائي .

تمرين

الجدول التالي يعطينا كمية الزيوت المنتجة خلال 36 أسبوع :

12 ,5	15	18,5	15,5	16	11	11,5	12	16
11	15	16	15	12	12	16	20	23
20	15	18	18	22	15	27	18	15
16	25	18	18	17,1	20	23,5	16,8	12,5

المطلوب :

1. **رتب هذه القيم بشكل تصاعدي .**
2. **أوجد الفئات ذات طول يساوي 3 ، أوجد مراكز هذه الفئات .**
3. **أوجد التواتر و التواتر المتجمع .**

الحل

1. **نرتب هذه القيم تصاعديا كما يلي :**

$11-11{,}5-12-12{,}5-15-15{,}5-16$
$-16{,}8-17{,}1$
$18-18{,}5-20-22-23-23{,}5-25-27$

2. ترتيب القيم إلى فئات اعتمادا على الشروط المعطاة أعلاه و بتطبيق القوانين السابقة يكون كما في الجدول التالي :

ملاحظة

القيم الموجودة داخل الفئة أي المجال هي ثلاثة قيم 11, 12, 13 أما العدد 14 فهو ينتمي إلى الفئة الثانية و لهذا يكون المجال مفتوحا من اليمين وأحيانا نستخدم هذه الكتابة $(11-14($ بدلا من المجال.

التواتر المتجمع	التواتر f_i	المركز c_i	التكرار n_i	الفئات
0,222	**0,222**	**12,5**	**8**	**[11-14[**
0,583	**0,361**	**15,5**	**13**	**[14-17[**
0,777	**0,194**	**18,5**	**7**	**[17-20[**
0,888	**0,111**	**21,5**	**4**	**[20-23[**
0,971	**0,083**	**24,5**	**3**	**[23-26[**
≈ 1	**0,027**	**27,5**	**1**	**[26-29[**
	المجموع = 1		**مجموع = 36**	

مع العلم أن:

$$c_1 = \frac{11+14}{2} = 12,5$$
$$f_1 = \frac{8}{36} = 0,222$$
$$\tilde{n}_2 = n_1 + n_2 = 0,222 + 0,361 = 0,587$$

3. التمثيل البياني

الهدف منه هو تفسير المعطيات التي نطرحها في الجداول الإحصائية وهذا حسب المتغير الإحصائي في الحالتين المنقطع و المستمر.

- **المتغير الإحصائي المنقطع : (المخطط بالأعمدة)**

مثال

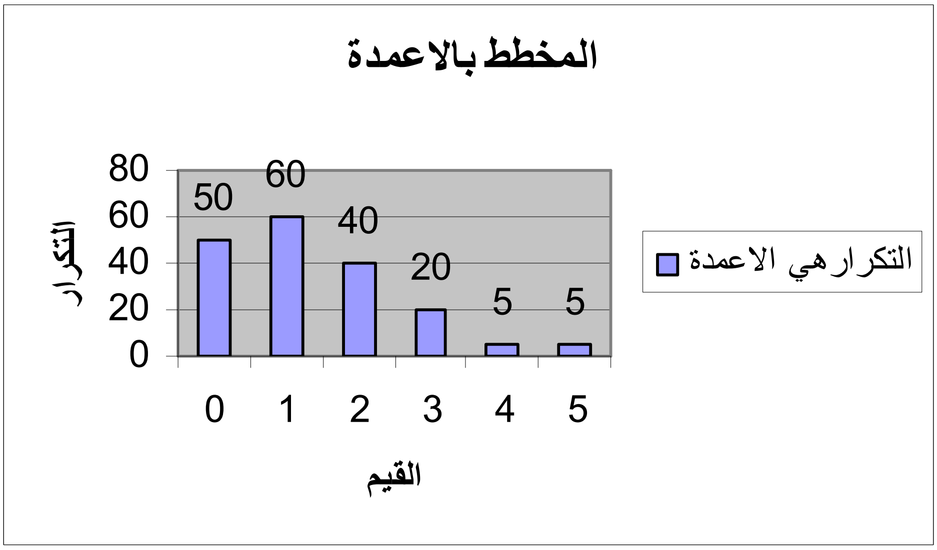
ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل عدد الأطفال حسب عدد العائلات .

عدد الأطفال x_i	عدد العائلات n_i	f_i
0	50	0,28
1	60	0,33
2	40	0,22
3	20	0,11
4	5	0,03
5	5	0,03

المطلوب:

ارسم المخطط بالأعمدة .

الحل



هذا المثال يقدم لنا مخططا بالأعمدة الذي يمثل توزيع العائلات حسب عدد الأطفال .

ويمكن التعبير عن ذلك بيانيا بواسطة المخطط الدائري .

المخطط بالأعمدة هو مجموعة كل الأعمدة ذات الفواصل x_i والتراتيب n_i.

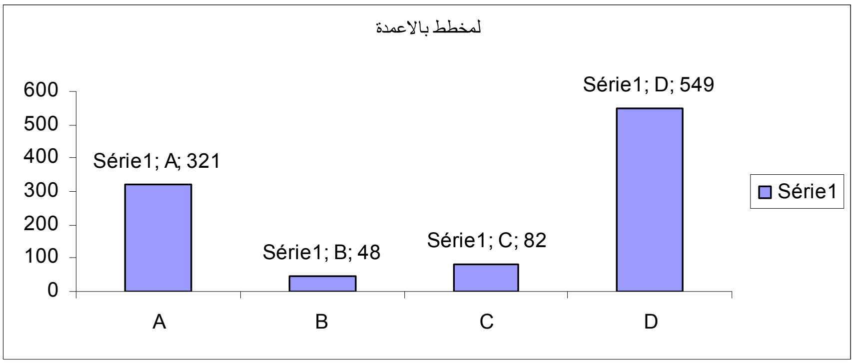
كل متغير إحصائي نعتبر العمود ممثلا لعدد تكراراته، وليس من الضروري أن يكون المتغير الإحصائي حاملا لأعداد بل يمكن جدا إعطاءه ميزات غير محددة مثل A,B,C,D,...

مثال :

ليكن لدينا الجدول التالي :

القيم x_i	A	B	C	D
التكرار n_i	321	48	82	549

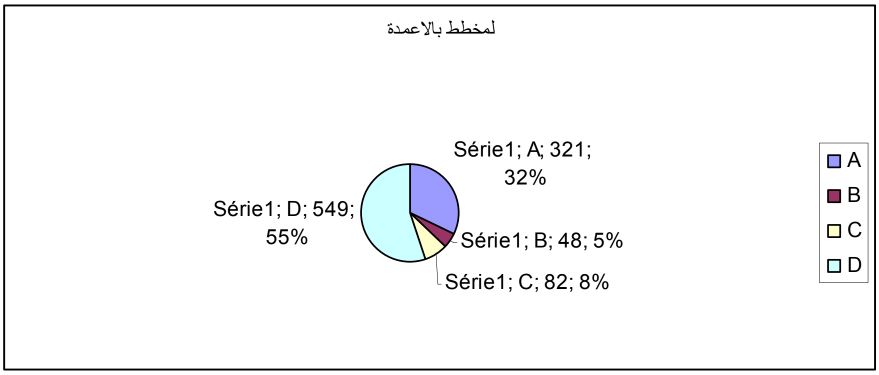
المخطط بالأعمدة



لتوضيح ذلك بالرسم على شكل مخطط دائري نحتاج إلى كتابة الجدول التالي :

$f_i \times 360^\circ$	115,56	17,28	29,52	197,64
	0,321	0,048	0,082	0,549

المخطط الدائري:



التكرار الكلي هو :

$$\boxed{\begin{aligned} n &= 321 + 48 + 82 + 549 \\ &= 970 \end{aligned}}$$

و يكون حساب الزوايا كما يلي :

$$\boxed{360 \times \frac{321}{1000} = 115{,}56}$$

و هكذا نجد الزوايا الأخرى المتبقية .

♦ **<u>المتغير الإحصائي المستمر- المدرج التكراري</u>- *(histogramme)***

هنالك حالتين :

الأولى هي إذا كانت الفئات متساوية الأطوال فإننا نمثلها بواسطة المدرج التكراري الذي يعتبر محور الفواصل حاملا لمجالات الفئات و محور التراتيب حاملا للتكرار و المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات عرضها يساوي طول الفئة و ارتفاعها يساوي عدد التكرارات الموافقة لتلك الفئة و تكون المستطيلات متلاصقة

بصورة تشبه المدرج لهذا السبب ندعوها بالمدرجات .

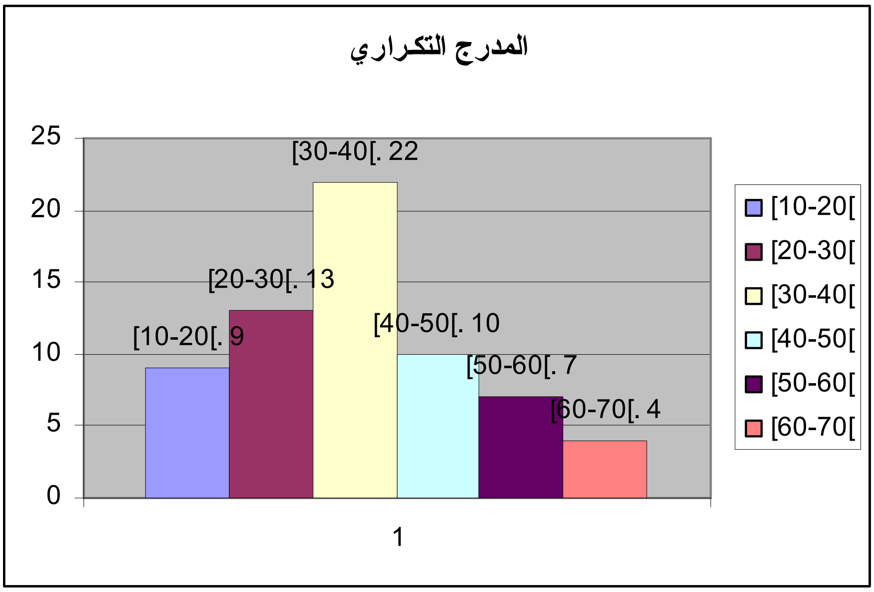
ملاحظة

في هذه الحالة لما تكون الأطوال مساوية ارتفاع المستطيل $(n_i \vee f_i \vee f_i\%)$

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي :

x_i	[10-20]	[20-30]	[30-40]	[40-50]	[50-60]	[60-70]	المجموع
n_i	**9**	**13**	**22**	**10**	**7**	**4**	**65**



ملاحظة

المدرج التكراري هو المساحة المؤلفة من مجموعة المستطيلات ، في حالة

التواتر أي التكرارات النسبية فالمساحة تساوي واحد .

يمكن إدراج القياسات في المثال السابق ضمن جدول آخر توضيحا أكثر و ذلك بإضافة عمودين يشمل الأول القيم مركز الفئة و الثاني يشمل على التواترات.

x_i	n_i	c_i	f_i
$[10-20[$	**9**	**15**	**0,13**
$[20-30[$	**13**	**25**	**0,003**
...	**22**	**35**	**0,33**
...	**10**	**45**	**0,15**
...	**7**	**55**	**0,10**
$[60-70[$	**4**	**65**	**0,06**
المجموع	**65**		

ملاحظة

نرمز بـ c_i لمركز الفئة أما $f_i = \dfrac{n_i}{n}$. أما طول المجال فهو يساوي 10 .

- الحالة الثانية عندما أطوال الفئات تكون غير متساوية . نعتبر أصغر طول هو وحدة الطول و نفضل أخذ القاسم المشترك الأكبر للأطوال . دائما ننشئ عمود آخر نرمز له بـ h_i حيث أن :

$$h_i = f_i \times \frac{a}{a_i} \vee \left(h_i = n_i \frac{a}{a_i} \right)$$

a هو أصغر طول ، هذا العمود h_i يعطينا أطوال المستطيلات المطلوب رسمها.

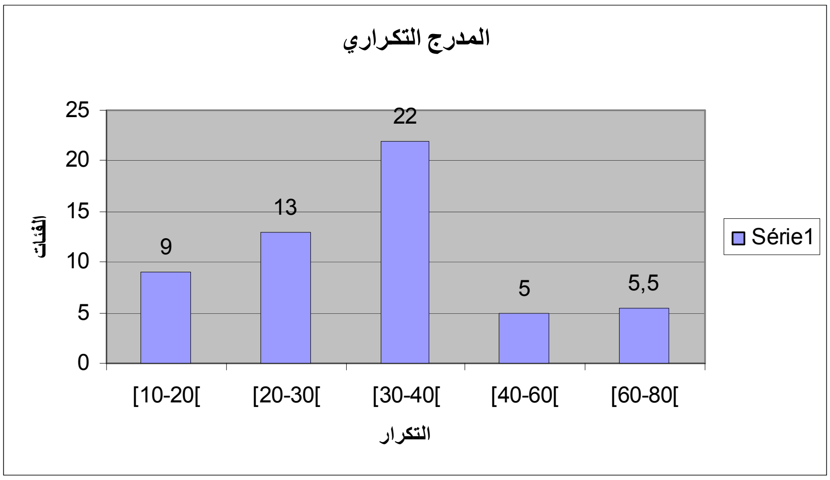
مثال

x_i الفئات	n_i	a_i أطوال الفئات	$h_i = n_i \frac{a}{a_i}$
[10-20[	9	10	9
[20-30[	13	10	13
[30-40[	22	10	22
[40-60[	10	20	5
[60-80[	11	20	5,5

المدرج التكراري لهذا التوزيع يكون كما يلي:

بعد إدخال القيم و التكرارات أو التواترات المتوفرة لدينا في ورقة *Excel* و تحديد العناصر اللازمة ننقر على *graphique* يظهر لدينا عدة أشكال نختار واحد مثلا *histogramme* أي المدرج التكراري و نتابع الخطوات بالنقر إما على *série* أو *plage de donnée* لإتمام الرسم .

يمكن تمثيل ذلك بالشكل التالي :



هذا المدرج التكراري يقارن قيم y التراتيب مأخوذة مقابل الفواصل المختلفة x.

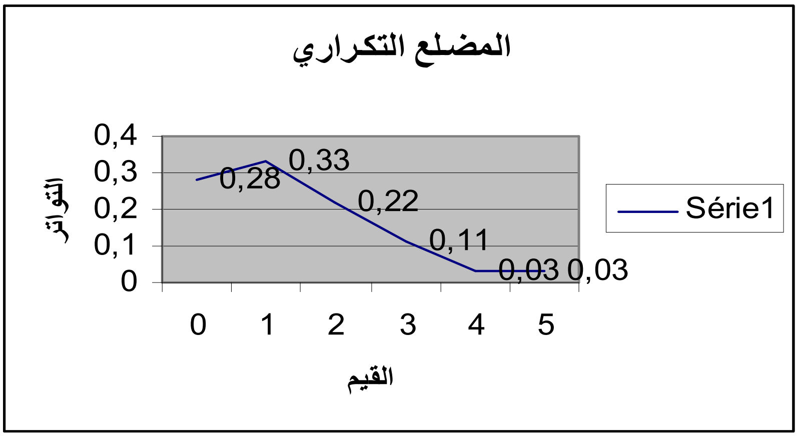
ملاحظة

إذا وصلنا منتصفات القواعد العليا للمستطيلات بخط منكسر نحصل على ما نسميه بالمضلع التكراري و ننهي هذا المضلع عادة على جانبي محور السينات بإضافة فئتين تكرار كل منهما الصفر الأولى قبل الفئة الأولى و الثانية بعد الفئة الأخيرة و يمكننا رسم المدرج التكراري و المضلع التكراري في رسم واحد .

كذلك إذا وصلنا رؤوس المخطط بالأعمدة نحصل أيضا على ما يدعى بمضلع التكرارات (أو مضلع التواترات) .

إذا رجعنا إلى المثال السابق الذي هو المخطط بالأعمدة لتوزيع الأطفال حسب العائلات فإن المضلع التكراري يكون كما يلي :

النقاط الزرقاء تمثل رؤوس الأعمدة و بعد ذلك نصلها بخط منكسر كما أشرنا إلى ذلك أعلاه.



ملاحظة

بنفس الأسلوب ننشئ مضلع التكرارات بالنسبة للمتغير المستمر لكن في هذه الحالة نصل منتصفات قاعدة المستطيلات بخط منكسر .

يمكن تفسير ذلك بأن المدرج التكراري ليس التمثيل الوحيد للمعطيات على شكل فئات بل يمكن تحويله مثلا إلى ما يسمى بالمضلع التكراري وذلك بإيصال منتصفات الفئات (قاعدة المستطيل)بخطوط مستقيمة .

ملاحظة

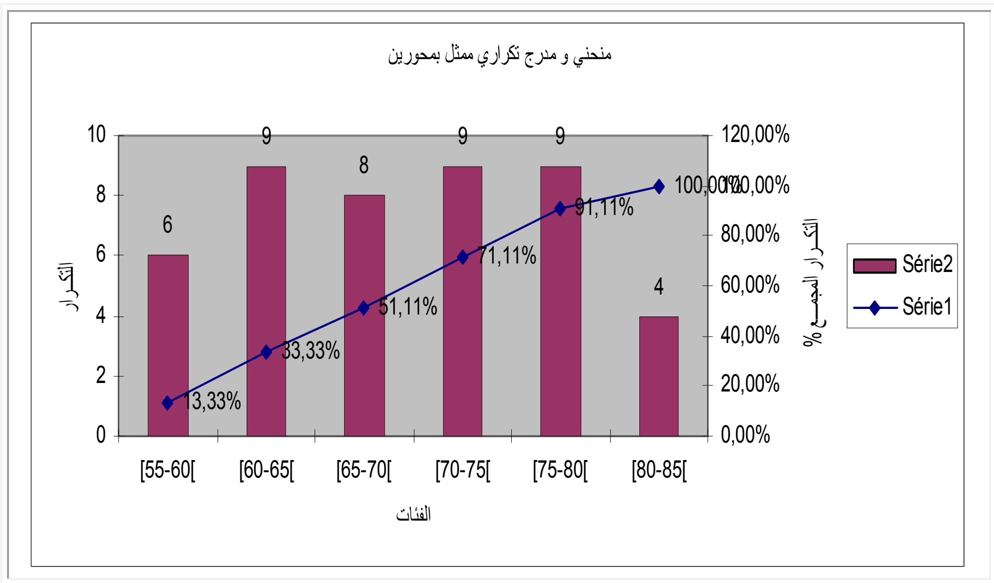
في بعض الأحيان يمكن جمع في بيان واحد المدرج التكراري و المضلع التكراري (المجمع) في وقت واحد فالمثال التالي يوضح لنا من جهة المضلع التكراري الذي هو عبارة عن خط منكسر يصل بين منتصفات فئات المستطيلات و

من جهة أخرى المدرج التكراري ذو محورين محور لقيم التكرارات و محور لقيم التكرارات المجمعة .

<u>مثال</u>

هذا المثال يعتبر تركيبة تقليدية لمدرج تكراري و منحني الذي هو المضلع التكراري المجمع ممثلين على نفس المحور.

الفئات	التكرار	% التكرار المجمع
[55-60[	6	13,33 %
[60-65[	9	33,33 %
[65-70[	8	51,11 %
[70-75[	9	71,11 %
[75-80[	9	91,11 %
[80-85[	4	100,00 %



ملاحظة

لقد رأينا أن عرض البيان الإحصائي له دور جد مهم لكن هنالك معايير أخرى تستدعي الوقوف عندها تضفي على كل ما ذكرناه زيادة في الشرح و التفصيل و الدقة في وصف البيان الإحصائي ومن بين هذه المعايير هي مقاييس النزعة المكزية ومقاييس التشتت ، أو مؤشرات الموضع و المكان. إن مؤشرات الموضع التي تتمثل في إيجاد قيمة المتوسط الحسابي ، الوسيط المنوال ... و التي تعبر عن القيمة التي تتمركز حولها القياسات المعطاة لنا نبدأها بالتعريف التالي :

المقاييس العددية الوصفية لبيان إحصائي :

مقاييس النزعة المركزية التي هي (المتوسط ، الوسيط ، المنوال) يمكن أن تساعد بواسطة قياس واحد على فهم و تفسير ما هو نموذج مثالي للمعطيات .

- **المتوسط الحسابي**

نعرف المتوسط الحسابي لمجموعة من القياسات :

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

على أنه المقدار المعرف كالتالي:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \end{aligned}}$$

للاختصار نستخدم الرمز اليوناني (سيقما) ونقصد بذلك مجموع القياسات و من

خواص هذا الرمز ما يلي :

-1 $\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i$

- 2 $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

و يمكن تعميم ذلك إلى أكثر من متغيرين .

من التعريف السابق للمتوسط الحسابي نستنتج ما يلي :

-1 $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$

- 2 $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right) = 0$

في الواقع لدينا :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x} - n\overline{x} = 0}$$

<u>بعض الخواص</u>

ليكن α عددا حقيقيا كيفي.

1. إذا أضفنا هذا العدد إلى كل المعطيات فإن المتوسط الحسابي يزداد بقدر العدد α.

2. إذا ضربنا كل المعطيات بهذا العدد فإن المتوسط الحسابي يضرب أيضا

بهذا العدد.

- **المتوسطات الجزئية**

إذا كان لدينا مجموعتين منفصلتين لهما بالتوالي التكرار و التواتر $\overline{x_1}, n_1$

و $\overline{x_2}, n_2$ فان متوسط المجموعة الكلية هي :

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$

مثال

لتكن لدينا علامات ثمانية تلاميذ 3,5,7,9,10,11,12,18 (على 20).

المتوسط الحسابي أو المعدل هو :

$$\bar{x} = \frac{3+5+7+9+10+11+12+18}{8} \\ = 9{,}375$$

أما في حالة القياسات المكررة و التي تدعى بالقياسات المبوية فإن المتوسط الحسابي يعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i \quad / \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

نتيجة

المتوسط هو القيمة أو القياس المتوسط (المعدل) الذي ينتمي لمجموعة

المعطيات و هو يساوي في الحالتين الأولى والثانية مجموع قيم الملاحظات قسمة عدد الملاحظات .

مثال

لتكن لدينا القياسات التالية 3,3,3,6,9,9,11,11 فإن المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(3\times3 + 1\times6 + 2\times9 + 2\times11)$$
$$= 6,87$$

ولما كان التواتر :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

فإننا نكتب المتوسط بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i$$

مثال

يمكن إدراج القياسات ضمن جدول كما يلي :

القيم	-2	-1	0	1	2
التكرار	3	7	8	5	4

وبعد ذلك نحسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة السابقة فنجد المتوسط الحسابي يساوي الصفر.

- **<u>المتوسط الحسابى فى حالة المتغير المستمر</u>**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i}$$

حيث أن c_i هو مركز الفئة i.

ملاحظة

يجب أن ننتبه خلال حسابنا للمتوسط عندما يكون المتغير منقطع و مستمر:

مثلا الهداف في مباراة ما يمكن أن يصيب هدف 1 أو 2 هدف و ليس 1,5 هدف في حين يمكن تقسيم المتغيرات المستمرة إلى وحدات أصغر مثلا يمكننا القول إن عمر سعيد 11 سنة و7 أشهر و8 أيام بدلا من القول 11 أو 12.

مثال

في إحدى التحقيقات لأحسن هداف كرة القدم في العالم خلال عشرة دورات كان عدد الأهداف كما يلي:

7, 5, 0, 7, 8, 5, 5, 4, 1, 5,

المطلوب :

حساب متوسط الأهداف المحسوبة .

الحل

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(7+5+0+7+8+5+5+1+5)$$
$$= \frac{47}{10}$$
$$= 4,7$$

المتوسط في هذا المثال لا يوجد له معنى لأنه لا يمكن أن نصيب $4,7$ **هدف**

ولهذا يطلق عليها اسم المتغيرات المنقطعة وأحيانا المنفصلة discrète .

خلاصة

من بين الخواص المستخدمة كثيرا في الإحصاء هي الخاصة التالية :

ليكن y **متغيرا إحصائيا و ليكن a,b عددين حقيقيين و لنعتبر x متغيرا إحصائيا معرفا كما يلي :**

$$\boxed{x = ay + b}$$

عندئذ يكون لدينا :

$$\boxed{\bar{x} = a\bar{y} + b}$$

نأخذ b هو منتصف الفئة المنوالية ونعتبر a هي طول الفئة .

مثال

الفئات	c_i	n_i	$y_i = \frac{x_i - b}{a}$	$n_i y_i$
[38 ;40 [	39	11	-3	-33
[40 ;42 [	41	28	-2	-56

[42 ;44 [	43	16	-1	-16
[44 ;46 [	45	25	0	0
[46 ;48 [	47	15	1	15
[48 ;50 [	49	5	2	10
المجموع		100		-80

ملاحظة

من خلال الخاصة السابقة لدينا :

$$b = 45 \quad ; a = 2$$

و منه :

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i y_i \\ &= \frac{-80}{100} \\ &= -0,80\end{aligned}$$

و بالتعويض في العلاقة السابقة نجد :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= a\overline{y} + b \\ &= 2(-0,80) + 45 \\ &= 43,40\end{aligned}$$

إذا أردنا التحقق من ذلك أي من استخدام العلاقة نجد ما يلي :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i c_i$$
$$= \frac{4340}{100}$$
$$= 43,40$$

تمرين

في إحدى التحقيقات قام بها أحد الباحثين لأربعون مؤسسة تحصل على قائمة لرواتب العمال كما يلي:

32	58	59	52	53	43	37	39	86	40
51	30	52	50	51	36	79	63	64	48
82	53	24	59	20	44	45	45	41	75
90	61	55	22	56	47	76	62	66	99

ملاحظة

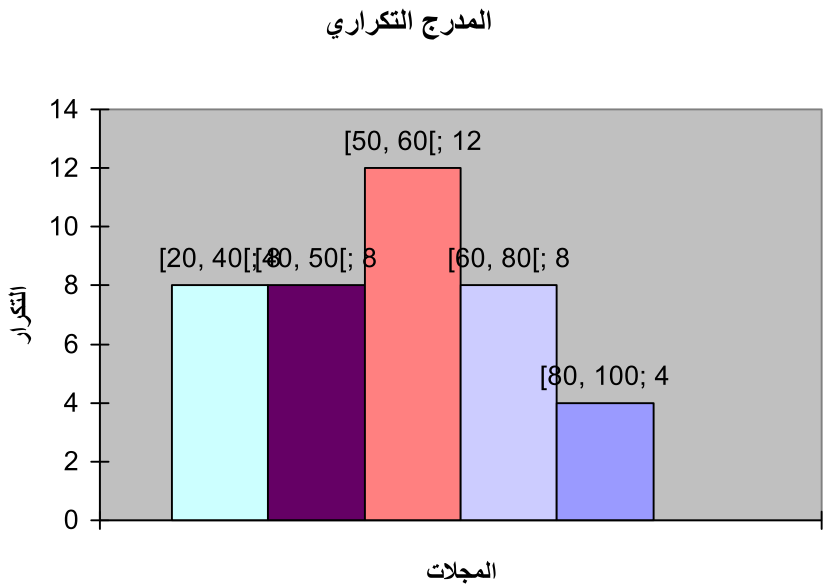
نلاحظ أن المجتمع الإحصائي مؤلف من 40 مؤسسة أما الوحدة الإحصائية فهي عدد العمال الذين يتحصلون على راتب و هي كما نلاحظ كمية عددية تتراوح قيمتها بين 20 و 99، في الواقع كل قيمة تقابلها تكرارا الذي هو بدوره عددا طبيعيا إلا أننا إذا حولناه إلى توزيع مستمر يسهل الكثير من الانشغالات التي قد يتعرض لها الباحث كما أنه يضفي على البيان الإحصائي الكثير من التوضيحات ولأجل ذلك

التوزيع سيكون مستمرا والتمثيل البياني يكون عبارة عن مدرجا تكراريا وقبل هذا نستعرض الجدول التالي :

x_i	$h_i = n$	a_i	$h_i = n_i \frac{a}{a_i}$
[20, 40[	8	20	4
[40, 50[	8	10	8
[50, 60[	12	10	12
[60, 80[	8	20	4
[80, 100[	4	20	2

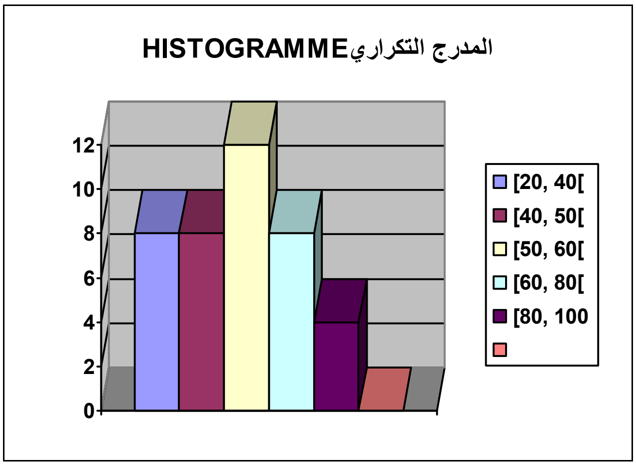
حيث أن a_i هي أطوال الفئات وأما h_i فإنها تمثل ارتفاعات المستطيلات التي نرسمها في المدرج التكراري و هي محمولة على محور التراتيب . أما إذا أردنا حساب المتوسط الحسابي لهذه القياسات فإننا يجب حساب أولا مراكز هذه الفئات و بعد ذلك نستخدم العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i$$



ملاحظة

يمكن تمثيل المدرج التكراري بشكل آخر كما هو مبين لنا في الرسم التالي :



♦ **تعريف المنوال**

المنوال لمجموعة من القياسات هو القياس الأكثر تكرار بالنسبة للقياسات

الأخرى فإذا وجد فهو ليس من الضرورة أن يكون وحيدا أما إذا كان لجميع القياسات نفس التكرار فإننا نقول أنه غير موجود.

♦ **تعريف**

الفئة المنوالية هي الفئة ذات أكبر تكرار إذن يمكن تعريف المنوال على أنه مركز الفئة المنوالية وهذا في حالة المتغير المستمر.

نلاحظ أن الفئة المنوالية في المثال السابق هي الفئة ذات الأكبر تكرار أي 12 وهي بالضبط الفئة [50,60].

♦ **تعريف الوسيط**

نعرف الوسيط لمجموعة من القياسات $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ بأنه القياس الذي يقع في الوسط بعدما نكون قد رتبناها بشكل تصاعدي أو تنازلي أي أنه القياس الذي رتبته هو:

$$\boxed{\frac{n+1}{2}}$$

و هذا إذا كان عدد القياسات عددا فرديا.

أما إذا كان عدد القياسات زوجيا فان الوسيط هو المتوسط الحسابي للقياسيين الذين رتبتيهما هي :

$$\frac{n}{2} \quad و \quad \frac{n}{2}+1$$

نفهم من هذا أن الوسيط هو القيمة التي تنصف السلسلة الإحصائية إلى نصفين متساويين أي أن هنالك عددا من القياسات من الأعلى مساويا للعدد الموجود من الأدنى .

لتكن لدينا القياسات التالية :

18 43 Δ44Δ 46 62

1. نلاحظ أن الوسيط في هذه الحالة = 44

(n فردي إذن فهو القيمة ذات الرتبة $n+1/2$).

18 43 44 Δ45Δ 46 62 95

2. الوسيط في الحالة = 45 (n زوجي إذن هو المتوسط الحسابي للقيمتين التين رتبتيهما هي 3 و 4) .

<u>ملاحظة</u>

عندما نغير القيم الحدية لسلسلة إحصائية المتوسط الحسابي يتغير فيحين الوسيط يبقى ثابتا أي لا يتغير نقول عندئذ أن المتوسط "حساس لقيمة الحدية " نحاول تفسير ذلك بما يلي :

8 9 10 11 1

في هذه الحالة المتوسط و الوسيط متساويان .

أما بالنسبة للسلسلة الجديدة التالية :

8 9 10 . 12 . 14

في هذه الحالة المتوسط هو أهم من الوسيط نقول عندئذ إن " السلسلة تميل بصورة كبيرة نحو اليمين ". المتوسط = 12,5 أما الوسيط = 10 .

مثال

اوجد الوسيط لمجموعة القياسات التالية :

2, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 9

نرتبها أولا: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 9

إذن هو المتوسط الحسابي للقياسين الذين رتبتيهما هي 4 و 5 أي (4+5/2)

إذن الوسيط هو 4,5.

مثال

نفس السؤال بالنسبة لمجموعة القياسات التالية :

3, 4, 8, 9, 10, 16

نلاحظ أن هذه القياسات مرتبة فالوسيط هو المتوسط الحسابي للقياسين 8 و 9 أي أنه يساوي 8,5

فمثلا :

المجموعة التالية: 7-2-4-8-7-4 يوجد لها منوالين هما 4 و 7.

- **<u>الوسيط في حالة القياسات المبوبة أي المكررة</u> :**

حساب الوسيط يتم بالمراحل التالية :

1- مرتبة الوسيط = (مجموع القياسات +1)/2

2- للحصول على الوسيط نجمع التكرارات المعطاة في عمود التكرار فنجده يقع عادة بين قياسين كما يلي:

الوسيط = (القياس قبل هذه المرتبة + القياس بعد هذه المرتبة)/2 .

<u>مثال</u>

ليكن لدينا الجدول التالي:

عدد ضربات التيار	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	2	0	2	4	1

مرتبة الوسيط تساوي	$\left(\begin{array}{l}\frac{n+1}{2}=\frac{10+1}{2} \\ =\frac{11}{2} \\ =5,5\end{array}\right)$

للحصول على الوسيط نجمع الأعداد المسجلة في عمود التكرار إلى أن نصل إلى هذه المرتبة و عادة تقع بين قياسين ففي هذا المثال فهي محصورة بين الخامس والسادس و منه فإن الوسيط هو متوسط الضربتين 7 و 8

أي:

$$\frac{(7+8)}{2}=\frac{15}{2}$$
$$=7,5$$

<u>تمرين</u>

أوجد المتوسط و الوسيط و المنوال و فسر علاقة كل واحد بالآخر حسب المعطيات التالية :

x_i	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
n_i	**3**	**7**	**8**	**5**	**4**

x_i	**6,3**	**6,4**	**6,5**	**6,6**	**6,7**	**6,8**
n_i	**2**	**1**	**6**	**5**	**13**	**4**

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n_i	**15**	**5**	**3**	**1**	**2**

<u>الحل</u>

بالنسبة للجدول الأول المتوسط و المنوال و الوسيط هي متساوية و تساوي الصفر ندعو هذا التوزيع بالتوزيع المتناظر .

أما الجدول الثاني فإن المتوسط يساوي 6,6 و الوسيط = 6,7 أما المنوال = 6,7 .

في هذه الحالة التوزيع ينسحب نحو اليسار فالمتوسط أصغر من الوسيط أما

الوسيط و المنوال فهما متساويان إذن الوسيط هو أحسن قياس للنزعة المركزية

عندما يكون التوزيع غير متوازن *désaxées*.

في الجدول الثالث نجد المتوسط = 1,85 أما الوسيط = 1 و المنوال = 1.

نلاحظ أيضا إن التوزيع غير متوازن لكن في هذه المرة التوزيع ينسحب نحو اليمين

فالمتوسط أكبر من الوسيط و يبقى الوسيط دائما أحسن قياس للنزعة المركزية .

<u>تمرين</u>

لنفرض أن الزمن المستغرق لمسابقة رياضة السباق الخاصة بـ 100 متر

هي كما يلي:

26,0 - 26,2 - 26,7 - 26,6 - 27,1

1- ما هو الوسيط ؟

نفرض أن هذا اللاعب أجرى مسابقة أخرى لـ 100 متر فكانت 25,7 .

2- ما هو الوسيط ؟

<u>إرشادات</u>

في الحالة الأولى نجد الوسيط = 26,6. في الحالة الثانية الوسيط = 26,4 .

<u>تمرين</u>

الجدول التالي يبين لنا الأهداف المسجلة لإحدى مباراة كرة القدم خلال عشرة سنوات .

العدد	الاهداف
1	5
2	6
0	7
2	8
4	9
1	10
10	المجموع

أحسب الوسيط .

<u>إرشادات</u>

حسب القانون الوسيط = مرتبة مجموع عدد الضربات زائد واحد تقسيم اثنان = مرتبة (5,5).

للحصول على الوسيط نجمع القيم في عمود عدد الضربات حتى نصل إلى 5 (لأن عدد الضربات تساوي 10)أيضا يجب أن يكون عدد الضربات المتبقية تساوي 5 و منه يتبين لنا أن الوسيط محصور بين الضربتين 7 و 8 فيكون لدينا متوسط القيمتين يساوي 8,5 و إن كان الوسيط في هذه المرة قيمة ليست ممكنة لأنه لا يمكن تسجيل 8,5 هدف إلا أنه مقبول من وجه الدراسات الإحصائية و كثيرا ما تقرب إلى القيمة الأقرب و هي 9 .

- **المنوال في حالة المتغير المستمر (على شكل فئات)**

أما إذا كانت المعطيات مرتبة في فئات فإن فئة الوسيط هي التي تظهر فيها التكرارات النسبية المجمعة بصورة عامة لحساب الوسيط من بيانات مبوبة نتبع الخطوات التالية :

i. نحسب ترتيب الوسيط العام وذلك بتقسيم مجموعة التكرارات على 2 .

$$\boxed{n = \sum_{i=1}^{n} n_i}$$

حيث $r = \frac{n}{2}$ **رتبة الوسيط .**

ii. نحسب عمود التكرار المتجمع لتحديد ترتيب الفئة الوسيطية وذلك بأن نبحث

على القيمة المقابلة للقيمة $\frac{n}{2}$ **وأكبر منها في حالة عدم وجودها ونستخدم من أجل ذلك القانون التالي :**

$$\boxed{m_l = m_1 + \frac{r + s}{n_0} k}$$

حيث أن :

m_1 **: الحد الأدنى للفئة الوسيطية .**

r **: ترتيب الوسيط.**

n_0 **: تكرار الفئة الوسيطية أما** s **فهو مجموع التكرارات قبل الفئة الوسيطية .**

ملاحظة

إذا كانت المعطيات موزعة على شكل فئات فعندئذ لا يمكن تحديد القيمة الحقيقية للوسيط (أي الفئة الوسيطية).

مثال

المعطيات التالية موزعة على شكل فئات ضمن جدول:

التواتر المتجمع	التواتر	الفئات
10%	10%	[0-2[
48%	38%	[2-4[
93%	45%	[4-6[
100%	7%	[6-8[

نلاحظ

إن % 48 من القيم هي اصغر تماما من 4 و 93 بالمئة أصغر تماما من 6 .

يمكننا استنتاج أن الفئة الوسيطية تكون بين 4 و 6.

تمرين

ليكن التوزيع التالي :

i. اتمم الجدول التالي :

الفئات	f_i	$\tilde{n}_i$	c_i	
[10-20[	0,18			
[20-30[	0,27			
[30-40[		0,54		
[40-50[		0,72		
[50-60[		1		

ii. مثل بيانيا هذا الجدول (المدرج التكراري).

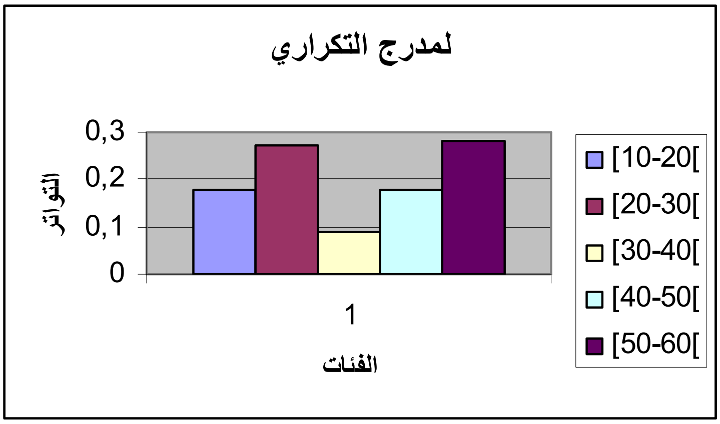
iii. احسب مقاييس النزعة المركزية و علق على النتائج .

الحل

في الأول نتمم الجدول المعطى كما يلي :

الفئات	f_i	$\tilde{n}_i$	c_i	$f_i \times c_i$
[10-20[	0,18	0,18	15	2,7
[20-30[	0,27	0,45	25	6,75
[30-40[	0,09	0,54	35	3,15
[40-50[	0,18	0,72	45	8,1
[50-60[	0,28	1	55	15,3
				المجموع = 36,2

التمثيل البياني :



الفئة المنوالية هي:]50-60[تقابل أكبر تكرار نسبي .

المتوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \sum f_i c_i = 36,2$$

الفئة الوسيطية هي :]30-40[.

$$m_l = 30 + \frac{(0,5 - 0,45)\ 10}{0,09} = 35,55$$

حيث أن $0,09$ **هي التواتر الخاص بالفئة الوسيطية .**

2 <u>مقاييس التشتت</u>

إذا لاحظنا المجموعتين التاليتين أو السلسلتين من القياسات التالية :

$$\begin{cases} 95 - 97 - 100 - 103 - 105 \\ 50 - 75 - 100 - 125 - 150 \end{cases}$$

فإننا نلاحظ أن لهما نفس المتوسط الحسابي و نفس الوسيط وهو 100 في حين أننا نرى أنهما يختلفان تماما الواحدة عن الأخرى من حيث درجة تبعثرهما و تشتتهما حول المركز و فيما يلي بعض المعايير لقياس هذا التبعثر أو التشتت وهي كما سبق وعرفناه المدى و هو الفرق بين أكبر قياساتها و أصغرها و لما كان هذا الأخير يعتمد فقط بالقياسين الأكبر و الأصغر و هذا قد يسبب بعض المشاكل إذا كانت القيمتين شاذتين و ربما تكون القياسات متقاربة إلى بعضها البعض، و لهذا يلجأ الاحصائيون إلى حساب ما يسمى بمتوسط الانحراف .

- **تعريف (متو سط الانحراف)**

لتكن $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ مجموعة من القياسات متوسطها $\bar{x}$ متوسط الانحراف لهذه القياسات بأنه متوسط القيم المطلقة لانحرافات القياسات عن متوسطها ويرمز له بـ D ويعطى بالعلاقة التالية :

$$D' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left| x_i - \bar{x} \right| \right)}{n}$$

أما في حالة القياسات المبوبة أي القياسات المكررة فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي :

$$D' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left| x - \overline{x} \right| \right) \times n_i}{n}$$

ملاحظة

بالإضافة إلى هذا التعريف هناك تعريفات أخرى غير مقررة في البرنامج المطلوب لكنني أردت أن أضيفها إلى هذه الفقرات لأنها تزيد في توسيع المعلومات المحتواة في هذا الكتاب يستفيد منها إخواننا الأساتذة أولا و أبنائنا التلاميذ من مختلف المستويات من مرحلة التعليم الثانوي فما فوق إلا وهي التباين والانحراف المعياري :

- **تعريف (تباين مجتمع)**

تباين مجتمع يحوي n قياسا $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n$ هو مربعات انحرافات القياسات عن متوسطها نرمز له بـ σ^2 ويعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu \right)^2$$

ملاحظة

متوسط المجتمع في هذه الحالة نفرضه معلوم لأن جميع قياسات المجتمع معلومة

$$\overline{x} = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1} x_i$$

♦ **تعريف (الانحراف المعياري)**

الانحراف المعياري σ لمجتمع هو الجزء التربيعي الموجب للتباين أي أن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

ملاحظة

لما كانت الدراسة على المجتمع صعبة المنال لضخامتها نرجع دائما لأخذ عينة عشوائية ونفرض أن القياسات الموافقة لعينة مفروضة هي تقديرات لمثيلاتها في المجتمع و لهذه بدلا ما نبحث عن التباين لمجتمع ما فإننا نأخذ عينة حجمها n مثلا و نحسب تباينها .

♦ **(تباين عينة)**

تباين عينة من القياسات $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n$ هو :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

حيث $\bar{x}$ هو متوسط العينة .

أما الانحراف المعياري لعينة من القياسات فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين .

مثال

أحسب التباين و الانحراف المعياري لمجموعة القياسات التالية :

2,4,7,5,12

الحل

أولا لدينا المتوسط:

$$\bar{x} = \frac{2+4+5+7+12}{5} = 6$$

ومنه الجدول التالي :

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	**-4**	**16**
4	**-2**	**4**
7	**1**	**1**
5	**-1**	**1**
12	**6**	**36**
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 58$

من خلال التعريف نجد التباين و الانحراف المعياري كما يلي :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{58}{4} = 14.5 \Rightarrow S = \sqrt{14.5} = 3.8$$

ملاحظة

إن هذه الطريقة لحساب التباين هي طريق صعبة تنقصها الدقة وخاصة إذا احتوى المتوسط الحسابي على عدد عشري و لكي نتفاد الخطأ في الحسابات نستخدم لتعريف التالي :

♦ **تعريف**

إذا كانت $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n$ **عينة من القياسات فإن التباين يعطى**

بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

والبرهان على ذلك يكون كما يلي :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left[x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i^2 + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right]$$

إذا رجعنا إلى المثال السابق فإننا نغير هذه المرة الجدول و يصبح كما يلي :

القيم x_i	2	4	7	5	12	المجموع = 30
القيم x_i^2	4	16	49	25	144	المجموع = 238

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i) 1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[238 - 5\times 36\right]$$

$$= 14.5$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{14.5}$$

$$= 3.8$$

وهي كما نلاحظ نفس النتيجة السابقة في حين الحسابات كانت أقل و الجدول

أعطي بشكل مختصر .

سلسلة تمارين خاصة بالمتوسط الحسابى ، الوسيط ، المنوال

التمرين الأول

تصور أن الازدياد السنوي لمجتمع خلال عشرة سنوات كما مسجلة في

الجدول التالي :

الازدياد بالنسبة إلى السنوات السابقة	عدد السنوات
53377	1
52170	2
67000	3
90332	4
72681	5
65226	6
76777	7
83657	8
77753	9
82892	10

- احسب متوسط الازدياد السنوي لهذا المجتمع .

- احسب الوسيط .

- هل الفرق بين هذين القياسين له دلالة ؟برر اجابتك .

التمرين الثاني

فيما يلي عدد المكالمات لـ 40 هاتف نقال .

-3-4-9-3-2-4-7-9-6-8-7-3-7-10-3-4-5-8-7-2-1-7-4-9-5-6-9-8-10-9
1-7-9-7-2-5-7

- **اكتب جدول التواترات لهذه القيم .**

- **من خلال الجدول أوجد المتوسط الحسابي و الوسيط و المنوال.**

- **فسر هذه النتائج .**

<u>التمرين الثالث</u>

فئات خاصة بالسن	عدد المتفوقين في الدراسة
3688	[15-20[
4031	[20-25[
5432	[25-35[
4360	[35-45[
3162	[45-55[
1702	[55-65[

- **أحسب الوسيط .**
- **ما هو المجال الخاص بالفئة المنوالية ؟**
- **قارن بين النتائج التي تحصلت عليها.**
- **لماذا عدد المتفوقين في الدراسة ينقص بعد الفئة الثالثة .**

التمرين الرابع

الجدول التالي يبن لنا عدد المبيعات خلال سنة لإحدى الشركات :

التكرار	الفئات
80	[50-150[
160	[150-250[
720	[250-350[
1650	[350-450[
2720	[450-550[
1760	[550-650[
640	[650-750[
160	[750-850[
80	[850-900[

- **ما هو المدى لهذه السلسلة الإحصائية ؟**
- **ما هي الفئة المنوالية ؟**
- **انشئ المدرج التكراري .انشئ مضلع التواترات المتجمعة .**

مساعدة لحل هذا التمرين :

المدى $M = 900 - 50 = 850$

الفئة المنوالية هي [450-550[

$\frac{a_i}{a} = h_i$	2	2	2	2	2	2	2	2	1
$\frac{n_i}{n}$	40	80	360	840	1360	880	320	80	80

الوسيط:

$$m_I = 450 + 50\frac{1360 - 550}{(1360 - 840) + (1360 - 880)}$$
$$= 476$$

6. المحاكاه و تذبذب العينات

La simulation et fluctuation

يعد هذا الموضوع من المواضيع بالغة الأهمية في وقتنا الحالي حيث انتشر بشكل واسع ضمن برامج التدريس في المرحلة الثانوية في كثير من بلدان العالم وهذا لما له من قيمة ليس فقط كونه إحدى أدوات ثقافة علم الرياضيات بقدر ما هو محرك لذهنية التفكير لدى التلميذ و دفعه إلى ما يسمى بالجدل من جهة ومن جهة أخرى يتمكن التلميذ من مواكبة هذا التطور العلمي الذي أصبح يزداد توسعا بشكل سريع جدا .

إننا حين نتناول هذا الموضوع قد نجد صعوبة في البداية لكننا سرعان ما تصبح ممكنة بعد التحكم الجيد في استعمال أدوات الظاهرة أو التجربة التي هي بصدد الانجاز و تؤدي في الأخير إلى نتائج أكثر وضوحا قائمة على أساس علمي و

موضوعي .

من بين الكلمات التي نصادفها عند تناولنا هذا الموضوع هي المتغير (الإحصائي) في الواقع إن المتغير هي الكلمة المفتاح في الإحصاء و إن استعاب مفهوم المتغير لحدث أو لظاهرة ليس فقط اعتبار أن النتائج المتحصل عليها هي موضع التغير بل يمكن اعتبارها في إطار الملاحظة و التجربة أنها بالضرورة قابلة للتغير و أحيانا غير متوقعة أي تقبل بوجود التذبذب أي الانتقال من الحقيقة المؤكدة إلى توقعات غير منتظرة .

الخلاصة أن هذا البرنامج يطالبنا بملاحظة التغير في توزيع التواترات للاستئناف في دراسة تذبذب العينات التي نحصل عليها من المحاكاة .

إن استخدام الحاسوب و الآلة الحاسبة من الأدوات اللازمة في هذا الوقت ليس هذا فحسب بل هو الجزء المكمل لكل أعمالنا في مختلف الميادين و يعتبر الإحصاء إحدى هذه المجالات الجديرة باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب سواء كان ذلك في الحسابات أو التمثيل المعلومات بيانيا .

إن أهم الفقرات التي يجب الاهتمام بالبحث فيها و تزويد تلاميذنا و طلابنا بالكثير من المعلومات و التطبيقات الخاصة بها هي :

1. محاكاة تجربة .
2. تذبذب العينات .

3. استقرار التواتر .

هذه العناصر من حيث تقديمها لا تعتمد على دروس نظرية بل على التجارب و النشاطات و اختيار نموذج للتجربة التي كثيرا ما نجدها متبوعة بكلمة "حظ" مثلا حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد .كذلك فان هنالك كلمات تتكرر كثيرا عند تناولنا لهذا الموضوع ألا و هي العشوائية مثلا و أخرى مثل Excel نحاول ساعين إلى توضيح بعض المفاهيم و شرحها لما يمكن أن تقدمه لنا هذه الكلمات الجديدة و غيرها من فائدة للوصول إلى مبتغانا و هذه الكلمات هي ثلاثة مفاهيم أساسية و جديدة لمقرر الإحصاء في بابه الأخير هي :

المتغير الإحصائي وهنا يجب الانتباه إلى أن مفهوم التغير يعني تغيرا لظاهرة ما تؤدي إلى ملاحظة ما يسمى بالتذبذب أو تغير توزيع التواترات الذي يسمح لنا بالدخول في مفهوم تذبذب العينات و المحاكاة التي تعتبر الباب الرئيس للإحصاء في منهاج هذه السنة .

فالعنصر الهام الذي هو المحاكاة يعني اختيار نموذج أو مثال لتجربة نقوم بها .

إن انجاز محاكاة بالنسبة إلى البرنامج الثانوي يعني تحقيق قائمة من النتائج بحيث أننا نرفقها إلى عينة من هذه التجربة و المحاكاة التي نتناولها تقتصر على التجارب البسيطة ذات الحظوظ المتساوية في الوقوع .

أما عن تعريف تذبذب العينة فالحديث أولا يرجع إلى تسليط الضوء على

مفهوم العينة حيث أننا ندعو عينة ذات الحجم n لتجربة قائمة النتائج التي نحصل عليها بعد انجاز هذه التجربة ، نقول أيضا إن العينة هي قائمة من النتائج لـ n تجربة متماثلة و مستقلة بالنسبة إلى هذه السنة نتطرق فقط إلى عينات مأخوذة من تجارب ذات عددا محدودا من النتائج الممكنة نتطرق أيضا إلى توزيع التواتر بحيث أن هذا التوزيع يختلف من عينة تاى تخرى من نفس التجربة و هذا ما نسميه بالضبط تذبذب العينة و سنحاول تقديمه في قالب بسيط مثل (رمي حجر النرد ، رمي قطعة نقدية) ...

في الواقع إن الفكر الإحصائي يولد عندما ندرك معنى وجود هذا التذبذب لعينات مأخوذة من تجارب واقعية فالباحث يستطيع أن يفهم و يدرك أنه دائما بين عينتين ذات نفس الحجم أم لا، ولكن يظهر دائما ما نسميه بالتذبذب لتوزيع التواترات بالإضافة إلى هذا فان مستوى التذبذب الخاص بالعينات ذات الحجم n يضعف كلما كبر n .

فالحدث العشوائي هو كل حدث عندما يلاحظ في ظروف محددة لا يؤدي إلى نفس النتيجة، إن نقطة الانطلاق في حساب الاحتمالات و الحوادث العشوائية هي الدراسة المتعلقة بمفهوم الحظ مثلا رمي قطعة نقود، رمي حجر النرد، سحب بطاقة، ... إلى جانب هذا احتمال حدث عشوائي لا يكون صحيح إلا في ميدان التجربة.

إذا أخذنا تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة فمن خلال التناظر الذي نلاحظه من الطبيعي إن هنالك حظ على اثنين للحصول على الصورة أو أن احتمال وقوع هذا الحدث هو 0,5 إن هذا يؤدي إذا كررنا التجربة n مرة و إذا كان في كل مرة تظهر الصورة فإن $\frac{k}{n}$ الذي ندعوه بالتواتر أو التكرار النسبي للحدث ظهور الصورة يساوي 0,5 من خلال هذا نستنتج أن احتمال الحدث هو النهاية التي يسعى إليها التواتر عندما نكرر التجربة n مرة حيث هذا الأخير يكبر أكثر فأكثر.

بالإضافة إلى ذلك قولنا احتمال ظهور صورة هو 0,5 لا يعني انه إذا القينا القطعة النقدية 1000 مرة نتحصل دائما على 500 صورة و لكن يمكننا القول إن هذا العدد يقترب من 500.

كذلك إننا نتوقع دائما أن هنالك حظ واحد على 6 للحصول على احد الأوجه الستة لحجر النرد , إن تواتر وقوع احد الأوجه للحجر يجب إن يساوي $\frac{1}{6}$ أي يقترب من 17% .

الخطوة الأولى

لنتحقق من هذا بالقيام بهذه المحاولات :

إذا طلبنا من التلميذ انجاز 100 رمية لحجر النرد فإننا نريد بذلك ملأ الجدول التالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6	المجموع
التكرار	12	34	10	21	13	10	100
التواتر	0,12	0,34	0,10	0,21	0,13	0,10	1

هذه السلسلة لعملية رمي حجر النرد تدعى في الإحصاء عينة .

و السؤال هل هذه التواترات التي نحصل عليها تكون قريبة من 17 بالمئة فهل يمكن استنتاج أن فرضية الانطلاق كانت خاطئة ؟.

إذا قمنا بعمل مشابه و في نفس الظروف مع مجموعة من الزملاء و أجرينا مقارنة بين النتائج المتحصل عليها فهل نتحصل على نفس التوزيع للتواترات ؟ فهل نحصل على ما نسميه بتذبذب العينة ؟.

في الواقع عندما نريد المقارنة بين العينات ذات نفس الحجم فانه بقدر ما كان التذبذب واضحا بقدر ما كانت غير قابلة للتعميم على المجتمع و في هذه الحالة التواترات لا تكون قريبة من 17 بالمئة .

و لما كانت العينة ذات الحجم الكبير قابلة للتعميم على المجتمع فانه إذا جمعنا كل النتائج المتحصل عليها من طرف الزملاء في جدول كالتالي :

الوجه	1	2	3	4	5	6	المجموع
التكرار							
التواتر %							

حيث رميات الحجر = حجم العينة × 100

فإذا سألنا نفس السؤال السابق نلاحظ إن العينة الجديدة تكون قابلة للتعميم بالمقارنة مع التجربة التي قمنا بها في الأول من اجل هذا نضطر إلى إعادة التجربة مرات كثيرة بنفس العدد من الرميات لحجر النرد و التحقق أن التذبذب في هذه الحالة يكون ضعيفا و هنا يدخل دور الحاسوب الذي من خلال قدراته العالية في الحساب يمكن أن يعطينا النتائج التي ننتظرها .

لأجل التأكيد على أن هناك تذبذب أم لا عندما نقوم بمثل هذه التجارب فإن الحاسوب في هذه الحالة يلعب دورا مهما وفي بالغ الأهمية من حيث انه يساعد على انجاز ذلك بسرعة كبيرة مهما كبر حجم العينة .

- **<u>الخطوات المتبعة عند استخدامنا للحاسوب</u>**

1. التابع ALEA()

- **نقوم بفتح المجدول tableur ثم نكتب العلاقة السابقة Alea() = على الخلية $A1$.**
- **ننقر على اللمسة Entrée للتثبيت يظهر عندئذ عددا عشوائيا x حيث أن :**

$0 \le x < 1$ بالنقر على اللمسة $F9$ يظهر محتوى الخلية $A1$ بشكل عشوائي .

انجاز محاكاة لرمي حجر نرد :

2. نحاول تغيير محتوى الخلية $A1$ بمراحل متتالية بشكل انه نحصل في الأخير على عدد صحيح بين الواحد و 6.

لأجل المراحل التالية :

- **نكتب العلاقة داخل الخلية $A1$**
- **نتمم العمود الثالث للجدول**
- **النقر عدة مرات على اللمسة $F9$ من اجل التحقق من النتيجة**

يمكن تلخيص ما سبق كما يلي:

النتيجة	العلاقة المكتوبة داخل الخلية A1
يمثل عددا عشوائيا x $0 \le x < 1$	ALEA()
يمثل العدد $6x$ حيث $0 \le x < 1$	ALEA()*6
يمثل عددا عشوائيا ينتمي إلى $[1-7[$	ALEA()*6+1
الجزء الصحيح للعدد السابق	ENT(ALEA()*6+1)

محاكاة 1500 رمية لحجر النرد

- **سنحاول كتابة العلاقة السابقة 1500 مرة**

- **نحدد في الأعلى** 

و نكتب $A1:A1500$ **لتحديد في رمية**

واحدة 1500 الخلايا الأولى للعمود A **.**

نختار:
- **" EDITION/REMPLIR/BAS" لأجل كتابة العلاقة الموجودة في** $A1$

في كل ما تبقى من التحديد

- **ننقر على اللمسة** $F9$ **للتحقق من النتيجة .**

لفهم ذلك نقوم بالتطبيق كما يلي :
نحضر الجدول و نسجل فيه النتائج كما يلي:

	A	B	C	D	E
1	5		Face الوجه	Effectif التكرار	fréquence التواتر
2	2		1		
3	6		2		
4	6		3		
5	5		4		
6	1		5		
7	4		6		

<u>إيجاد التكرارات</u>

لكي نحسب تكرار العدد 1 في العمود A نستخدم الدالة:

$$\boxed{NB:SI(plage;critere)}$$

حيث أن $plage$ توافق 1500 رمية .

أما $critere$ فإنها توافق 1.

في الخلية $D2$ ندخل العلاقة :

$$\boxed{\mathbf{=NB.SI(A\$1:A\$1500\ ;C2)}}$$

نحدد الخلايا من $D2$ إلى $D7$ و نختار "EDITION/REMPLIR/BAS"

ننقر مرة على اللمسة $F9$ للتحقق من أن التواترات تؤول إلى 250=1500/6.

<u>إيجاد التواترات</u>

في الخلية $E2$ ندخل العلاقة التالية:

= D2/1500

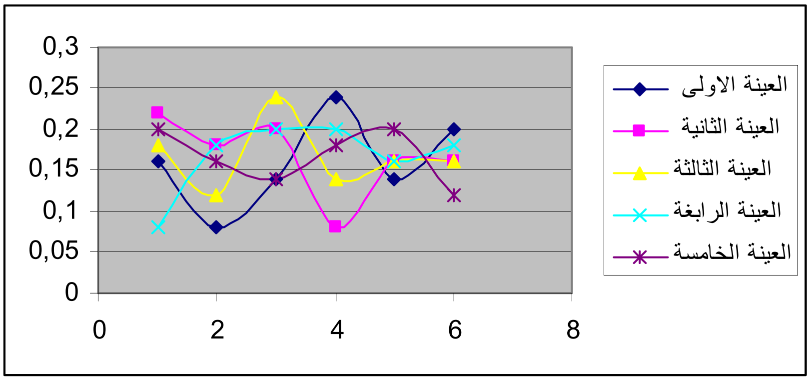
نحدد الخلايا من $E2$ إلى $E7$ و نختار بعد ذلك :

"EDITION/REMPLIR/BAS"

ننقر على اللمسة $F9$ للتحقيق من أن التواترات تقترب من 0,17 أي من 1/6.

الشكل التالي يبين لنا تذبذب التواترات لكل وجه من وجوه الحجر بمقارنة 5 عينات ذات نفس الحجم هنا في هذا المثال عدد رميات الحجر = 50.

الوجه	العينة الأولى	العينة الثانية	العينة الثالثة	العينة الرابعة	العينة الخامسة
1	0,16	0,22	0,18	0,08	0,2
2	0,08	0,18	0,12	0,18	0,16
3	0,14	0,2	0,24	0,2	0,14
4	0,24	0,08	0,14	0,2	0,18
5	0,14	0,16	0,16	0,16	0,2
6	0,2	0,16	0,16	0,18	0,12



<u>مثال 2</u>

هاهي ذي بعض النتائج المتحصل عليها عندما نرمي حجر نرد 1500 مرة :

الوجه	التكرار	التواتر
1	247	0,16
2	281	0,19

3	266	0,18
4	244	0,16
5	263	0,18
6	199	0,13

هاهي الآن عينة أخرى:

الوجه	التكرار	التواتر
1	246	0,16
2	231	0,15
3	238	0,16
4	260	0,17
5	276	0,18
6	249	0,17

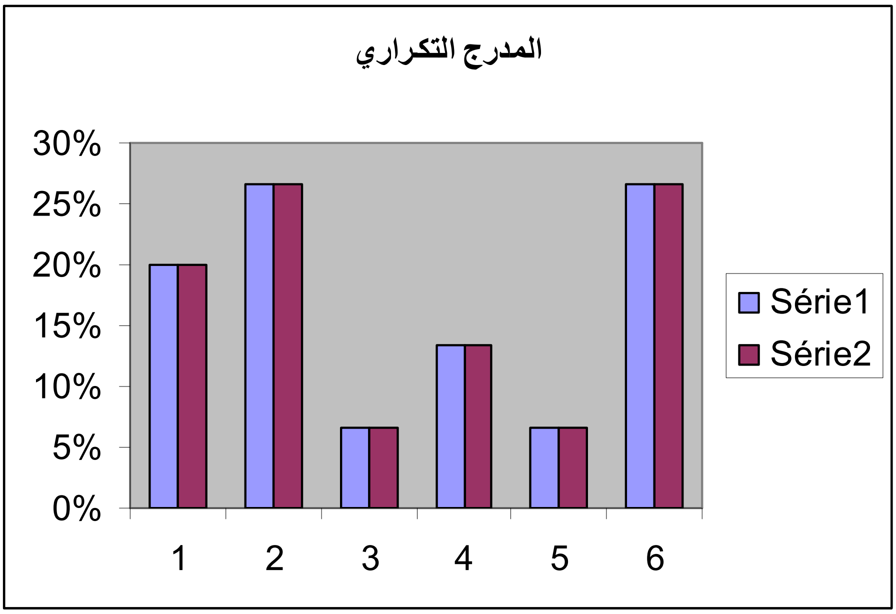
من خلال هذا نرى أن التواتر يختلف في كل مرة بعد النقر على اللمسة $F9$ بالرغم من انه حافظنا على نفس العدد من الرميات فإذا قام بهذا عدة تلاميذ في القسم فإنهم يلاحظون ذلك بوضوح و ندعو هذا بتذبذب العينة .

إذا قارنا العينات ذات الحجم الواحد فبقدر ما كان التذبذب ضئيلا بقدر ما كانت هذه العينات صالحة للاستعمال وبالإمكان تعميمها على المجتمع الذي هو هدف الدراسة .

مثال

الحجر	التكرار	التواتر
1	300	20,00%
2	400	26,67%
3	100	6,67%
4	200	13,33%
5	100	6,67%
6	400	26,67%
المجموع	1500	100,00%

نلاحظ أن هذا الجدول خاص برمي 1500 مرة لحجر النرد و يمكن تمثيله بيانيا كما يلي:



<u>مثال</u>

نريد إنجاز محاكاة 50 رمية لحجر النرد ذو 6 أوجه و حساب عدد المرات الذي يظهر فيه الوجه .

- **فتح ورقة جديدة EXCEL أو (ورقة حساب Star Calc) وإدخال 50 عددا صحيحا محصورا بين الواحد والعدد 6 داخل جدول ذو 10 أسطر و 5 أعمدة يبدأ من الخلية $A1$ إلى الخلية $E10$.**
- **إدخال في الخلية $G1$ العدد 1، في الخلية $G2$ العدد 2، ... و هكذا إلى أن نصل إلى الخلية $G6$ ندخل العدد 6 .**
- **نحدد الخلايا من $H1$ إلى $H6$.**
- **تكتب العلاقة (FREQUENCE(A1 :E10 ;G1 :G6= في المكان المسمى بـ barre de formule و نثبت هذا بالنقر على اللمسات في آن واحد :**

  CRTL,SHIFT,ENTREE
- **إذا جمعنا الأعداد المحتواة في الخلايا $H1$ إلى $H6$ يمكننا التحقق من أن مجموعها يساوي 50.**
- **ننشئ تمثيلا بيانيا على شكل مدرج تكراري بحيث نحمل الأعداد المقابلة لحجر النرد على محور الفواصل أما محور التراتيب نخصصه للتكرارات الموافقة الأوجه النرد .**

يكون التوزيع المشار إليه في الخطوات السابقة في مجدول كالتالي :

2	1	1	1	1		1	30
1	2	1	1	2		2	20
1	2	2	1	1		3	0
2	2	2	2	2		4	0
1	2	2	1	2		5	0
2	1	2	1	1		6	0
2	2	1	1	2			
2	2	2	2	2			
2	1	1	1	1			
1	1	1	2	2			

فمثلا الأعمدة الخمسة الأولى كان التوزيع باستخدام الطلبية

=ENT(ALEA()*a+1)

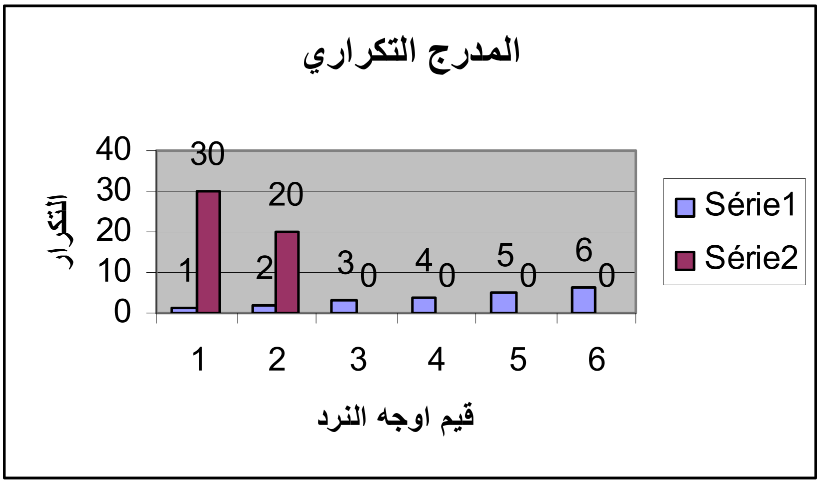
و ذلك بتوزيع الأعداد من الخلية $A1$ إلى الخلية $E10$ و هذا بسحب الفارة من الإشارة + الموجودة في إحدى زوايا الخلية من الأسفل على كل الخلايا المشار إليها أعلاه .

أما العمود السابع فهو الذي سجلنا فيه الأعداد من 1 إلى 6 .

أما العمود السابع فهو الذي تحصلنا عليه بعد كتابة العلاقة :

=FREQUENCE(A1 :E10 ;G1 :G6)

والشكل التالي يبن لنا التمثيل البياني المطلوب .



- ننقر على $F9$ لانجاز محاكاة جديدة .

نعيد طرح المسألة من جديد لكن هذه المرة باستخدام العلاقة ()NB .SI

1. ننقر داخل الخلية $H1$ و ندخل العلاقة التالية :

=NB.SI($A$1:$E$10;G1:G6)

نكتب هذه العلاقة في الأسفل لكي نحصل على التكرارات الموافقة للقيم الأخرى.

<u>انجاز محاكاة لقطعة نقدية (كتابة او صورة)</u>

في هذا المثال نحاول انجاز محاكاة لرمي قطعة نقدية متوازنة لأجل ذلك نرفق للصورة العدد 0 بينما نرفق للكتابة العدد 1 .

- شكل 500 عدد صحيح مساويا للعدد 1 أو 0 .
- اوجد تكرار العدد 0 وتكرار العدد 1 .

- استنتج تواتر الحدثين الصورة و الكتابة .
- قارن مع النتائج المتحصل عليها بواسطة حساب الاحتمال .

اعد هذه المحاكاة مع تشكيل هذه المرة 1000 عدد و قارن بين النتيجتين الأولى و الثانية المتحصل عليها في الحالتين .

<u>حل التمرين</u>

في الخلية $A3$ ندخل الطلبية :

=ENT(ALEA()*2)

بعد ذلك نعمم إلى الخلية $E3$ و منه نسحب الفارة من العلامة (+) الموجودة أسفل هذه الخلية إلى أن نصل إلى الخلية $E202$ فنحصل عندئذ على أعداد تتأرجح بين الواحد و الصفر العدد الذي يظهر فيه الصورة أي الصفر يساوي 236 و يمكننا لحصول عليه بإرسال الطلبية :

=(NB.SI(A3:E102;0)

أما الوجه الآخر أي ظهور العدد 1 فإننا نجده يساوي 264 ذلك بواسطة الطلبية:

=(NB.SI(A3:E102; 1)

أما التواتر فإنه يساوي 0,524 بالنسبة للعدد 0 و يتم حسابه بإرسال الطلبية :

$$\boxed{=G3/500}$$

حيث أن $G3$ هو الخلية التي كتب فيها التكرار الخاص بالعدد 0 و بنفس الطريقة

نجد التواتر الخاص بالعدد 1 فنجده يساوي 0,524.

أما بالنسبة لـ 1000 عدد فإن تكرار العدد 0 هو 481 في حين تكرار العدد 1 فهو يساوي 519 دائما باستعمال نفس الطلبية.

أما التواتر فهو يساو 0,481 بالنسبة للصفر و يساوي 0,519 بالنسبة للواحد .

و يمكن استخلاص النتيجة أن هناك فرق طفيف بين الذي تحصلنا عليه و ما نجده في النظري.

<u>ملاحظة</u>

إنجاز محاكاة لرمي حجري نرد تتم بنفس الطريقة التي تمت فيها المحاكاة الأولى لكن بأن نملأ عمودين.

يمكننا إدخال مجموع الأرقام المسجلة على الأوجه أو نبحث عن التواتر إظهار الضعف و هذا يتم بالمراحل التالية:

- **انجاز محاكاة لرمي 100 مرة لحجر النرد:**

بجعل نتائج الحجر الأول في عمود ونتائج الحجر الثاني في عمود آخر .

- **نكتب مجموع الأعداد المتحصل عليها لكل حجر في عمود ثالث .**
- **نحسب التكرار أو التواتر للمجاميع التي وقعت :**

.2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

- **ارسم مدرج تكراري و علق على النتائج التي تحصلت عليها .**

<u>فيما يلي ملخصا لما نجده خلال عملنا في ورقة Excel</u>

A	B	C	D	
الحجر1	الحجر2	مجموع الحجرين	التواتر	
4	1	5		
4	4	8	2	0,05
6	6	12	3	0,1
2	1	3	4	0,07
1	4	5	5	0,07
3	1	4	6	0,15
1	1	2	7	0,19
1	5	6	8	0,12
2	2	4	9	0,12
2	1	3	10	0,05
5	2	7	11	0,05
3	6	9	12	0,03
3	2	5		
5	2	7		
6	1	7		
4	2	6		
4	2	6		
5	6	11		
2	5	7		

حيث أن أول عدد في العمود الأول 1+6*()ENT(ALEA =

بعد ذلك نسحب بواسطة الفارة العلامة (+) الموجودة في زاوية أسفل الخلية الموافقة لهذا العدد إلى آخر خلية تناسب 100 عدد و بنفس الطريقة العدد الأول في العمود الثاني (بسحب الفارة إلى العمود الثاني أيضا).

العمود الثالث ندخل فيه العلاقة التالية :

=SOMME(A4;B4)

حيث $A4$ هو العدد الأول في العمود الأول أي بدأنا الكتابة انطلاقا من الخلية $A4$

حيث $B4$ هو العدد الأول من العمود الثاني .

العمود الرابع نخصصه لكتابة الأعداد $R_x = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$

نبدأ الكتابة مثلا انطلاقا من الخلية $E5$ أما العمود الخامس فنخصصه لكتابة التواتر و ذلك بإدخال العلاقة : =NB.SI(plage ;”= ”)

<u>تمرين</u>

في هذا التمرين نولي اهتمام لظهور العدد المضاعف عندما نرمي حجري النرد نرمز له بالرمز D .

1. نحاكي رمي حجري نرد 100 مرة بكتابة النتائج في عمودين من الخلية $A1$ إلى الخلية $B100$.
2. لأجل هذا ندخل العلاقة التالية :

=SI(A1=B1;"D";"S)

هذه العلاقة تبين أن كتابة الرمز D إذا كانت الرمية توافق الضعف أما الرمز S فإنه يكتب في الحالة المعاكسة .

3. بواسطة الدالة $NB.SI()$ نحسب عدد المرات الحصول على D أي التكرار الموافق لذلك و هذا انطلاقا من الخلية $C1$ إلى الخلية $C100$.

4. بواسطة اللمسة $F9$ نعيد المحاكاة و نلاحظ النتائج المتحصل عليها .

نعود من جديد و نذكر أن الهدف من طرحنا لمثل هذه المواضيع في إطار البرامج الجديدة و بالضبط مادة الرياضيات للصف الأول ثانوي هو تعلم و استعاب كيفية استخدام المجدول Tableur كأداة لانجاز المحاكاة ، المجدول الذي اختير هو (بالإضافة إلى ذلك هناك أدوات أخرى Excel (Microsft يمكن الاعتماد عليها ألا وهي الآلات الحاسبة التي وهي متعددة الأنواع و باستطاعتها حساب المؤشرات الإحصائية مثل المتوسط و الوسيط و المنوال ... لأجل ذلك ندخل المعطيات في قائمة إحصائية أما التكرارات أو التواترات فنسجلها في قائمة أخرى (إذا وجدت) ثم نبعث الحسابات الإحصائية ذات متغير واحد بعد أن نبين للآلة القائمة الموجود فيها المعطيات و القائمة الموجود فيها التكرارات التواترات في الأخير نجد أن الآلة سجلت في آن واحد كل ما نحتاجه من مؤشرات إحصائية كالمتوسط أو الوسيط أو ...

إن استخدام الآلات الحاسبة يمكن أن يتم بأنواع مختلفة نذكر منها ما يلي :

1. آلة TEXAS
2. آلة CASIO-GRAPH
3. آلة VIEILLE CASIO
4. آلة HP
5. آلة TI-83

كل واحدة من هذه الآلات لها تقنيات خاصة بها للاستعمال ربما اختلاف طفيف بين بعضها البعض لكنها في الأخير تؤدي إلى نتائج واحدة. ففي الكتاب المدرسي هنالك شرح مفصل لكيفية استعمال الآلة رقم 5.

أما الآن فنعرض كيفية استخدام الآلة رقم 2 CASIO-GRAPH

الخطوات المتبعة هي :

1. لكي نمحي أو ننزع محتوى القائمات :

نحدد menu STAT نضع الزالق على العمود الذي نود نزعه نحدد DEL-A بعد ذلك YES .

2. ندخل المعطيات في العمود LIST1 أي قائمة 1 و التكرارات أو التواترات في العمود قائمة 2 .

3. نوضح للآلة قامة المعطيات و قائمة التكرارات .

نحدد CALC بعد ذلك SET. نختار قائمة 1 لأجل 1VARXlist أي لأجل

متغير واحد في القائمة 1 و بعد ذلك نختار قائمة 2 1VARfreq أي للتكرارات.

ننقر على اللمسة EXIT للرجوع إلى CALC.

4. نبعث الحسابات الإحصائية ذات متغير واحد: 1VAR ، (الانحراف المعياري الذي اشرنا إليه في الفقرات السابقة يرمز إليه بالرمز $x\sigma_n$)

<u>بعض التمارين لانجاز هذه الكيفية في حساب المؤشرات</u>

<u>تمرين</u>

بين مع المعطيات التالية أن المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري و الوسيط هي:

$$\bar{x} \approx 10,21.....\sigma = 1,64......Med = 13$$

<u>تمرين</u> 2

بين انه من اجل المعطيات التالية :

18,25,7,9,4,13,12,11,13,15,18,19,7,9,54

نجد :

$$\bar{x} = 14,6.....\sigma = 11,56....Med = 7$$

هذه الفقرة نخصصها إلى التمثيل البياني بواسطة EXCEL

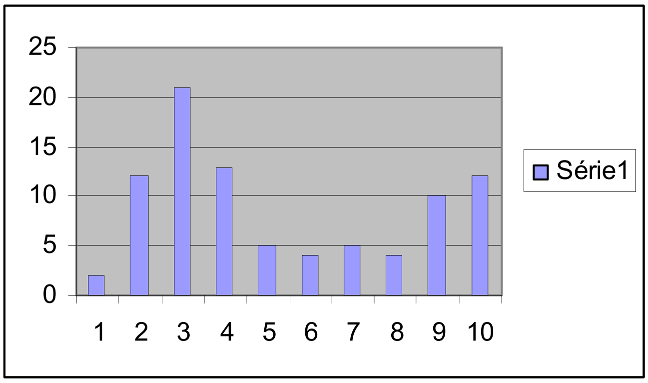
تمثيل سلسلة من المعطيات الإحصائية :

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية :

2	**12**	**21**	**13**	**5**	**4**	**5**	**4**	**10**	**12**

لتمثيل هذه السلسلة بيانيا نتبع الخطوات التالية :

1. **ندخل المعطيات في EXCEL على شكل عمود .**
2. **نحدد سلسلة المعطيات التي نريد تمثيلها**
3. **نختار insertion graphique.نستطيع بعد ذلك اختيار النوع من البيانات المقدمة لنا ضمن نافذة يوجد فيها أنواع مختلفة نختار المدرج التكراري مثلا و ننقر على احد الأنواع المعطاة.**
4. **ننقر على اللمسة " maintenir appuyé pour visionner" و هذا حتى نتمكن من رؤية الشكل في نفس الوقت الذي نحن بصدد إنشائه .**
5. **ننقر بعد ذلك على اللمسة suivant. نتحصل عندئذ على الشكل كاول منظور له .**
6. **ننقر على اللمسة suivant نتصل على نافذة من خلالها يمكننا إجراء بعض الوسطاء كالعناوين أو التخطيط أو القيم أو ...**
7. **ننقر على اللمسة fin أو terminer للحصول أخيرا على الشكل المطلوب عندئذ نحصل على الشكل التالي :**



تمثيل سلسلتين من المعطيات :

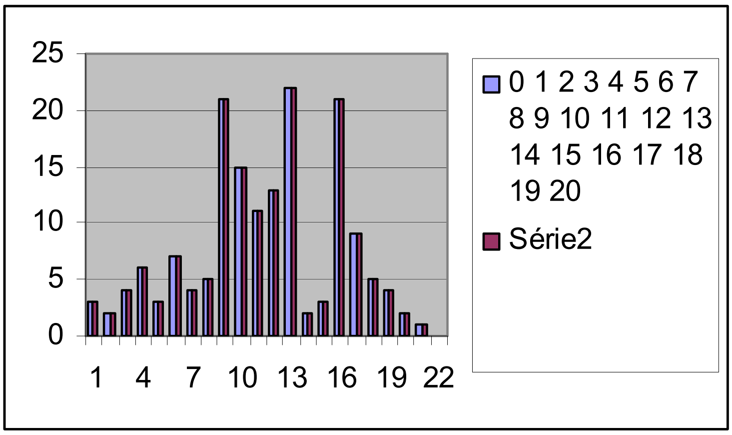
يحدث أحيانا جمع التمثيلات البيانية لسلسلتين من المعطيات في آن واحد و ذلك لإمكانية المقارنة بينهما لهذا يكفي إدخال السلسلتين من المعطيات في عمودين و تحديدهما في نفس الوقت قبل إتباع المراحل المذكورة سابقا .

<u>تمثيل المدرج التكراري</u>

يمكن في هذه الحالة أن نأخذ إحدى السلاسل محور للفواصل و السلسلة الأخرى محور للتراتيب، مثلا لنعتبر توزيع العلامات في أحد الامتحانات :

العلامات	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار	3	2	4	6	3	7	4	5	21	15	11
العلامات	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
التكرار	13	22	2	3	21	9	5	4	2	1	

إن التمثيل البياني لهذه السلسلتين هو التالي :

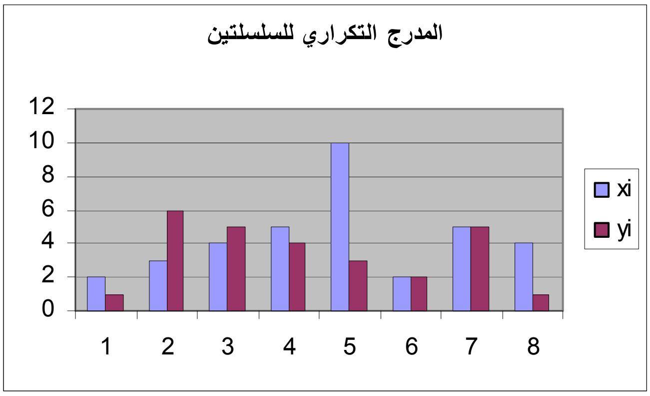


مثل في بيان واحد السلسلتين التاليتين :

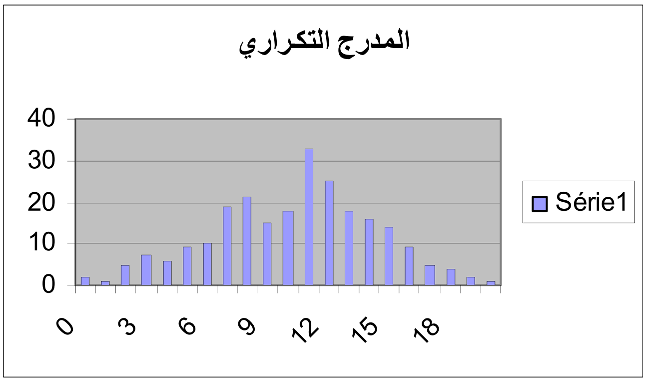
i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2	3	4	5	10	2	5	4
y_i	1	6	5	4	3	2	5	1

الحل

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	10	2	5	4
1	6	5	4	3	2	5	1



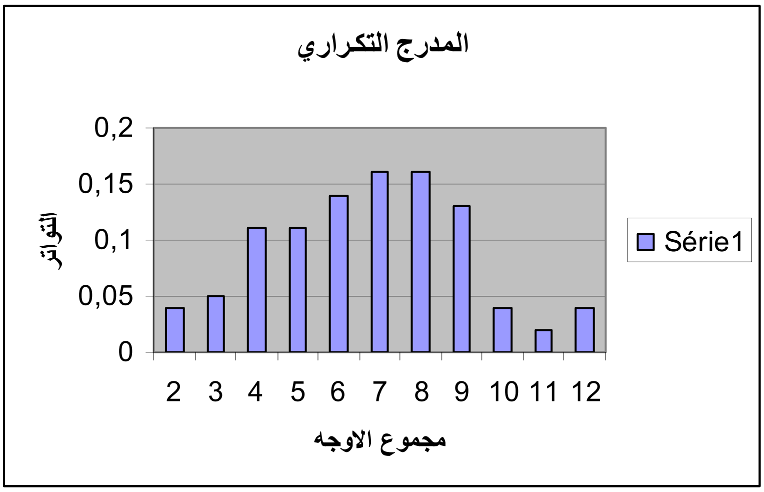
1. ادخل العلامات و التكرارات في عمودين .
2. حدد التكرار ثم اختر Insertion graphique لاختيار نوع البيان المفضل لديك .
3. انقر على suivant.
4. في المرحلة 2 يكفي النقر على serie ثم Etiquettes des abscisses
5. انقر بعد ذلك على الحيز الصغير الذي يمثل الجدول .



نهتم الآن بانجاز المحاكاة لرمي حجري نرد حيث نسجل مجموع الأعداد التي

تظهر على وجه الحجر .

1. انجز محاكاة لرمي 100 مرة لحجري نرد بكتابة نتائج الحجر الأول في عمود و نتائج الحجر الثاني في عمود آخر .
2. اكتب في عمود ثالث مجموع النتائج المتحصل عليها .
3. احسب التواتر للمجاميع 2,3,4,5,6,78,9,10,11,12 .
4. انشئ مدرجا تكراريا و علق على النتائج الأخيرة .



إن هذا نتحصل عليه بإرسال مجدول EXCEL نخصص العمود الأول لكتابة أول عدد يمكن أن يظهر بشكل عشوائي أي ندخل العلاقة =ENT(ALEA()*6+1) بعد ذلك نعمم بسحب العلامة(+) حتى نصل إلى الخلية 100 أي نحسب 100 خلية بعد أول كتابة ثم نعيد الكتابة بنفس الأسلوب في العمود الثاني أما العمود الثالث فنكتب فيه المجاميع التي تظهر لنا من رمي الحجر الأول و الثاني التي

نحصل عليها بإدخال العلاقة التالية :

=SOMME(A1 ;A2)

حيث أن A1 هو أول عدد نحصل عليه في العمود الأول و A2 هو العدد الأول في العمود الثاني بعد ذلك نكتب المجاميع في عمود رابع مثلا انطلاقا من F2 الخلية إلى الخلية F12.

و أخيرا ندخل العلاقة:

NB.SI(C2:C100;F2)/100=

حيث أن العلاقة :

C2:C100

تعني أننا نحدد انطلاقا من الخلية C2 إلى الخلية C100 و هو العمود الذي يشمل على المجاميع .

بعد هذا الشرح المقرب لإمكانية الحصول على الرسم الخاص بالمدرج التكراري، ها هو ذا الجدول المستخلص لفهم المراحل السابقة المتشكلة من ورقة EXCEL بشكل مختصر للتوضيح فقط أي يشمل فقط على 17 عدد في العمود الأول و كذلك العمود الثاني لأنه يستحيل كتابة 100 عدد على الورقة أما العمود الثالث فهو مخصص لكتابة المجاميع و هو كما نلاحظ 10 = 6+4.

المجاميع	العمود الثاني	العمود الاول
10	4	6
5	1	4
4	3	1
6	1	5
6	2	4
7	4	3
8	6	2
9	5	4
9	4	5
4	1	3
2	1	1
6	4	2
7	5	2
6	5	1
7	3	4
8	5	3
6	4	2

التواتر	المجاميع
0,1	5
0,08	6
0,17	7
0,14	8
0,13	9
0,07	10
0,1	11
0,03	12

أما هذين العمودين فالأول يمثل المجاميع أما العمود الثاني فهو شمل على التواترات التي حصلنا عليها بإدخال العلاقة السابقة و التي هي :

=NB.SI(C2:C100;F2)/100

<u>طرق العد</u>

من بين القواعد بالغة الأهمية في دراستنا للإحصاء و الاحتمالات التي يجب التعرض إليها و الوقوف عندها هي قوانين " طرق العد" أو ما يسمى بالتحليل التوافقي analyse coombinatoire.

- **<u>المبدأ الأساسي للعد</u>**

إذا كنا أمام تجربة عدد إمكانات نتائجها كبير جدا وه تتحقق انطلاقا من مرتبة معينة من تجربة أولى بسيطة ذات n_1 نتيجة متمايزة متبوعة بتجربة ثانية

ذات n_2 نتيجة متمايزة ... الخ عندئذ فان عدد الإمكانات المختلفة الممكنة للتجربة الكلية تكون:

$$\boxed{n = n_1 \times n_2 \times .... \times n_k}$$

مثال

ليكن لدينا مجموعة مؤلفة من 12 تلميذ منهم 7 بنات و 5 أولاد نختار تلميذين بشكل أن يكون لدينا بنت و ولد ما هي عدد الإمكانات الممكنة المتاحة لنا ؟

حسب المبدأ الأساسي للعد يكون لدينا :

$$\boxed{\begin{aligned} n &= n_1 \times n_2 \\ &= 7 \times 5 \\ &= 35 \end{aligned}}$$

مثال

نرمي قطعة نقود و حجر نرد ما هي عدد النتائج الممكنة التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة ؟

نلاحظ أن القطعة تحمل وجهين H,T أما حجر النرد فانه يحمل ستة أوجه هي $1,2,3,4,5,6$ و منه حسب ما سبق عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة هي $2 \times 6 = 12$.

♦ **<u>تعريف الترتيبة</u> (بدون تكرار)**

ندعو ترتيب (بدون تكرار) لـ p عنصرا متمايزا مأخوذا من n عنصر

$(p \le n)$ كل متتالية مرتبة بدون تكرار لهذه العناصر و نرمز لعدد التراتيب لـ p

عنصر من بين n بـ A_n^p و يعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-p+1)}$$

إن هذه العناصر تتم أخذها بالمراحل التالية:

اختيار العنصر الأول يتم اختياره بـ n طريقة

اختيار العنصر الثاني يتم اختياره بـ $(n-1)$ طريقة

و هكذا...................................

اختيار العنصر p يتم اختياره بـ $(n-p+1)$ طريقة .

ومنه حسب المبدأ الأساسي للعد فان عدد الطرق الممكنة هي:

$$\boxed{n(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

♦ **<u>تعريف الترتيبة</u> (مع التكرار)**

في الحالة عدد التراتيب مع التكرار يعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\alpha_n^p = n^p}$$

مثال

ما هي عدد الكلمات ذات 8 التي يمكن تشكيلها من الكلمة *mathématique* **.**

حسب ما سبق لدينا:

$$A_n^p = \frac{12!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$$

♦ **تعريف التبديلة** ***(PERMUTATION)***

ندعو تبديلة بدون تكرار من المرتبة n كل متتالية مرتبة لهذه العناصر التي عددها n.

$$\boxed{p_n = n!}$$

الواقع كل تبديلة هو عبارة عن تقابل هذه المجموعة ذات n عنصر في ذاتها و أيضا إن نعبر عن ذلك بقولنا إن كل تبديلة ذات n عنصر هي تكافئي ترتيبه لعنصر هي تكافئي ترتيبه n عنصر مأخوذة من n أي $n = p$.

عدد التباديل ذات n عنصر يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{p_n = n!}$$

مثال

بكم طريقة يمكن تشكيل عددا من أربعة أرقام من الأرقام التالية 1,2,3,4

الحل

يتم ذلك بـ $4!$ طريقة أي: $p_4 = 4! = 24$

- **تعريف تبديلة (مع التكرار)**

قد يحدث انه من بين n عنصر الذي نبحث عن عدد التباديل الخاصة به

يوجد هنالك r عنصر متماثل في هذه الحالة عدد التباديل يكون كما يلي:

$$p_n(r) = \frac{p_n}{p_r} = \frac{n!}{r!}$$

ملاحظة

إذا كانت التكرارات غير موجودة $r_i = 1$.

تعميم

$$P_n(r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1 \times r_2 \times \ldots\ldots \times r_k}$$

حيث أن:

$$r_1 + r_2 + \ldots\ldots\ldots + r_k = n$$

- **تعريف التوفيقة *(combinaison)***

ندعو توفيقة ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر $(p \leq n)$ كل متتالية غير

مرتبة لهذه العناصر و عدد التوفيقات لـ p عنصر من بين n نرمز له بـ C_n^p و

يعطى بالعلاقة التالية :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

مثال

لدينا 8 رجال و 6 نساء يتقدمون للتوظيف لأربعة مناصب شغل.

ـ ما هو عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة ؟

ـ ما هي عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة علما أننا أخذنا رجلين و امراتين ؟

الحل

لدينا هنا سحب بدون تكرار و غير مرتب إذن عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة هو :

$$C_{14}^4 = \frac{14!}{4!10!} = 6006$$

1- حسب المبدأ الأساسي للعد يكون لدينا :

$$C_8^2 \times C_6^2 = \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!} = 420$$

مجموعة تمارين

التمرين الأول

كم عدد يمكن تشكيله مؤلف من ثلاثة أعداد مختلفة من بين الأعداد التالية:

$$\{1,2,.....,9\}$$

التمرين الثاني

نفس السؤال لكن هذه المرة مؤخوذة من الأعداد $\{0,1,2,....,9\}$.

التمرين الثالث

من صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا خمس كرات فما احتمال أن يكون لدينا في العينة المسحوبة كرتان بيضاويتان ؟.

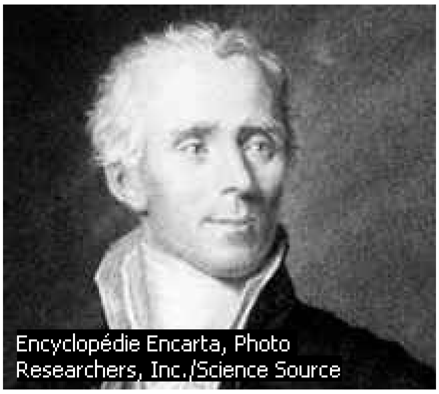
II

الاحتمالات

الفـهـرس

الاحتمالات

يعتبر العالم بليز بسكال *Blaise Pascal* احد العلماء الأوائل الذين اهتموا بحساب الاحتمال و كان قد اتفق مع العالم بيار دي فارما *Pierre de Fermat* سنة 1950 على أن العشوائية يمكن أن تكون دراسة علمية و انطلاقا من ذلك الوقت توسعت البحوث العلمية في هذا الميدان .


Encyclopédie Encarta, Photo Researchers, Inc./Science Source


Encyclopédie Encarta, Hulton Deutsch

لهذا تجدر بنا الإشارة إلى أهم قواعد و أسس نظرية الاحتمالات التي تساعدنا على استيعاب معلوماتنا التي ذكرناها في الفقرات السابقة وتنمي فكرنا و نحن نقوم بتجارب و ملاحظات في مختلف الميادين التي قد تقع تحت ظروف متشابهة أو مختلفة ولما كانت نظرية الاحتمالات هي العلم الذي يدرس الظواهر العشوائية و يقوم بتحليلها إلى نتائج كما هو الحال في الإحصاء فإننا يجب التذكير أولا وقبل كل شيء بمفهوم التجربة .

فالتجربة هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس فمثلا إذا القينا في

الهواء قطعة نقود غير مزيفة فإننا نحصل على نتيجتين هما الصورة أو الكتابة و نرمز لهما بـ H,T و نطلق على مجموعة النتائج الممكنة خلال تجربة ما (فضاء الأحداث الابتدائية) و نرمز له ب Ω.

- **<u>تعريف الحدث الابتدائي</u>**

الحدث الابتدائي هو مجموعة تتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة

- **<u>فضاء الأحداث الابتدائية</u>**

هو مجموعة كل النتائج التي نحصل عليها خلال التجربة .

<u>مثال</u>

أن فضاء الأحداث الابتدائية التي نحصل عليها خلال رمينا لحجر النرد مرة واحدة هو :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- **<u>الحدث الابتدائي العشوائي</u>**

هو كل مجموعة جزئية من فضاء الأحداث الابتدائية و نرمز له بأحرف مثل:

$A,B,C,........,$.

قبل إعطاء التعريف العام للاحتمال نذكر أن العمليات الشهيرة في نظرية المجموعات مثل الاتحاد، التقاطع، الفرق، المتممة، ... الخ تصلح أيضا في دراستنا لنظرية الاحتمال فقط بدلا من أن نقول مجموعة نقول حدث .

تقاطع حدثين $A \cap B$ هو حدث يقع إذا وقع الحدثان $A \wedge B$ معا .

الفرق بين حدثين $A - B$ هو حدث يقع إذا وقع A و لم يقع B .

الحدثان المتنافيان هما اللذان لا يمكن وقوعهما معا و نكتب $A \cap B = \Phi$.

متمم الحدث هو حدث يحوي سائر الأحداث الابتدائية من Ω الغير محتواة في

الحدث A و نرمز له ب A' أو $\overline{A}$.

- **<u>التعريف العام للاحتمال</u>**

إذا كان لدينا A حدثا من Ω فان احتمال وقوع الحدث A الذي نرمز له بـ

$p(A)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

أن m هو عدد الإمكانات الملائمة لوقوع الحدث A و n عدد الإمكانات الكلية

للتجربة .

<u>ملاحظة</u>

ندعو Φ بالحدث المستحيل أما Ω فندعوه بالحدث الأكيد.

- **<u>الفضاء الاحتمالي</u>**

الفضاء الاحتمالي هو ثلاثية (A, F, p) حيث Ω هو فضاء الأحداث

الابتدائية و P هو دالة معرفة على F و تأخذ قيمها في R أي أن لكل حدث

A نرفق عددا حقيقيا نرمز له بـ $P(A)$ حيث إن F قد تكون هي مجموعة أجزاء المجموعة A.

- **<u>تمهيد للتعريف</u>**

لكل حدث من فضاء الأحداث الابتدائية نرفق عددا موجبا نسميه احتمالا بحيث أن مجموع هذه الاحتمالات تساوي الواحد من خلال هذا نصيغ التعريف العام للاحتمال

- **<u>تعريف دالة الاحتمال</u>**

اعتمادا على المعطيات السابقة ندعو الدالة $p: \quad F \to R$ دالة احتمال إذا تحققت الشروط التالية :

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F$
- $P(\Omega) = 1$
- **إذا كانت لدينا متتالية من الأحداث المتنافية** $A_1, \ldots\ldots\ldots, A_n, \ldots$ **تحقق:**

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n \cup \ldots) = p(A_1) + \ldots\ldots + P(A_n) + \ldots$$

بعض التمرينات

نرمي قطعة نقود متوازنة و حجر نرد متوازن الحامل الأوجه ذات الأرقام التالية:

1,2,3,4,5,6

نعتبر أن نتيجة كل رمية هي تسجيل وجه القطعة النقدية ثم الرقم الظاهر على حجر النرد نفرض أن النتائج هي متساوية الفرص في الوقوع .

المطلوب حساب احتمال كل من الحوادث التالية:

- A_1 **الحدث الدال على وقوع الكتابة للقطعة النقدية و عدد زوجي لحجر النرد .**
- A_2 **ظهور العدد الفردي للقطعة النقدية .**
- A_3 **ظهور الصورة للقطعة النقدي و عدد اكبر تماما من 4.**

الحل

نفرض أن القطعة النقدية لها نتيجتين هما H,T **حيث أن** H **هي الصورة و** T **هي الكتابة عندئذ يكون لدينا** A_1 **هي المجموعة المؤلفة من** T **و إحدى النتائج التي ظهرت في حجر النرد و هي 2,4,6 أي أن:**

$$\boxed{A_1 = \{(T,2),(T,4),(T,6)\},}$$

إذن عدد الحالات الملائمة هي ثلاثة، أما فضاء الأحداث الابتدائية Ω **فهو يتألف من 12 نتيجة لان القطعة لها نتيجتين و حجر النرد له 6 نتائج و حسب المبدأ**

الأساسي للعد فإن عدد النتائج يساوي $6\times 2 = 12$ ومنه في هذه لحالة قد تظهر الصورة أو الكتابة للقطعة النقدية أي أن النتائج التي نحصل عليها هي:

$$\boxed{\{(H,1),(H,3),(H,5),(T,1),(T,3),(T,1)(T,5)\}}$$

و منه :

$$\boxed{p(A_2)=\frac{6}{12}=0,5}$$

عدد نتائج الحدث A_3 هي :

$$\boxed{\{(T,5),(T,6)\}}$$

و منه:

$$\boxed{p(A_3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}=0,16}$$

بعد أن قدمنا هذا المثال الذي يساعدنا على كيفية تطبيق تعريف الاحتمال المساوي لعدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الكلية يمكننا استخلاص بعض الخواص المهمة التي هي :

إذا كانت $p:F\to R$ دالة احتمال فان النتائج التالية تكون صحيحة .

1 - $p(\Phi)=0$

في الواقع لدينا :

$$\Omega = \Omega \cup \Phi$$

ومنه حسب الشرط الثالث أعلاه يكون لدينا :

$$p(\Omega) = p(\Omega) + p(\Phi)$$
$$\Rightarrow p(\Phi) = 0$$

من اجل أي حدث $A \in F$ لدينا :

$$P(A') = 1 - p(A)$$

حيث A' هو المتمم A وهذا لأنه لدينا :

$$A \cap A' = \Phi \quad \wedge A \cup A' = \Omega$$

و حسب الشرط الثاني و الثالث لدينا:

$$p(A \cup A') = p(\Omega)$$
$$= 1$$
$$= p(A) + P(A')$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

إذا كان $A \subseteq B$ فعندئذ :

$$\mathbf{A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)}$$

في الواقع لدينا :

$$B = A \cup (B - A)$$

و لما كان:

$$A \quad \wedge (B - A)$$

متنافيان فحسب الشرط الثالث يكون لدينا :

$$\begin{aligned} & P(B) = P(A) - P(B - A) \\ & \Rightarrow P(B - A) \\ & = P(B) - P(A) \end{aligned}$$

إذا كان : $A \subset B$

فعندئذ :

$$P(A) \leq P(B)$$

و هذا اعتمادا على الخاصة السابقة و كون احتمال أي حدث اكبر أو يساوي الصفر

بعبارة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} & P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0 \\ & \Rightarrow P(B) \geq P(A) \end{aligned}$$

- $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in F$

و هذا راجع لكون:

$$\begin{aligned}&\Phi \subseteq A \subseteq \Omega\\ &\Rightarrow P(\Phi) \le P(A) \le P(\Omega)\\ &\Rightarrow 0 \le P(A) \le 1\end{aligned}$$

وهذا نم خلال الخاصة السابقة والخاصة الأولى .

و حسب تعريف الاحتمال من اجل أي حدثين من الصف F لدينا :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

في الواقع لدينا :

$$\begin{aligned}&A \cup B = A \cup (B - A \cap B)\\ &\Rightarrow P(A \cup B)\\ &= P(A) + P(B - A \cap B)\end{aligned}$$

وهذا لان الحدثين $A \wedge (B - A \cap B)$ هما متنافيان فحسب الخاصة الثالثة (مع العلم أن $A \cap B \subseteq B$) ينتج لدينا ما يلي :

$$\begin{aligned}&P(A \cup B) = p(A) + P(B - A \cap B)\\ &= p(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

- **<u>تعريف الاحتمال الشرطي</u>**

إذا كان (Ω, F, p) فضاء احتماليا و كان B حدثا احتماله لا يساوي الصفر و كان A حدثا كيفيا إننا نعرف احتمال وقوع الحدث A علما أن الحدث B قد وقع فعلا (الاحتمال المشروط ب B) بالعلاقة التالية :

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\ / p(B)\neq 0$$

يرمز للاحتمال المشروط أحيانا بالرمز $p(A/B)$.

ملاحظة

الاحتمال المشروط أو الشرطي هو احتمال لأنه يحقق الشروط الثلاثة للتعريف يترك برهانه كتمرين.

مثال

صندوق يحوي 5 بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و كرتين سوداء اللون مرقمة من 1 إلى 2 .نسحب كرة عشوائيا ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

علما أنها تحمل الرقم 1 .

الحل

ليكن A الحدث "سحب كرة بيضاء " و B "الحدث سحب كرة مرقمة 1 " عندئذ يكون $A\cap B$ هو الحدث سحب كرة بيضاء رقم 1 و احتمالها هو $\frac{1}{7}$. أما احتمال الحدث B فهو يساوي $\frac{2}{7}$ و منه الاحتمال المطلوب هو :

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

مثال

ليكن لدينا الحدثين A و B بحيث أن :

$$p(A)=0,3$$
$$p(B)=0,5$$
$$p(A\cap B)=0,2$$

احسب : $p(A\cup B)....,\ p_B(A)....,\ p_A(B)$

الحل

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=0,3+0,5-0,2$$
$$=0,6$$
$$p_B(A)=\frac{2}{5}................p_A(B)=\frac{2}{3}$$

♦ **تعريف (الأحداث المستقلة)**

نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلين إذا تحقق ما يلي :

$$p(A\cap B)=p(A)p(B)$$

إذا كان احتمال B يختلف عن الصفر فإن التعريف السابق يكافئ:

$$p_B(A)=p(A)$$

مثال

بين أنه إذا كان احتمال حدث ما يساوي 0 فانه يكون مستقل عن أي حدث آخر .

بين أنه إذا كان احتمال حدث ما يساوي 1 فانه يكون مستقل عن أي حدث آخر .

♦ **قاعدة الضرب في الاحتمالات (قانون الاحتمال المركب)**

ليكن $A \wedge B$ حدثين من الفضاء الاحتمالي (Ω, F, p) بحيث :

$$\boxed{P(A) \geq 0 \wedge P(B) \geq 0}$$

عندئذ :

$$\boxed{\begin{aligned} & p(A \cap B) = p(A)p(B/A) \\ & = p(B)p(A/B) \end{aligned}}$$

البرهان

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} & P(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{P(B)} \\ & \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B).....(1) \\ & P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ & \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A).....(2) \end{aligned}}$$

من خلال العلاقتين السابقتين نجد المطلوب .

ملاحظة

يمكن تعميم ذلك إلى أكثر من حدثين مثلا من اجل ثلاثة أحداث القاعدة

تصبح كما يلي :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

ملاحظة

لقد عرفنا الحدثين المستقلين على أنهما الحدثين الذين يحققان العلاقة التالية :

$$)\, P(A/B) = P(A)$$

أي أن وقوع الحدث A ليس له علاقة بوقوع الحدث B و هذا يكافئ قولنا أن

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

نتائج

إذا كان A, B حدثين مستقلين فعندئذ يكون لدينا ما يلي :

إذا كان :

$$P(A) \neq 0$$

فعندئذ نستنتج أن :

$$P(B/A) = P(B)$$

إذا كان $P(B) \neq 0$ أيضا نحصل على :

$$P(A/B) = P(A)$$

و منه يكون لدينا :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

إذا كان A, B حدثين مستقلين فعندئذ يكون لدينا ما يلي A', B حدثين مستقلين و

كذلك A',B' نحاول إثبات الثانية و بنفس الأسلوب نبين الأولى .

$$
\begin{aligned}
&P(A'\cap B')=P(A\cup B)'\\
&=1-P(A\cup B)\\
&=1-p(A)-P(B)+P(A\cap B)\\
&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\
&=(1-P(A))-P(B)(1-P(A))\\
&=(1-P(A))(1-P(B))=P(A')P(B')
\end{aligned}
$$

ملاحظة

يمكن تعميم تعريف استقلال أكثر من حدثين و ذلك حسب القاعدة التالية :

قاعدة

لتكن A,B,C ثلاثة أحداث من الفضاء الاحتمالي (Ω,F,p) نقول عنها

أنها مستقلة إذا تحقق الشرطين التاليين :

- A,B,C مستقلة مثنى مثنى .
- $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

و هذا يبقى صحيح من اجل n حدث أي أن:

$$\boxed{p(A_1\cap A_2\cap........A_n)=P(A_1)P(A_2)........P(A_n)}$$

تجزئة الأحداث

لتكن $D_1,.........,D_n$ متتالية منتهية من أحداث من Ω عندئذ نقول عنها

أنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا كانت تحقق الشروط التالية:

- $p(D_i) \geq 0 ......\forall i = 1,2,.....,n$
- $D_1 \cup D_2 \cup .... \cup D_n = \Omega$
- $D_i \cap D_j = \Phi ....\forall i \neq j$

من خلال هذا التعريف نستنتج ما يلي :

إذا كان A حدثا من Ω فانه يكون لدينا ما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A = A \cap \Omega = A \cap (D_1 \cup D_2 \cup ..... \cup D_n)} \\ &\mathbf{= (A \cap D_1) \cup (A \cap D_2) \cup ..... \cup (A \cap D_n)} \end{aligned}}$$

فإذا لاحظنا أن الأحداث $A \cap D_i ...i = 1,2,....,n$ هي متنافية مثنى مثنى نحصل

على ما يلي :

$$p(A) = P(D_1)P(A/D_1) + ... + P(D_n)p(A/D_n)$$

أي أن :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} P(D_i)p(A/D_i)$$

و هذا القانون ندعوه بقانون الاحتمال المركب .

<u>نظرية</u> (bays بايز)

إذا كانت $D_1, D_2, ..., D_n$ تجزئة للحدث الأكيد Ω و كان A حدثا من

Ω فعندئذ يكون لدينا ما يلي :

$$P(D_k / A) = \frac{p(D_k)p(A / D_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(D_i)p(A / D_i)} / k = 1,.....,n$$

البرهان

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي لدينا :

$$p(D_k / A) = \frac{p(D_k \cap A)}{P(A)}$$

و من خلال قاعدة الضرب في الاحتمال نستنتج أن:

$$P(D_k \cap A) = P(D_k)P(A / D_k)......(1)$$

كذلك من خلال قانون الاحتمال الكلي لدينا :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} P(D_i)P(A / D_i).......(2)$$

من خلال العلاقتين السابقتين نحصل على المطلوب .

سلسلة تمارين في الاحتمالات

التمرين الأول

لتكن A,B,C ثلاثة أحداث من الفضاء الاحتمالي Ω ، أكتب الأحداث التالية :

1. الحدث A الذي يتحقق .
2. الحدثان A,B يتحققان و ليس C .
3. على الأقل أحد الأحداث يتحقق .
4. لا حدث يتحقق .
5. حدثان فقط يتحققان .
6. الأحداث A,B,C تتحقق في آن واحد .

التمرين الثاني

ليكن A,B حدثان من Ω ، نفرض أن:

$$p(A)=\frac{1}{4} \quad , \quad P(B)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{3}{20}$$

أحسب احتمال الأحداث التالية :

1. تحقق $A \vee B$.
2. الحدث A فقط الذي يتحقق .
3. لا A , لا B يتحقق .

التمرين الثالث

ليكن (Ω, F, P) فضاءا احتماليا و ليكن A حدثا احتماليا حيث

$P(A) = 1$ (هو ليس من الضروري هو Ω) .

1. أثبت أن: $P(B - A) = 0$.
2. أثبت أن: $P(A \cup B) = 1$.
3. $P(A \cap B) = P(B)$.

التمرين الرابع

ليكن لدينا الحدث A : العائلة لها بنات و بنون .

ليكن لدينا الحدث B : العائلة لها على الأكثر صبي .

بين أن A, B حدثين مستقلين إذا كانت لدينا عائله لها 3 أطفال .

بين أن A, B حدث يغير مستقلين إذا كانت لدينا عائلة لها طفلين .

التمرين الخامس

صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب 5 كرات عشوائيا

فما احتمال أن تكون في العينة 3 كرات بيضاء .

التمرين السادس

ليكن لدينا حدثين A, B عشوائيين بحيث أن :

$$P(A)=\frac{1}{2}$$
$$P(B)=\frac{1}{4}$$
$$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

أوجد $P(A\cup B)$.

نفس السؤال عندما A,B يكونان مستقلان .

التمرين السابع

ليكن لدينا حدثين A,B عشوائيين بحيث إن :

$$\mathbf{P(A)}=\frac{1}{4}$$
$$\mathbf{P(B)}=\frac{1}{3}$$
$$\mathbf{P(A\cup B)}=\frac{23}{60}$$

أحسب :

$$\mathbf{P(A/B)}\quad,\quad \mathbf{P(\overline{A}/B)}\quad,\quad \mathbf{P(A\cap B/B)}$$
$$\mathbf{P(\overline{A}\cap B/\overline{A}\cup B)}\quad,\quad \mathbf{P(A\cup B/(A\cap \overline{B}))}$$

التمرين الثامن

نقذف حجري نرد متماثلين أحسب الاحتمال P كي يكون المجموع الذي نحصل عليه أكبر أو يساوي 10 علما أن :

1. **الحجر الأول أعطانا الرقم 10 .**
2. **على الأقل أحد الحجرين أعطانا الرقم 5 .**

التمرين التاسع

ليكن A,B حدثين مستقلين بحيث $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

- **برهن أنه إما $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0$ أو $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1$.**

التمرين العاشر

أثبت أن الشرط اللازم و الكافي كي يكون A,B مستقلين هو أن يكون لدينا العلاقة التالية محققة :

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \times \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) \times \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})}$$

التمرين 11

كشفنا في إحدى المستشفيات أن احتمال إصابة شخص بالمرض M هو $0,3$. علمنا أن احتمال أن يكون للشخص تحليلا سالبا علما أنه غير مصاب بالمرض M هو $0,9$.

فإذا أصيب الشخص بالمرض M احتمال أن يكون له تحليلا موجبا هو $0,8$.

نأخذ شخص بشكل عشوائي له تحليلا موجبا فما هو احتمال أن يصاب بالمرض M .

<u>التمرين الثاني عشر</u>

من أجل 1000شركة صغيرة منها 10 تعلن الإفلاس كل سنة .

من أجل 1000شركة كبيرة منها 2 تعلن الإفلاس كل سنة .

لدينا شركة تعلن الإفلاس .

أحسب احتمال أن تكون الشركة المفلسة صغيرة . علما أن احتمال أن تعلن شركة صغيرة بالإفلاس هو $0,7$.

حلول التمارين

حل التمرين الأول

1. الحدث المطلوب إيجاده هو : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. بمعنى الحدث A هو وحده الذي يتحقق و ليس B و ليس C إذن الذي يتحقق هو $\overline{B}$ و $\overline{C}$.
2. الحدث المطلوب إيجاده هو $A \cap B \cap \overline{C}$.
3. الحدث المطلوب إيجاده هو: $A \cup B \cup C$.
4. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
5. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.
7. $A \cap B \cap C$.

حل التمرين الثاني

الحدث المطلوب إيجاده هو $A \cup B$. أما احتماله فهو يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

الحدث المطلوب إيجاده هو $A - B = A \cap \overline{B}$. أما احتماله فهو يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

التي تحصلنا عليها كما يلي :

لدينا : $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap B\right)$

و لما كان الحدثان $\left(A \cap \overline{B}\right) \wedge \left(A \cap B\right)$ هما متنافيان فإن :

$$P(A) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(A \cap B)$$

و منه العلاقة أعلاه صحيحة و بالتعويض نجد :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{1}{10}$$

الحدث المطلوب إيجاده هو : $\overline{A} \cap \overline{B}$. أما احتماله فهو يعطى بالعلاقة التالية :

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وذلك اعتمادا على- قانون مورقام - .

<u>حل التمرين الثالث</u>

لدينا دائما :

$$B - A = B \cap \overline{A} \subseteq \overline{A}$$
$$P\left(B \cap \overline{A}\right) \le P\left(\overline{A}\right) \quad / \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 1 = 0$$

إذن نستنتج أن : $P(B - A) = P\left(B \cap \overline{A}\right) \le 0 ....(1)$

كما أنه لدينا احتمال أي حدث اكبر أو يساوي الصفر............(2)

و منه من خلال(1) و (2) يكون لدينا : $0 \le P(B-A) \le 0$

و هذا هو المطلوب برهانه .

و بنفس الأسلوب نبين أن $P(A \cup B) = 1$ ، أي أننا ننطلق من خواص الإتحاد

و النتائج المستخلصة من تعريفنا للاحتمال بمعنى :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B) \\ \Rightarrow 1 \le P(A \cup B) ....(1) \end{array}}$$

كما أنه لدينا دائما : $P(A \cup B) \le 1 ....(2)$

من خلال العلاقتين السابقتين نستنتج أن مما سبق لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \qquad 1 \quad = 1 + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0 \\ \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) \end{array}}$$

<u>**حل التمرين الرابع**</u>

عدد الحالات الكلية : $C_{12}^{5} = \dfrac{12!}{7! \times 5!} = 792$

عدد الحالات الملائمة : $C_8^3 \times C_4^2 = 336$

ومنه الاحتمال المطلوب هو : $P = \dfrac{336}{792} = 0{,}42$.

<u>**حل التمرين الخامس**</u>

فضاء الأحداث الابتدائية لعائلة لها ثلاثة أطفال هو :

$$\Omega = \{FFF, FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF, GGG\}$$

عدد الحالات الكلية يساوي 8 .

العائلة حيث يكون بنات و بنون هو الحدث :

$$A = \{FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF\}$$

ومنه : $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

أما الحدث عائلة لها صبي على الأكثر فهو :

$$B = \{FFG, FGF, GFF, FFF\}$$

ومنه : $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

لكي نبين أن الحدثين A, B هما مستقلين يجب أن نبين أن :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

لدينا : $A \cap B = \{FFG, FGF, GFF\}$

ومنه : $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B)$ و هو المطلوب برهانه .

أما عندما يكون للعائلة طفلين فإن الأمر يختلف تماما فيهده الحالة فضاء

الأحداث الابتدائية يصبح كما يلي :

$$\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$$

أما الحدث : $A = \{FG, GF\}$ فهو العائلة لها بنات و بنون .

$B=\{FF,FG,GF\}$ عندئذ يكون لدينا: $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

أما الحدث $A\cap B$ فهو معرف كما يلي : $A\cap B=\{FG,GF\}$

$$P(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$$

و منه الحدثين A,B هما غير مستقلين .

حل التمرين السادس

لحل هذا التمرين نستخدم مباشرة العلاقة المعروفة و التي هي :

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{11}{20}\end{aligned}$$

أما في حالة الحدثين A,B هما مستقلين فإن :

$$\boxed{\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{4+2-1}{8}=\frac{5}{8}\end{aligned}}$$

حل التمرين السابع

.1

$$\boxed{\begin{aligned}&P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}=\frac{3}{5}\\&P(A\cap B)=\frac{1}{5}\end{aligned}}$$

.2

$$\boxed{\begin{aligned} P(\overline{A}/B) &= \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)+P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5} \\ P(A\cap B/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A/B) = \frac{3}{5} \end{aligned}}$$

.3

$$\boxed{P\left((A\cup B)/(A\cap\overline{B})\right) = \frac{P\left((A\cup B)\cap(A\cap\overline{B})\right)}{P(A\cap\overline{B})}}$$

لدينا اعتمادا على خواص الإتحاد و التقاطع :

$$(A\cap\overline{B})\subseteq A\subseteq A\cup B \Rightarrow (A\cap\overline{B})\subseteq A\cup B$$

من خلال هذا نستنتج أن :

$$P\left((A\cup B)/(A\cap\overline{B})\right) = \frac{P\left((A\cap\overline{B})\right)}{P(A\cap\overline{B})} = 1$$

4. بنفس الأسلوب السابق لدينا :

$$P\left((\overline{A}\cap B)/(\overline{A}\cup B)\right) = \frac{P\left((\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\right)}{P(\overline{A}\cup B)}$$

$$(\overline{A}\cap B)\subseteq\overline{A}\cup B \Rightarrow (A\cap\overline{B})\cap(A\cup B) = (A\cap\overline{B})$$

$$P\left((\overline{A}\cap B)/(\overline{A}\cup B)\right)=\frac{P\left((\overline{A}\cap B)\right)}{P\left(\overline{A}\cup B\right)}=$$
$$\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)+P(A\cap B)}$$
$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)=1-P\left(A\cap\overline{B}\right)=1-P(A)+P(A\cap B)$$

و بالتعويض نجد :

$$P\left((\overline{A}\cap B)/(\overline{A}\cup B)\right)=\frac{4}{49}$$

حل التمرين الثامن

- الاحتمال P كي يكون المجموع ≤ 10 من بين النتائج الستة الممكنة هي :

$$\{(5,6),(5,5)\}$$

إذن : $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

- إذا كان على الأقل أحد الحجرين رقمه 5 فإن الحالات الممكنة هي :

$\{(5,1),(5,2),......,(6,5)\}$ و عددها 11 .

$P=\frac{3}{11}$ لأن الاحتمال حيث المجموع أكبر أو يساوي 10 يكون من بين الحالات الملائمة $\{(5,5),(5,6),(6,5)\}$.

حل التمرين التاسع

A,B حدثين مستقلين يعني أن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \\ P(A \cap B) = P(A) \times p(B) = P(A) \\ P(A) \times p(B) - P(A) = 0 \Rightarrow P(A)(P(B) - 1) = 0 \\ \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 1 \end{array}}$$

<u>**حل التمرين العاشر**</u>

لنفرض أن الحدثين A,B مستقلين و لنثبت أن العلاقة التالية محققة :

$$\boxed{P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B})}$$

لدينا :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \text{ , } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

وكذلك لدينا :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$$

بالتعويض في العلاقة المفروضة نستنتج تساوي الطرفين للعلاقة .

إثبات العكس :

أي نفرض أن العلاقة صحيحة و نبرهن أن الحدثين مستقلين .

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap B)\times P(A\cap\overline{B})$$
$$P(A\cap B)\times P(\overline{A\cup B})=(P(B)-P(A\cap B))(P(A)-P(A\cap B))$$
$$P(A\cap B)\times(1-P(A\cup B))$$
$$=P(A\cap B)$$
$$(1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)).....(1)$$
$$(P(B)-P(A\cap B))(P(A)-P(A\cap B))=P(A)P(A)+(P(A\cap B))^2$$
$$-P(A)P(A\cap B)-P(B)P(A\cap B)$$

بالنشر و الاختزال نستنتج أن :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

و هذا يعني أن الحدثين مستقلين .

<u>حل التمرين الحادي العاشر</u>

ليكن M هو الحدث إصابة الشخص بالمرض . حيث أن $P(M)=0,3$

و ليكن ϑ نتائج التحليل موجبة .

و ليكن $\overline{\vartheta}$ نتائج التحليل سالبة .

و حسب المعطيات في نص التمرين لدينا :

$$P(\overline{\vartheta}/\overline{M})=0,9$$
$$P(\vartheta/M)=0,8$$

المطلوب حساب : $P(M/\vartheta)$ ؟

لأجل هذا نستخدم نظرية " بايز " :

$$P(M/\vartheta)=\frac{P(M)P(\vartheta/M)}{P(\vartheta)}$$

في الواقع لدينا حسب تعريف الاحتمال الشرطي :

$$P(M/\vartheta)=\frac{P(M\cap\vartheta)}{P(\vartheta)}\quad / \quad P(M\cap\vartheta)=P(M)P(\vartheta/M)$$

و بالاعتماد على قانون الاحتمال الشرطي لدينا :

$$\boxed{P(\vartheta)=P(M)P(\vartheta/M)+P(\overline{M})P(\vartheta/\overline{M})}$$

كذلك يمكننا حساب :

$$P(\overline{M})=1-P(M)=1-0{,}3=0{,}7$$
$$P(\vartheta/\overline{M})+P(\overline{\vartheta}/\overline{M})=1$$
$$\Rightarrow P(\vartheta/\overline{M})=1-0{,}9=0{,}1$$

و منه بالتعويض نتحصل على :

$$P(M/\vartheta)=\frac{P(M)P(\vartheta/M)}{P(\vartheta)}=\frac{0{,}3\times0{,}8}{0{,}3\times0{,}8+0{,}7\times0{,}1}=0{,}77$$

<u>حل التمرين الثاني عشر</u>

نرمز بالرمز μ للحدث أن تكون الشركة صغيرة .

نرمز بالرمز η للحدث أن تكون الشركة كبيرة .

و ليكن F هو الحدث الإعلان بالإفلاس .

فيكون لدينا :

$$P(\mu) = 0,7$$
$$P(\eta) = 1 - 0,7 = 0,3$$

المطلوب حساب احتمال أن تكون شركة صغيرة علما أنها مفلسة .

أي إيجاد $= p(\mu / F)$ ؟

كما رأينا في التمرين السابق باستخدام قانون الاحتمال الكلي نحسب $P(F)$.

$$P(F) = P(\eta)p(F/\eta) + P(\mu)P(F/\mu)$$
$$= 0,7 \times 0,01 + 0,3 \times 0,002 = 0,0076$$
$$P(F/\mu) = 0,002 \qquad , \qquad P(F/\eta) = 0,01$$

باستخدام نظرية " بايز " :

$$P(\mu/F) = \frac{P(\mu)P(F/\mu)}{P(\mu)P(F/\mu) + P(\eta)P(F/\eta)}$$
$$= \frac{0,7 \times 0,01}{0,7 \times 0,01 = 0,3 \times 0,002} = 0,92$$

2 المتغيرات العشوائية

ليكن (Ω,F,p) فضاء احتمالي ندعو متغيرا عشوائيا كل تطبيق

$$\boxed{X:\Omega\rightarrow R}$$

يحق ما يلي:

- $X(\Omega)=\{a/(\exists\omega\in\Omega)/a=X(\omega)\}$

تكون منتهية أو قابلة للعد .

- $\forall a\in R,\quad X^{-1}(\{a\})\in F$

ندعو $(X=a)$ حدثا ووقوع هذا الحدث يعني وقوع الصورة العكسية لـ

$X=a$ أي وقوع الحدث:

$$\boxed{X^{-1}(a)=\{\omega:\omega\in\Omega\wedge X(\omega)=a\}}$$

- <u>تصنيف المتغيرات العشوائية</u>

1- المتغير العشوائي المنقطع هو الذي تكون مجموعة قيمه الممكنة منتهية أو قابلة للعد.

2- المتغير العشوائي المستمر هو الذي تكون مجموعة قيمه الممكنة غير منتهية أي غير المحدودة.

- **دالة الاحتمال لمتغير عشوائى منقطع**

نسمي الدالة :

$$\mathbf{f(x_i) = p(X = x_i)}$$

بدالة الاحتمال للمتغير العشوائي المنقطع X :

إذا تحق الشرطان :

-1 $\mathbf{f(x_i) \geq 0}$

-2 $\mathbf{\sum_{x} f(x_i) = 1}$

يتم عادة تنظيم قيم المتغير العشوائي و التي هي :

$$\mathbf{R_x = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n, \ldots\}}$$

والتي تقابلها الاحتمالات التالية:

$$\mathbf{f(x_1, f(x_2), \ldots\ldots f(x_n), \ldots\ldots)}$$

في جدول ندعوه بجدول التوزيع الاحتمالي:

x	x_1	x_2	x_n ,........
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$..........	$f(x_n)$,.........

♦ **<u>تعريف التوقع</u>**

إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة الاحتمال السابقة فإن التوقع أو المتوسط هو المقدار التالي:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)}$$

و يرمز له كذلك بالرمز μ.

♦ **<u>خواص التوقع الرياضي</u>**

إذا كان c عددا ثابتا فان :

$$\boxed{E(c)=c}$$

يعطينا :

$$E(cx)=cE(x)$$

حيث c عدد ثابت.

♦ **<u>تعريف التباين</u> (لمتغير عشوائي منقطع)**

تباين متغير عشوائي منقطع هو المقدار:

$$\begin{aligned}Var(X)&=E(X-E(X))^2\\&=E(X-\mu)^2\\&=\sum_{i\geq 1}(x_i-\mu)^2\end{aligned}$$

يرمز له عادة بالرمز σ_x^2 و للاختصار نضع $E(X) = \mu$ أما إذا استخدمنا الشكل المختزل فإننا نحصل على العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 \end{aligned}$$

♦ <u>تعريف الانحراف المعياري</u>

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي منقطع هو الجذر ألتربيعي الموجب للتباين و يرمز له بالرمز σ_x.

<u>مثال</u>

إذا كان X متغيرا عشوائيا منقطعا له الجدول الاحتمالي التالي :

x	**0**	**1**	**2**
$f(x)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

حساب التوقع:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= 0 \times \frac{6}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

حساب الصيغة المختزلة للتباين:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

لحسب أولا:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$$
$$= 0^2 \frac{6}{15} + 1^2 \frac{8}{15} + 2^2 \frac{1}{15}$$
$$= \frac{12}{15}$$

و منه نحسب التباين:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$
$$= \frac{12}{15} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{16}{45}$$

ومنه الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{16}{45}} =\approx 0.6$$

♦ **تعريف دالة التوزيع الاحتمالى المتجمع *(fonction de répartition)***

دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$\begin{aligned} &F : R \to [0,1] \\ &\quad x \to p(X \le x) \quad /(X \le x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \le x\} \end{aligned}$$

نعرف الدالة F كما يلي:

- **إذا كان** $X \le x_1$

$$\boxed{F(x) = p(X \le x) = 0}$$

- **إذا كان** $X_J \le X < X_{J+1}$

$$\boxed{F(X) = p(X \le x) = \sum_{i=1}^{j} p_i}$$

- **إذا كان :** $X_n \le x$

$$\boxed{F(X) = p(X \le x) = 1}$$

مثال

إذا كانت التجربة هي رمي ثلاثة قطع نقدية متوازنة و اعتبرنا المتغير

العشوائي X هو الذي يدل على عدد الأوجه أي الصور (face) عندئذ يكون لدينا :

$$\boxed{R_X = \{\quad 0,1,2,3\}}$$

$$p(X=0)=p(\{H,H,H\})=\frac{1}{8}$$
$$p(X=1)=p(\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\})=\frac{3}{8}$$
$$p(X=2)=\frac{3}{8}$$
$$p(X=3)=\frac{1}{8}$$

و منه فان دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:

من اجل $X<0$:

الدالة $F(x)=0$

من اجل $0\le X<1$:

$$F(x)=\frac{1}{8}$$

من اجل $1\le X<2$:

$$F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

من اجل $2\le X<3$:

$$F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

من اجل $3\le X$:

$$F(x)=1$$

المتغيرات العشوائية ذات التوزيع المشترك

بفرض أن مجموعة قيم المتغير العشوائي المنقطع X هي :

$$R_x = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\}$$
$$R_y = \{y_1, \ldots\ldots\ldots, y_2, \ldots\ldots\}$$

و نقول أن الحدث $\left[\left(x_i, y_j\right) = \left(X, Y\right)\right]$ **إذا وقع كلا من الحدثين**

$(X = x_i), (Y = y_j)$ **معا و نرمز لاحتمال وقوع الحدث بالرمز** $f(x_i, y_j)$

أي أن :

$$f(x_i, y_j) = p[X = x_i, Y = y_j]$$
$$\wedge\ i = 1, \ldots\ldots, m, \ldots \wedge\ j = 1, \ldots\ldots, n, \ldots$$

وهذه العلاقة تدعى بدالة التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين X, Y و هي

تحقق الشرطيين التاليين :

-1 $0 \le f(x_i, y_j) \forall i, j \ge 1$

-2 $\sum\limits_{i \ge 1} \sum\limits_{j \ge 1} f(x_i, y_j) = 1$

ينظم جدول التوزيع المشترك ضمن الجدول التالي :

$X \therefore Y$	y_1	y_2	...	y_n	المجموع
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$		$f(x_1, y_n)$	$\sum_{j\geq1} f(x_1, y_j)$
x_2	$f(x_2, y)$	$f(x_2, y_2)$			$\sum_{j\geq1} f(x_2, y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_m	$f(x_m, y_1)$	...			$\vdots$
المجموع	$\sum_{i\geq1} f(x_i, y_1)$	$\sum_{i\geq1} f(x_i, y_2)$			

<u>المتغيرات العشوائية المستقلة</u>

نقول عن المتغيرين العشوائيين X, Y إنـهما مستقلان إذا كان :

$$\boxed{\mathbf{F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)}}$$

حيث $F(x, y)$ هو التوزيع المشترك للمتغيرين X, Y .

أما $F_X(x) \wedge F_Y(y)$ التوزيع المشترك للمتغير X و التوزيع المشترك للمتغير Y على التتالي .

ملاحظة

العمود الأخير يدعى بجدول التوزيع الهامشي للمتغير X و السطر الأخير يدعى بجدول التوزيع للمتغير Y .

التغاير بين متغيرين عشوائيين

نعرف التغاير بين متغيرين عشوائيين X,Y و يرمز له بالرمز $Cov(X,Y)$ بالعلاقة التالية :

$$\boxed{Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E(XY) - \mu_x\mu_y}$$

تعريف الارتباط بين متغيرين

نعرف عامل الارتباط بين المتغيرين X,Y و نرمز له بـ الرمز $\rho(X,Y)$ العلاقة التالية :

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}}$$

حيث σ_x هو الانحراف المعياري للمتغير X و σ_y هو الانحراف المعياري للمتغير Y.

بعض خواص الارتباط

- $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
- $\rho(X,X) = 1, \rho(X,-X) = -1$

- $\forall a,c \neq 0, \rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$
- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

<u>تمرين</u>

نرمي حجري نرد متماثلين عندئذ نتحصل على فضاء الأحداث الابتدائية مؤلف من 36 نتيجة مرتبة بالشكل التالي :

$$\boxed{S = \{(1,1),(1,2),......,(6,6)\}}$$

ليكن X,Y المتغيرين العشوائيين من S، حيث أن المتغير العشوائي X يوافق القيمة العظمى لمركبتيه أي أن:

$$X(a,b) = \max(a,b)$$

أما المتغير العشوائي Y فإنه يوافق مجموع مركبته أي أن :

$$Y(a,b) = a + b$$

و منه قانون الاحتمال لجداءيهما نمثله ضمن الجدول التالي :

$\frac{Y}{X}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	.	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	0	0	.	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$

4	**0**	**0**	.	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**0**	**0**	**0**	**0**	$\frac{7}{36}$
5	**0**	**0**	.	**0**	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**0**	**0**	$\frac{9}{36}$
6	**0**	**0**	.	**0**	**0**	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
المجموع	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	.	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

سنحاول شرح كيفية ملأ هذا الجدول.

مثلا:

نلاحظ أن النقطتين $(2,3)$, $(3,2)$ هما النقطتين الوحدتين من المجموعة S ذات المركبة العظمى هي 3 و مجمع المركبتين لهما يساوي 5 بهذه الطريقة إملأ العمود الرابع إذن :

لدينا :

$$\boxed{P(X=3,Y=5)=\frac{2}{36}}$$

حيث أن 2 يوافق عدد الحالات الملائمة و هو عدد النقاط و هو $(2,3)$, $(3,2)$.

أما 36 فيوافق عدد الحالات الكلية . و بنفس الأسلوب نحصل على العناصر الأخرى التي هي في الجدول .

لنحسب الآن التغاير و الارتباط للمتغيرين X, Y :

قبل ذلك لنحسب $E(XY)$ الذي يعطى بالعلاقة التالية :

$$E(XY) = \sum x_i y_j h(x_i, y_j)$$
$$= 1 \times 2 \times \frac{1}{36} + 2 \times 3 \frac{2}{36} + ... + 6 \times 12 \frac{1}{36}$$
$$= \frac{1232}{36} = 34,2$$

لنحسب μ_Y , μ_X :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_X = E(X) \\ &= \sum x_i f(x_i) = 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4,47 \end{aligned}}$$

$$\mu_Y = E(Y)$$
$$= \sum y_j f(x_j) = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36}$$
$$+ .... + 12\frac{1}{36} = 7$$

أما لأجل حساب σ_Y , σ_X فإنه يجب أن نحسب $Var(X), Var(Y)$ حيث :

$$\boxed{\begin{aligned} &Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 \end{aligned}}$$

قبل ذلك يجب حساب $E(X^2)$ المعطى بالعلاقة التالية :

$$E(X^2) = 1^2.\frac{1}{36} + 2^2 \frac{3}{36} + ... + 6^2.\frac{11}{36} = \frac{791}{36} = 21,97$$

و منه :

$$Var(X) = 21,97 - 19,98 = 1,99$$
$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{1,99} = 1,44$$

و بنفس الأسلوب نحسب أيضا $\sigma_Y = 2,4$.

من خلال هذه العلاقات التي تحصلنا عليها نجد الارتباط و التغاير .

$$\boxed{\begin{aligned}&Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y = \\ &= 34,2 - (4,47)(7) = 2,9\end{aligned}}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{2,9}{1,4\times 2,4} = 0,86$$

<u>التوزيع الثنائي ذو الحدين</u> ***(loi binomiale)***

نقول عن المتغير العشوائي X أن له التوازي (الحداني) إذا كانت له دالة احتمال أي دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$\boxed{\begin{aligned}&P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad / x = 0,1,.....,n \wedge 0 < p < 1; q = 1 - p \\ &= \frac{n}{x(n-x)} p^x q^{n-x} \geq 0......(1) \\ &\sum C_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1\end{aligned}}$$

<u>**ملاحظة**</u>

أما العلاقة الأخيرة فهي منشور ثنائي حد " نيوتن " و التوزيع ذو الحدين في الحالة العامة يحصل عندما يكون عدد التكرارات المستقلة n اختياريا و لنعين الاحتمالات الموافقة للقيم $x = 0,1,.....,n$.

بملاحظة أن الحدث $(X = x)$ يوافق وقوع x نجاحا و $n - x$ فشلا وهذا يتحقق

باحتمال $p^x q^{n-x}$ أما عدد هذه الاحتمالات كلها فهو يساوي :

$$\boxed{C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

كما يرمز أيضا لهذا التوزيع ب $b(x;\ n,\ p)$.

<u>نظرية</u>

القيمة الأكثر احتمالا للدالة $b(x;\ n,\ p)$ لهذا المتغير الثنائي ذو

الحدين هي العدد الصحيح المحصور في المجال $[np - q, (n+1)p]$.

إن القيمة الأكثر احتمالا هي تلك التي تجعل من دالة الاحتمال التالية :

$$\boxed{f(x) = b(x;n,p) = C_n^x p^x q^{n-x}}$$

في نهايتها العظمى لأجل هذه يجب أن يتحقق لدينا ما يلي :

$$\boxed{f(x) \geq f(x+1) \quad \wedge \quad f(x) \geq f(x-1)}$$

بتبديل كل من هاتين العلاقتين بما يساويهما نحصل على ما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{f(x-1)} = \dfrac{n-x+1}{x}\dfrac{p}{q} \geq 1 \\ \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{n-x}{x+1}\dfrac{p}{q} \leq 1 \end{array}}$$

و بحل هاتين المتراجعتين بالنسبة إلى x نجد :

$$\boxed{np - q \le x \le (n+1)p}$$

ملاحظة

بما أن طول هذا المجال يساوي 1 لأن:

$$\boxed{p(n+1) - (np - q) = p + q = 1}$$

إذن فلا يوجد داخل هذا المجال سوى عدد صحيح واحد إذا كان $(n+1)p$ ليس صحيحا أو عددين صحيحين فقط و هما طرفي المجال .

خواص توزيع ذو الحدين

- إذا كان X متغيرا عشوائيا له التوزيع الثنائي الحدين فان كل من التوقع و التباين يعطى حسب العلاقة التالية :

$$E(X) = np = \mu \qquad \wedge \qquad \sigma^2 = Var(X) = npq$$

ملاحظة

عندما نكرر التجربة مرة واحدة أي في الحالة $n = 1$ فقيمة X أما تكون 0 أي النتيجة f أو تساوي 1 أي :

النتيجة s ونكتب عندها :

$$p(s) = p = p(X = 1) \quad \wedge \quad p(f) = q = p(X = 0)$$

ومنه جدول التوزيع يكون كالتالي :

x	**0**	**1**
$f(x)$	q	p

ويدعى هذا التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة التوزيع الثنائي النقطي أو (توزيع برنو لي) أما خواص هذا التوزيع النقطي فهي

$$\boxed{E(X)=\mu=p \quad \wedge \quad \sigma^2=Var(X)=pq}$$

<u>مثال</u>

نرمي 7 مرات حجر النرد متوازن و نفرض أن 5 واحد أو 6 واحد يوافق نجاحا .

إذن في هذه الحالة لدينا :

$$n=6 \quad , \quad P(\{5,6\})=\frac{1}{3}=p \quad \wedge q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

- **احتمال أن يكون لينا 5 واحد أو 6 واحد ثلاثة مرات فقط أي:**

$$\boxed{x=3 \Rightarrow P(X=x=3)=C_n^x p^x q^{n-x}=C_7^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 q^4=\frac{560}{2187}}$$

احتمال عدم وقوع 5 أو 6 يتم فقط في حالة الفشل

$$\boxed{q^7=\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{128}{2187}}$$

و منها احتمال أن يكون لدينا على الأقل 5 واحد أو 6 واحد هو:

$$1 - q^7 = \frac{2059}{2187}$$

تعريف قانون بواسون ***(loi de poisson)***

نقول عن المتغير العشوائي X انه يتوزع حسب توزيع ' يواسون '

بوسيط $\lambda > 0$ و نكتب اختصارا $P(x;\lambda)$ إذا كانت له دالة الاحتمال التالية:

$$\boxed{P(x;\lambda) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \,/\, x = 0,1,2.......,}$$

هذه الدالة هي احتمال لأنها تحقق الشرطين التاليين :

$$\boxed{P(x;\lambda) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \geq 0 \quad \bullet}$$

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} P(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1}$$

أن قانون بوسون له تطبيقات متعددة في مجال المكالمات الهاتفية بالدقيقة في أخطاء الصفحات في كتاب ما في البكتريا الموجودة في واحد مليمتر مكعب في وعاء يحوي على سائل إما بالنسبة لخواص قانون يواسون التي هي المتوسط و التباين و الانحراف المعياري فيمكن جمع ذلك في جدول كما يلي :

المتوسط $\mu = E(X) = \lambda$

التباين $\sigma^2 = \lambda$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون

ليكن X_n متغيرا عشوائيا يتوزع وفق التوزيع الثنائي $b(x_n;n,p)$

فإذا كان n,p يتغيران بحيث $\lambda = np$ و العدد λ ثابت موجب فان :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b(x_n;n,p) = P(x;p)}$$

ملاحظة

الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال البواسونية تساوي بالتقريب الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي و لكن بشرط أن تكون n كبيرة جدا و يكون الجداء صغير نسبيا و يكون التقريب مقبولا من اجل

$nq < 5 \quad \vee \quad np < 5$.

مثال

ليكن متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها شخص ما بين الساعة العاشرة و الساعة الحادية عشرة هو 1.8 في الدقيقة. المطلوب:

- **عدم وجود أي مكالمة هاتفية .**
- **مكالمة هاتفية واحدة .**

- مكالمتان هاتفيتان .
- ثلاث مكالمات هاتفية على الأقل .

<u>الحل</u>

إن عدد المكالمات الهاتفية هو متغير عشوائي يواسوني وسيطه $\lambda = 1.8$ وتكون له دالة الاحتمال التالية :

$$P(x;1.8) = P(X = x) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^{x}}{x!}$$

احتمال عدم تلقي أي مكالمة هو:

$$P(0 \quad ; \quad 1.8) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^{0}}{0!} = 0.16529$$

- احتمالا تلقي مكالمة واحدة هو:

$$P(1 \quad ; \quad 1.8) = e^{-1.8}\frac{1.8^{1}}{1!} = 0.29752$$

و بنفس الأسلوب نجد الاحتمال مناجل مكالمتين هاتفيتين أما احتمال تلقي ثلاثة مكالمات على الأقل فهو يساوي :

$$\begin{aligned}
&P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)\\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]\\
&= 1 - 0.16529 + 0.29752 + 0.26776\\
&= 0.27123
\end{aligned}$$

قانون التوزيع الطبيعي ***(loi normale, Laplace gauss)***

نقول أن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي بوسيطين μ و σ^2 و

نرمز له اختصارا $N(\mu,\sigma^2)$.

إذا كانت كثافته الاحتمالية:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad / -\infty < x < +\infty}$$

حيث:

$$\boxed{0<\sigma \quad \wedge \quad -\infty<\mu<+\infty}$$

ونلاحظ كذلك أن الدالة $f(x)$ تبلغ نهايتها العظمى عند $x=\mu$ و قيمة هذه النهاية هي $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ و المنحني متناظر بالنسبة للمستقيم $x=\mu$ و له شكل جرس و له خط مقارب هو المحور ox كما يمكننا أن نتحقق من أن الدالة تحقق خواص دالة الكثافة الاحتمالية .

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \geq 0, \forall x\in R, \quad 0<\sigma}$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=1$$

و ذلك بإجراء تغيير في المتغير كما يلي :

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy$$

يمكن تنظيم قيم كل من التوقع و التباين و الانحراف المعياري في حالة التوزيع الطبيعي كما يلي :

المتوسط	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ

<u>دالة التوزيع الطبيعي</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

لكن إيجاد التابع الأصلي للدالة $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ هي في الغالب صعبة لذلك نلجأ إلى استخدام جدول خاص يعطينا قيمة الدالة $F(x)$.

<u>تعريف</u> (التوزيع الطبيعي المعياري)

نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي المعياري و نرمز له بـ $N(0,1)$ إذا كانت كثافته الاحتمالية :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad / -\infty < x < +\infty$$

أي أنه حالة خاصة من التوزيع الطبيعي من اجل :

$$\boxed{\mu = 0 \quad \wedge \quad \sigma^2 = 1}$$

ملاحظة

إذا كنا نريد احتمال متغير يقع بين القيمتين a,b و الذي نرمز له بالرمز

$P(a \le x \le b)$ نغير قيمة a,b إلى وحدات قياسية مختصرة كما يلي :

$$\boxed{a' = \frac{a-\mu}{\sigma}, b' = \frac{b-\mu}{\sigma} \Rightarrow P(a' \le t \le b') / t = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

وندعو t بالمتغير المعياري المركزي (unité centre réduite)

مثال

المتوسط و الانحراف المعياري في نتائج الامتحان هي بالتتالي 74 و12

احسب النتائج بالوحدات المعيارية المركزية للطلبة الحاصلين على العلامات التالية:

86 (-3-) , 74 (-2-) , 65 (-1 -)

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{65-74}{12} = -0.75$$

$$t = \frac{74-74}{12} = 0$$

$$t = \frac{86-74}{12} = 1$$

مثال

عند قياس x من السكان يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه الحسابي 170cm و تباين يساوي 36.

أحسب $P(180 < x)$.

الحل

لدينا $\mu = 170 \wedge \sigma^2 = 36$ و كذلك لدينا :

$$P(t \le k) = 1 + P(k < t) \quad / \quad t = \frac{x - 170}{6} = \frac{10}{6} = 1.66$$
$$P(1.66 < t) = 1 - P(t \le 1.66)$$
$$= 1 - 0.9515 = 0.05$$

دالة التوزيع الطبيعي المعياري

هذه الدالة يرمز لها ب $\Phi(z)$ وهي بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}$$

ولأجل حساب هذه الدالة اعد جدول يعطينا قيم هذه الدالة سنلحق في أخر هذه المحاضرات جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري أما طريقة استخدامه فهي كالتالي :

إن هذا الجدول يعطي قيم دالة التوزيع من الصفر و بفاصل 0.01 بين كل قيمة و القيمة التي تليها وقد وضعت قيم z ابتداء من الصفر و بفاصل 0.1 في العمود الأيسر ووضعت المنزلة العشرية الثانية من قيمة z في السطر الراسي و مقابل كل قيمة في العمود الأيسر هناك سطر يمكن تسميته بهذه القيمة أما قيم دالة التوزيع الطبيعي المعياري فقد نحصل عليها عند ملتقى سطر و عمود.

مثال

إذا كان Z متغيرا عشوائيا طبيعيا معياريا. اوجد $P(Z<1.96)$.

الحل

نلاحظ أن:

$$\boxed{P(Z<1.96)=\Phi(1.96)}$$

إذا عدنا للجدول 1 في الملح فإننا نجد أن قيمة $\Phi(Z)$ الواقعة عند ملتقى السطر 1.9 و العمود 0.06 هي 0.9750 .

ملاحظة

يمكن استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري من الملحق بشكل عكسي .

مثال

إذا كان Z متغيرا عشوائيا طبيعيا اوجد قيمة z بحيث يكون لدينا:

$$\boxed{P(Z<z)=0.9850}$$

<u>الحل</u>

نحدد السطر و العمود اللذين يلتقيان عند القيمة 0.9850 و سنجد أنـها تقع عند السطر 2.1 و العمود 0.07 ومنه القيمة $z = 2.17$.

<u>ملاحظة</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} P(Z < -z) = 1 - P(z < Z) \\ P(Z < -z) = 1 - P(Z \le z) \\ = 1 - P(Z < z) \end{array}}$$

وهذا يرجع للتناظر الموجود بالنسبة للمحور الشاقولي

$$\boxed{P(Z < -z) = P(z < Z)}$$

<u>مثال</u>

إذا كان Z متغيرا عشوائيا طبيعيا معياريا اوجد $P(Z < -2.46)$.

<u>الحل</u>

$$\begin{array}{l} P(Z < -2.46) = \Phi(-2.46) \\ = 1 - \Phi(2.46) = 1 - 0.9931 \\ = 0.0069 \end{array}$$

<u>مثال</u>

إذا كان X متغيرا عشوائيا له التوزيع $N(50,100)$.

- أوجد قيمة $P(42 \le X \le 55)$.

الحل

نقوم بإجراء التغيير أي نضع :

$$\boxed{t = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

ثم نعين قيمتي T المقابلتين للقيمتين $x_1 = 42 \wedge x_2 = 55$

أي أن:

$$t_1 = \frac{42-50}{10} = -0.8 \wedge t_2 = \frac{55-50}{10} = 0.5$$

و منه يكون لدينا :

$$\begin{aligned}
&P(42 \le X \le 55) = P(-0.8 \le T \le 0.5) \\
&= \Phi(0.5) - \Phi(-0.8) \\
&= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.8) \\
&= 0.6915 + 0.7881 - 1 = 0.4796
\end{aligned}$$

المـراجـع

1) مبادئي الاحتمالات و الإحصاء للدكتور عزات عمر قاسم . منشورات جامعة دمشق 1995.

2) الإحصاء المطبق في البيولوجي تأليف ع. براح .ديوان المطبوعات الجامعية 1984.

3) Adobe Reader-[Simue-pdf]

4) Adobe Reader-[2-cours-statistiques.Pdf]

5) Adobe Reader -[2-cmp-calculatrice-statistique.Pdf]

6) Probabilités et statistique cours et problèmes Série Schaum

7) Probabilités cours et problèmes Série Schaum

8) Adobe Reader [Sta-prob-2nde .Pdf]

9) Simulation avec excel-Microsoft InternetExplorer

10) Icosq :statistiques au Lycee-Microsoft InternetExplorer