تمارين و حلول لرفع التحدي

أولمبياد الرياضيات

الجزء الأول

الأستاذ عبد الرحيم اسطيط

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسول الله سيدنا محمد وعلى آله وصحبه.

يحتوي هذا الكتاب الذي نضعه بين يديك عزيزي القارئ على تمارين و حلول لأولمبياد الرياضيات، الهدف منه هو إكساب المتعلم منهجية فعالة وطريقة جيدة لحل التمارين والمسائل الرياضية.

لبلوغ الغايات المرجوة أنصحك عزيزي القارئ بالبحث الشخصي عن الحل الواضح والمقنع، لأن قراءتك للحل المقترح لن تفيدك بشيء بل مجهودك وبحثك هو الأهم قبل اطلاعك على الجواب.

وأملنا كبير أن يحقق هذا الكتاب الغاية التي ألف من أجلها، وأن يسهم في مساعدة التلاميذ على تجاوز الصعوبات التي تعترضهم، وأن يساهم في إثراء مراجع الأستاذ.

والله ولي التوفيق

اسطيط عبدالرحيم

الفهرس

أولمبياد الأول

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

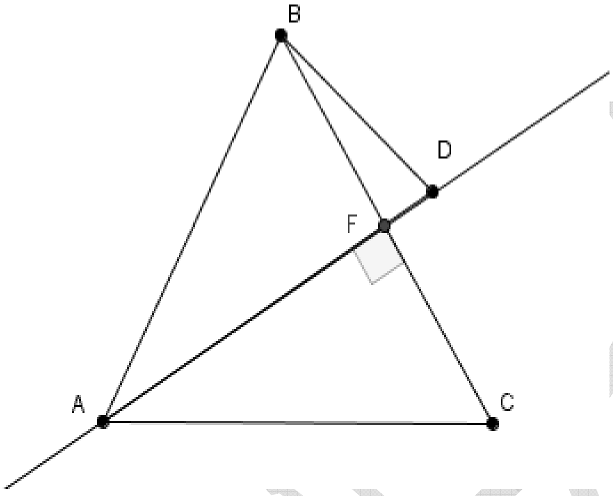
بين أن : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$

تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث : $BA=BC$

و $BA=AD$ و $(AD)\perp(BC)$

احسب : $B\hat{A}C+A\hat{D}B$



تمرين 3

EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله

ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع (FG) في النقطة D

بين أن : $PB+PC+PA=ED$

تمرين 4

x و y و z و w أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{w}$

بين أن : $\sqrt{\frac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}=\frac{x}{w}$

حل أولمبياد الأول

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ يعني : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ يعني : $\frac{x^2+y^2}{y} \geq \frac{2xy}{y}$

إذن : $\frac{x^2}{y} + y \geq 2x$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y^2}{z} + z \geq 2y$ (2)

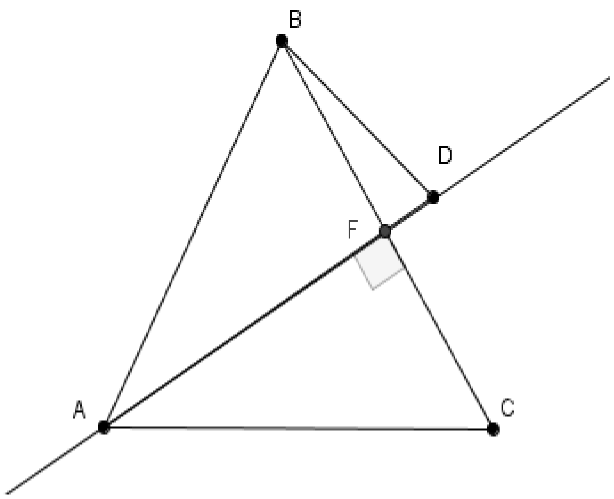
و $\frac{z^2}{x} + x \geq 2z$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{x^2}{y} + y + \frac{y^2}{z} + z + \frac{z^2}{x} + x \geq 2x + 2y + 2z$

أي : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + (x+y+z) - (x+y+z) \geq 2(x+y+z) - (x+y+z)$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x+y+z$

تمرين 2



لدينا : $BA = BC$ و $BA = AD$

إذن المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في B و A على التوالي

ومنه $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

بما أن المثلثات BAF و AFC و BFD هي قائمة الزاوية كلها في F

فإن : $F\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^\circ$ و $B\hat{A}F + A\hat{B}C = 90^\circ$ و $F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ$

نجمع المتساويات الثلاثة طرف بطرف : $F\hat{A}C + A\hat{C}B + B\hat{A}F + A\hat{B}C + F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$

أي : $\left(F\hat{A}C + B\hat{A}F\right) + A\hat{C}B + \left(A\hat{B}C + F\hat{B}D\right) + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$

نعلم أن : $B\hat{A}C = F\hat{A}C + B\hat{A}F$ و $A\hat{B}D = A\hat{B}C + F\hat{B}D$

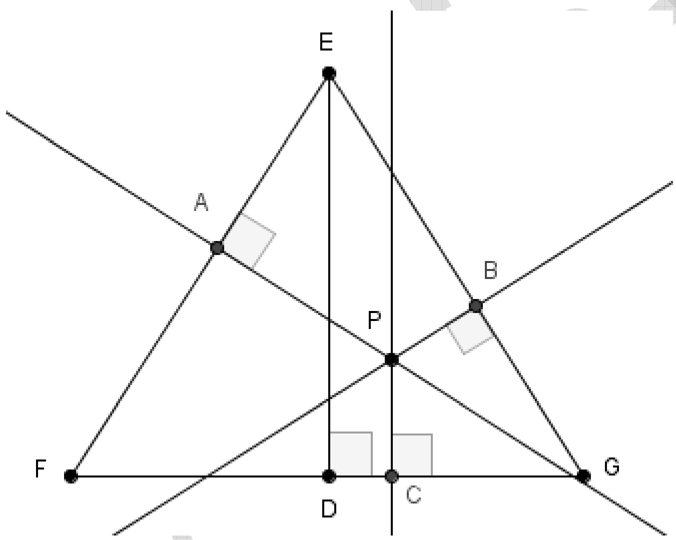
أي : $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$

أي : $2B\hat{A}C + 2B\hat{D}A = 270^\circ$ لأن $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

أي : $2\left(B\hat{A}C + B\hat{D}A\right) = 270^\circ$

وبالتالي : $B\hat{A}C + B\hat{D}A = 135^\circ$

<u>تمرين 3</u>



نحسب مساحة المثلث EFG بطريقتين مختلفتين :

<u>الطريقة الأولى</u> : $S_{EFG} = \dfrac{ED \times FG}{2}$ (1)

<u>الطريقة الثانية</u> :

لدينا :

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= S_{PEG} + S_{PFG} + S_{PEF} \\ &= \frac{PB \times EG}{2} + \frac{PC \times FG}{2} + \frac{PA \times EF}{2} \\ &= \frac{PB \times EG + PC \times FG + PA \times EF}{2} \end{aligned}$$

نعلم أن $FG = EG = EF$

إذن : $S_{EFG}=\dfrac{PB\times FG+PC\times FG+PA\times FG}{2}$

ومنه : $S_{EFG}=\dfrac{FG\left(PB+PC+PA\right)}{2}$ $\quad(2)$

من 1 و 2 نستنتج أن : $\dfrac{FG\left(PB+PC+PA\right)}{2}=\dfrac{ED\times FG}{2}$

أي : $\dfrac{2}{FG}\times\dfrac{FG\left(PB+PC+PA\right)}{2}=\dfrac{2}{FG}\times\dfrac{ED\times FG}{2}$

وبالتالي : $PB+PC+PA=ED$

<u>تمرين 4</u>

نضع : $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{w}=k$

يعني : $z=kw$ و $y=zk$ و $x=yk$

يعني : $z=kw$ و $y=(kw)k$ و $x=yk$

إذن : $z=kw$ و $y=wk^2$ و $x=\left(wk^2\right)k=k^3w$

لنبين أن : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}-\dfrac{x}{w}=0$

$$\sqrt{\frac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}-\frac{x}{w}=\sqrt{\frac{\left(k^3w\right)^5+\left(wk^2\right)^2(kw)^2+\left(k^3w\right)^3(kw)^2}{\left(wk^2\right)^4(kw)+w^4+\left(wk^2\right)^2(kw)w^2}}-\frac{wk^3}{w}$$

$$=\sqrt{\frac{k^{15}w^5+k^4w^2k^2w^2+k^9w^3k^2w^2}{k^8w^4kw+w^4+k^4w^2kww^2}}-k^3$$

$$=\sqrt{\frac{k^{15}w^5+k^6w^4+k^{11}w^5}{k^9w^5+w^4+k^5w^5}}-k^3$$

$$=\sqrt{\frac{k^6\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}{\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}}-k^3$$

$$=\sqrt{k^6}-k^3=\sqrt{\left(k^3\right)^2}-k^3=k^3-k^3=0$$

وبالتالي : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}=\dfrac{x}{w}$

أولمبياد الثاني

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 2

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD=AB+AC$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

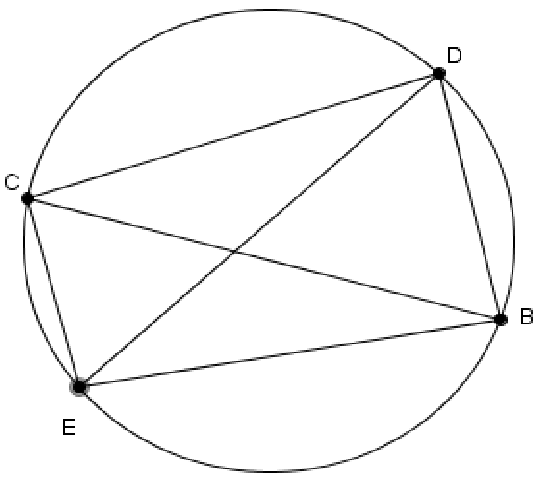
بين أن : $xyz=1$

تمرين 4

$ECDB$ رباعي محاط بدائرة

(أنظر الشكل جانبه)

بين أن : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$



حل أولمبياد الثاني

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0 \times\left(-\sqrt{x}-2\right)$ $\quad\left(-\sqrt{x}-2 \leq 0\right)$

يعني : $\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \dfrac{1}{2}$ $\quad\left(3-x=y+z>0\right)$

يعني : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

إذن : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \dfrac{x}{2}$ $\quad(1)$

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \dfrac{y}{2}$ $\quad(2)$

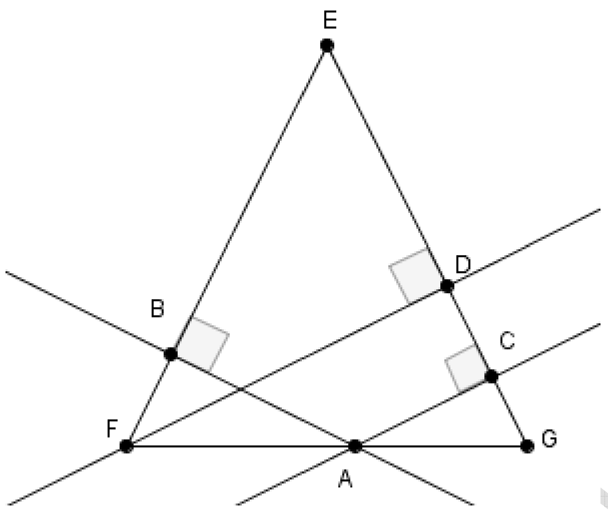
و $\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{z}{2}$ $\quad(3)$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}$

أي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

تمرين 2



لدينا : $S_{EFG}=S_{EFA}+S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ،، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ،، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

يعني : $\dfrac{AC\times EG}{2}+\dfrac{AB\times EF}{2}=\dfrac{EG\times FD}{2}$

يعني : $\dfrac{AB\times EF+AC\times EG}{2}=\dfrac{EG\times FD}{2}$

يعني : $\dfrac{AB\times EG+AC\times EG}{2}=\dfrac{EG\times FD}{2}$ ($EF=EG$ لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E)

يعني : $\dfrac{EG(AB+AC)}{2}=\dfrac{EG\times FD}{2}$

يعني : $\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}(AB+AC)}{\cancel{2}}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}\times FD}{\cancel{2}}$

إذن : $FD=AB+AC$

تمرين 3

لدينا : $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}$

يعني : $x-y=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}$ يعني: $x-y=\dfrac{y-z}{zy}$ يعني : $zy=\dfrac{y-z}{x-y}$

إذن : $xyz=\dfrac{x(y-z)}{x-y}$ (1)

لدينا : $y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$

يعني : $y-z=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}$ يعني : $y-z=\dfrac{z-x}{xz}$ يعني : $xz=\dfrac{z-x}{y-z}$

إذن : $xyz=\dfrac{y(z-x)}{y-z}$ (2)

لدينا : $x+\dfrac{1}{y}=z+\dfrac{1}{x}$

يعني : $z-x=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$ يعني : $z-x=\dfrac{x-y}{xy}$

إذن : $xy=\dfrac{x-y}{z-x}$ (3)

نضرب المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $(xyz)\times(xyz)=\dfrac{x(\cancel{y-z})}{x-y}\times\dfrac{y(z-x)}{\cancel{y-z}}$

ومنه : $(xyz)^2=\dfrac{xy(z-x)}{x-y}$ (4)

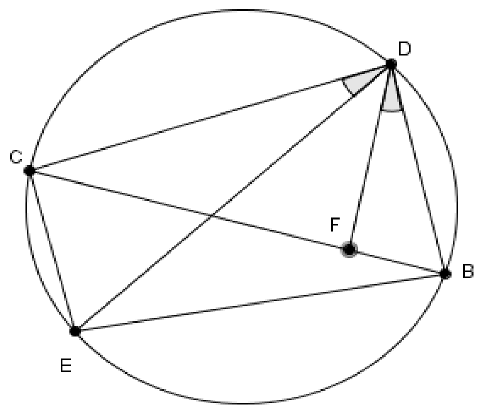
من 3 و 4 نستنتج أن : $(xyz)^2=\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{z-x}\right)(z-x)}{x-y}$

أي : $(xyz)^2=\dfrac{\cancel{x-y}}{\cancel{z-x}}\times\dfrac{\cancel{z-x}}{\cancel{x-y}}=1$

بما أن $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ أعداد حقيقية موجبة فإن : $xyz>0$

وبالتالي : $xyz=1$

تمرين 4



نضع النقطة F على $[BC]$ بحيث : $C\hat{D}E=B\hat{D}F$ (1)

بما أن $D\hat{B}F$ و $D\hat{E}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{B}F=D\hat{E}C$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن المثلثان CED و DBF متشابهان

أي $\frac{DB}{DE}=\frac{BF}{CE}$

ومنه $DB\times CE=BF\times DE$ (3)

لدينا : $C\hat{D}E=B\hat{D}F$

يعني : $C\hat{D}E+E\hat{D}F=B\hat{D}F+E\hat{D}F$

إذن : $C\hat{D}F=E\hat{D}B$ (4)

بما أن $D\hat{C}F$ و $D\hat{E}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{C}F=D\hat{E}B$ (5)

من 4 و 5 نستنتج أن المثلثان DFC و DBE متشابهان

أي : $\frac{DC}{DE}=\frac{CF}{BE}$

ومنه : $DC\times BE=CF\times DE$ (6)

نجمع المتساويتين 6 و 3 طرف بطرف : $DB\times CE+DC\times BE=BF\times DE+CF\times DE$

أي : $DB\times CE+DC\times BE=DE\left(BF+CF\right)$

وبالتالي : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$

أولمبياد الثالث

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq x+y+z$

تمرين 2

AHB مثلث بحيث : $A\hat{B}H=120^{\circ}$

و (BC) هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$ ($C\in[HA]$)

المستقيم المار من H والموازي للمسستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

بين أن : $\frac{1}{BH}+\frac{1}{AB}=\frac{1}{CB}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $(x+y+z)^{2}=x^{2}+y^{2}+z^{2}$

بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4

ABC مثلث و النقطة D منتصف $[BC]$

و (AE) الإرتفاع الموافق للضلع $[BC]$ ($E\in(BC)$)

و النقطتان F و G هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (AD)

بين أن $CG=BF$

حل أولمبياد الثالث

تمرين 1

لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $a = xy$ و $b = yz$ و $c = xz$

لدينا : $(a-b)^2 \geq 0$ و $(b-c)^2$ و $(c-a)^2 \geq 0$

أي : $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ أي : $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$

أي : $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$ أي : $2\left(a^2 + a^2 + a^2\right) \geq 2(ab + bc + ac)$

أي : $\dfrac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq \dfrac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(ab + bc + ac)$

أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \dfrac{ab}{\sqrt{abc}} + \dfrac{bc}{\sqrt{abc}} + \dfrac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \dfrac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}} + \dfrac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}} + \dfrac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

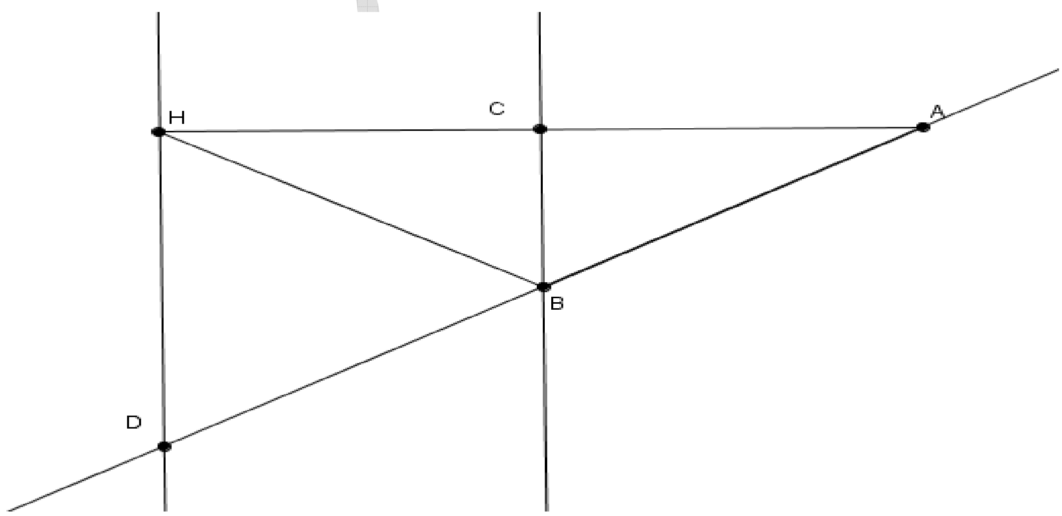
أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{abc}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{\dfrac{ab}{c}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}} + \sqrt{\dfrac{ac}{b}}$

أي : $\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \dfrac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \dfrac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\dfrac{xy^2z}{xz}} + \sqrt{\dfrac{yz^2x}{xy}} + \sqrt{\dfrac{x^2yz}{yz}}$

أي : $\dfrac{x^2y^2}{xyz} + \dfrac{y^2z^2}{xyz} + \dfrac{x^2z^2}{xyz} \geq \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} + \sqrt{x^2}$

وبالتالي : $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{xz}{y} \geq y + z + x$

تمرين 2



بما أن $[BC)$ هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$

فإن : $A\hat{B}C = H\hat{B}C = \frac{A\hat{B}H}{2} = \frac{120}{2} = 60$

ولدينا $D\hat{B}A = H\hat{B}D + A\hat{B}H$

إذن : $H\hat{B}D = D\hat{B}A - A\hat{B}H = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (1)

بما أن المستقيمان (CB) و (HD) متوازيان و (HB) قاطع لهما

فإن : $B\hat{H}D = H\hat{B}C = 60^\circ$ (2)

ولدينا : $H\hat{D}B + D\hat{H}B + H\hat{B}D = 180$

أي $H\hat{D}B = 180 - \left(D\hat{H}B + H\hat{B}D\right)$

ومنه $H\hat{D}B = 180^\circ - \left(60^\circ + 60^\circ\right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث HDB متساوي الأضلاع

ومنه $HD = HB = DB$

لدينا $(HD)//(CB)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AB + BD}{AB} = \frac{BH}{CB}$ $\left(HD = HB = DB \text{ و } AD = AB + BD\right)$

أي : $\frac{AB + BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$

أي : $\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AB} \times BH} + \frac{\cancel{BH}}{AB \times \cancel{BH}} = \frac{1}{CB}$

وبالتالي : $\boxed{\frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}}$

تمرين 3

لدينا : $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $(x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

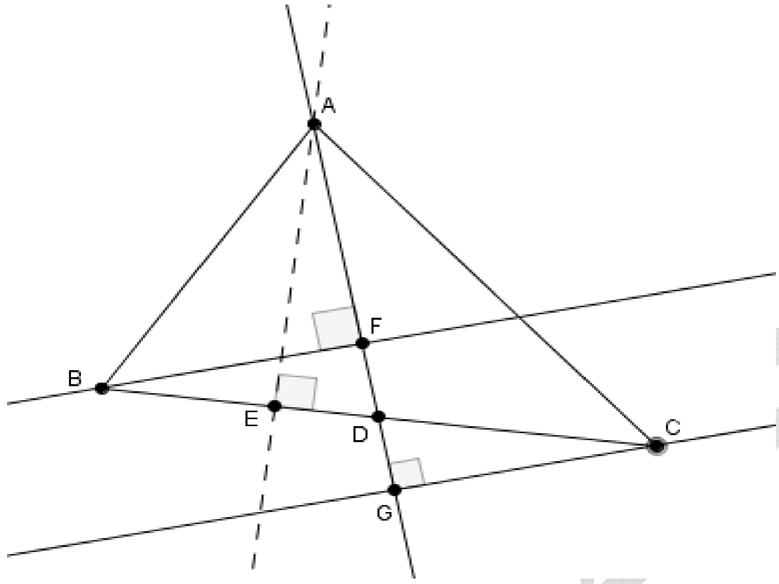
أي : $x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $2xy + 2(x+y)z = 0$ أي : $2(xy + xz + yz) = 0$

أي : $\frac{1}{\cancel{2}xyz} \times \cancel{2}(xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz}$ أي : $\frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0$

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4



نحسب مساحة المثلثين ABD و ACD بطريقتين مختلفتين

الطريقة الأولى :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AE\times BD}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AE\times CD}{2}$

(S_{ABD} هي مساحة المثلث ABD و S_{ACD} هي مساحة المثلث ACD)

نعلم أن $BD=CD$

إذن $S_{ABD}=S_{ACD}$

الطريقة الثانية :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AD\times BF}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AD\times CG}{2}$

بما أن $S_{ABD}=S_{ACD}$

فإن : $\frac{AD\times CG}{2}=\frac{AD\times BF}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times CG}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times BF}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $BF=CG$

أولمبياد الرابع

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

بين أن $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leq\frac{1}{xy}$

تمرين 2

ABC مثلث والنقط D و E و F هي على التوالي

منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$

بين أن : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$

تمرين 3

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

بين ان : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{1}{\sqrt{2016}}$

حل أولمبياد الرابع

تمرين 1

لدينا : $\left(x^2+y\right)^2 \geq 0$

أي : $x^4-2x^2y+y^2 \geq 0$ أي : $x^4+y^2 \geq 2x^2y$ أي : $\frac{1}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2x^2y}$ أي : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{x}{2x^2y}$

إذن : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2yx}$ (2)

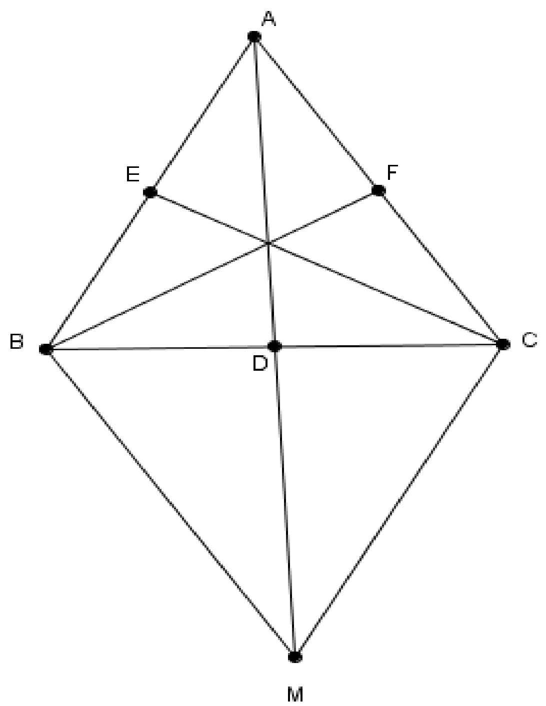
نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yx}$

ومنه : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}xy}$

وبالتالي : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$

تمرين 2

لتكن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D



لدينا D منتصف $[BC]$

إذن C هي مماثلة B بالنسبة للنقطة D

بما أن C و M هما مماثلتي A و B على التوالي بالنسبة للنقطة D

فإن : $AB = CM$ (1)

في المثلث ACM لدينا : $AM < AC + CM$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AM < AC + AB$

نعلم أن $AM = 2AD$ (لأن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D يعني D منتصف $[AM]$)

أي $2AD < AC + AB$ (3)

في المثلثان ADC و ADB لدينا : $AC < AD + DC$ (4)

و $AB < AD + DB$ (5)

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف : $AC + AB < AD + DC + AD + DB$

نعلم أن : $BC = BD + DC$

أي : $AC + AB < 2AD + BC$

إذن : $AC + AB - BC < 2AD$ (6)

من 3 و 6 نستمنج أن : $AC + AB - BC < 2AD < AC + AB$ (7)

بنفس الطريقة نبين أن : $AC + BC - AB < 2CE < AC + BC$ (8)

و $AB + BC - AC < 2BF < AB + BC$ (9)

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$$AC + AB - BC + AC + BC - AB + AB + BC - AC < 2AD + 2CE + 2BF < AC + AB + AC + BC + AB + BC$$

أي :

$$AC + \cancel{AB} - \cancel{BC} + \cancel{AC} + \cancel{BC} - \cancel{AB} + AB + BC - \cancel{AC} < 2(AD + CE + BF) < 2AC + 2AB + 2BC$$

أي : $\frac{1}{2}\times(AB + AC + BC) < \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AD + CE + BF) < \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AC + AB + BC)$

وبالتالي : $\frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC$

تمرين 3

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2+EG^2=FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $\left(EF^4+EG^4\right)-FG^4$:

$$FG^4-EF^4-EG^4=\left(FG^2\right)^2-EF^4-EG^4=\left(EF^2+EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\left(EF^2\right)^2+2EF^2\times EG^2+\left(EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\cancel{EF^4}+2EF^2\times EG^2+\cancel{EG^4}-\cancel{EF^4}-\cancel{EG^4}$$
$$=2EF^2\times EG^2>0$$

وبالتالي : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

نضع : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}$ و $Y=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

لدينا :

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2012}{2013}<\frac{2013}{2014}$$
$$\frac{2014}{2015}<\frac{2015}{2016}$$

يعني : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

يعني : $X<Y$

يعني : $X^2<XY$

يعني : $\sqrt{X^2}=X<\sqrt{XY}$

لنحسب $\sqrt{XY}$:

لدينا : $XY=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\times\ldots\times\frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}}\times\frac{\cancel{2013}}{\cancel{2014}}\times\frac{\cancel{2014}}{\cancel{2015}}\times\frac{\cancel{2015}}{2016}=\frac{1}{2016}$

إذن : $\sqrt{XY}=\sqrt{\frac{1}{2016}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\sqrt{XY}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

أولمبياد الخامس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2

$EFGH$ رباعي محدب قطراه

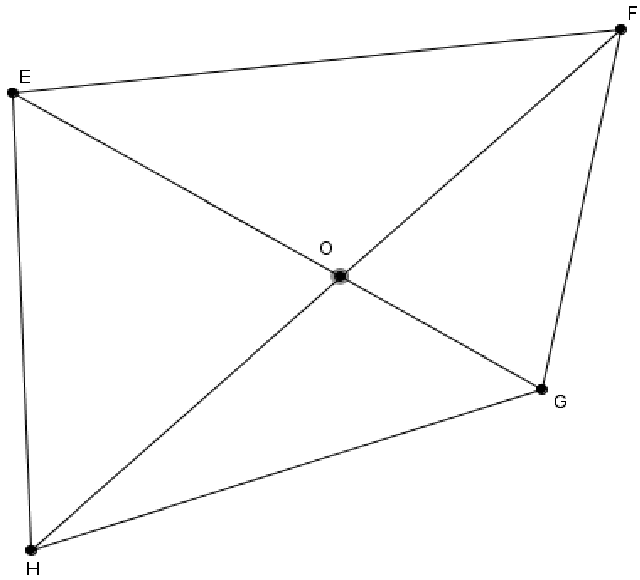
$[EG]$ و $[FH]$ يتقاطعان

في النقطة O كماهو مبين

في الشكل جانبه

P : محيط الرباعي $EFGH$

بين أن : $\frac{1}{2}P < EG+FH < P$



تمرين 3

احسب $\dfrac{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+....+\frac{1}{99\times100}}{\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+...+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}}$

تمرين 4

أنشئ قطعة طولها $\sqrt{10}$ (تبرير الإنشاء)

حل أولمبياد الخامس

تمرين 1

نحدد إشارة الفرق $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9$:

لدينا :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-9$$

$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1-9$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-6$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2$$

$$=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+\frac{y^2+z^2-2zy}{zy}+\frac{x^2+z^2-2xz}{xz}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}$$

نعلم أن $(x-z)^2\geq 0$ و $(x-y)^2\geq 0$ و $(z-y)^2\geq 0$

بما أن $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ فإن : $xy>0$ و $zy>0$ و $xz>0$

إذن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}\geq 0$

وبالتالي : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2

محيط الرباعي $EFGH$ هو :

$$P=EF+FG+GH+HE$$

في المثلثين EFG و EHG لدينا : $EG<EF+FG$ و $EG<EH+HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $EG+EG<EF+FG+EH+HG$

أي : $2EG<P$

إذن : $EG < \frac{P}{2}$ (1)

في المثلثين EHF و HGF لدينا : $FH < EF + EH$ و $FH < GF + HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $FH + FH < EF + EH + GF + HG$

أي : $2FH < P$

إذن : $FH < \frac{P}{2}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $EG + FH < P$ (3)

في المثلثات EFO و FOG و HGO و EOH لدينا : $EF < EO + OF$

و $FG < OF + OG$ و $HG < OG + OH$ و $EH < OH + OE$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف: $EF + FG + HG + EH < EO + OF + OF + OG + OG + OH + OH + OE$

أي : $P < 2(EO + OG) + 2(OF + OH)$ أي : $P < 2EG + 2FH$

أي : $P < 2(EG + FH)$ أي : $\frac{P}{2} < EG + FH$ (4)

من 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2}P < EG + FH < P$

تمرين 3

نضع : $X = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$

و $Y = \frac{1}{51\times100} + \frac{1}{52\times99} + \frac{1}{53\times98} + \ldots + \frac{1}{99\times52} + \frac{1}{100\times51}$

لدينا : $X = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$

يعني : $X = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$

يعني : $X = \left(1 + \left(\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{6}\right)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} + \left(\frac{1}{100} - 2\times\frac{1}{100}\right)\right)$

يعني : $X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{100}\right)$

يعني : $X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{50}\right)$

يعني : $X = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$

يعني : $X + X = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$

يعني : $2X = \left(\frac{1}{51}+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{53}+\frac{1}{98}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{51}\right)$

يعني : $2X = \frac{151}{51\times100}+\frac{151}{52\times99}+\frac{151}{53\times98}+\ldots+\frac{151}{99\times52}+\frac{151}{100\times51}$

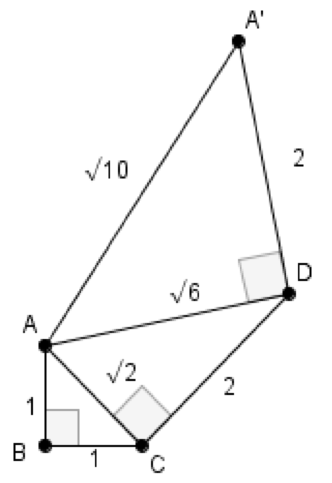
يعني : $2X = 151\left(\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+\ldots+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}\right)$

يعني : $2X = 151Y$

وبالتالي : $\frac{X}{Y}=\frac{151}{2}$

تمرين 4

المرحلة الأولى :



ننشئ المثلث ABC قائم الزاوية في B بحيث :

$AB = BC = 1$

جسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

يعني : $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$ ومنه : $AC = \sqrt{2}$

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة D بحيث المثلث ADC قائم الزاوية في C بحيث : $DC = 2$

جسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AC^2 + DC^2$

يعني : $AD^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 2+4 = 6$ ومنه : $AD = \sqrt{6}$

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة A' بحيث المثلث ADA' قائم الزاوية في D بحيث : $DA' = 2$

جسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AA'^2 = DA'^2 + AD^2$

يعني : $AA'^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = 4+6 = 10$

ومنه : $AA' = \sqrt{10}$

أولمبياد السادس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة ($x>0$ و $y>0$ و $z>0$)

1- بين أن $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2- استنتج أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $\begin{cases} x-7y+8z=4 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases}$

بين أن : $x^2-y^2+z^2=1$

تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

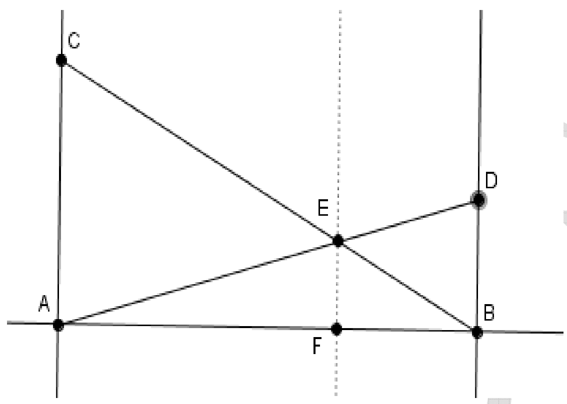
$(AC)//(BD)$ و $AC=8$

و $BD=4$ و E نقطة

تقاطع (BC) و (AD)

و F نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $(EF)//(BD)$

احسب EF



تمرين 4

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و m عدد حقيقي

بحيث : $xyz=1$ و $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

بين أن : $m=\frac{1}{2}$

حل أولمبياد السادس

تمرين 1

1 – لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2}{xy}-2=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$

(لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $xy>0$)

إذن : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2- حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ (2)

و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2+2+2$$

أي : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 2+2+2$

إذن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

نضع : $\begin{cases} x-7y+8z=4 & (1) \\ 8x+4y-z=7 & (2) \end{cases}$

نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 : $\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times 2) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 1) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} 2x-14y+16z=8 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $2x-14y+16z+8x+4y-z=8+7$

يعني : $10x-10y+15z=15$

يعني : $10(x-y)=15(1-z)$

إذن : $x-y=\frac{15}{10}(1-z)=\frac{3}{2}(1-z)$ (3)

نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2 : $\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times(-1)) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 2) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -x+7y-8z=-4 \\ 16x+8y-2z=14 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $-x+7y-8z+16x+8y-2z=-4+14$

يعني : $15x+15y-10z=10$

يعني : $15(x+y)=10(1+z)$

إذن : $x+y=\frac{10}{15}(1+z)=\frac{2}{3}(1+z)$ (4)

نضرب المتساويتان 3 و 4 طرف بطرف : $(x-y)\times(x+y)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(1-z)\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1+z)$

يعني : $x^2-y^2=1-z^2$

وبالتالي : $x^2-y^2+z^2=1$

<u>تمرين 3</u>

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{EF}{AC}$ ومنه $\frac{BF}{BA}=\frac{EF}{AC}$ (1)

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{DB}$ ومنه $\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{DB}$ (2)

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{AC}+\frac{EF}{DB}$$

يعني : $EF\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}\right)=\frac{BF+AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$

إذن : $\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}=\frac{1}{EF}$

التطبيق العددي :

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4+8}{32}=\frac{12}{32}$$

$$EF=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

تمرين 4

بما أن : $xyz=1$ فإن : $yz=\frac{1}{x}$ و $xz=\frac{1}{y}$

لدينا : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1}+\frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1+xy+x}{x}}+\frac{2zm}{\frac{1+yz+y}{y}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{1+yz+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{\frac{1+xy+x}{x}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2xyzm}{1+xy+x}=1$

يعني : $\frac{2xm+2xym+2\times1\times m}{xy+x+1}=1$

يعني : $\frac{2m\left(\cancel{x+xy+1}\right)}{\cancel{xy+x+1}}=1$

يعني : $2m=1$

وبالتالي : $m=\frac{1}{2}$

أولمبياد السابع

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

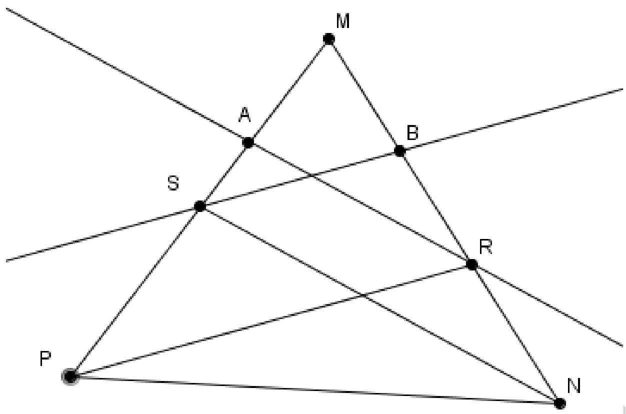
1- بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- استنتج أن : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2

في الشكل جانبه لدينا : $S\in[PM]$ و $R\in[NM]$

و $(AR)//(NS)$ و $(PR)//(BS)$



بين أن : $\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MN}$

تمرين 3

ABC مثلث قائم الزاوية في C

بين أن : $BC^K > AB^k + AC^K$ $\quad (K>2)$

تمرين 4

x و y و z و x' و y' و z' أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=m$

بين أن : $\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$

حل أولمبياد السابع

تمرين 1

1- لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{y+x}{xy}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\geq 0$

(لأن : $(x-y)^2\geq 0$ و لدينا $x>0$ و $y>0$ يعني $xy(x+y)\geq 0$)

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$ (2)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+z}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

أي : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{4}\times 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{4}\times 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}$

وبالتالي : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2

في المثلث MSN لدينا : $(AR)//(NS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{AR}{SN}=\frac{MR}{MN}=\frac{MA}{MS}$ ومنه $\frac{MR}{MN}=\frac{MA}{MS}$

أي $MS\times MR=MA\times MN$ (1)

في المثلث MRP لدينا : $(PR)//(BS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{BS}{PR}=\frac{MS}{MP}=\frac{MB}{MR}$ ومنه $\frac{MS}{MP}=\frac{MB}{MR}$

أي $MS\times MR=MB\times MP$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $MA\times MN=MB\times MP$

وبالتالي : $\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MN}$

تمرين 3

لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في C

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$

نضرب طرفي المتساوية في BC^{K-2} فنحصل على : $BC^2\times BC^{K-2}=AB^2\times BC^{K-2}+AC^2\times BC^{K-2}$

يعني : $BC^K=AB^2\times BC^{K-2}+AC^2\times BC^{K-2}$ (1)

لدينا : $BC>AB$ و $BC>AC$ يعني : $BC^{K-2}>AB^{K-2}$ و $BC^{K-2}>AC^{K-2}$

يعني : $BC^{K-2}\times AB^2>AB^{K-2}\times AB^2$ و $BC^{K-2}\times AC^2>AC^{K-2}\times AC^2$

إذن : $BC^{K-2}\times AB^2>AB^k$ و $BC^{K-2}\times AC^2>AC^K$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $BC^K>AB^k+AC^K$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=m$

إذن : $x=mx'$ و $y=my'$ و $z=mz'$

لدينا:

$$\begin{aligned}\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}&=\sqrt{mx'x'}+\sqrt{my'y'}+\sqrt{mz'z'}\\&=\sqrt{mx'^2}+\sqrt{my'^2}+\sqrt{mz'^2}\\&=x'\sqrt{m}+y'\sqrt{m}+z'\sqrt{m}\\&=\sqrt{m}(x'+y'+z')\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}&=\sqrt{(mx'+my'+mz')(x'+y'+z')}\\&=\sqrt{m(x'+y'+z')(x'+y'+z')}\\&=\sqrt{m}(x'+y'+z')\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}}$

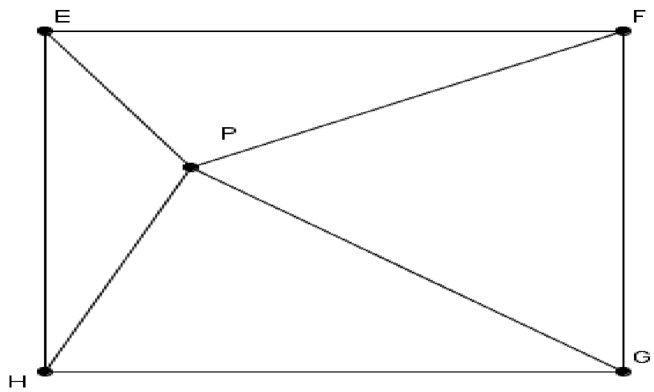
أولمبياد الثامن

تمرين 1

x و y عددان موجبان قطعا

بين أن : $\frac{x+y}{xy+x+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

تمرين 2



$EFGH$ مربع

و النقطة P توجد في داخله

كماهو مبين في الشكل جانبه

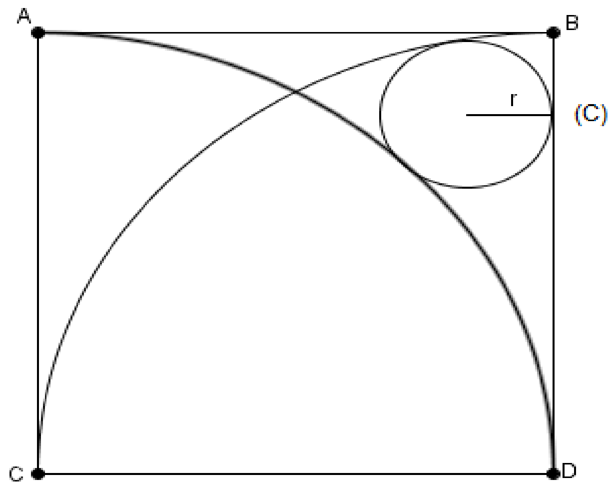
بين أن : $GP^2 + EP^2 = HP^2 + FP^2$

تمرين 3

x و y عددين حقيقيين مختلفين غير منعدمين بحيث : $(x-y)(3x-2y) = xy$

احسب $\frac{x+y}{x-y}$

تمرين 4



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD = 6cm$ و r هو

شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r = 1cm$

حل أولمبياد الثامن

تمرين 1

لدينا : $x>0$ و $y>0$

يعني : $x+y\geq x$ يعني : $x+y+1\geq x+1$ يعني : $\frac{1}{x+y+1}\leq\frac{1}{x+1}$

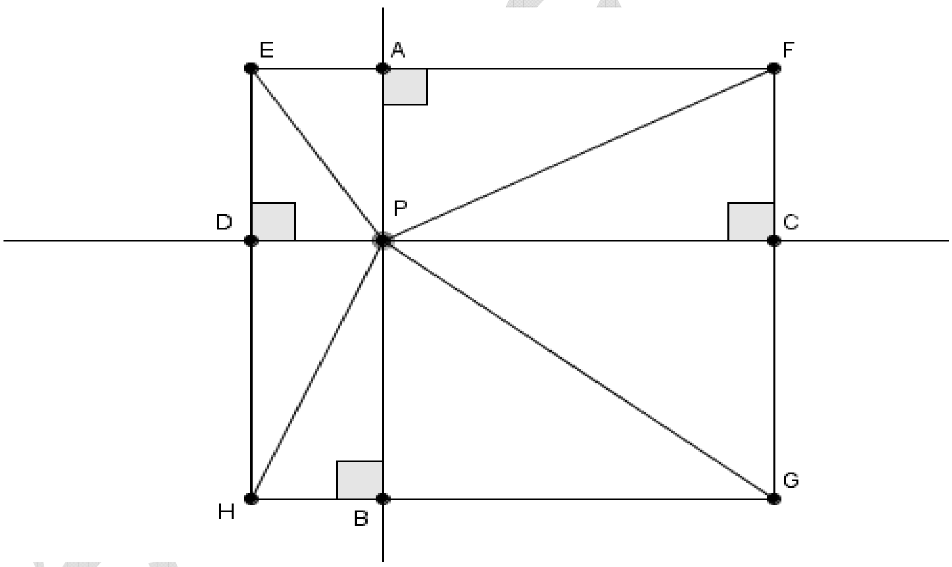
إذن : $\frac{x}{x+y+1}\leq\frac{x}{x+1}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y+x+1}\leq\frac{y}{y+1}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $\frac{x}{x+y+1}+\frac{y}{y+x+1}\leq\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

وبالتالي : $\frac{x+y}{x+y+1}\leq\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

تمرين 2



تعتبر النقطة A المسقط العمودي للنقطة P على $[EF]$

و النقطة C المسقط العمودي للنقطة P على $[FG]$

و النقطة B المسقط العمودي للنقطة P على $[GH]$

و النقطة D المسقط العمودي للنقطة P على $[EH]$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات AEP و AFP و PCG و PHB :

$$\begin{cases} EP^2 = AP^2 + AE^2 = AP^2 + DP^2 \\ PG^2 = PC^2 + CG^2 = PC^2 + PB^2 \\ PF^2 = AP^2 + AF^2 = AP^2 + PC^2 \\ PH^2 = PB^2 + HB^2 = PB^2 + DP^2 \end{cases} \quad (AE = DP \text{ و } CG = PB \text{ و } AF = PC \text{ و } HB = DP)$$

إذن :

$$\begin{aligned} PG^2 + EP^2 &= PC^2 + PB^2 + AP^2 + DP^2 \\ &= PB^2 + DP^2 + AP^2 + PC^2 \\ &= PH^2 + PF^2 \end{aligned}$$

تمرين 3

لدينا : $(x-y)(3x-2y) = xy$ يعني: $3x^2 - 2xy - 3xy + 2y^2 - xy = 0$

يعني: $3x^2 - 6xy + 2y^2 = 0$ يعني: $3\left(x^2 - 2xy + \frac{2y^2}{3}\right) = 0$

يعني: $\left(x^2 - 2xy + y^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$ يعني: $\left((x-y)^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$

يعني: $\left(x - y + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)\left(x - y - \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = 0$

يعني : $x - y + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$ و $x - y - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

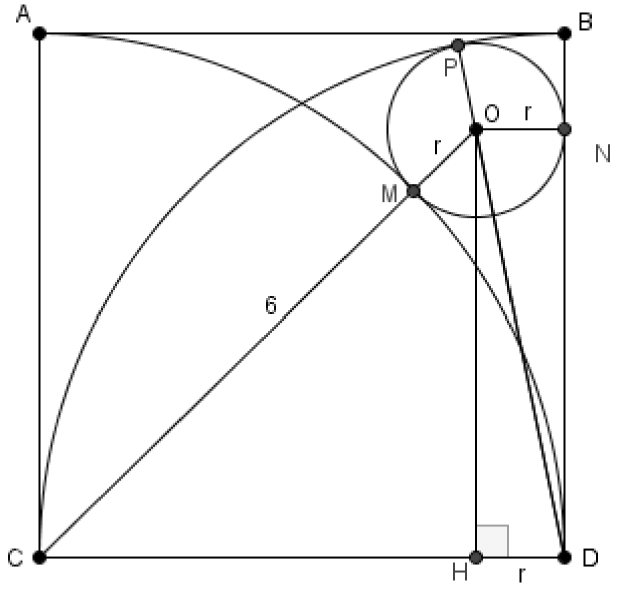
يعني : $x = y - \frac{y}{\sqrt{3}}$ و $x = y + \frac{y}{\sqrt{3}}$

إذن :

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y - \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y - \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y - \frac{y}{\sqrt{3}}}{-\frac{y}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{-1} = 1 - 2\sqrt{3}$$

أو

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y + \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y + \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y + \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{y}{\sqrt{3}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$



تمرين 4

نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على (CD)

إذن : $O\hat{H}D = 90^\circ$

بما أن (DN) مماسا للدائرة (C) في النقطة N

فإن: $(DN)\perp(ON)$ ومنه $D\hat{N}O = 90^\circ$

لدينا : $H\hat{O}N = 360 - D\hat{N}O - O\hat{H}D - H\hat{D}N$

يعني: $H\hat{O}N = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $H\hat{O}N = D\hat{N}O = O\hat{H}D = H\hat{D}N = 90^\circ$

فإن الرباعي $ONDH$ مستطيل

ومنه : $OH = ND$

ونعلم أن : $CH = CD - HD$ و $CO = CM + MO$ و $DO = DP - PO$

يعني : $CH = 6 - r$ و $CO = 6 + r$ و $DO = 6 - r$

حساب OH :

لدينا المثلث OHC قائم الزاوية في H

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $CO^2 = CH^2 + OH^2$

اي : $OH^2 = CO^2 - CH^2$ أي : $OH^2 = (6+r)^2 - (6-r)^2$

أي : $OH^2 = \cancel{36} + 12r + \cancel{r^2} - \cancel{36} + 12r - \cancel{r^2}$ ومنه : $OH = \sqrt{24r}$

حساب r :

لدينا المثلث ODN قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $OD^2 = ON^2 + DN^2$

اي : $(6-r)^2 = r^2 + \left(\sqrt{24r}\right)^2$ $\left(OH = ND \right.$ و $\left. DO = 6 - r \right)$

أي : $36 - 12r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 24r$ أي : $36r = 36$

وبالتالي : $r = 1$

أولمبياد التاسع

<table>
<tr><td>

<u>تمرين 1</u>

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>1$ و $y>1$

بين أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

</td></tr>
<tr><td>

<u>تمرين 2</u>

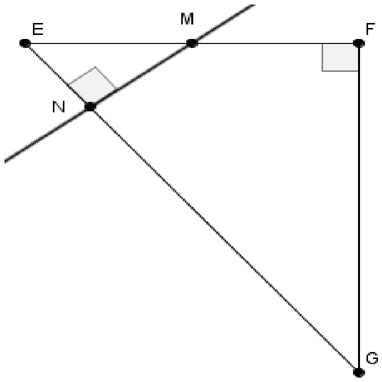
EFGمثلث قائم الزاوية في F بحيث : $EF<FG$

النقطة M منتصف $[EF]$

النقطة N هي المسقط العمودي للنقطة

M على (EG)

بين أن : $GN^2-EN^2=FG^2$



</td></tr>
<tr><td>

<u>تمرين 3</u>

m عدد حقيقي موجب قطعا

1- بين أن $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16$

</td></tr>
<tr><td>

<u>تمرين 4</u>

$ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

في المثلث AMD الإرتفاع المار من D يقطع (AM) في E

بين أن : $CE=CD$

</td></tr>
</table>

حل أولمبياد التاسع

تمرين 1

لدينا : $x>1$ و $y>1$

يعني : $x-1>0$ و $y-1>0$

نضع : $a=x-1$ و $b=y-1$

يعني : $x=a+1$ و $y=b+1$

إذن : $x^2=(a+1)^2$ و $y^2=(b+1)^2$

لدينا :

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}$$
$$=\frac{a^2+2a+1}{b}+\frac{b^2+2b+1}{a}$$
$$=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

لدينا : $(a+b)^2\geq 0$

يعني : $a^2+2ab+b^2\geq 0$ يعني : $a^2+b^2\geq 2ab$

يعني : $\frac{1}{ab}\times(a^2+b^2)\geq\frac{1}{\cancel{ab}}\times 2\cancel{ab}$ يعني : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

إذن : $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4$ (1)

لدينا : $(a-1)^2\geq 0$

يعني : $a^2-2a+1\geq 0$ يعني : $a^2+1\geq 2a$ يعني : $\frac{1}{b}\times(a^2+1)\geq\frac{1}{b}\times 2a$

إذن : $\frac{a^2+1}{b}\geq\frac{2a}{b}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2b}{a}$ (3)

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$$

أي : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

ومنه : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ (4)

من 1 و 4 نستنتج أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4+4$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

تمرين 2

لدينا المثلثان MEN و MNG قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $ME^2=MN^2+EN^2$ و $MG^2=MN^2+GN^2$

ومنه : $EN^2=ME^2-MN^2$ و $GN^2=MG^2-MN^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MN^2-\left(ME^2-MN^2\right)$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-ME^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MF^2$ (1)

($ME=MF$ لأن النقطة M منتصف $[EF]$)

لدينا المثلثان MGF قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $MG^2=MF^2+FG^2$

ومنه : $FG^2=MG^2-MF^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $GN^2-EN^2=FG^2$

تمرين 3

1- لدينا : $m+\frac{1}{m}-2=\frac{m^2+1}{m}-2=\frac{m^2+1-2m}{m}=\frac{(m-1)^2}{m}\geq 0$ إذن : $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- لدينا :

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

حسب السؤال 1 لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\geq 2$

و $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ و $\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\geq 2$ و $\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\geq 2$

إذن :

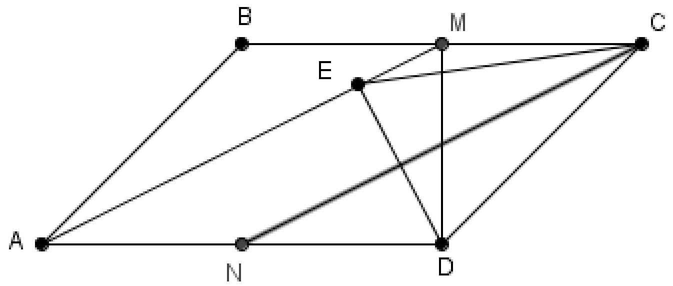
$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

$$\geq 2+2+2+2+2+2+4$$

وبالتالي : $\boxed{(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16}$

تمرين 4



لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

إذن : $(MC)//(AN)$ و $MC=AN$

ومنه : الرباعي $ANCM$ متوازي الأضلاع

ومنه : $(AM)//(NC)$

ومنه : $(CN)\perp(DE)$ (1) (لأن $(AM)\perp(DE)$)

في المثلث ADE لدينا N منتصف $[AD]$ و $(CN)//(AE)$

إذن (CN) يمر من منتصف (DE) (2)

من 1 و 2 نستنتج أن (CN) هو واسط القطعة $[DE]$

وبالتالي : $CE=CD$

أولمبياد العاشر

تمرين 1

x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث : $x+y+z=1$

1- بين أن : $\sqrt{t}\leq\frac{t+1}{2}$

1- استنتج أن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\leq 4$

تمرين 2

EFG مثلث قائم الزاوية في E

النقطة M المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (FG)

بين أن : $EF+EG<EM+FG$

تمرين 3

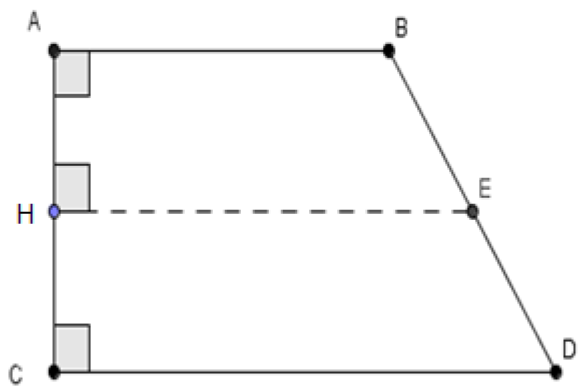
$ABCD$ رباعي بحيث : $(AB)\perp(AC)$

و $(DC)\perp(AC)$ والنقطة E منتصف $[BD]$

النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة

E على (AC)

بين أن $2EH=AB+DC$



تمرين 4

احسب :

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}$$

حل أولمبياد العاشر

تمرين 1

1- لدينا : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 = t-2\sqrt{t}+1 \geq 0$ يعني : $-2\sqrt{t} \geq -t-1$ يعني : $2\sqrt{t} \leq t+1$

يعني : $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{t} \leq \frac{1}{2}(t+1)$

إذن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{2x+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2y+1} \leq \frac{(2y+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2z+1)+1}{2}$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}+\frac{(2y+1)+1}{2}+\frac{(2z+1)+1}{2}$

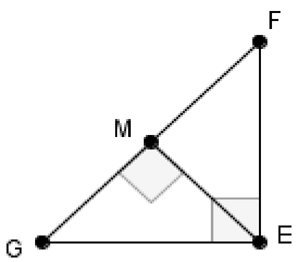
يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2x+2y+2z+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2\times 1+6}{2}$ يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{8}{2}$

إذن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq 4$

تمرين 2



لدينا :

$$(EM+FG)^2 = EM^2+2EM\times FG+FG^2$$

$$= EM^2+4\left(\frac{EM\times FG}{2}\right)+FG^2$$

نعلم أن : $S_{EFG} = \frac{EM\times FG}{2} = \frac{EF\times EG}{2}$

(S_{EFG} : مساحة المثلث EFG)

إذن : $(EM+FG)^2 = EM^2+4S_{EFG}+FG^2$ (1)

لدينا :

$$(EF+EG)^2 = EF^2+2EF\times EG+EG^2$$
$$=EF^2+EG^2+4\left(\frac{EF\times EG}{2}\right)$$

($FG^2=EF^2+EG^2$ لأن المثلث EFG قائم الزاوية في E)

إذن : $(EF+EG)^2 = FG^2+4S_{EFG}$ (2)

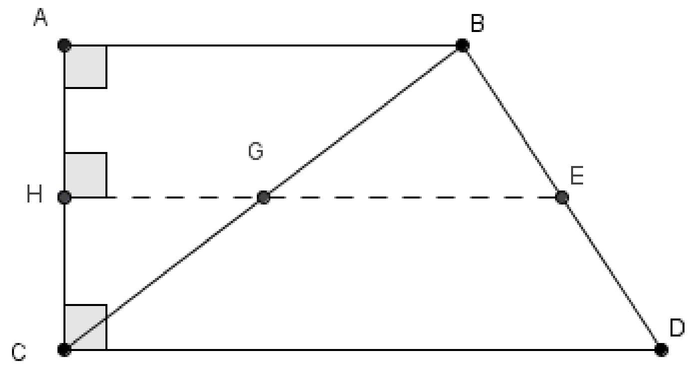
نقوم بطرح المتساويتين 1 و 2 طرف بطرف :

$$(EF+EG)^2-(EM+FG)^2 = FG^2+4S_{ABC}-\left(EM^2+4S_{ABC}+FG^2\right)$$
$$=\cancel{FG^2}+\cancel{4S_{ABC}}-EM^2-\cancel{4S_{ABC}}-\cancel{FG^2}$$
$$=-EM^2<0$$

إذن : $(EF+EG)^2<(EM+FG)^2$

وبالتالي : $EF+EG<EM+FG$

<u>تمرين 3</u>



بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث BCD : $\frac{BG}{BC}=\frac{BE}{BD}=\frac{GE}{CD}$

يعني: $\frac{GE}{CD}=\frac{BE}{BD}=\frac{BE}{2BE}=\frac{1}{2}$ (لأن E منتصف $[BD]$)

إذن $GE=\frac{1}{2}CD$ (1)

لدينا في المثلث BCD النقطة E منتصف $[BD]$ و $(GE)//(CD)$

إذن G منتصف $[BC]$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC : $\frac{CH}{CA}=\frac{CG}{CB}=\frac{HG}{AB}$

ومنه $\frac{HG}{AB}=\frac{CG}{CB}=\frac{1}{2}$ (G منتصف $[BC]$)

إذن : $HG=\frac{1}{2}AB$ (2)

من 1 و 2 نستمنج أن : $2EH=2(HG+GE)=2\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD\right)=AB+CD$

تمرين 4

لدينا :

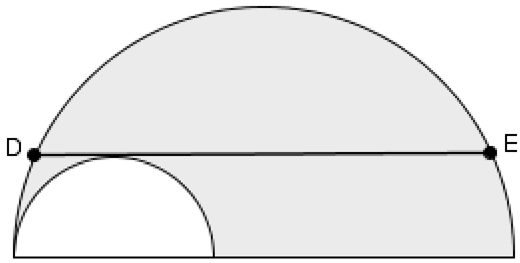
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}} &= \frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}\times\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}\\
&= \frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2(x-1)-(x-1)^2\times x}\\
&= \frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^3-x^2-x\left(x^2-2x+1\right)}\\
&= \frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{\cancel{x^3}-x^2-\cancel{x^3}+2x^2-x}\\
&= \frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2-x}\\
&= \frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x(x-1)}\\
&= \frac{\cancel{x}\sqrt{x-1}}{\cancel{x}(x-1)}-\frac{\left(\cancel{x-1}\right)\sqrt{x}}{x\left(\cancel{x-1}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}-\frac{\sqrt{x}}{x}
\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}\\
&= \frac{\sqrt{1}}{1}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\ldots\ldots+\cancel{\frac{\sqrt{999}}{999}}-\frac{\sqrt{1000}}{1000}\\
&= 1-\frac{\sqrt{1000}}{1000}=1-\frac{10\sqrt{10}}{1000}=1-\frac{\sqrt{10}}{100}
\end{aligned}$$

أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

المستقيم (DE) مماس للدائرة الصغيرة

و $DE = 8cm$

احسب S' مساحة المطقة المظللة

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

بين أن : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD = AB + AC$

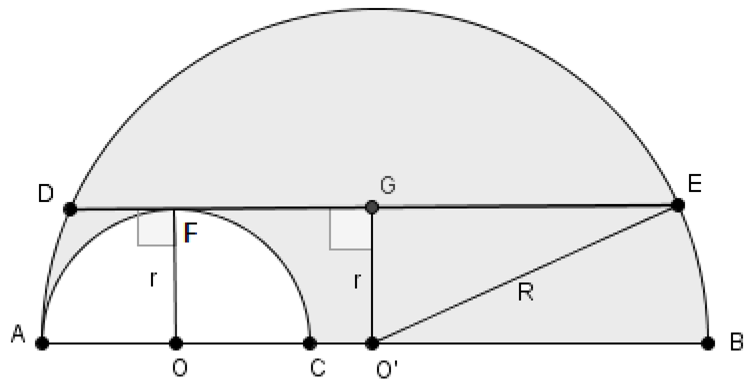
تمرين 4

x و y عددين حقيقيين

بين أن : $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \geq x\left(y^2+1\right)+y\left(x^2+1\right)$

حل أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر النقطة O' مركز الدائرة الكبيرة التي شعاعها R

و النقطة O مركز الدائرة الصغيرة التي شعاعها r

لدينا : $O'E = O'D = R$

إذن $(O'G)$ واسط القطعة $[DE]$

ومنه النقطة G منتصف $[DE]$

أي $GE = GD = 4cm$

لدينا المثلث $O'GE$ قائم الزاوية في G

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $O'E^2 = O'G^2 + GE^2$

أي : $R^2 = r^2 + 16$

مساحة المنطقة المظللة (S') = مساحة نصف الدائرة الكبيرة – مساحة نصف الدائرة الصغيرة

$$S' = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(r^2+16\right)}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$$
$$= \frac{\pi 16}{2}$$
$$= 8\pi$$

تمرين 2

لدينا : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

نجمع المتساويات طرف بطرف إذن : $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=33$

نضرب المتساويات طرف بطرف: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\times\left(y+\frac{1}{z}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

يعني : $\left(xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

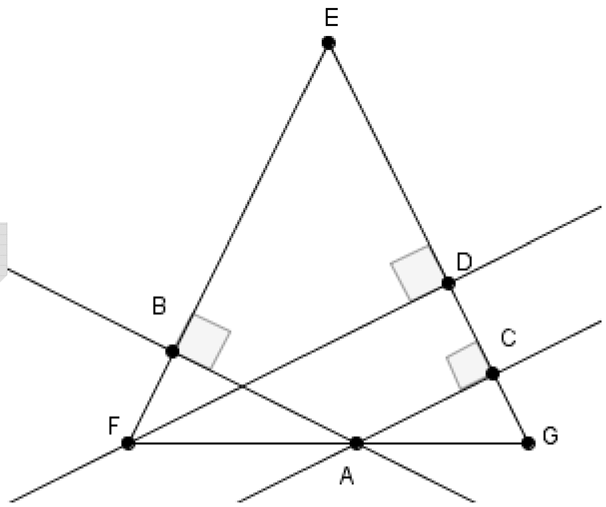
يعني : $xyz+y+x+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xyz}=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+33=1320$

وبالتالي : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3



لدينا : $S_{EFG}=S_{EFA}+S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ،، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ،، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EF}{2}+\dfrac{AC\times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EF+AC\times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EG+AC\times EG}{2}$ ($EF=EG$ لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E)

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{EG(AB+AC)}{2}$

يعني : $\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}\times FD}{\cancel{2}}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}(AB+AC)}{\cancel{2}}$

إذن : $FD=AB+AC$

<u>تمرين 4</u>

لدينا : $(x-1)^2=x^2-2x+1\geq 0$ و $(y-1)^2=y^2-2y+1\geq 0$

يعني : $x^2+1\geq 2x$ و $y^2+1\geq 2y$

يعني : $\dfrac{x^2+1}{2}\geq x$ و $\dfrac{y^2+1}{2}\geq y$

يعني : $\dfrac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)\geq x(y^2+1)$ و $\dfrac{(y^2+1)}{2}(x^2+1)\geq y(x^2+1)$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : $\dfrac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)+\dfrac{y^2+1}{2}(x^2+1)\geq x(y^2+1)+y(x^2+1)$

يعني : $\dfrac{2(x^2+1)}{2}\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$

إذن : $(x^2+1)\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$

أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

x و y و z أعدادا حقيقية غير منعدمة بحيث : $xz+yz+xy=0$

بين أن : $\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0$

تمرين 2

ABC مثلث بحيث : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$ و $AB\neq AC$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية

تمرين 3

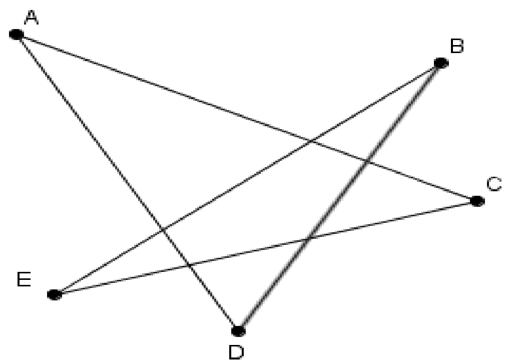
x و y و z أعدادا حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x<y+z$

بين أن : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

تمرين 4

نعتبر الشكل جانبه

بين أن $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^\circ$



حل أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=\frac{z}{z}\times\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x}\times\frac{y+z}{yz}+\frac{y}{y}\times\frac{z+x}{xz}$$
$$=\frac{xz+yz}{xyz}+\frac{xy+xz}{xyz}+\frac{yz+xy}{xyz}$$
$$=\frac{xz+yz+xy+xz+yz+xy}{xyz}$$
$$=\frac{2xz+2yz+2xy}{xyz}$$
$$=\frac{2(xz+yz+xy)}{xyz}$$
$$=\frac{2\times 0}{xyz}=0$$

إذن : $\boxed{\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0}$

تمرين 2

لدينا : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$

يعني : $AB^4-AC^4=BC^2\times AB^2-BC^2\times AC^2$

يعني : $AB^4-AC^4-BC^2\times AB^2+BC^2\times AC^2=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2\left(AB^2-AC^2\right)=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=0$

يعني : $AB^2-AC^2=0$ أو $AB^2+AC^2-BC^2=0$

يعني : $AB^2=AC^2$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

يعني : $AB=AC$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

ونعلم أن $AB\neq AC$ إذن $AB^2+AC^2=BC^2$

حسب مبرهنة فيتاقورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

تمرين 3

$$\frac{x}{1+x}-\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}-\frac{z}{1+z}$$

$$=\frac{x(1+y)(1+z)-y(1+x)(1+z)-z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$=\frac{x+\cancel{xz}+\cancel{xy}+\cancel{xyz}-y-yz-\cancel{xy}-\cancel{xyz}-z-yz-\cancel{xz}-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$=\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

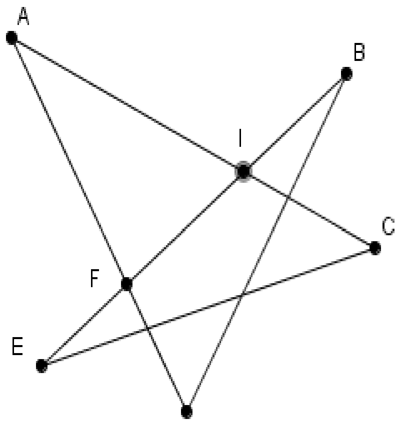
لدينا : $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ و $x<y+z$

إذن $(1+x)(1+y)(1+z)>0$ و $-2yz-xyz<0$ و $x-y-z<0$

ومنه : $\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}<0$

وبالتالي : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

تمرين 4



نضع النقطة F تقاطع المستقيمين (AD) و (EB)

و نضع النقطة I تقاطع المستقيمين (AC) و (EB)

لدينا : $A\hat{F}I+B\hat{F}D=180$ و $A\hat{I}F+C\hat{I}E=180$

إذن : $B\hat{F}D=180-A\hat{F}I$ و $C\hat{I}E=180-A\hat{I}F$

في المثلث DFB لدينا : $B\hat{F}D+\hat{D}+\hat{B}=180$

يعني : $180-A\hat{F}I+\hat{D}+\hat{B}=180$ $\left(B\hat{F}D=180-A\hat{F}I \right)$

إذن : $A\hat{F}I=\hat{D}+\hat{B}$ (1)

في المثلث CEI لدينا : $C\hat{I}E+\hat{E}+\hat{C}=180$

يعني : $180-A\hat{I}F+\hat{E}+\hat{C}=180$ $\left(C\hat{I}E=180-A\hat{I}F \right)$

إذن : $A\hat{I}F=\hat{E}+\hat{C}$ (2)

في المثلث AFI لدينا : $\hat{A}+A\hat{F}I+A\hat{I}F=180^{\circ}$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن : $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^{\circ}$

أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان مختلفان ($x \neq y$) و موجبان قطعا بحيث : $x+2y=3\sqrt{xy}$

احسب $\frac{x}{y}$

تمرين 2

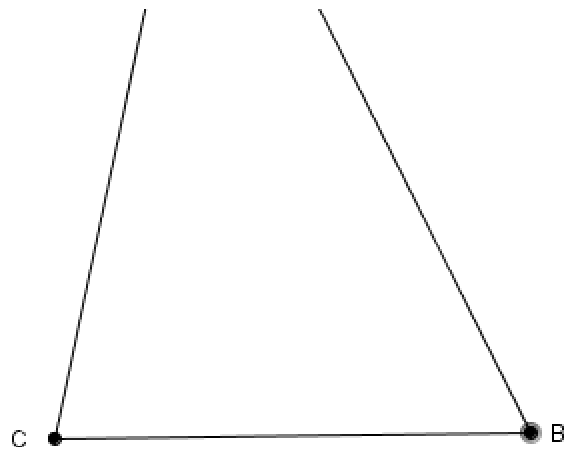
أراد محمد أن يرسم مثلثا ABC لكن

لاحظ أن الرأس A يوجد خارج الورقة

كماهو مبين في الشكل جانبه

ساعد محمد على رسم المتوسط الموافق

للضلع $[BC]$



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1 – بين أن $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$

2 – أستنتج أن $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2}$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في F

بين أن : $EF+FG \leq \sqrt{2}EG$

حل أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

لدينا : $x+2y=3\sqrt{xy}$

يعني : $\dfrac{x+2y}{y}=\dfrac{3\sqrt{xy}}{y}$

يعني : $\dfrac{x}{y}+2=3\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}}$

يعني : $\dfrac{x}{y}+2=3\sqrt{\dfrac{xy}{y^2}}$

يعني : $\dfrac{x}{y}+2=3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

يعني : $\dfrac{x}{y}-3\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2\right)-\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2\right)=0$

يعني : $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2\right)\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-1\right)=0$

يعني : $\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2=0$ أو $\sqrt{\dfrac{x}{y}}-1=0$

يعني : $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$ أو $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1$

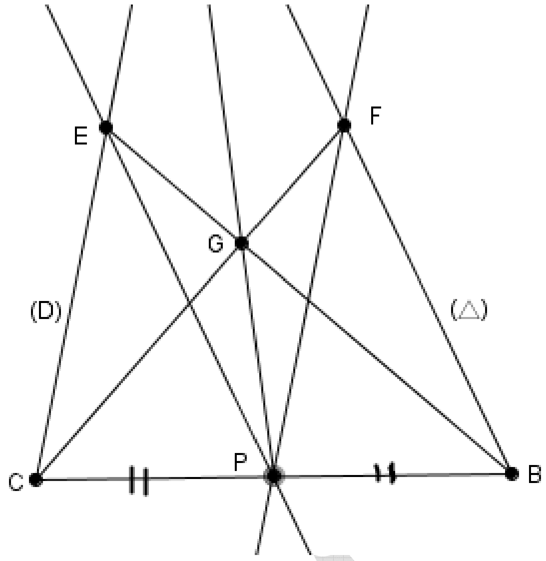
يعني : $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2=2^2$ أو $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2=1^2$

يعني : $\dfrac{x}{y}=4$ أو $\dfrac{x}{y}=1$

ونعلم أن x و y عددان حقيقيان مختلفان إذن $\dfrac{x}{y}\neq 1$

وبالتالي : $\dfrac{x}{y}=4$

تمرين 2



– ننشئ النقطة P منتصف $[BC]$

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (Δ) ويقطع المستقيم (D) في النقطة E

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (D) ويقطع المستقيم (Δ) في النقطة F

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PE) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(AB)=(\Delta)$ ويقطع $(AC)=(D)$ في النقطة E

إذن النقطة E هي منتصف القطعة $[AC]$

ومنه المستقيم (BE) هو متوسط المثلث ABC (1)

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PF) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(AC)=(D)$ ويقطع $(AB)=(\Delta)$ في النقطة F

إذن النقطة F هي منتصف القطعة $[AB]$

ومنه المستقيم (CF) هو متوسط المثلث ABC (2)

من 1 و 2 نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC

وبالتالي المستقيم (PG) هو المتوسط الموافق للضلع $[BC]$ المار من النقطة A

تمرين 3

1- لدينا :

$$\frac{xy}{x+y}-\frac{x+y}{4}=\frac{4xy-(x+y)^2}{4(x+y)}=\frac{4xy-x^2-2xy-y^2}{4(x+y)}=\frac{2xy-x^2-y^2}{4(x+y)}=\frac{-(x-y)^2}{4(x+y)}\geq 0$$

إذن : $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}\\ \frac{zy}{z+y}\leq\frac{z+y}{4}\\ \frac{xz}{x+z}\leq\frac{x+z}{4}\end{cases}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y}{4}+\frac{x+z}{4}+\frac{z+y}{4}$

يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2x+2y+2z}{4}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2(x+y+z)}{4}$

إذن : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y+z}{2}$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $EG^2=EF^2+FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $(EF+FG)^2-(\sqrt{2}EG)^2$:

$$\begin{aligned}(EF+FG)^2-(\sqrt{2}EG)^2&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2(EF^2+FG^2)\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EF^2-2FG^2\\&=2EF\times FGG-EF^2-FG^2\\&=-(EF^2-2EF\times FG+FG^2)\\&=-(EF-FG)^2\leq 0\end{aligned}$$

إذن : $(EF+FG)^2\leq(\sqrt{2}EG)^2$

ومنه : $EF+FG\leq\sqrt{2}EG$

أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

x و y عددين حقيقيين موجبين

بين أن $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}$

تمرين 2

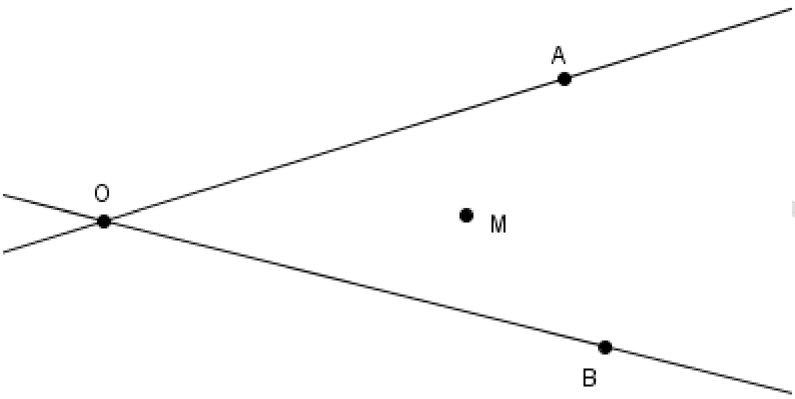
نعتبر الشكل جانبه :

حدد نقطتين O' و N من

المستقيمين (OA) و (OB) على

التوالي بحيث تكون النقطة M

منتصف $[NO']$



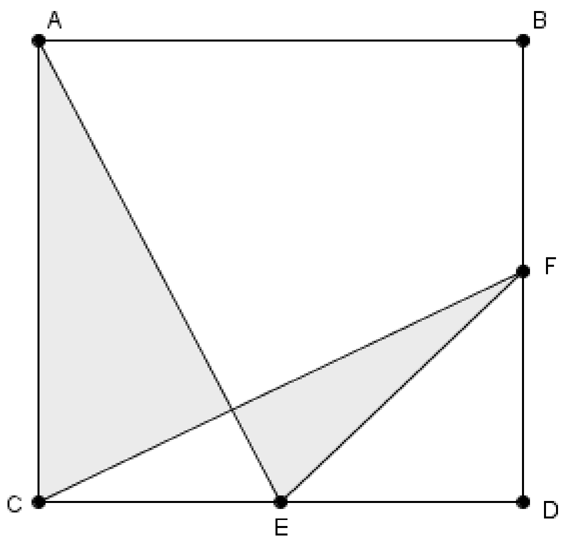
تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy+yz+zx=0$

بين أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=-3$

تمرين 4

احسب S مساحة المنطقة المضللة



حل أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^3}{2^3}-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^2(x+y)}{2^3}-\frac{4\left(x^3+y^3\right)}{4\times 2}$$

$$=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8}-\frac{4x^3+4y^3}{8}$$

$$=\frac{-3x^3+3x^2y+3xy^2-3y^3}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^3-x^2y-xy^2+y^3\right)}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^2(x-y)-y^2(x-y)\right)}{8}$$

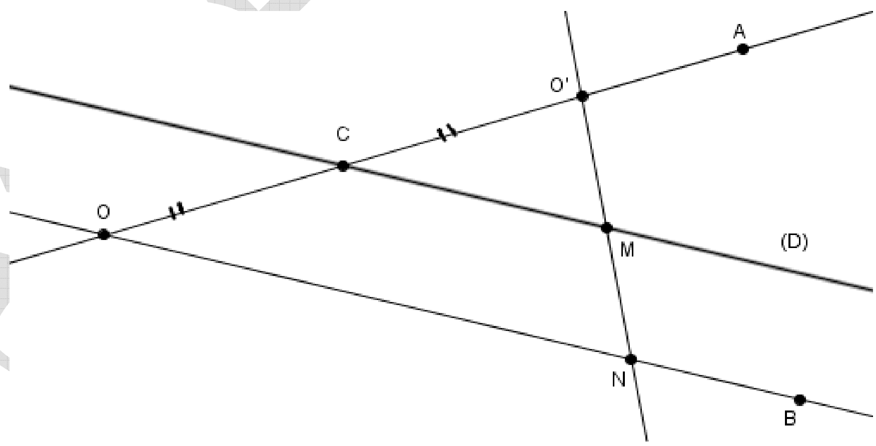
$$=\frac{-3(x-y)\left(x^2-y^2\right)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)(x-y)(x+y)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)^2(x+y)}{8}\leq 0$$

(لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $x+y\geq 0$)

تمرين 2



المرحلة الأولى :

ننشئ المستقيم (D) الموازي للمستقيم (OB) ويقطع المستقيم (OA) في النقطة C

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة O' مماثلة النقطة O بالنسبة للنقطة C

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة N تقاطع المستقيمين $(O'M)$ و (OB)

لدينا في المثلث $O'ON$ الستقيم المستقيم (D) يمر من C منتصف القطعة $[OO']$ ويوازي (ON) ويقطع $[NO']$ في النقطة M

إذن النقطة M هي منتصف القطعة $[NO']$

تمرين 3

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} &= \frac{xy(x+y)+yz(y+z)+xz(z+x)}{xyz} \\
&= \frac{xy(x+y)+xyz-xyz+yz(y+z)+xyz-xyz+xz(z+x)+xyz-xyz}{xyz} \\
&= \frac{xy(x+y+z)-xyz+yz(y+z+x)-xyz+xz(z+x+y)-xyz}{xyz} \\
&= \frac{xy\times 0-xyz+yz\times 0-xyz+xz\times 0-xyz}{xyz} \\
&= \frac{-xyz-xyz-xyz}{xyz} \\
&= \frac{-3\cancel{xyz}}{\cancel{xyz}} \\
&= -3
\end{aligned}$$

تمرين 4

لدينا المثلث ACE قائم الزاوية في C

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AE^2=AC^2+CE^2$

ومنه : $AE^2=2^2+1^2=4+1=5$

أي : $AE=\sqrt{5}$

و لدينا : $\begin{cases} AC=DC \\ CE=DF \\ A\hat{C}E=F\hat{D}C \end{cases}$

إذن المثلثان ACE و FDC متقايسان

ومنه : $C\hat{A}E = F\hat{C}D$ و $AE = CF = \sqrt{5}$

لدينا : $H\hat{C}E + H\hat{E}C = C\hat{A}E + H\hat{E}C = 180^\circ - A\hat{C}E = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

إذن : $C\hat{H}E = 180^\circ - \left(H\hat{C}E + H\hat{E}C\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ومنه المثلثان AHC و FHE قائما الزاوية في H

أي : $S = \dfrac{AH \times CH}{2} + \dfrac{EH \times FH}{2}$ (S مساحة المنطقة المضللة)

حساب AH و CH و EH و FH :

لدينا : $\sin C\hat{A}E = \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{CH}{AC}$

و $\cos C\hat{A}E = \dfrac{CA}{AE} = \dfrac{AH}{AC}$

و $\sin F\hat{C}D = \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{EH}{EC}$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{CH}{2}$

و $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{AH}{2}$

و $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{EH}{1}$

إذن : $CH = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

و $AH = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

و $EH = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا : $FH = FC - CH = \sqrt{5} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

وبالتالي :

$$S = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{11}{10}$$

أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2

ABC مثلث

بين أن $S_{ABC}=\frac{r}{2}p$ (S_{ABC} هي مساحة المثلث ABC و r هو شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و p هو محيط المثلث ABC)

تمرين 3

x و y و z أعدادا حقيقية موجبة بحيث : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2$

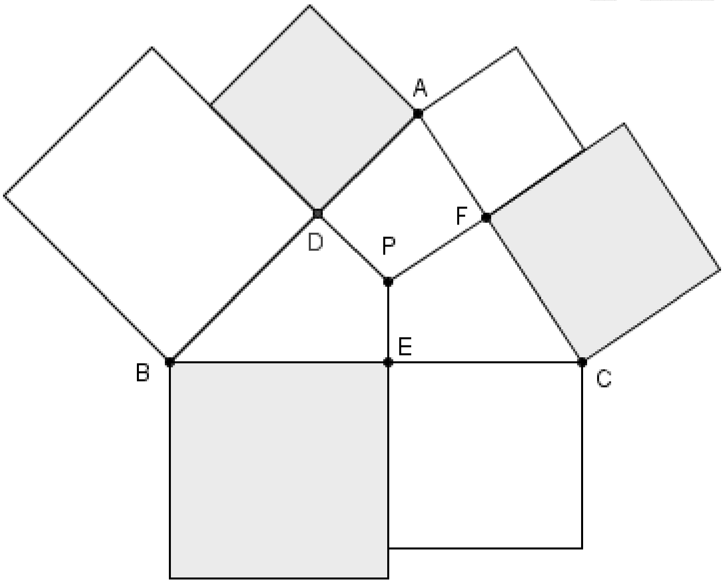
حدد أ كبر هده الأعداد

تمرين 4

ABC مثلث جميع زواياه حادة و النقطة P داخله .

النقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة P على $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$ على التوالي.

ننشئ 6 مربعات خارج المثلث ABC كما هو مبين في الشكل جانبه



بين أن مجموع مساحات المربعات الرمادية يساوي مجموع مساحات المربعات البيضاء

حل أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \geq 0$

إذن : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{1}{xy}}+\frac{1}{y} \geq 0$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ (2)

نضرب المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

يعني : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\times 2\sqrt{\cancel{xy}\times\frac{1}{\cancel{xy}}}$

يعني : $\frac{1}{\cancel{x+y}}\times\left(\cancel{x+y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4\times\frac{1}{x+y}$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (3)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$ (4)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z}$ (5)

نجمع المتفاوتات 3 و 4 و 5 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

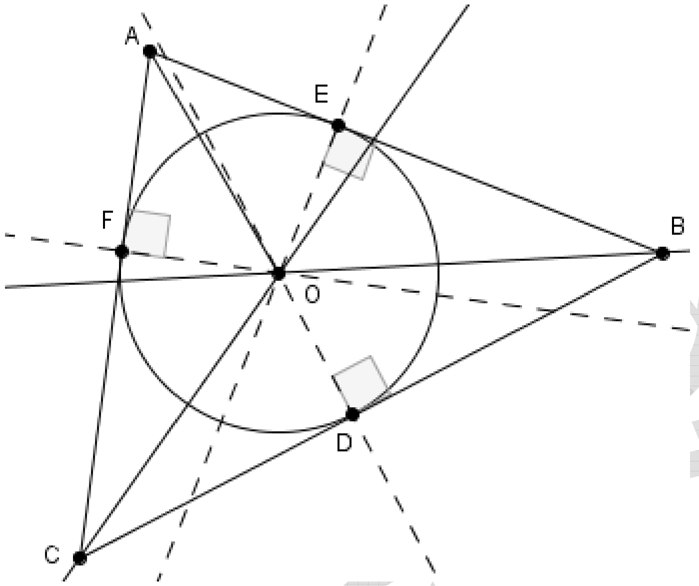
يعني : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} \geq \frac{2\times 2}{x+y}+\frac{2\times 2}{y+z}+\frac{2\times 2}{x+z}$

يعني : $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

يعني : $\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2



لدينا النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و r شعاعها

و النقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة O على $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي

إذن : $OF=OE=OD=r$

لدينا :

$$\begin{aligned}S_{ABC}&=S_{AOC}+S_{ABO}+S_{OBC}\\&=\frac{AC\times OF}{2}+\frac{AB\times OE}{2}+\frac{BC\times OD}{2}\\&=\frac{AC\times r}{2}+\frac{AB\times r}{2}+\frac{BC\times r}{2}\\&=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)\end{aligned}$$

نعلم أن محيط المثلث ABC هو : $p=AC+AB+BC$

إذن : $S_{ABC}=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)=\frac{r}{2}p$

تمرين 3

لدينا : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2\geq 0$

يعني : $z^2-y^2\geq 0$ يعني : $z^2\geq y^2$

إذن : $z \geq y$ (1) (لأن $z \geq 0$ و $y \geq 0$)

لدينا : $2z^2 - 2y^2 = 2x^2 + x^2$

يعني : $2z^2 - 2x^2 = 2\left(z^2 - x^2\right) = 2y^2 + x^2 \geq 0$

يعني : $z^2 - x^2 \geq 0$ يعني : $z^2 \geq x^2$

إذن : $z \geq x$ (2) (لأن $z \geq 0$ و $x \geq 0$)

من 1 و 2 نستنتج أن z هو أكبر هده الأعداد

تمرين 4

– مساحات المربعات الرمادية هي : $AF^2 + CE^2 + BD^2$

– مساحات المربعات المخدشة هي : $FC^2 + BE^2 + DA^2$

لنبين أن : $AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات APD و PCF و PBE و PCE و PBD و PAF :

$$\begin{cases} PA^2 = AD^2 + PD^2 \\ PC^2 = CF^2 + PF^2 \\ PB^2 = BE^2 + PE^2 \\ PC^2 = EC^2 + PE^2 \\ PB^2 = DB^2 + PD^2 \\ PA^2 = FA^2 + PF^2 \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} AD^2 = PA^2 - PD^2 \\ CF^2 = PC^2 - PF^2 \\ BE^2 = PB^2 - PE^2 \\ EC^2 = PC^2 - PE^2 \\ DB^2 = PB^2 - PD^2 \\ FA^2 = PA^2 - PF^2 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{aligned} FA^2 + EC^2 + DB^2 &= PA^2 - PF^2 + PC^2 - PE^2 + PB^2 - PD^2 \\ &= PA^2 - PD^2 + PC^2 - PF^2 + PB^2 - PE^2 \\ &= AD^2 + CF^2 + BE^2 \end{aligned}$$

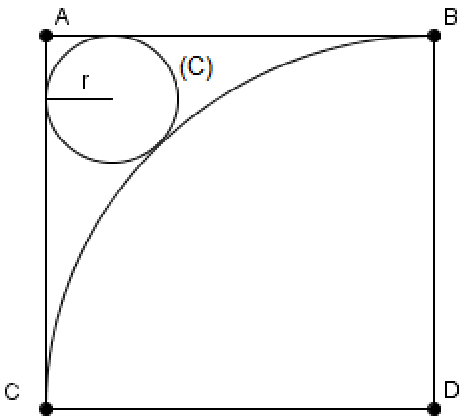
أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\frac{x(1-x)}{yz}+\frac{y(1-y)}{xz}+\frac{z(1-z)}{xy}\geq 6$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD=R$ و r هو شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r=R(3-2\sqrt{2})$

تمرين 3

حل المعادلة : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان موجبان غير منعدمان

بين أن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

حل أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2-2xy+y^2 \geq 0$

يعني : $x^2+y^2 \geq 2xy$

يعني : $z\times(x^2+y^2) \geq z\times 2xy$

إذن : $z(x^2+y^2) \geq 2xyz$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $y(x^2+z^2) \geq 2xyz$ (2)

و $x(y^2+z^2) \geq 2xyz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$z(x^2+y^2)+y(x^2+z^2)+x(y^2+z^2) \geq 2xyz+2xyz+2xyz$$

أي : $zx^2+zy^2+yx^2+yz^2+xy^2+xz^2 \geq 6xyz$

أي : $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(y+x) \geq 6xyz$

ونعلم أن : $x+y+z=1$ يعني : $x+y=1-z$ و $x+z=1-y$ و $y+z=1-x$

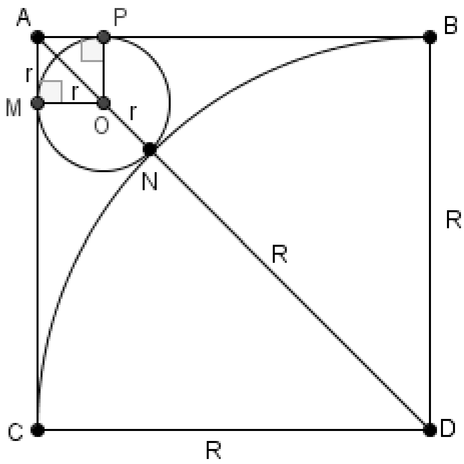
أي : $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(y+x)=x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z) \geq 6xyz$

أي : $\frac{1}{xyz}\times\left(x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)\right) \geq \frac{1}{\cancel{xyz}}\times 6\cancel{xyz}$

أي : $\frac{x^2(1-x)}{xyz}+\frac{y^2(1-y)}{xyz}+\frac{z^2(1-z)}{xyz} \geq 6$

وبالتالي : $\frac{x(1-x)}{yz}+\frac{y(1-y)}{xz}+\frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$

تمرين 2



لدينا (AM) و (AP) مماسا للدائرة (C)

إذن : $(AM)\perp(OM)$ و $(AP)\perp(OP)$

ومنه $A\hat{M}O = A\hat{P}O = 90^\circ$

لدينا : $P\hat{O}M = 360 - A\hat{M}O - A\hat{P}O - M\hat{A}P$

إذن : $P\hat{O}M = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $P\hat{O}M = A\hat{M}O = A\hat{P}O = M\hat{A}P = 90^\circ$ و $OP = OM$

فإن الرباعي $AMOP$ مربع

حساب AO :

لدينا المثلث AMO قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AO^2 = AM^2 + MO^2$

اي : $AO^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

ومنه : $AO = \sqrt{r^2 2} = r\sqrt{2}$

حساب AD :

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AB^2 + BD^2$

اي : $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

ومنه : $AD = \sqrt{R^2 2} = R\sqrt{2}$

حساب r :

لدينا : $AD = AO + ON + ND$

يعني : $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$

يعني : $R\sqrt{2} - R = r\sqrt{2} + r$

يعني : $R\left(\sqrt{2}-1\right) = r\left(\sqrt{2}+1\right)$

يعني : $r = \dfrac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}$

يعني :

$$r=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}$$
$$=\frac{R\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{1}$$
$$=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

وبالتالي : $r=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$

<u>تمرين 3</u>

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}=8$

يعني : $\frac{\cancel{\sqrt{x}}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}-\cancel{\sqrt{x}}}{2}=8$

يعني : $-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=8$

يعني : $\left(-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}\right)^2=8^2$

يعني : $x-\cancel{2}-2\sqrt{(x-2)(x+2)}+x+\cancel{2}=64$

يعني : $2x-2\sqrt{x^2-4}=64$

يعني : $2\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)=64$

يعني : $x-\sqrt{x^2-4}=32$

يعني : $-\sqrt{x^2-4}=32-x$

يعني : $\left(-\sqrt{x^2-4}\right)^2=(32-x)^2$

يعني : $\cancel{x^2}-4=1024-64x+\cancel{x^2}$

يعني : $64x=4+1024$

يعني : $64x=1028$

وبالتالي : $x=\frac{1028}{64}=\frac{257}{16}$

تمرين 4

لدينا :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &= \frac{x^2+y^2}{y^2x^2}-\frac{y+x}{xy} \\
&= \frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy}{xy}\times\frac{y+x}{xy} \\
&= \frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy^2+x^2y}{x^2y^2} \\
&= \frac{x^3+y^3-xy^2-x^2y}{x^2y^2} \\
&= \frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{x^2y^2} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2y^2} \\
&= \frac{(x-y)(x-y)(x+y)}{x^2y^2} \\
&= \frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}\geq 0
\end{aligned}$$

لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $(x+y)>0$ و $x^2y^2>0$ $\left(x>0 \text{ و } y>0\right)$

إذن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان ($y > x$)

بين أن : $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

تمرين 2

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x > 1$ و $y > 1$

بين أن : $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \le xy$

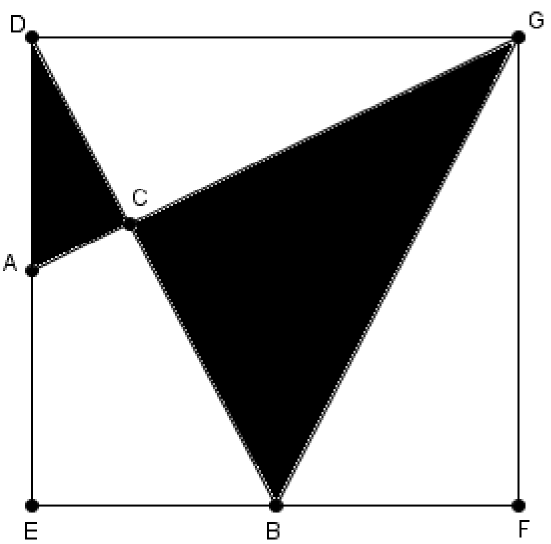
تمرين 3

نعتبر النقطتين A و O من المستوى

أنشئ النقطة H مماثلة A بالنسبة للنقطة O و النقطة F مماثلة O بالنسبة للنقطة A

بواسطة البركار فقط (تبرير الإنشاء)

تمرين 4



$DGFE$ مربع بحيث : $DG = 8cm$

النقطتان A و B هما على التوالي

منتصفا $[DE]$ و $[EF]$

احسب مساحة المنطقة المظللة

حل أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

بما أن x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان و $y>x$

فإن $y=x+1$

لدينا :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(xy)^2 &= x^2+y^2+(x(x+1))^2 = x^2+y^2+x^2(x+1)^2 \\ &= x^2+y^2+x^2(x^2+2x+1) \\ &= x^2+y^2+x^4+2x^3+x^2 \\ &= x^4+y^2+2x^2+2x^3 \\ &= x^4+y^2+2x^2(1+x) \\ &= (x^2)^2+y^2+2x^2y \end{aligned}$$

نعلم أن : $(x^2+y)^2=(x^2)^2+y^2+2x^2y$

وبالتالي : $x^2+y^2+(xy)^2=(x^2+y)^2$

تمرين 2

بما أن $x>1$ فإن $x-1>0$

لدينا : $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1\geq 0$ يعني : $x-\cancel{1}-2\sqrt{x-1}+\cancel{1}\geq 0$

يعني : $-2\sqrt{x-1}\geq -x$ يعني : $\frac{-1}{\cancel{2}}\times\left(-\cancel{2}\sqrt{x-1}\right)\leq\frac{-1}{2}\times(-x)$ يعني : $\sqrt{x-1}\leq\frac{x}{2}$

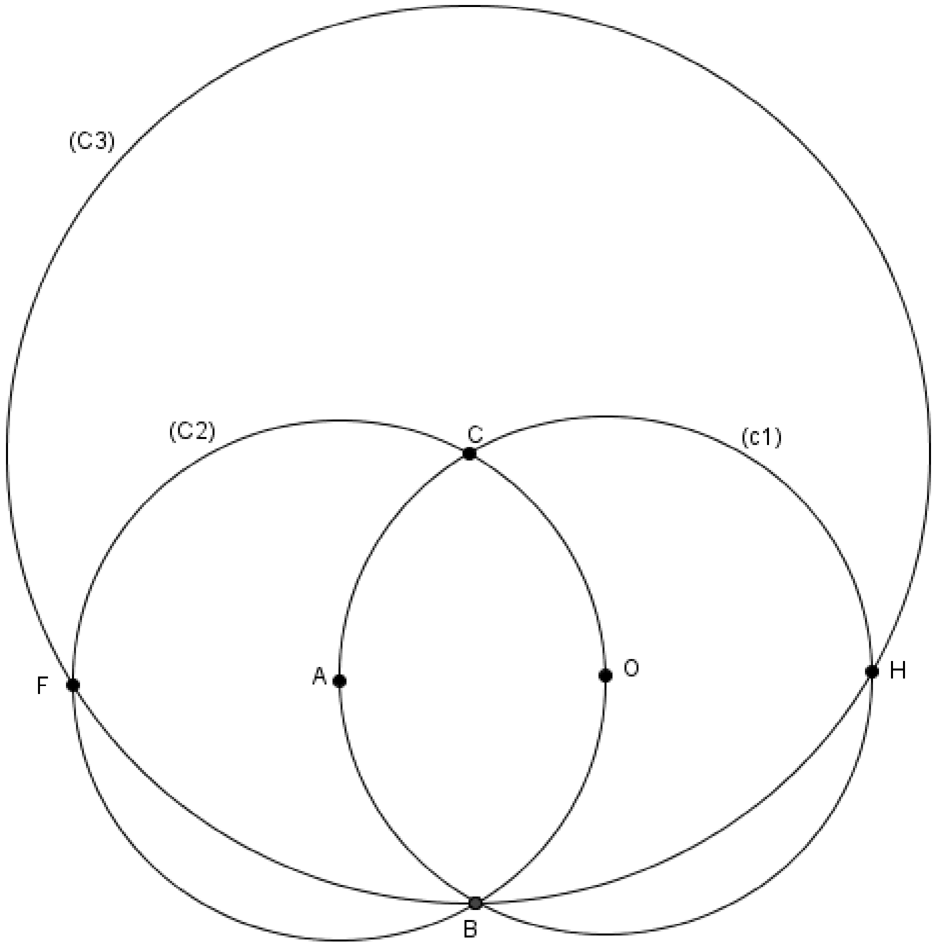
إذن : $y\sqrt{x-1}\leq\frac{xy}{2}$ (1) ($y>1$)

وبنفس الطريقة نبين أن : $x\sqrt{y-1}\leq\frac{xy}{2}$ (2)

نجمع طرفي المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1}\leq\frac{\cancel{2}xy}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1}\leq xy$

تمرين 3



– نرسم الدائرة (C_1) التي مركزها O وشعاعها OA

– نرسم الدائرة (C_2) التي مركزها A وشعاعها OA

– الدائرتان (C_1) و (C_2) تتقاطعان في النقطتين C و B

– نرسم الدائرة (C_3) التي مركزها C وشعاعها CB

– الدائرة (C_3) تتقاطع مع (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطيتين H و F

وبالتالي النقطة H هي مماثلة A بالنسبة للنقطة O

و النقطة F هي مماثلة O بالنسبة للنقطة A

تمرين 4

حساب S_{ADC} مساحة المثلث ADC :

لدينا: $\begin{cases} DG = DE \\ AD = EB \\ A\hat{D}G = D\hat{E}B \end{cases}$ إذن المثلثان DGA و DEB متقايسان

أي $D\hat{A}G = D\hat{B}E$

بما أن $\begin{cases} D\hat{A}G = D\hat{A}C = D\hat{B}E \\ A\hat{D}C = E\hat{D}B \end{cases}$ فإن المثلثان DAC و DEB متشابهان

ومنه $D\hat{C}A = D\hat{E}B = 90^\circ$ المثلث DAC قائم الزاوية في C إذن $(DC)\perp(AG)$

باستعمال العلاقات المترية في المثلث DGA القائم الزاوية :

$DC \times AG = DA \times DG$ و $DA^2 = AC \times AG$

أي : $DC = \dfrac{DA \times DG}{AG}$ و $AC = \dfrac{DA^2}{AG}$

لدينا $S_{ADC} = \dfrac{DC \times AC}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{\dfrac{DA \times DG}{AG} \times \dfrac{DA^2}{AG}}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3 \times DG}{2AG^2}$

بما أن المثلث ADG قائم الزاوية في D فإن $AG^2 = AD^2 + DG^2$

أي : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3 \times DG}{2\left(AD^2 + DG^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{4^3 \times 8}{2\left(4^2 + 8^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{64 \times 4}{2(16+64)}$

يعني : $S_{ADC} = \dfrac{512}{160} = 3.2$

حساب S_{BCG} مساحة المثلث BCG :

لدينا : $S_{DAG} = S_{DAC} + S_{DCG}$ و $S_{DBG} = S_{BCG} + S_{DCG}$

نطرح المتساويتان طرف بطرف : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} + \cancel{S_{DCG}} - S_{BCG} - \cancel{S_{DCG}}$

أي : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} - S_{BCG}$ أي : $S_{BCG} = S_{DAC} + S_{DBG} - S_{DAG}$

أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{DE \times DG}{2} - \dfrac{DA \times DG}{2}$ أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{8 \times 8}{2} - \dfrac{4 \times 8}{2}$

أي : $S_{BCG} = 5 + 32 - 16$ إذن : $S_{BCG} = 21$

<u>حساب مساحة المنطقة المظللة :</u>

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث ADC + مساحة المثلث BCG

$S_{ADC} + S_{BCG} = 3.2 + 21 = 24.2$

أولمبياد الثامن عشر

<table>
<tr><td>

تمرين 1

x و y و z إعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$

بين أن : $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}}=y^4$

</td></tr>
<tr><td>

تمرين 2

EFG مثلث بحيث : $EF=8cm$ و $EG=6cm$

و $FG=10cm$

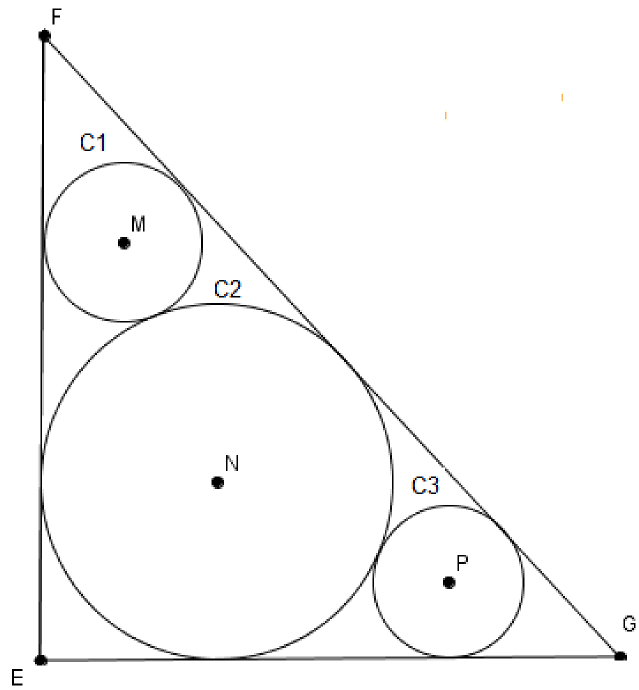
(C_1) و (C_2) و (C_3) ثلاث دوائر توجد داخل

المثلث EFG كما هو مبين في الشكل جانبه

مركزهماها على التوالي: M و N و P

1- حدد شعاع الدائرة (C_2)

2- حدد شعاع الدائرة (C_1)



</td></tr>
<tr><td>

تمرين 3

x و y و z إعداد حقيقية موجبة غير منعدمة

بين أن : $\frac{x}{y+z}+\frac{z}{x+y}+\frac{y}{x+z}\geq\frac{3}{2}$

</td></tr>
<tr><td>

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان بحيث : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

بين أن : $x+y=0$

</td></tr>
</table>

حل أولمبياد الثامن عشر

تمرين 1

نضع : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=t$

بما أن : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=t$ فإن : $y=xt$ و $z=yt$

أي : $y=xt$ و $z=xt^2$

لدينا :

$$\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}}=\frac{x^2-(xt)^2+\left(xt^2\right)^2}{x^{-2}-(xt)^{-2}-\left(xt^2\right)^{-2}}$$

$$=\frac{x^2-x^2t^2+x^2t^4}{x^{-2}-x^{-2}t^{-2}-x^{-2}t^{-4}}$$

$$=\frac{x^2\left(1-t^2+t^4\right)}{x^{-2}\left(1-t^{-2}-t^{-4}\right)}$$

$$=x^2x^2\frac{1-t^2+t^4}{1-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}}$$

$$=x^4\frac{t^4-t^2+1}{\frac{t^4-t^2+1}{t^4}}$$

$$=x^4t^4\frac{t^4-t^2+1}{t^4-t^2+1}$$

$$=(xt)^4=y^4$$

إذن : $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}}=y^4$

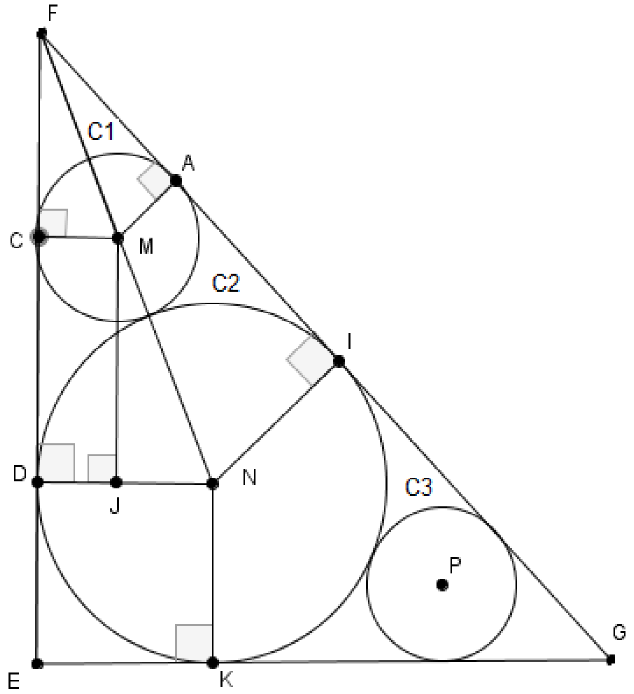
تمرين 2

1- حساب مساحة الدائرة (C_2) :

بما أن (EF) مماس للدائرة (C_2) في النقطة D

فإن $(EF)\perp(DN)$

أي المثلث DNF قائم الزاوية في D



حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

إذن : $FN^2 = FD^2 + DN^2$

ومنه $FD^2 = FN^2 - DN^2$ (1)

بما أن (GF) مماس للدائرة (C_2) في النقطة I

فإن $(GF) \perp (IN)$

أي المثلث INF قائم الزاوية في I

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

إذن : $FN^2 = FI^2 + IN^2$

ومنه $FI^2 = FN^2 - IN^2$ (2)

ونعلم أن $DN = IN$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن $FD^2 = FI^2$

أي : $FI = FD$

إذن : $FI = 8 - DE$ (4)

وبنفس الطريقة نبين أن : $GI = 6 - EK$ (5)

لدينا : $FG^2 = 10^2 = 100$

و $EF^2 + EG^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث EFG قائم الزاوية في E ومنه $\hat{E} = 90^\circ$

لدينا $D\hat{N}K = 360 - E\hat{D}N - E\hat{K}N - \hat{E} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $D\hat{N}K = \hat{E} = E\hat{D}N = E\hat{K}N = 90^\circ$ و $DN = IN$ فإن الرباعي $DNKE$ مربع

ومنه : $DE = EK$ (6)

من 5 و 6 نستنتج أن : $GI = 6 - DE$ (7)

ونعلم أن : $FG = FI + GI = 5$ (8)

من 4 و 7 و 8 نستنتج أن : $FI + GI = 8 - DE + 6 - DE = 10$

أي : $-2DE + 14 = 10$

أي : $-2DE = -4$

إذن : $DE=\frac{4}{2}=2$

2- حساب مساحة الدائرة (C_1) :

لدينا المثلث FND قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $FN^2=DF^2+DN^2$

أي : $FN^2=(FE-DE)^2+DN^2$

أي : $FN^2=(8-2)^2+2^2$

أي : $FN^2=36+4=40$

ومنه : $FN=2\sqrt{10}$

نعتبر النقطة J المسقط العمودي للنقطة M على (DN)

لدينا $C\hat{M}J=360-M\hat{J}D-J\hat{D}C-D\hat{C}M=360^\circ-90^\circ-90^\circ-90^\circ=90^\circ$

بما أن $C\hat{M}J=M\hat{J}D=J\hat{D}C=D\hat{C}M=90^\circ$ فإن الرباعي $CMJD$ مستطيل

ومنه : $CM=JD$

لدينا : $NJ=DN-DJ=2-CM$ و $MN=CM+2$

في المثلث FDN لدينا : $D\hat{F}N+F\hat{D}N+F\hat{N}D=180^\circ$

يعني : $D\hat{F}N=180^\circ-F\hat{D}N-F\hat{N}D$

إذن : $D\hat{F}N=180^\circ-90^\circ-F\hat{N}D=90^\circ-F\hat{N}D$ (9)

في المثلث MNJ لدينا : $N\hat{M}J+M\hat{J}N+M\hat{N}J=180^\circ$

يعني : $N\hat{M}J=180^\circ-M\hat{J}N-M\hat{N}J$

إذن : $N\hat{M}J=180^\circ-90^\circ-F\hat{N}D=90^\circ-F\hat{N}D$ (10)

من 9 و 10 نستنتج أن : $D\hat{F}N=N\hat{M}J$

أي : $\sin D\hat{F}N=\sin N\hat{M}J$

اي : $\frac{DN}{FN}=\frac{NJ}{NM}$

أي : $\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{2-CM}{CM+2}$

أي : $2CM+4=4\sqrt{10}-2\sqrt{10}CM$

أي : $2CM+2\sqrt{10}CM=4\sqrt{10}-4$

أي : $2CM\left(1+\sqrt{10}\right)=2\left(2\sqrt{10}-2\right)$

إذن : $CM=\dfrac{2\sqrt{10}-2}{1+\sqrt{10}}$

تمرين 3

لدينا : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}-1\right)^2\geq 0$

يعني : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2-2\dfrac{x+y}{y+z}+1\geq 0$ يعني : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2+1\geq 2\dfrac{x+y}{y+z}$

يعني : $\dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}}\times\left(\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2+1\right)\geq\dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}}\times 2\dfrac{x+y}{y+z}$

يعني : $\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}}\geq\dfrac{1}{\cancel{\dfrac{x+y}{y+z}}}\times 2\cancel{\dfrac{x+y}{y+z}}$

إذن : $\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{y+z}{x+y}\geq 2$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{x+z}{y+z}+\dfrac{y+z}{x+z}\geq 2$ (2)

و $\dfrac{x+y}{x+z}+\dfrac{x+z}{x+y}\geq 2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z}+\frac{x+y}{x+z}+\frac{x+z}{x+y}\geq 2+2+2$$

أي : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{x+z}{y+z}\right)+\left(\dfrac{y+z}{x+y}+\dfrac{x+z}{x+y}\right)+\left(\dfrac{y+z}{x+z}+\dfrac{x+y}{x+z}\right)\geq 2+2+2$

أي : $\dfrac{2x+y+z}{y+z}+\dfrac{2z+x+y}{x+y}+\dfrac{2y+x+z}{x+z}\geq 6$

أي : $\dfrac{2x}{y+z}+\dfrac{y+z}{y+z}+\dfrac{2z}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+y}+\dfrac{2y}{x+z}+\dfrac{x+z}{x+z}\geq 6$

أي : $\dfrac{2x}{y+z}+1+\dfrac{2z}{x+y}+1+\dfrac{2y}{x+z}+1\geq 6$ أي : $\dfrac{2x}{y+z}+\dfrac{2z}{x+y}+\dfrac{2y}{x+z}+3\geq 6$

أي : $2\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{y}{x+z}\right)\geq 6-3$ أي : $\dfrac{1}{2}\times 2\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{y}{x+z}\right)\geq\dfrac{1}{2}\times 3$

وبالتالي : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{y}{x+z}\geq\dfrac{3}{2}$

تمرين 4

لدينا : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\frac{-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=1$

يعني : $-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$

إذن : $x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\quad (1)$

لدينا : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\frac{y-\sqrt{y^2+1}}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\frac{y^2-\left(\sqrt{y^2+1}\right)^2}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\frac{\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-1}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\frac{-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$

إذن : $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\quad (2)$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $2(x+y)=\cancel{\sqrt{x^2+1}}-\cancel{\sqrt{y^2+1}}+\cancel{\sqrt{y^2+1}}-\cancel{\sqrt{x^2+1}}$

أي : $2(x+y)=0$

وبالتالي : $x+y=0$

أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+2y+3z\geq 20$

بين أن : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}\geq 13$

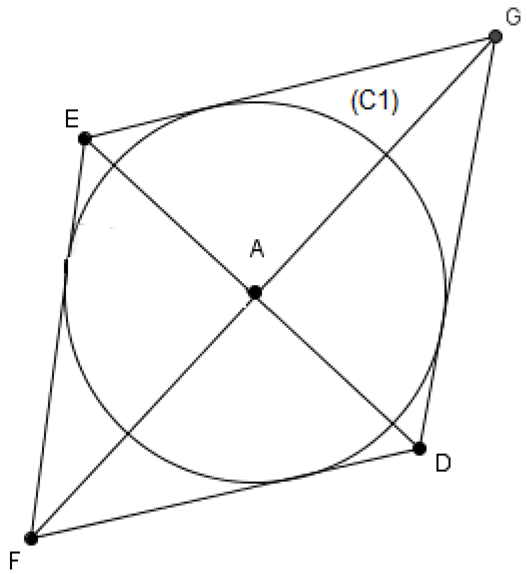
تمرين 2

$EGDF$ معين مركزه A محيطه $P=2\sqrt{41}cm$

ومساحته $S=10cm^2$ كما هو مبين في الشكل جانبه.

الدائرة (C_1) هي مماسة لأضلاع المعين

احسب مساحة الدائرة (C_1)



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية منعدمة بحيث : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

بين أن : $(y+x+z)^2=y^2+x^2+z^2$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x\neq y$ و $x^2=2016+y$ و $y^2=2016+x$

احسب xy

حل أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

لدينا :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\frac{4x}{4}+\frac{2y}{2}+\frac{4z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

$$=\frac{3x+x}{4}+\frac{y+y}{2}+\frac{3z+z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

$$=\frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}+\frac{z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

إذن : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x+2y+3z}{4}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}+\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}\right)^2+2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\geq 0$

يعني : $\frac{3x}{4}+2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+\frac{3}{x}\geq 0$

إذن : $\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{2}}\times\sqrt{\frac{9}{2y}}$ (3)

و $\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\geq 2\sqrt{\frac{z}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{z}}$ (4)

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 طرف بطرف :

$$\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{2}}\times\sqrt{\frac{9}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{z}}$$

$$=2\sqrt{\frac{3\cancel{x}}{4}\times\frac{3}{\cancel{x}}}+2\sqrt{\frac{\cancel{y}}{2}\times\frac{9}{2\cancel{y}}}+2\sqrt{\frac{\cancel{z}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{z}}}$$

$$=2\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{2}+2$$

ومنه : $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)\geq 8$ (5)

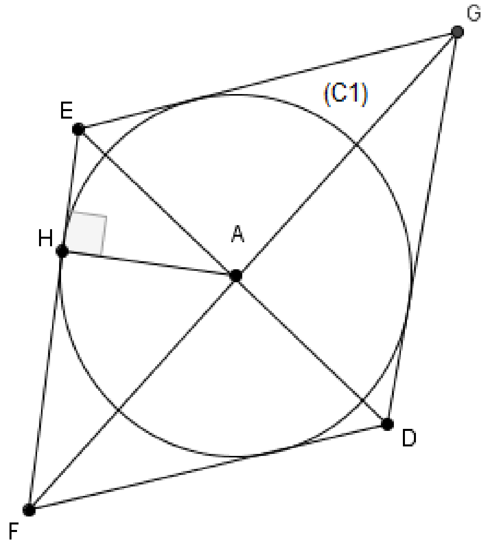
ونعلم أن : $x+2y+3z \geq 20$ (6)

من 1 و 5 و 6 نستنتج أن :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4} \geq 8+\frac{20}{4}$$

وبالتالي : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \geq 13$

تمرين 2



لدينا : $P=4\times EG=2\sqrt{41}$

إذن : $EG=\frac{2\sqrt{41}}{4}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

ولدينا : $S_{EGDF}=\frac{1}{2}\times ED\times FG=10$

(S_{EGDF} : مساحة المعين $EGDF$)

إذن : $ED\times FG=10\times 2=20$ (1)

نعتبر H نقطة التماس بين الدائرة (C_1)

والمستقيم (EF)

إذن : $(EF)\perp(AH)$

أي : $[AH]$ ارتفاع في المثلث EAF القائم الزاوية في A

أي : $AH\times EF=AE\times AF$ (علاقة مترية)

أي : $AH=\frac{AE\times AF}{EF}$ أي : $AH=\frac{\frac{ED}{2}\times\frac{FG}{2}}{EF}$ أي : $AH=\frac{ED\times FG}{4\times\frac{\sqrt{41}}{2}}$

إذن : $AH=\frac{ED\times FG}{2\sqrt{41}}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AH=\frac{20}{2\sqrt{41}}$ ومنه : $AH=\frac{10}{\sqrt{41}}\times\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}}=\frac{10\sqrt{41}}{41}$

مساحة الدائرة (C_1) : $S_{(C_1)}=\pi\times AH^2$

وبالتالي : $S_{(C_1)}=3.14\times\left(\frac{10\sqrt{41}}{41}\right)^2=7.65cm^2$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

يعني : $xyz\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=xyz\times 0$ يعني : $\frac{xyz}{x}+\frac{xyz}{y}+\frac{xyz}{z}=0$

يعني : $yz+xz+xy=0$ يعني : $yz+xz=-xy$

يعني : $z(y+x)=-xy$

يعني : $y+x=\frac{-xy}{z}$ يعني : $y+x+z=\frac{-xy}{z}+z$

يعني : $(y+x+z)^2=\left(\frac{-xy}{z}+z\right)^2$

يعني : $(y+x+z)^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2-2xy+z^2$

يعني : $(y+x+z)^2=(y+x)^2-2xy+z^2$ ($\left(\frac{-xy}{z}\right)^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2=(y+x)^2$)

يعني : $(y+x+z)^2=y^2+\cancel{2xy}+x^2-\cancel{2xy}+z^2$

إذن : $(y+x+z)^2=y^2+x^2+z^2$

<u>تمرين 4</u>

لدينا : $x^2=2016+y$ و $y^2=2016+x$

يعني : $x^2-y^2=\cancel{2016}+y-\cancel{2016}-x$

يعني : $(x-y)(x+y)=-(x-y)$

يعني : $x+y=\frac{-(x-y)}{x-y}=-1$ ($x\neq y$)

يعني : $(x+y)^2=(-1)^2$

يعني : $x^2+2xy+y^2=1$

يعني : $y+2016+2xy+x+2016=1$

يعني : $(x+y)+2032+2xy=1$

يعني : $-1+2032+2xy=1$ ($x+y=-1$)

يعني : $2xy=-2030$

وبالتالي : $xy=-2015$

أولمبياد العشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 2

احسب $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

تمرين 3

1 – u و v و w أعداد حقيقية

بين أن : $(u+v+w)^2\leq 3\left(u^2+v^2+w^2\right)$

2– x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$ (استعمل السؤال 1)

تمرين 4

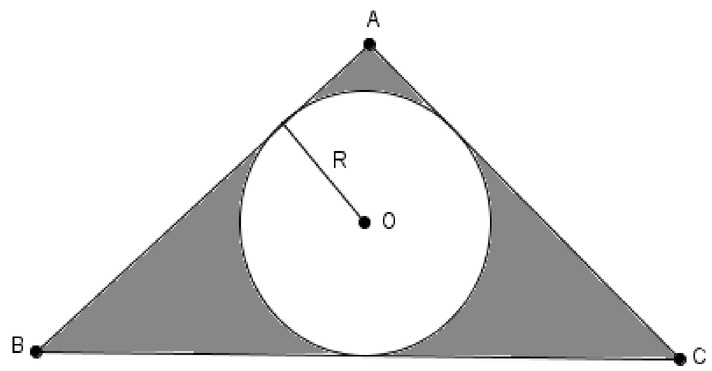
ABC مثلث بحيث : $AB=13cm$

و $BC=15cm$ و $AC=14cm$

النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة

بالمثلث ABC التي شعاعها R

احسب مساحة المنطقة المظللة



حل أولمبياد العشرون

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0\times\left(-\sqrt{x}-2\right)$ $\quad (-\sqrt{x}-2 \leq 0)$

يعني : $\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0$ يعني : $-x\sqrt{x}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$ يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$ يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \dfrac{1}{2}$

يعني : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$ إذن : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \dfrac{x}{2}$ $\quad (1)$

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \dfrac{y}{2}$ $\quad (2)$

و $\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{z}{2}$ $\quad (3)$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}$

أي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

تمرين 2

نضرب في المرافق

$$A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{34}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}\times\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\sqrt{98}-\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\times\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\cdots+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99}+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}$$

$$=-\frac{1-\sqrt{2}}{1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{1}-\cdots-\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{1}-\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{1}$$

$$=-1+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cdots-\cancel{\sqrt{98}}+\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{99}}+\sqrt{100}$$

$$=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$$

تمرين 3

1- لنحدد إشارة الفرق : $3\left(u^2+v^2+w^2\right)-(u+v+w)^2$

لنحدد إشارة الفرق

لدينا :

$$\begin{aligned}3\left(u^2+v^2+w^2\right)-(u+v+w)^2 &= 3u^2+3v^2+3w^2-\left((u+v)+w\right)^2\\ &= 3u^2+3v^2+3w^2-(u+v)^2-2\times(u+v)\times w-w^2\\ &= 3u^2+3v^2+3w^2-u^2-2uv-v^2-2uw-2vw-w^2\\ &= 2u^2+2v^2+2w^2-2uv-2uw-2vw\\ &= u^2-2uv+v^2+u^2-2uw+w^2+v^2-2vw+w^2\\ &= (u-v)^2+(u-w)^2+(v-w)^2\geq 0\end{aligned}$$

إذن : $(u+v+w)^2\leq 3\left(u^2+v^2+w^2\right)$

2- نضع : $u=\sqrt{6x+1}$ و $v=\sqrt{6y+1}$ و $w=\sqrt{6z+1}$

حسب السؤال 1 : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3(6x+1+6y+1+6z+1)$

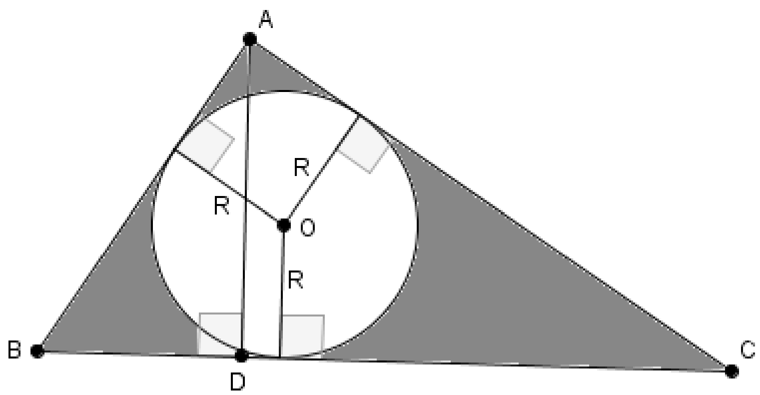
يعني : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3\left(6(x+y+z)+3\right)$

يعني : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3(6\times 1+3)=27$ ($x+y+z=1$)

يعني : $\sqrt{\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2}\leq\sqrt{27}$

وبالتالي : $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$

تمرين 4



لدينا المثلث ADB قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AB^2 = AD^2 + DB^2$

ومنه : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ (1)

لدينا المثلث ADC قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

ومنه : $AD^2 = AC^2 - DC^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج ان : $AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$

أي : $DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2$

أي : $(DB - DC)AC = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB - DC)\times 15 = 13^2 - 14^2$

اي : $DB - DC = \dfrac{169 - 196}{15}$ أي : $DB - DC = -1,8$ إذن : $DC = DB + 1,8$

لدينا : $BD + DC = 15$

يعني : $BD + (DB + 1,8) = 15$ يعني : $2BD = 15 - 1,8$ إذن : $BD = 6,6$

لدينا : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ أي : $AD^2 = 13^2 - 6.6^2$ أي : $AD = \sqrt{169 - 43,56}$

إذن : $AD = 11,2$

لدينا : $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC}$

يعني : $84 = \dfrac{13\times R}{2} + \dfrac{15\times R}{2} + \dfrac{14\times R}{2}$ يعني : $84 = R\left(\dfrac{13}{2} + \dfrac{15}{2} + \dfrac{14}{2}\right)$ يعني : $84 = R\times 21$

إذن : $R = 4cm$

لدينا : مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث ABC – مساحة الدائرة

يعني :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times AD\times BC - \pi R^2 &= \frac{1}{2}\times 11,2\times 15 - 3,14\times 4^2\\ &= 84 - 50,24\\ &= 33,76cm^2\end{aligned}$$

وبالتالي مساحة المنطقة المظللة هي : $33,76cm^2$

أولمبياد الواحد والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x>1$ و $y>1$ و $z>1$

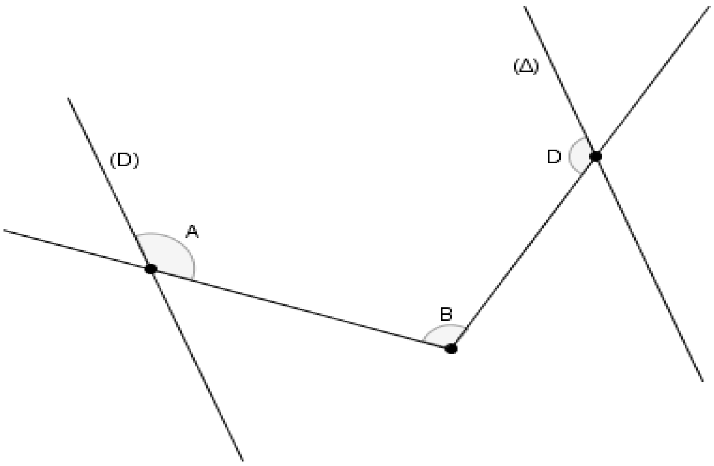
بين أن : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>y+x+z+\frac{1}{xyz}$

تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$(D)//(\Delta)$

بين أن : $A+B+D=360^{\circ}$



تمرين 3

x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

بين أن : $(x+z-y)^{2}<4xz$

تمرين 4

x عدد حقيقي غير منعدم بحيث : $x^{2}+\frac{1}{x^{2}}=7$

أحسب : $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

حل أولمبياد الواحد والعشرون

تمرين 1

بما أن : $y>1$ فإن : $-y<-1$

ومنه : $-\frac{1}{y}>-1$

لدينا : $-\frac{1}{y}>-1$ و $x>1$ يعني : $x+\left(-\frac{1}{y}\right)>1+(-1)$

إذن : $x-\frac{1}{y}>0$ $\quad(1)$

بنفس الطريقة نبين أن : $y-\frac{1}{z}>0$ $\quad(2)$

و $z-\frac{1}{x}>0$ $\quad(3)$

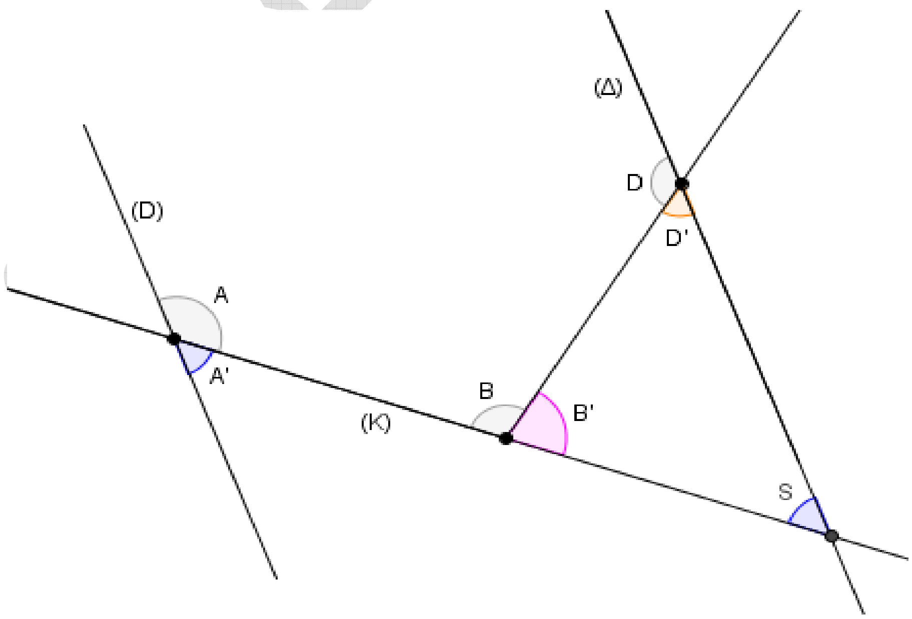
نطرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)>0$

أي : $\left(xy-\frac{x}{z}-1+\frac{1}{yz}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)>0$ أي : $xyz-y-x+\frac{1}{z}-z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xyz}>0$

أي : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\left(y+x+z+\frac{1}{xyz}\right)>0$

وبالتالي : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>y+x+z+\frac{1}{xyz}$

تمرين 2



بماأن

$(D)//(\Delta)$ و (K) قاطع لهما

فإن $S = A'$

لدينا : $S = A' = 180^\circ - A$

و $B' = 180^\circ - B$

و $D' = 180^\circ - D$

ونعلم أن مجموع زوايا مثلث تساوي 180°

يعني : $S + B' + D' = 180^\circ$

يعني : $180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - D = 180^\circ$

يعني : $A + B + D = 180^\circ + 180^\circ + \cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ}$

وبالتالي : $A + B + D = 360^\circ$

<u>تمرين 3</u>

لنحدد إشارة الفرق $(x+z-y)^2 - 4xz$:

$$\begin{aligned}(x+z-y)^2 - 4xz &= ((x+z)-y)^2 - 4xz \\ &= (x+z)^2 - 2\times(x+z)\times y + y^2 - 4xz \\ &= x^2 + 2xz + z^2 - 2xy + 2yz + y^2 - 4xz \\ &= x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz)\end{aligned}$$

لدينا : x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

يعني : $x + y > z$ (متفاوتة مثلثية)

يعني : $z\times(x+y) > z\times z$ ($z > 0$)

إذن : $xz + yz > z^2$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $yz + xy > y^2$ (2)

و $xy + xz > x^2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$xz + yz + yz + xy + xy + xz > z^2 + y^2 + x^2$$

أي : $2(xy + yz + xz) > x^2 + y^2 + z^2$

أي : $(x+z-y)^2-4xz=x^2+z^2+y^2-2(xy+yz+xz)\leq 0$

وبالتالي : $(x+z-y)^2<4xz$

تمرين 4

نضع : $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

يعني : $y^2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2+\frac{1}{x}$

يعني : $y^2-2=x+\frac{1}{x}$

يعني : $(y^2-2)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

يعني : $(y^2-2)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2=9$

يعني : $(y^2-2)^2-9=0$

يعني : $(y^2-2+3)(y^2-2-3)=0$

يعني : $(y^2+1)(y^2-5)=0$

يعني : $y^2+1=0$ أو $y^2-5=0$

يعني : $y^2=-1$ المعادلة ليس لها حل

أو $(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})=0$

يعني : $y-\sqrt{5}=0$ أو $y+\sqrt{5}=0$

يعني : $y=\sqrt{5}$ أو $y=-\sqrt{5}$

ونعلم أن $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

وبالتالي : $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$

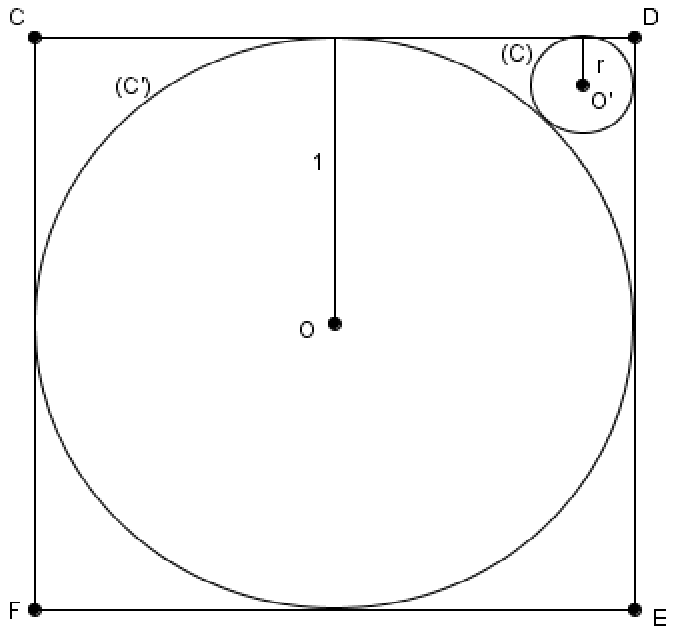
أولمبياد الثاني والعشرون

تمرين 1

x عدد حقيقي بحيث : $x>1$ و $x=\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}$

بين أن : $14x+1=x^2$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$CDEF$ مربع طول ضلعه يساوي $2cm$

(C') دائرة مركزها O شعاعها $1cm$

(C) دائرة مركزها O' شعاعها r

بين أن $r=3-2\sqrt{2}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x+y+z\neq 0$ و $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}=0$

بين أن : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}=1$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^3+EG^3<FG^3$

حل أولمبياد الثاني والعشرون

<u>تمرين 1</u>

لدينا : $x=\frac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}$ يعني : $x^2=\left(\frac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}\right)^2$ يعني : $x^2=\frac{\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}\right)^2}{20^2}$

يعني : $x^2=\frac{2x^4+4x^2+2}{400}$ يعني : $x^2=\frac{\cancel{2}\left(x^4+2x^2+1\right)}{\cancel{2}\times 200}$ يعني : $200x^2=x^4+2x^2+1$

يعني : $196x^2+4x^2=x^4+2x^2+1$ يعني : $196x^2=x^4-2x^2+1$

يعني : $(14x)^2=\left(x^2-1\right)^2$ يعني : $14x=x^2-1$

وبالتالي : $14x+1=x^2$

<u>تمرين 2</u>

لدينا : $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}=0$

يعني : $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+(x+y+z)=0+(x+y+z)$

يعني : $\left(\frac{x^2}{y+z}+x\right)+\left(\frac{y^2}{x+z}+y\right)+\left(\frac{z^2}{x+y}+z\right)=(x+y+z)$

يعني : $\frac{x^2+x(y+z)}{y+z}+\frac{y^2+y(x+z)}{x+z}+\frac{z^2+z(x+y)}{x+yz}=(x+y+z)$

يعني : $\frac{x(x+y+z)}{y+z}+\frac{y(x+y+z)}{x+z}+\frac{z(x+y+z)}{x+y}=(x+y+z)$

يعني : $(x+y+z)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)=(x+y+z)$

يعني : $\frac{1}{\cancel{x+y+z}}\times\left(\cancel{x+y+z}\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)=\frac{1}{\cancel{x+y+z}}\times\left(\cancel{x+y+z}\right)$

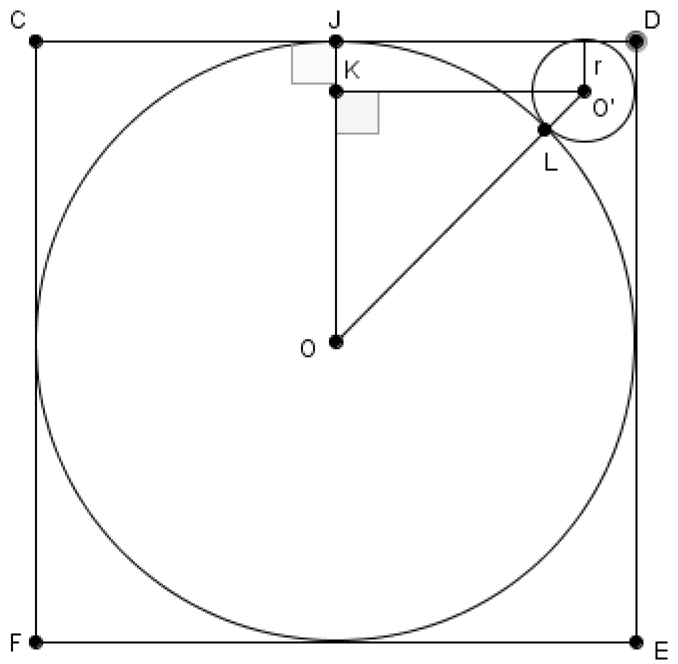
وبالتالي : $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=1$

<u>تمرين 3</u>

لدينا : $OO'=OL+LO'$

و $OK=OJ-KJ$ و $KO'=JD-r$

إذن : $OO'=1+r$ و $OK=1-r$



و $KO'=1-r$

لدينا المثلث OKO' قائم الزاوية في K

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$OO'^2=\text{OK}^2+\text{O'K}^2$

أي : $(1+r)^2=(1-r)^2+(1-r)^2$

أي : $(1+r)^2=2(1-r)^2$

أي : $1+r=\sqrt{2(1-r)^2}$

أي : $1+r=\sqrt{2}(1-r)$ أي :

$r+\sqrt{2}r=\sqrt{2}-1$ أي : $r(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$

اي :

$$r=\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{1-2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

وبالتالي : $\boxed{r=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}}$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2+EG^2=FG^2$

لنبين أن : $EF^3+EG^3-FG^3<0$

$$\begin{aligned}EF^3+EG^3-FG^3&=EF^2\times EF+EG^2\times EG-FG^2\times FG\\&=EF^2\times EF+EG^2\times EG-\left(EF^2+EG^2\right)\times FG\\&=EF^2\times EF+EG^2\times EG-EF^2\times FG-EG^2\times FG\\&=EF^2\times(EF-FG)+EG^2\times(EG-FG)<0\end{aligned}$$

(لأن $EF<FG$ و $EG<FG$)

وبالتالي : $EF^3+EG^3<FG^3$

أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

x عدد حقيقي غير منعدم ($x \neq 0$) بحيث : $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$

بين أن : $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{29}$

تمرين 2

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

1- بين أن $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

2- بين أن : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- استنتج أن : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy+yz+zx=\frac{xyz}{2}$

بين أن : $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}<\frac{1}{2}$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان غير منعدمان بحيث : $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{3}$

احسب $\frac{x}{y}$

حل أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

لنحدد قيمة $x+\frac{1}{x}$:

لدينا : $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$ يعني : $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{3}$ يعني : $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$

إذن : $x+\frac{1}{x}=3$

لنحدد قيمة $x^2+\frac{1}{x^2}$:

لدينا : $x+\frac{1}{x}=3$ يعني : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$ يعني : $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$

إذن : $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

لنحدد قيمة $x^3+\frac{1}{x^3}$:

لدينا : $x+\frac{1}{x}=3$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3\times 7$ يعني : $x^3+\left(\frac{1}{x}+x\right)+\frac{1}{x^3}=21$

يعني : $x^3+3+\frac{1}{x^3}=21$ إذن : $x^3+\frac{1}{x^3}=18$

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+3+7+18}$$

وبالتالي : $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{29}$

تمرين 2

1- لدينا :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{2(b+c)}+\frac{2b}{2(c+a)}+\frac{2c}{2(a+b)}$$

$$=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

لدينا : a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$

يعني : $a+b+(a+b)>c+a+b$ و $c+a+(c+a)>b+c+a$ و $b+c+(b+c)>a+b+c$

يعني : $\frac{1}{a+b+(a+b)}<\frac{1}{c+a+b}$ و $\frac{1}{c+a+(c+a)}<\frac{1}{b+c+a}$ و $\frac{1}{b+c+(b+c)}<\frac{1}{a+b+c}$

يعني : $\frac{2c}{a+b+(a+b)}<\frac{2c}{c+a+b}$ و $\frac{2b}{c+a+(c+a)}<\frac{2b}{b+c+a}$ و $\frac{2a}{b+c+(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}$

إذن :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

$$<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{b+c+a}+\frac{2c}{c+a+b}=\frac{2\left(\cancel{a+b+c}\right)}{\cancel{a+b+c}}=2$$

2- لدينا : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$ يعني : $a+b-c>0$ و $c+a-b>0$ و $b+c-a>0$

نضع : $x=a+b-c>0$ و $y=c+a-b>0$ و $z=b+c-a>0$

يعني : $x+y=2a$ و $x+z=2b$ و $y+z=2c$

إذن : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}=\sqrt{x}+\sqrt{z}$ و $\sqrt{x+z}=\sqrt{2}\sqrt{b}$

لنبين أن : $\sqrt{x}+\sqrt{z}\le\sqrt{2}\sqrt{x+z}$

لدينا : $2(x+z)-\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2=2x+2z-x-2\sqrt{x}\sqrt{z}-z=x-2\sqrt{x}\sqrt{z}+z=\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2\ge0$

يعني : $2(x+z)\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2$

يعني : $\sqrt{2(x+z)}\geq\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2}$

إذن : $\sqrt{x}+\sqrt{z}\leq\sqrt{2}\sqrt{x+z}$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\leq\sqrt{2}\sqrt{b}$

3- حسب السؤال السابق لدينا : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\leq\sqrt{2}\sqrt{b}$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{2}\sqrt{c}$ (2)

و $\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\leq\sqrt{2}\sqrt{a}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$2\sqrt{a+b-c}+2\sqrt{b+c-a}+2\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{2}\sqrt{b}+\sqrt{2}\sqrt{c}+\sqrt{2}\sqrt{a}$$

أي : $2\left(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\right)\leq 2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

تمرين 3

لدينا : $xy+yz+zx=\dfrac{xyz}{2}$

يعني : $\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=\dfrac{1}{2}$

يعني : $\dfrac{xy}{xyz}+\dfrac{yz}{xyz}+\dfrac{zx}{xyz}=\dfrac{1}{2}$

إذن : $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ (1)

لدينا : $2>0$

يعني : $2>x-x$

يعني : $2+x>x$

إذن : $\dfrac{1}{2+x}<\dfrac{1}{x}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{1}{2+y}<\dfrac{1}{y}$ (3) و $\dfrac{1}{2+z}<\dfrac{1}{z}$ (4)

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2+y}+\dfrac{1}{2+z}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

من 1 و 5 نستنتج أن : $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}<\frac{1}{2}$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\cancel{xy}\times\left(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right)}{\cancel{xy}\times\left(\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}=\frac{1}{3}$

نضع : $k=\frac{x}{y}$

يعني : $\frac{k-1+\frac{1}{k}}{k+1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\frac{k^2-k+1}{k}}{\frac{k^2+k+1}{k}}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{k^2-k+1}{\cancel{k}}\times\frac{\cancel{k}}{k^2+k+1}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\frac{1}{3}$

يعني : $k^2+k+1=3k^2-3k+3$

يعني : $3k^2-3k+3-k^2-k-1=0$ يعني : $2k^2-4k+2=0$

يعني : $2\left(k^2-2k+1\right)=0$ يعني : $k^2-2k+1=0$

يعني : $(k-1)^2=0$ يعني : $k-1=0$

إذن : $k=1$

وبالتالي : $\boxed{\frac{x}{y}=1}$

أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=5 \end{cases}$ بين أن : $xyz=\frac{1}{3}$

تمرين 2

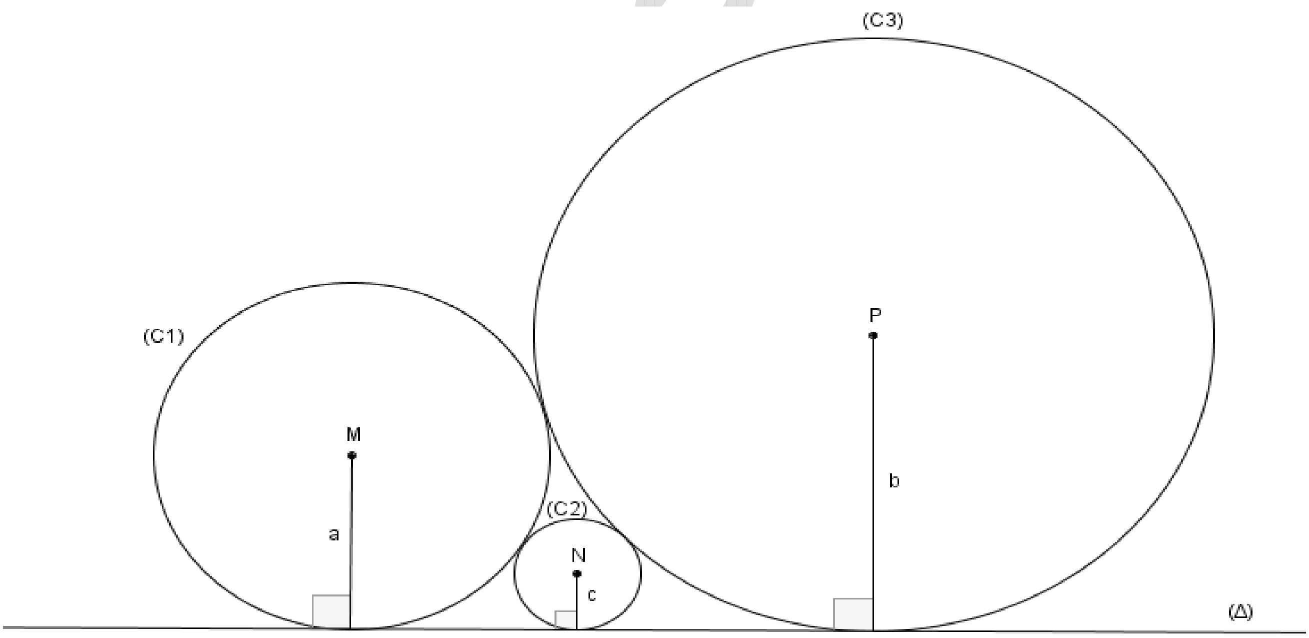
$X=1^2-2^2+3^2-4^2+.....+99^2-100^2$

$Y=1+2+3+4+......+99+100$

بين أن : $X+Y=0$

تمرين 3

نعتبر الشكل أسفله بحيث : الدوائر $C_1(M,a)$ و $C_2(N,c)$ و $C_3(P,b)$ متماسة فيما بينها والمستقيم (Δ) مماس للدوائر الثلاثة بين أن : $\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$



تمرين 4

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

بين أن $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq abc$

حل أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

لدينا : $x+y+z=1$

يعني : $(x+y+z)^3=1^3$

يعني : $(x+y+z)^2\times(x+y+z)=1$

يعني : $(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\times(x+y+z)=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz=1$

بما أن : $x+y+z=1$ فإن : $x+y=1-z$ و $y+z=1-x$ و $x+z=1-y$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2(1-x)+3y^2(1-y)+3z^2(1-z)+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2+3y^2+3z^2-3x^3-3y^3-3z^3+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)+6xyz=1$

يعني : $5+3\times3-3\times5+6xyz=1$ ($x^2+y^2+z^2=3$ و $x^3+y^3+z^3=5$)

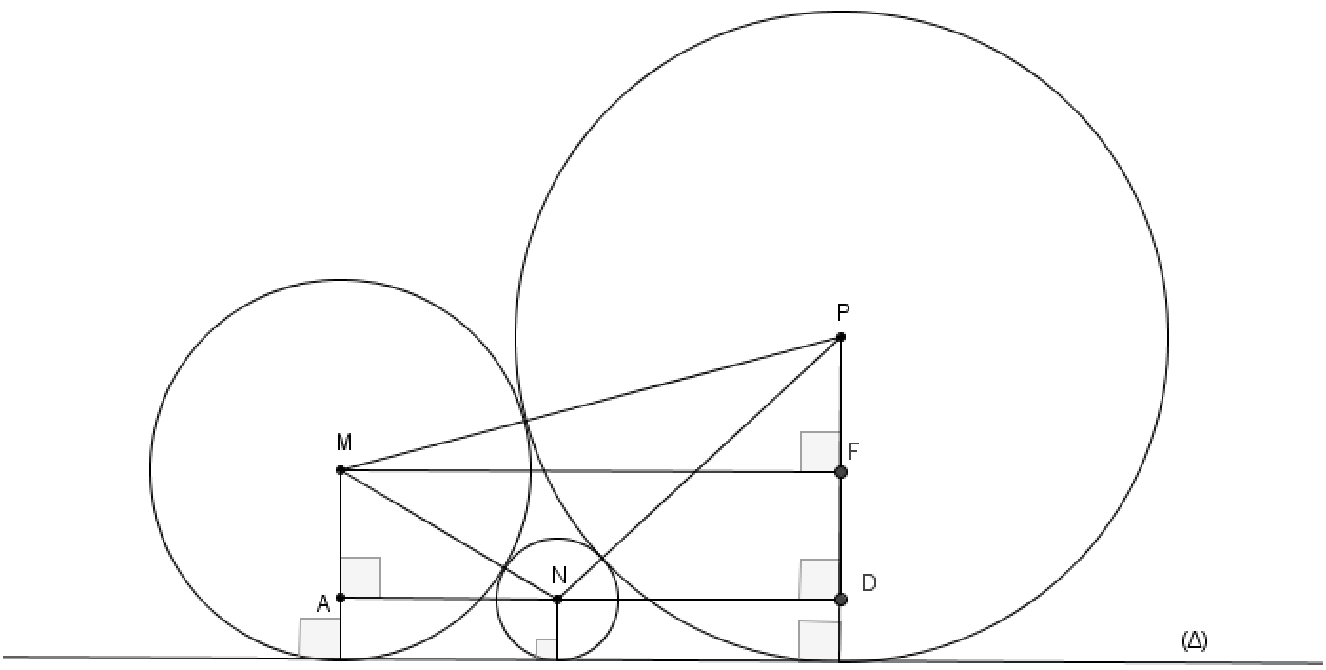
يعني : $-1+6xyz=1$

وبالتالي : $xyz=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

تمرين 2

$$
\begin{aligned}
X+Y&=(1^2-2^2+3^2-4^2+.....+99^2-100^2)+(1+2+3+4+......+99+100)\\
&=(1+1)+(2-2^2)+(3+3^2)+(4-4^2)+...+(99+99^2)+(100-100^2)\\
&=2+(2\times(1-2))+(3\times(1+3))+(4\times(1-4))+...+(99\times(1+99))+(100\times(1-100))\\
&=2+(2\times(-1))+(3\times(4))+(4\times(-3))+...+(99\times(100))+(100\times(-99))\\
&=\cancel{2}-\cancel{2}+\cancel{12}-\cancel{12}+...+\cancel{9900}-\cancel{9900}\\
&=0
\end{aligned}
$$

تمرين 3



لدينا MAN قائم الزاوية في A

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MN^2 = MA^2 + AN^2$

أي : $AN^2 = MN^2 - MA^2$ أي : $AN^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2$

أي : $AN = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2}$ أي : $AN = \sqrt{\cancel{a^2} + 2ac + \cancel{c^2} - \cancel{a^2} + 2ac - \cancel{c^2}}$

ومنه : $AN = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$ $(\ 1\ )$

و لدينا NDP قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $NP^2 = ND^2 + DP^2$

أي : $ND^2 = NP^2 - DP^2$ أي : $ND^2 = (c+b)^2 - (b-c)^2$

أي : $ND = \sqrt{(c+b)^2 - (b-c)^2}$ أي : $ND = \sqrt{\cancel{c^2} + 2cb + \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2cb - \cancel{b^2}}$

ومنه : $ND = \sqrt{4cb} = 2\sqrt{cb}$ $(\ 2\ )$

و لدينا MFP قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MP^2 = MF^2 + PF^2$

أي : $MF^2 = MP^2 - PF^2$ أي : $MF^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2$

أي : $MF = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$ أي : $MF = \sqrt{\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{a^2}}$

ومنه : $MF = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$ (3)

لدينا : $MF = AD = AN + ND$ (4)

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}$

أي : $\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\sqrt{ab} = \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times \left(2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

تمرين 4

لدينا a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$

يعني : $a+b-c>0$ و $c+a-b>0$ و $b+c-a>0$

نضع : $x=a+b-c>0$ و $y=b+c-a>0$ و $z=c+a-b>0$

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ يعني : $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ يعني : $2\sqrt{xy} \leq x+y$

إذن : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$ (2)

و $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ (3)

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\sqrt{xy} \times \sqrt{xz} \times \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي : $\sqrt{(xyz)^2} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$ أي : $xyz \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي :

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{\cancel{a}+b-\cancel{c}+b+\cancel{c}-\cancel{a}}{2} \times \frac{a+\cancel{b}-\cancel{c}+a+\cancel{c}-\cancel{b}}{2} \times \frac{\cancel{b}+c-\cancel{a}+\cancel{a}+c-\cancel{b}}{2}$$

أي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc$

أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz$

تمرين 2

نعطي : $1^3+2^3+....+14^3+15^3=14400$

أحسب $2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3$

تمرين 3

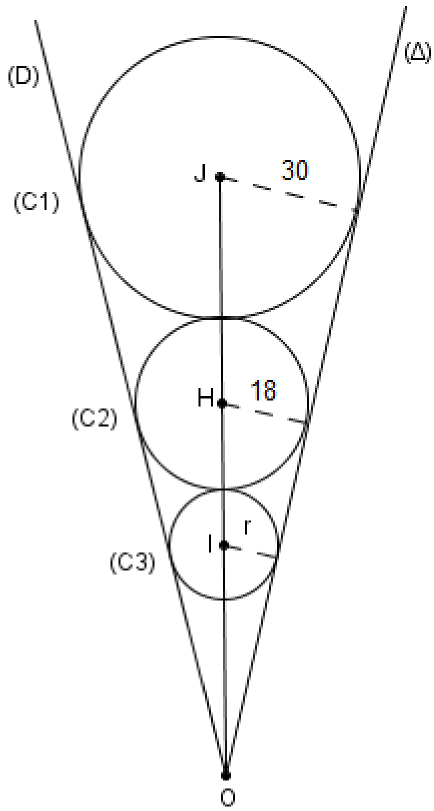
المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O

ومماسان للدوائر $C_1(J,30)$ و $C_2(H,18)$ و $C_3(I,r)$

والدائرتان C_1 و C_2 متماستان

والدائرتان C_3 و C_2 متماستان

احسب r شعاع الدائرة C_3



تمرين 4

بين أن : $\sqrt{\dfrac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\dfrac{4058209}{2}$

حل أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\times\sqrt{y}\geq 0$

إذن : $x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$

ومنه : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $x+z\geq 2\sqrt{xz}$ (2)

و $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ (3)

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$(x+y)(x+z)(y+z)\geq 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{xz}\times 2\sqrt{yz}$$

أي : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8\left(\sqrt{x}\right)^2\times\left(\sqrt{z}\right)^2\times\left(\sqrt{y}\right)^2$

وبالتالي : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz$

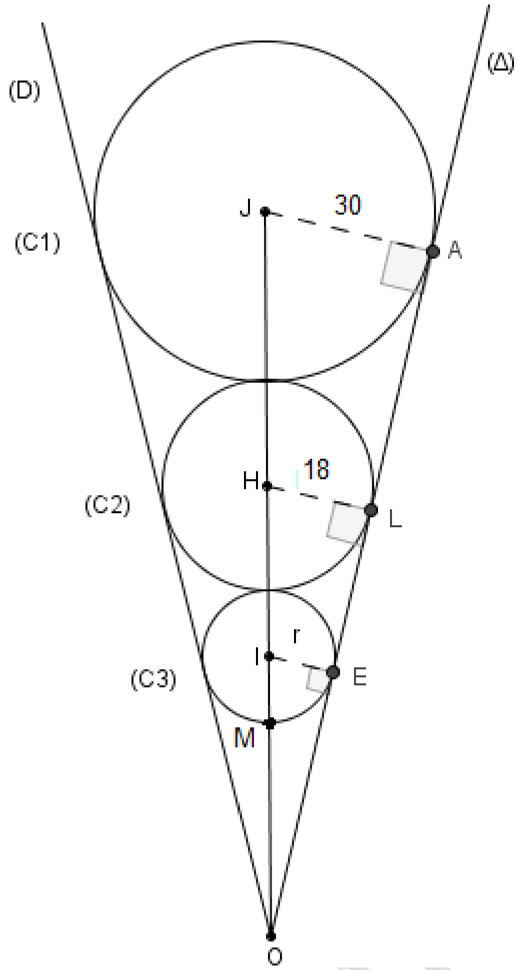
تمرين 2

لدينا :

$$2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3$$
$$2^3=(2\times1)^3=2^3\times1^3$$
$$4^3=(2\times2)^3=2^3\times2^3$$
$$6^3=(2\times1)^3=2^3\times1^3$$
$$\vdots$$
$$28^3=(14\times2)^3=14^3\times2^3$$
$$30^3=(15\times2)^3=15^3\times2^3$$

إذن :

$$\begin{aligned}2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3&=2^3\times1^3+2^3\times2^3+2^3\times3^3+....+14^3\times2^3+15^3\times2^3\\&=2^3\left(1^3+2^3+....+14^3+15^3\right)\\&=8\times14400\end{aligned}$$



تمرين 3

لدينا المستقيمان (D) و (Δ) مماسان للدوائر

(C_1) و (C_2) و (C_3) على التوالي في A و L و E

يعني : $(JA)\perp(\Delta)$ و $(HL)\perp(\Delta)$ و $(IE)\perp(\Delta)$

يعني : $\sin J\hat{O}A = \sin H\hat{O}L = \sin I\hat{O}E$

يعني : $\dfrac{JA}{OJ} = \dfrac{HL}{OH} = \dfrac{IE}{OI}$

يعني :

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+2\times18+30}$$

إذن : $\dfrac{r}{OM+r} = \dfrac{18}{OM+2r+18} = \dfrac{30}{OM+2r+66}$

حسب النتيجة 1 لدينا : $\dfrac{r}{OM+r} = \dfrac{18}{OM+2r+18}$

يعني : $r\times OM + 2r^2 + 18r = 18\times OM + 18r$

يعني : $2r^2 = 18\times OM - r\times OM$

يعني : $2r^2 = OM(18-r)$

إذن : $OM = \dfrac{2r^2}{18-r}$ $\quad(1)$

حسب النتيجة 1 لدينا : $\dfrac{18}{OM+2r+18} = \dfrac{30}{OM+2r+66}$

يعني : $18\times OM + 36r + 1188 = 30\times OM + 60r + 540$

يعني : $30\times OM - 18\times OM + 60r - 36r = 1188 - 540$

إذن : $12\times OM + 24r = 648$ $\quad(2)$

من 1 و 2 نستنتج أن : $12\times\left(\dfrac{2r^2}{18-r}\right) + 24r = 648$

أي : $\dfrac{\cancel{24r^2} + 432r - \cancel{24r^2}}{18-r} = 648$

أي : $432r = 11664 - 648r$

أي : $1080r = 11664$

وبالتالي : $r=\dfrac{11664}{1080}=10,8$

تمرين 4

نضع : $x=2013$

$$\sqrt{\dfrac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\sqrt{\dfrac{(x+3)\times(x+2)\times(x+1)\times x+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\dfrac{x\times(x+3)\times(x+2)\times(x+1)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\dfrac{(x^2+3x)\times(x^2+3x+2)+1}{4}}$$

نضع : $t=x^2+3x$

$$\sqrt{\dfrac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\sqrt{\dfrac{(x^2+3x)\times(x^2+3x+2)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\dfrac{t\times(t+2)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\dfrac{t^2+2t+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\dfrac{(t+1)^2}{4}}$$
$$=\dfrac{t+1}{2}$$
$$=\dfrac{x^2+3x+1}{2}$$
$$=\dfrac{2013^2+3\times2013+1}{2}$$
$$=\dfrac{4052169+6039+1}{2}=\dfrac{4058209}{2}$$

أولمبياد السادس والعشرون

<u>تمرين 1</u>

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

بين أن : $3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

<u>تمرين 2</u>

a و b و x و y أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x\leq y$

بين أن : $\frac{x}{y}\leq\frac{ax+by}{ay+bx}\leq\frac{y}{x}$

<u>تمرين 3</u>

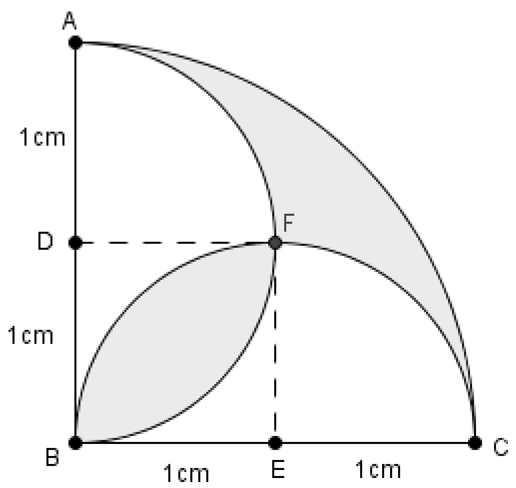
1- x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x-y=16\sqrt{2}$ و $xy=224$

أحسب $x+y$

2- احسب : $S=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}+\frac{1}{304}+\frac{1}{418}+\frac{1}{550}+\frac{1}{700}$

<u>تمرين 4</u>

احسب مساحة المنطقة المضللة



حل أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)^2\geq 0$$

إذن : $3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

تمرين 2

لدينا : $x\leq y$

يعني : $x^2\leq y^2$

يعني : $(bx)\times x^2\leq(bx)\times y^2$ و $(ay)\times x^2\leq(ay)\times y^2$ ($bx>0$ و $ay>0$)

يعني : $bx^3\leq bxy^2$ و $ayx^2\leq ay^3$

يعني : $bx^3+\left(ax^2y\right)\leq bxy^2+\left(ax^2y\right)$ و $ayx^2+\left(bxy^2\right)\leq ay^3+\left(bxy^2\right)$

يعني : $x^2(bx+ay)\leq xy(by+ax)$ و $xy(ax+by)\leq y^2(ay+bx)$

يعني : $\frac{1}{x^2}\times x^2(bx+ay)\leq\frac{1}{x^2}\times xy(by+ax)$ و $\frac{1}{y^2}\times xy(ax+by)\leq\frac{1}{y^2}\times y^2(ay+bx)$

يعني : $bx+ay\leq\frac{y}{x}\times(by+ax)$ و $\frac{x}{y}\times(ax+by)\leq(ay+bx)$

يعني : $\frac{1}{bx+ay}\geq\frac{x}{y}\times\left(\frac{1}{by+ax}\right)$ و $\frac{y}{x}\times\left(\frac{1}{ax+by}\right)\geq\frac{1}{ay+bx}$

يعني : $\frac{ax+by}{bx+ay}\geq\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}\geq\frac{ax+by}{ay+bx}$

وبالتالي : $\frac{x}{y}\leq\frac{ax+by}{ay+bx}\leq\frac{y}{x}$

تمرين 3

1- لدينا : $x-y=16\sqrt{2}$

يعني : $(x-y)^2=(16\sqrt{2})^2$

إذن : $x^2-2xy+y^2=256\times2=512$ (1)

لدينا : $xy=224$

إذن: $4\times xy=4\times224=896$ (2)

نجمع المساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $x^2-2xy+y^2+4\times xy=512+896$

أي : $x^2+2xy+y^2=1408$

أي : $(x+y)^2=1408$

وبالتالي : $x+y=\sqrt{1408}=2\sqrt{352}$

-2

$$S=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\frac{1}{13\times16}+\frac{1}{16\times19}+\frac{1}{19\times22}+\frac{1}{22\times25}+\frac{1}{25\times28}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4-1}{1\times4}+\frac{1}{3}\times\frac{7-4}{4\times7}+\frac{1}{3}\times\frac{10-7}{7\times10}+\frac{1}{3}\times\frac{13-10}{10\times13}+\frac{1}{3}\times\frac{16-13}{13\times16}+\frac{1}{3}\times\frac{19-16}{16\times19}+\frac{1}{3}\times\frac{22-19}{19\times22}+\frac{1}{3}\times\frac{25-22}{22\times25}+\frac{1}{3}\times\frac{28-25}{25\times28}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}+\cancel{\frac{1}{10}}-\cancel{\frac{1}{13}}+\cancel{\frac{1}{13}}-\cancel{\frac{1}{16}}+\cancel{\frac{1}{16}}-\cancel{\frac{1}{19}}+\cancel{\frac{1}{19}}-\cancel{\frac{1}{22}}+\cancel{\frac{1}{22}}-\cancel{\frac{1}{25}}+\cancel{\frac{1}{25}}-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{27}{28}$$

$$=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{9\times\cancel{3}}{28}$$

$$=\frac{9}{28}$$

<u>تمرين 4</u>

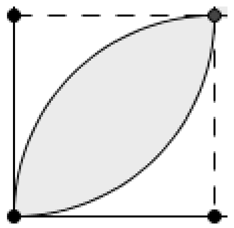
– مساحة الشكل : $\frac{\pi\times2^2}{4}=\pi$

– مساحة نصف الدائرة التي قطرها يساوي 2 : $\frac{\pi\times1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

– مساحة نصف الدائرتين التي قطراهما يساويان 2 : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}=\pi$

– مساحة الشكل البيضاوي :

$$1^2-2\left(1^2-\frac{\pi\times1^2}{4}\right)=1-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=1-\frac{4-\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi-2}{2}$$



– مساحة المنطقة المضللة :

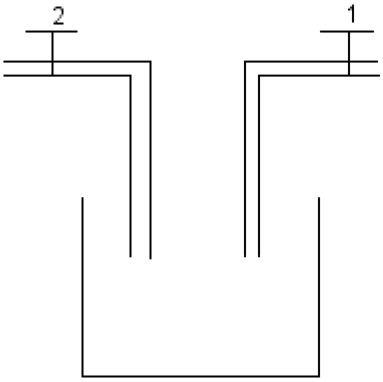
مساحة المنطقة المضللة = مساحة الشكل– (مساحة نصف الدائرتين – مساحة الشكل البيضاوي)

$$\cancel{\pi}-\left(\cancel{\pi}-\frac{\pi-2}{2}\right)=\frac{2-\pi}{2}\,cm^2$$

مساحة المنطقة المضللة هي : $\frac{2-\pi}{2}\,cm^2$

أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1



الشكل جانبه يمثل صهريج يحتوي على حنفيتين لمئه بالماء
الحنفية الأولى تملأ الصهريج في ساعتان
والحنفية الثانية تملأ الصهريج في 3 ساعات
إذا فتحنا الحنفيتين في نفس الوقت فكم سيستغرق
من الوقت حتى يمتلأ الصهريج

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)$

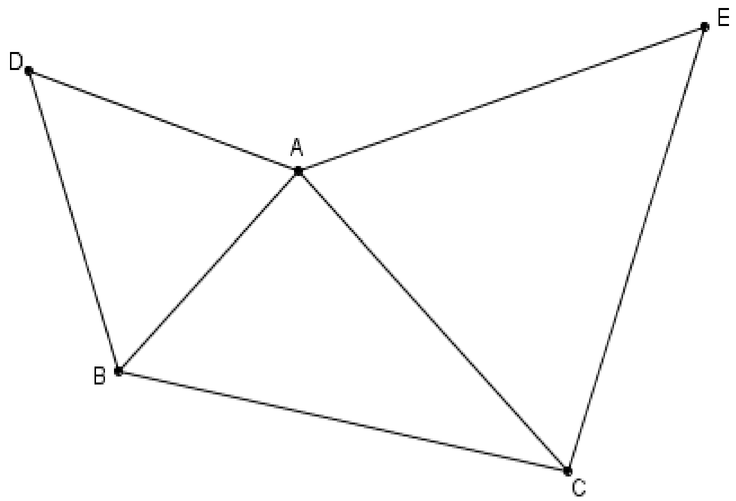
تمرين 3

$ABCD$ مستطيل مساحته $S=30cm^2$ و طول قطره $BD=\sqrt{65}$

حدد محيط المستطيل P

تمرين 4

في الشكل جانبه : ABC مثلث
والمثلثان BAD و ACE متساويا
اللأضلاع على التوالي في D و E
بين أن : $DC=BE$



أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1

نضع : V : حجم الصهريج

S_1 : صبيب الحنفية الأولى

S_2 : صبيب الحنفية الثانية

t : المدة الزمنية حتى يمتلأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا

– عند ملأ الصهريج بالحنفية الأولى فإن حجم الصهريج هو : $V = S_1 \times 2$

يعني : $S_1 = \frac{V}{2}$

– عند ملأ الصهريج بالحنفية الثانية فإن حجم الصهريج هو : $V = S_2 \times 3$

يعني : $S_2 = \frac{V}{3}$

– عند ملأ الصهريج بالحنفيتين معا فإن حجم الصهريج هو : $V = (S_1 + S_2) \times t$

يعني : $t = \frac{V}{S_1 + S_2}$ يعني : $t = \frac{V}{\frac{V}{2} + \frac{V}{3}} = \frac{V}{\frac{5V}{6}} = V \times \frac{6}{5V}$

إذن : $\boxed{t = \frac{6}{5}h}$

المدة الزمنية لملأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا هي : $1h12\min$

تمرين 2

لدينا : $\left(x - \sqrt{yz}\right)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2x\sqrt{yz} + yz \geq 0$ يعني : $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ يعني : $\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$

يعني : $\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} \times \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}$

إذن : $\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{\sqrt{xz}}{2xyz}$ (2)

و $\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}+\frac{\sqrt{xz}}{2xyz}+\frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$

ومنه : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}\right)$ (4)

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \ge 0$

يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \ge 0$

يعني : $x+y \ge 2\sqrt{xy}$

إذن : $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ (5)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{x+z}{2} \ge \sqrt{xz}$ (6)

و $\frac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz}$ (7)

نجمع المتفاوتات 5 و 6 و 7 طرف بطرف : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}$

اي : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \frac{2x+2y+2z}{2}$

اي : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \frac{\cancel{2}(x+y+z)}{\cancel{2}}$

ومنه : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le x+y+z$ (8)

من 4 و 8 نستنتج أن : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)$

أي : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}yz}+\frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}z}+\frac{\cancel{z}}{xy\cancel{z}}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)$

<u>تمرين 3</u>

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في B

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AB^2+AD^2=BD^2$

ومنه : $AB^2+AD^2=\left(\sqrt{65}\right)^2=65$ (1)

لدينا : $S=30cm^2$

يعني : $AB\times AD=30$

يعني : $2\times AB\times AD=2\times 30$

إذن : $2\times AB\times AD=60$ (2)

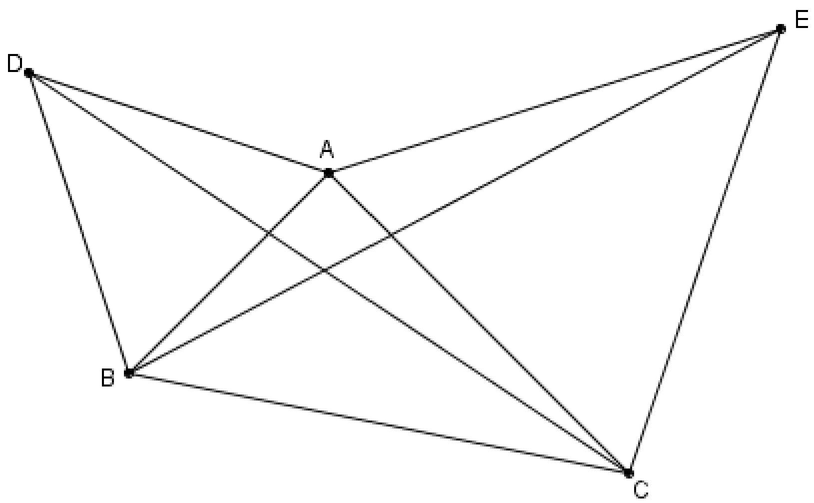
نجمع المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $AB^2+AD^2+2\times AB\times AD=65+60=125$

ومنه : $(AB+AD)^2=125$

أي : $AB+AD=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

وبالتالي : $P=2\times(AB+AD)=2\times 5\sqrt{5}=10\sqrt{5}cm$

تمرين 4



لدينا : $B\hat{A}E=B\hat{A}C+C\hat{A}E=B\hat{A}C+60^\circ$ ($C\hat{A}E=60^\circ$ لأن المثلث ACE متساوي الأضلاع)

و $C\hat{A}D=C\hat{A}B+B\hat{A}D=C\hat{A}B+60^\circ$ ($B\hat{A}D=60^\circ$ لأن المثلث BAD متساوي الأضلاع)

إذن : $B\hat{A}E=C\hat{A}D$

بما أن : $\begin{cases} B\hat{A}E=C\hat{A}D \\ AE=AC \\ AB=AD \end{cases}$ فإن : المثلثان BAE و CAD متقايسان

وبالتالي : $DC=BE$

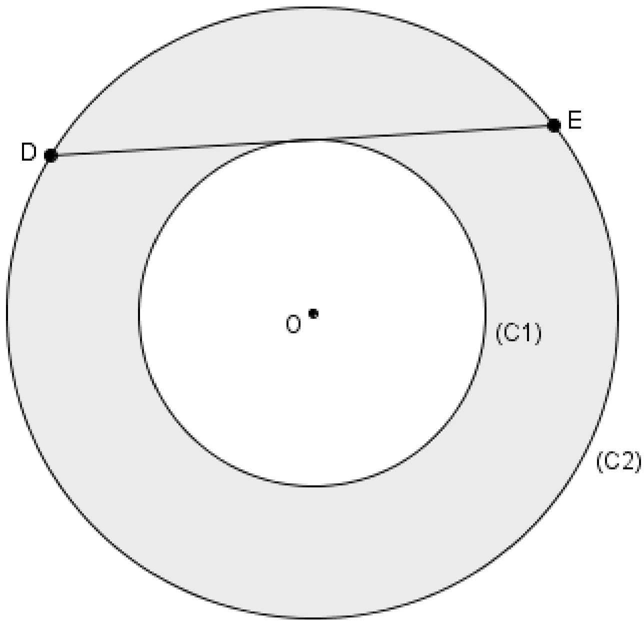
أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1

نعتبرالشكل جانبه بحيث :

النقطة O هي مركز مشترك للدائرة (C_1) التي شعاعها r والدائرة (C_2) التي شعاعها R . (DE) هو مماس للدائرة (C_1) و $DE = 7cm$

احسب S مساحة المنطقة المضللة



تمرين 2

x و y عددين حقيقيين بحيث : $x+y=1$

بين أن : $xy \leq \frac{1}{4}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1- بين أن : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)} \leq xy$

2- استنتج أن : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)} \leq \frac{xy+yz+xz}{2}$

تمرين 4

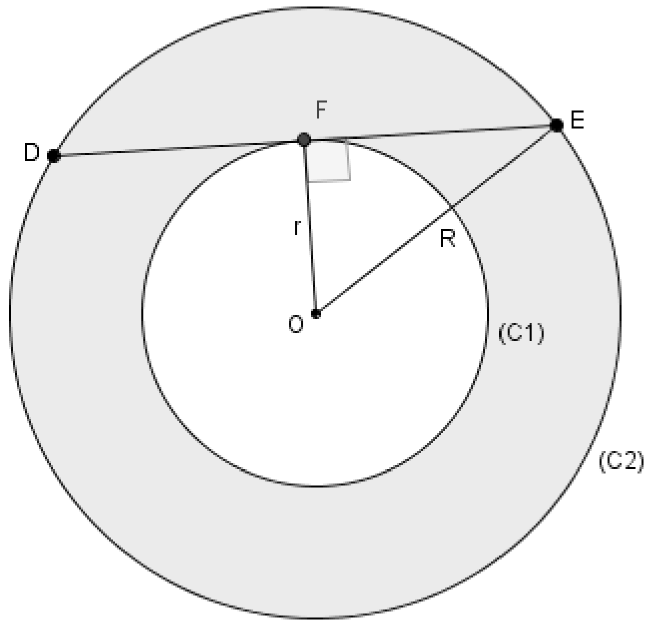
1- a عدد حقيقي موجب قطعا بحيث : $a+\frac{1}{a}=2$

احسب $a^2+\frac{1}{a^2}$ و $a^3+\frac{1}{a^3}$ و $a^6+\frac{1}{a^6}$ و $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$

2- بين أن : $555555^2-333333^2=444444$

حل أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1



لدينا (DE) هو مماس للدائرة (C_1) في النقطة F

إذن $(OF)\perp(DE)$

بما أن $(OF)\perp(DE)$ و $OE=OD=R$ فإن (OF) واسط القطعة $[DE]$

ومنه : $FD=FE=\dfrac{DE}{2}=\dfrac{7}{2}=3cm$

لدينا المثلث OFE قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $OE^2=OF^2+FE^2$

أي : $R^2=r^2+3,5^2$

أي : $R^2-r^2=12.25cm$ (1)

مساحة المنطقة المضللة (S) = مساحة الدائرة (C_2) − مساحة الدائرة (C_1)

$$\boxed{S=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)}$$

من 1 و 2 نستنتج أن : $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=3,14\times 12,25=38,465cm^2$

تمرين 2

لدينا : $x+y=1$ يعني : $(x+y)^2=1^2$ يعني : $x^2+2xy+y^2=1$

يعني : $x^2+2xy+y^2-4xy=1-4xy$ يعني : $x^2-2xy+y^2=1-4xy$ يعني : $(x-y)^2=1-4xy$

(نعلم أن : $(x-y)^2\geq 0$)

يعني : $1-4xy\geq 0$ يعني : $1\geq 4xy$ إذن : $xy\leq\frac{1}{4}$

تمرين 3

لدينا : $\left(\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\right)^2\geq 0$

يعني : $(x^2-1)(y^2-1)+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\geq 0$

يعني : $x^2y^2-x^2-y^2+1+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\geq 0$

يعني : $x^2-1+y^2-1+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\leq x^2y^2$

يعني : $\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\right)^2\leq x^2y^2$ يعني : $\sqrt{\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\right)^2}\leq\sqrt{x^2y^2}$

إذن : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\leq xy$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\leq xy$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq yz$ (2)

و $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq xz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}+\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq xy+yz+xz$$

أي : $2\sqrt{(x^2-1)}+2\sqrt{(y^2-1)}+2\sqrt{(z^2-1)}\leq xy+yz+xz$

أي : $\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\right)\leq\frac{1}{2}\times(xy+yz+xz)$

وبالتالي : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq\frac{xy+yz+xz}{2}$

تمرين 4

-1

حساب $a^2+\frac{1}{a^2}$

لدينا : $a+\frac{1}{a}=2$

يعني : $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=2^2$

يعني : $a^2+2\times a\times\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=4$

يعني : $a^2+2+\frac{1}{a^2}=4$

إذن : $a^2+\frac{1}{a^2}=2$

– حساب $a^3+\frac{1}{a^3}$

لدينا : $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\times2$

يعني : $a\times a^2+a\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\times a^2+\frac{1}{a}\times\frac{1}{a^2}=4$

يعني : $a^3+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a^3}=4$

يعني : $a^3+2+\frac{1}{a^3}=4$

إذن : $a^3+\frac{1}{a^3}=2$

– حساب $a^6+\frac{1}{a^6}$

لدينا : $a^2+\frac{1}{a^2}=2$

يعني : $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=2^2$

يعني : $\left(a^2\right)^2+2\times a^2\times\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2=4$

يعني : $a^4+2+\frac{1}{a^4}=4$

إذن : $a^4+\frac{1}{a^4}=2$

لدينا : $\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\times2$

يعني : $a^4\times a^2+a^4\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}\times a^2+\frac{1}{a^4}\times\frac{1}{a^2}=4$

يعني : $a^6+\frac{1}{a^2}+a^2+\frac{1}{a^6}=4$

يعني : $a^6+2+\frac{1}{a^6}=4$

إذن : $a^6+\frac{1}{a^6}=2$

– حساب $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$

لدينا :

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\times\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$
$$=a+2+\frac{1}{a}$$
$$=2+2$$
$$=4$$

إذن : $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=2$

–2

$$555555^2-333333^2=(111111\times5)^2-(111111\times3)^2=111111^2\times5^2-111111^2\times3^2$$
$$=111111^2\times\left(5^2-3^2\right)$$
$$=111111^2\times(25-9)$$
$$=111111^2\times16$$
$$=111111^2\times4^2$$
$$=(111111\times4)^2=444444^2$$