البرامـــــج الإحصائيــــة/2/

/السنة الرابعة-إحصاء رياضي/

المحاضرة الرابعة والخامسة

المصفـــوفات

THE MATRIXES

الدكتورة: فاطمة عبد الرحمن شلاف

للعام الدراسي 2020-2019

المصفوفات Matrixes

لدينا الشكل العام لأي مصفوفة ثنائية:

$$A_{n\times p}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{np} \end{bmatrix}$$

يشـــار الى العنصـــر الأول بالمصـــفوفة الثنائية في لغة R بالرمز a [1,1] وهذا العنصر موجود في الزاوية العليا اليسرى من المصفوفة.

١. التعليمات الأساسية في تعريف المصفوفة:

a) الشكل العام لإنشاء المصفوفة:

```
matrix(c(elements), nrow = n, ncol = m, byrow = FALSE,
dimnames = NULL)
```

مثال 1:

```
Y<-matrix(c(1,2,3,4),nrow=2,ncol=2)
>y
      [,1]   [,2]
[1,]   1      3
[2,]   2      4
```

b) من أجل تسمية الأسطر والأعمدة في المصفوفة ندخل أسماء الأسطر والأعمدة ضمن dimnames كما يلي:

```
matrix(c(1,2,3,4,5,6,4,5,3,2,6,1,2,2,3,2), nrow = 4, ncol = 4,
byrow = FALSE,dimnames = list(c("row1", "row2","row3",
"row4"), c("C.1", "C.2", "C.3","C.4")))
```

فينتج لدينا المصفوفة بالشكل التالي:

```
      C.1 C.2  C.3 C.4
row1   1    5    3    2
row2   2    6    2    2
row3   3    4    6    3
row4   4    5    1    2
```

c) يتم ترتيب العناصر عمودا عمودا، عند وضع byrow = FALSE أو عند عدم ذكرها ويمكن اهمال عدد الأسطر أو عدد الأعمدة.

مثلاً:

```
Y<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2)
```

سوف تعطي أيضاً:

```
      [,1]   [,2]
[1,]    1      3
[2,]    2      4
```

ونفس النتيجة سوف نحصل عليها لو كتبنا:

```
Y<-matrix(c(1,2,3,4),nrow=2)
```

----

d) إذا أهملنا عدد الأسطر والأعمدة فسوف يضعها الحاسب في عمود واحد فقط

```
z<-matrix(c(1,2,3,4))
>z
      [,1]
[1,]    1
[2,]    2
[3,]    3
[4,]    4
```

----

e) يمكن تعبئة العناصر سطراً سطراً من خلال وضع byrow = TRUE.

مثال2:

```
matrix(c(1,2,3,4,5,6,4,5,3,2,6,1,2,2,3,2), nrow = 4, ncol = 4, byrow =
TRUE,dimnames = list(c("row1", "row2","row3", "row4"), c("C.1",
"C.2", "C.3","C.4")))
      C.1  C.2  C.3  C.4
row1   1    2    3    4
row2   5    6    4    5
row3   3    2    6    1
row4   2    2    3    2
```

f) يمكننا عرض أي عمود أو سطر في المصفوفة بسهولة.

عرض العمود الثاني من المصفوفة y

```
>y[,2]
[1]   3    4
```

عرض السطر الأول من نفس المصفوفة:

```
>y[1,]
[1]     1        3
```
----

g) يمكن الإعلان عن المصفوفة أولاً ثم تعبئة عناصر المصفوفة.

✓ الشكل العام:

```
Matrix(nrow=n,ncol=m)
```

✓ الإعلان عن مصفوفة ثنائية البعد بسطرين وعمودين:

```
X<-matrix(nrow=2,ncol=2)
```
ستبقى المصفوفة فارغة

```
>x
        [,1]     [,2]
 [1,]   na       na
 [2,]   na       na
```

✓ ملئ المصفوفة بالعناصر

```
>y[1,1]=1
Y[2,1]=2
Y[1,2]=3
Y[2,2]=4
```

```
>x
        [,1]     [,2]
 [1,]   1        3
 [2,]   2        4
```

مثال3

مثال يعبر عن طريقة ثانية لترتيب العناصر سطراً سطراً

```
Y<-matrix(c(1,2,3,4,5,6) ,nrow=2,byrow=1)
```
أي رتب العناصر بالأسطر وليس الأعمدة.

النتيجة:

```
>y
          [,1]      [,2]      [,3]
 [1,]     1         2         3
 [2,]     4         5         6
```

٢. العمليات على المصفوفات General matrixes operations

a) ضرب مصفوفتين

لتكن لدينا المصفوفة التالية:

```
>y
        [,1]    [,2]
 [1,]   1       3
 [2,]   2       4
```

تضــرب كما في ضــرب y%*%yإن حاصــل ضــرب المصــفوفة بنفســها أي المصــفوفات في الجبر الســطر الأول بالعمود الأول يعطي العنصـــر الأول في المصفوفة الجديدة، وهكذا

```
>y%*%y
                [,1]    [,2]
 [1,]           7       15
 [2,]           10      22
```

في حين أن:

```
>y ^2
                [,1]    [,2]
 [1,]           49      225
 [2,]           100     484
```

b) ضرب المصفوفة بعدد:

يتم بضرب كل عنصر في المصفوفة بالعدد.

```
>3*y
        [,1]    [,2]
 [1,]   3       9
 [2,]   6       12
```

----

c) جمع مصفوفتين:

```
>y+y
```

	[,1]	[,2]
[1,]	2	6
[2,]	4	8

حيث يتم جمع العناصر المتناظرة كل عنصر من المصفوفة الأولى الى العنصر المناظر له من المصفوفة الثانية.

d) عرض أسطر أو أعمدة محددة في مصفوفة:

مثال4

إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

>y

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	1	1
[2,]	2	1	0
[3,]	3	0	1
[4,]	4	0	0

وأردنا استخراج العمودين الأخيرين من المصفوفة فإننا نكتب:

>y[,2:3]

	[,1]	[,2]
[1,]	1	1
[2,]	1	0
[3,]	0	1
[4,]	0	0

بنفس الطريقة يمكننا استخراج أسطر أخرى وأعمدة.

لتكن لدينا المصفوفة التالية:

>y

	[,1]	[,2]
[1,]	11	12
[2,]	21	22
[3,]	31	32

استخرج السطرين الثاني والثالث من المصفوفة السابقة.

>y[2:3,]

	[,1]	[,2]
[1,]	21	22
[2,]	31	32

استخرج السطرين الثاني والثالث من المصفوفة السابقة الموافق للعمود الثاني فقط.

```
>y[2:3,2]
[1]    22    32
```

ملاحظة: يمكننا ادخال قيم الى مصفوفة موجودة مسبقاً على شكل مصفوفة جزئية
لتكن لدينا:

```
>y
        [,1]    [,2]
 [1,]    1       4
 [2,]    2       5
 [3,]    3       6
```

```
>y[c(1,3),]<-matrix(c(1,1,8,12),nrow=2)
```

وهذه تعني أدخل مصفوفة تتألف من العناصر 1,1,8,12 الى المصفوفة السابقة لتحل محل سطريها الأول والثالث.

```
>y
        [,1]    [,2]
 [1,]    1       8
 [2,]    2       5
 [3,]    1      12
```

مثال5

احجز مصفوفة من ثلاث أسطر وثلاث أعمدة وأتركها فارغة.

```
>x<-matrix(nrow=3,ncol=3)
```

مثال6

أدخل الأرقام التالية 4,5,2,3 في مصفوفة ثنائية بسطرين وعمودين وبحيث يتم الادخال عمود عمود.

```
>x<-matrix(c(4,5,2,3),ncol=2)
>x
        [,1]    [,2]
 [1,]    4       2
 [2,]    5       3
```

ضع محتويات المصفوفة x في مصفوفة y ثلاث أسطر وثلاث أعمدة بدءً من السطر الثاني والعمود الثاني.

```
>y[2:3,2:3]<-x
>y
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	NA	NA	NA
[2,]	NA	4	2
[3,]	NA	5	3

حذف السطر الثاني من المصفوفة السابقة.

>y[-2,]

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	NA	NA	NA
[2,]	NA	5	3

حذف العمود الثاني من المصفوفة السابقة.

>y[,-2]

	[,1]	[,2]
[1,]	NA	NA
[2,]	NA	2
[3,]	NA	3

ملاحظة: يجب التفريق بين ضرب المصفوفات العددي والضرب الجبري.

مثال7

اذا كان لدينا المصفوفة:

>y

	[,1]	[,2]
[1,]	1	3
[2,]	2	4

فإن: >y*y ستعطي:

	[,1]	[,2]
[1,]	1	9
[2,]	4	16

أما >y% * %y ستعطي:

	[,1]	[,2]
[1,]	7	13
[2,]	10	22

٣. الفلترة على المصفوفات Matrix Filtering

مثال: إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

```
X<-matrix(c(1,2,3,2,3,4),ncol=2)
>x
        [,1]    [,2]
 [1,]    1       2
 [2,]    2       3
 [3,]    3       4
```

والمطلوب: أكتب العناصر من المصفوفة السابقة والتي تحقق عناصر عمودها الثاني أكبر أو تساوي ثلاثة.

```
>x[x[,2]>=3,]
        [,1]    [,2]
 [1,]    2       3
 [2,]    3       4
```

```
>x[x[,2]>3,]
        [,1]    [,2]
 [1,]    3       4
```

أما لوكتبنا j<-x[,2]>=3 وهو اختبار هل عناصر العمود الثاني من المصفوفة السابقة هم أكبر أو تساوي ثلاثة. النتيجة ستكون:

```
>j
[1]    false    true    true
```

إذا كان لدينا المصفوفة:

```
>y
        [,1]    [,2]
 [1,]    1       4
 [2,]    2       5
 [3,]    3       6
```

وكان لدينا الشعاع z<-c(5,12,13) وأردنا استخراج الأسطر من المصفوفة السابقة بالاعتماد على كون أحد عناصر z فردي سنكتب:

```
>y[z%%2==1,]
        [,1]    [,2]
 [1,]    1       4
 [2,]    3       6
```

لاحظ العنصر الأول من z فردي لذلك سنستخرج السطر الأول من المصفوفة y بينما العنصر الثاني زوجي لذلك لن نستخرج السطر الثاني وكذلك نجد أن العنصر الثالث فردي لذلك نستخرج السطر الثالث، وعليه تم استخراج السطر الأول والثالث.

لوكتبنا:

```
>y[y[,1]>1 & y[,2]>=5,]
```

سنحصل على:

```
        [,1]    [,2]
 [1,]   2       5
 [2,]   3       6
```

---

٤. اختيار عناصر من مصفوفة حسب قيمها العددية

إذا كان لدينا المصفوفة:

```
>m
        [,1]    [,2]
 [1,]   5       1
 [2,]   2       10
 [3,]   6       11
```

وكتبنا:

```
>which(m>2)
```

سوف نحصل على:

```
[1]  1  3  5  6
```

وهذا يعني أن العناصر الأول والثالث والخامس والسادس من المصفوفة السابقة تحقق الشرط السابق(طبعا عملية العد تتم وفق العمود وليس السطر)

٥. تطبيق التابع Apply على المصفوفات

الشكل العام للتابع:

```
Apply(m,dimcode,f,frags)
```

حيث أن:

M – المصفوفة

Dimcode – متحول يأخذ القيمة 1 اذاطبق على الاسطر ويأخذ القيمة 2 اذا طبق على الاعمدة

F – التابع الذي نريد تطبيقه ويمكن أن يكون تابع داخلي أو تابع مشكل من قبل المبرمج

Frags –خيارات يمكن الحاقها بالتابع

مثال8

لدينا المصفوفة:

```
>z
        [,1]    [,2]
 [1,]   1       4
 [2,]   2       5
 [3,]   3       6
```

والمطلوب :حساب متوسطات الأعمدة باستخدام التابع Apply .

```
>apply(z,2,mean)
[1]   2    5
```

```
>apply(z,1,mean)
[1]   2.5   3.5   4.5
```

ملاحظة: يمكن تشكيل تابع (سيتم شرحه في المحاضرات القادمة) وتطبيق apply عليه

مثال9

```
F<-function
{
x/c(2,8)
}
```

```
>y<-apply(z,1,f)
>y
        [,1]    [,2]     [,3]
 [1,]   0.5     1        1.5
 [2,]   0.5     0.625    0.75
```

وفيه تم تقسـيم المصـفوفة z كل سـطر على العنصـرين 2 و 8 على الترتيب العنصر الأول على 2 والعنصر الثاني على 8.

وبما أن التطبيق كان على الأسطر فإن النتيجة سوف تخزن في المصفوفة أسطراً.

وكان بالامكان ايجاد منقول المصفوفة مباشرة.

```
>t(apply(z,1,f))
        [,1]    [,2]
 [1,]   0.5     0.5
 [2,]   1       0.625
 [3,]   1.5     0.75
```

لنشـــكل تابعاً أكثر تعقيدا بعض الشــــيء والذي ســـوف نطبقه على مصـــفوفة كل عناصـرها أصـفار أو واحد، فإذا وجد التابع أن أغلب k عنصـر هي واحدات يعيد واحد واذا وجد أن أغلب k عنصر أصفار سوف يعيد صفراً.

```
F<-function(rw,k)
{
maj<-sum(rw[1:k])/k
return(if (maj>0.5) 1 else 0)
}
```

```
>x
       [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]
 [1,]   1     0     1     1     0
 [2,]   1     1     1     1     0
 [3,]   1     0     0     1     1
 [4,]   0     1     1     1     0
```

```
>apply(x,1,F,3)
[1]   1   1   0   1
```

وهذا يعني طبق التابع السابق على أول ثلاث عناصر من كل سطر في المصـفوفة x فإذا كانت أغلب الثلاث عناصـر واحدات أرجع واحد والعكس أرجع صفر.

ننظر للسـطر الأول نجد أن أول ثلاث عناصـر فيها رقمان 1 ورقم 0 فالغالبية 1 لذلك أعاد التابع القيمة 1 ونفس الكلام في السـطر الثاني لذلك أعاد 1 أيضـا، بينما في السطر الثالث نجد أن هناك رقمان 0 ورقم 1 لذلك أعاد ٠.

أما اذا كتبنا

```
>apply(x,1,f,2)
```

سنحصل على:

```
[1]     0  1   0   0
```

----

٦. اضافة مصفوفة الى مصفوفة:

اذا كانت لدينا المصفوفة:

```
>x
[1]     1  1   1   1
```

والمصفوفة:

```
>z
       [,1]  [,2]  [,3]
```

```
 [1,]    1    1    1
 [2,]    2    1    0
 [3,]    3    0    1
 [4,]    4    0    0
```

المطلوب: أضافة المصفوفة x الى المصفوفة z واعتبار X عمود.

```
>cbind(x,z)
        [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
 [1,]    1     1     0     1
 [2,]    1     1     1     1
 [3,]    1     1     0     0
 [4,]    1     0     1     1
```

أما لو كتبنا:

```
Z<-cbind(x,z)
```

فإن النتيجة ستخزن في المصفوفة z
ويمكن الحصول على نفس النتيجة لو كتبنا:

```
Z<-cbind(1,z)
```

ملاحظة: يمكن تشكيل مصفوفة من شعاعين

```
m<-cbind(c(1,2),c(3,4))
>m
        [,1]  [,2]
 [1,]    1     3
 [2,]    2     4
```

ملاحظة: يمكن حذف سطر أو عمود من المصفوفة عن طريق اعادة تشكيلها.

```
m<-matrix(1:6,nrow=3)
        [,1]  [,2]
 [1,]    1     4
 [2,]    2     5
 [3,]    3     6
```

حذف السطر الثاني من المصفوفة السابقة

```
m<-m[c(1,3),]
```

النتيجة:

```
>m
        [,1]  [,2]
```

```
[1,]    1      4
[2,]    3      6
```
----

٧. أشياء أخرى عن المصفوفات:

A. منقول مصفوفة

يعطى منقول مصفوفة بالقانون التالي:

```
t(matrix)
```

مثال10

لتكن لدينا المصفوفة التالية:

```
>y<-matrix(1:9,ncol=3)
> y
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

```
> t(y)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
[3,]    7    8    9
```

B. معين مصفوفة

يعطى من العلاقة :

```
det(matrix)
```

لدينا المصفوفة التالية:

```
> x<-matrix(c(5,6,4,2),ncol=2)
> x
     [,1] [,2]
[1,]    5    4
[2,]    6    2
```

```
> det(x)
[1] -14
```

C. مقلوب مصفوفة

يعطى مقلوب مصفوفة بمساعدة التعليمة: solve(matrix)

لدينا المصفوفة التالية:

```
> x<-matrix(c(5,6,4,2),ncol=2)
> x
     [,1] [,2]
[1,]    5    4
[2,]    6    2
```

```
> solve(x)
           [,1]       [,2]
[1,] -0.1428571  0.2857143
[2,]  0.4285714 -0.3571429
```

ولكن في لغة R تكون النتيجة منقول مقلوب المصـــفوفة لذلك نعيد المصـــفوفة الى وضعها الطبيعي:

```
> t(solve(x))
           [,1]       [,2]
[1,] -0.1428571  0.4285714
[2,]  0.2857143 -0.3571429
```

D. اذا كانت لدينا المصفوفة:

```
>z
      [,1]   [,2]
 [1,]    1      5
 [2,]    2      6
 [3,]    3      7
 [4,]    4      8
```

لمعرفة طبيعة z نكتب:

```
>class(z)
[1]      "matrix"
```

ولمعرفة صفاتها نكتب:

```
>attributes(z)
$dim
[1]      4   2
```

أي أنها مصفوفة وتتألف من أربع أسطر وعمودين.

يمكننا الحصول على أبعاد المصفوفة السابقة لوكتبنا:

```
>dim(z)
[1]      4  2
```

لمعرفة عدد أسطر المصفوفة نكتب:

```
>nrow(z)
[1]      4
```

لمعرفة عدد الأعمدة نكتب:

```
>ncol(z)
[1]      2
```

----

٨. التعامل مع أسطر المصفوفة وأعمدتها

a. إذا أردنا أن نحفظ السطر الثاني من المصفوفة السابقة z في متحول r نكتب:

```
>r<-z[2,]
```

النتيجة:

```
>r
[1]      2  6
```

وضع العمود الأول من المصفوفة فيr

```
r<-z[,1]
>r
[1]      1  2     3     4
```

ملاحظة: هنا r شعاع وليس مصفوفة.
وللتأكد نكتب:

```
>attributes(z)
$dim
[1]      4        2
```

```
>attributes(r)
Null
```

----

b. التابع str

يستخدم التابع المذكور لإعطاء وصف كامل للمصفوفة.

```
>str(z)
```

```
Int[1:4,1:2] 1,2,3,4,5,6,7,8
```

وهذا يعني أن المصفوفة z تحوي أربع أسطر وعمودين وقيمها كما هو مبين أعلاه.

```
>str(r)
Int[1:2]    2    6
```

أما اذا اردنا أن يكون r مصفوفة نكتب:

```
r<-z[2,,drop=false]
```

النتيجة:

```
>r
            [,1]       [,2]
 [1,]       2          6
```

والتعليمة السابقة تعني أحذف جميع الأسطر من المصفوفة z باستثناء السطر الثاني.

ملاحظة: يمكننا الحصول على أي عنصر في المصفوفة بكتابة اسم المصفوفة ورقم السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر.

```
>z[3,2]
[1]          7
```

```
>z[1,1]
[1]          1
```

يمكن الحصول بطريقة أخرى على العناصر السابقة :

```
>"["(z,3,2)
[1]          7
```

تحويل الشعاع الى مصفوفة:

```
>u
[1]          1    2         3
```

```
V<-as.matrix(u)
>attributes(u)
Null
```

```
>attributes(v)
$dim
```

```
[1] 3        1
```
----

c. تسمية الأسطر والأعمدة في المصفوفة:

اذا كانت لدينا المصفوفة:

```
>z
          [,1]      [,2]
 [1,]     1         3
 [2,]     2         4
```

```
>colnames(z)
Null
```

أي لا توجد أسماء للأعمدة.

إذا أردنا تسمية العمود الأول x1 والعمود الثاني x2 نكتب:

```
>colnames(z)<-c("x1","x2")
```

```
>z
          X1        X2
 [1,]     1         3
 [2,]     2         4
```

```
>colnames(z)
[1]        "x1"          "x2"
```

ملاحظة : يمكن التعامل مع أسماء الأعمدة والأسطر كما التعامل مع أرقامها.

```
>z[,"x1"]
[1]        1    2
```

وبنفس الطريقة يمكن التعامل مع الأسطر.

```
>rownames(z)<-c("a,"b")
```

```
>z
          X1        X2
 a        1         5
 b        2         6
```
----

٩. المصفوفات من درجة أعلى Arrays

لنعرض ذلك من خلال المثال التالي:

لدينا ثلاثة طلاب كل منهما قدم مقررين في الفصل الأول وكانت النتائج مخزنة في المصفوفة X1 كمايلي، حيث أن السطر يمثل الطالب والعمود يمثل المقرر

```
>x1
        [,1]    [,2]
 [1,]   46      30
 [2,]   21      25
 [3,]   50      50
```

ونفس الطلاب أعادو جميع الاختبارات في الفصل الثاني وخزنت النتائج في المصفوفة x2

```
>x2
        [,1]    [,2]
 [1,]   46      43
 [2,]   41      35
 [3,]   50      50
```

إذا أردنا أن نضع علامات الطلاب في مصفوفة واحدة ذات ثلاثة أبعاد array نسميها tests

```
>tests<-array(data=c(x1,x2),dim(3,2,2))
```

أي مصفوفة حجمها 3x2 ومكررة مرتين

```
>attributes(tests)
$dim
[1]     3   2     2
>tests
, , 1
        [,1]    [,2]
 [1,]   46      30
 [2,]   21      25
 [3,]   50      50
, , 2
        [,1]    [,2]
 [1,]   46      43
 [2,]   41      35
 [3,]   50      50
```

إذا أردنا علامة الطالب الثاني في المقرر الثاني في الفصل الأول نكتب:

```
>tests[2,2,1]
[1]     25
```

```
>tests[3,2,1]
[1]          50
```

```
>test[2,1,2]
[1]          41
```

وهكذا:

----

١٠. حل جملة معادلات في R

يكون الشكل العام لجملة المعادلات كمايلي:

AX=B

مثال11

حل جملة المعادلات التالية:

X1+2x2=1
3x1+x2=0

ندخل مصفوفة الأمثال A

```
> a<-matrix(c(1,3,2,1),ncol=2)
> a
    [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    1
```

ندخل المصفوفة B

```
> b<-matrix(c(1,0),nrow=2)
> b
    [,1]
[1,]    1
[2,]    0
```

نوجد الحل:

```
> solve(a,b)
    [,1]
[1,] -0.2
[2,]  0.6
```

أي أن:

X1=-0.2 x2=0.6

استخدام تعليمات من لغة R من أجل تسهيل إيجاد الحلول في المثال التطبيقي:

ليكن لدينا جدول المعطيات التالي:

جدول(٣): جدول يظهر لنا أربع متغيرات لخمس أشخاص من مجتمع ما

ساعات النوم	سنوات التعلم	الوزن	العمر
8	14	44	19
7	15	45	20
6	16	58	21
8	15	46	20
7	16	50	25

والمطلوب:

١- أوجد التوقع الرياضـــي ومصـــفوفة التباين ومصـــفوفة الارتباط والجدول المعياري لمصفوفة المعطيات.

وذلك في حالة الأوزان متساوية وفي حالة الأوزان غير متساوية:

الحل:

أولاً:في حالة الأوزان متساوية:

لدينا مصفوفة المعطيات بالشكل التالي:

$$X=\begin{bmatrix}19&44&14&8\\20&45&15&7\\21&58&16&6\\20&46&15&8\\25&50&16&7\end{bmatrix}$$

يعني علينا إدخال المصفوفة في لغة R بما أن R يدخل المصفوفة عموداً عموداً لذا ستكون تعليمة الإدخال:

```
x<-
matrix(c(19,20,21,20,25,44,45,58,46,50,14,15,16,15,16,8,7,6,
8,7), nrow=5,ncol=4)
```

مصفوفة الأثقال تكون بالشكل التالي:

$$D=\begin{bmatrix}1/5&0&0&0&0\\0&1/5&0&0&0\\0&0&1/5&0&0\\0&0&0&1/5&0\\0&0&0&0&1/5\end{bmatrix}=\frac{1}{5}*I_5$$

لنحسب مركز الثقل:

$$g_{p\times1}=X'_{p\times n}.D_{n\times n}.1_{n\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}19&20&21&20&25\\44&45&58&46&50\\14&15&16&15&16\\8&7&6&8&7\end{bmatrix}\frac{1}{5}*I_5*\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{19}{5} & \frac{20}{5} & \frac{21}{5} & \frac{20}{5} & \frac{25}{5}\\ \frac{44}{5} & \frac{45}{5} & \frac{58}{5} & \frac{46}{5} & \frac{50}{5}\\ \frac{14}{5} & \frac{15}{5} & \frac{16}{5} & \frac{15}{5} & \frac{16}{5}\\ \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & \frac{7}{5}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21\\48.6\\15.2\\7.2\end{bmatrix}_{4\times 1}$$

```
o<-matrix(c(1,1,1,1,1),nrow=5)

g1<-(1/5)*t(x)%*%o

> g1

     [,1]

[1,] 21.0

[2,] 48.6

[3,] 15.2

[4,]  7.2
```

لنحسب التوقع الرياضي لجدول المعطيات:

$$E(X) = 1_{n\times 1}.g'_{1\times p} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} * [21 \quad 48.6 \quad 15.2 \quad 7.2]$$

$$= \begin{bmatrix}21 & 48.6 & 15.2 & 7.2\\21 & 48.6 & 15.2 & 7.2\\21 & 48.6 & 15.2 & 7.2\\21 & 48.6 & 15.2 & 7.2\\21 & 48.6 & 15.2 & 7.2\end{bmatrix}$$

```
E<-o%*%t(g1)

> E

     [,1] [,2] [,3] [,4]

[1,]   21 48.6 15.2  7.2

[2,]   21 48.6 15.2  7.2

[3,]   21 48.6 15.2  7.2

[4,]   21 48.6 15.2  7.2

[5,]   21 48.6 15.2  7.2
```

لنحسب الجدول المركزي:

$$Y = X - E(X) = \begin{bmatrix}-2 & -4.6 & -1.2 & 0.8\\-1 & -3.6 & -0.2 & -0.2\\0 & 9.4 & 0.8 & -1.2\\-1 & -2.6 & -0.2 & 0.8\\4 & 1.4 & 0.8 & -0.2\end{bmatrix}$$

```
>y=x-E
```

```
> y
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,]   -2  -4.6  -1.2   0.8
[2,]   -1  -3.6  -0.2  -0.2
[3,]    0   9.4   0.8  -1.2
[4,]   -1  -2.6  -0.2   0.8
[5,]    4   1.4   0.8  -0.2
```

لنحسب مصفوفة التباين:

$$\Sigma = X'DX - gg' = \frac{1}{5}X'X - gg'$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 445.4 & 1024.8 & 320.4 & 150.6 \\ 1024.8 & 2388.2 & 741.8 & 346.6 \\ 320.4 & 741.8 & 231.6 & 109 \\ 150.6 & 346.6 & 109 & 52.4 \end{bmatrix} - gg'$$

$$= \begin{bmatrix} 4.4 & 4.2 & 1.2 & -0.6 \\ 4.2 & 26.24 & 3.08 & -3.32 \\ 1.2 & 3.08 & 0.56 & -0.44 \\ -0.6 & -3.32 & -0.44 & 0.56 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

```
sigma1<-(1/5)*t(x)%*%x-g1%*%t(g1)
> sigma1
      [,1]  [,2]   [,3]   [,4]
```

```
[1,]  4.4  4.20  1.20 −0.60
[2,]  4.2 26.24  3.08 −3.32
[3,]  1.2  3.08  0.56 −0.44
[4,] −0.6 −3.32 −0.44  0.56
```

$$V=\begin{bmatrix}4.4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 26.24 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.56 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.56\end{bmatrix}\Longrightarrow V^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{110}}{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{26.24}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{14}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{14}}\end{bmatrix}$$

```
V<−sigma1
> for(i in 1:4)
+  for(j in 1:4)
+  {
+  if(i<j)
+  {
+  V[i,j]<−0}
```

```
+  if(i>j)
+  {
+  V[i,j]<-0}
+ }
>  V
      [,1]   [,2]  [,3]  [,4]
[1,]  4.4   0.00 0.00 0.00
[2,]  0.0 26.24 0.00 0.00
[3,]  0.0   0.00 0.56 0.00
[4,]  0.0   0.00 0.00 0.56
sqV<-V
> sqV[1,1]=V[1,1]^-0.5
>  sqV[2,2]=V[2,2]^-0.5
> sqV[3,3]=V[3,3]^-0.5
>  sqV[4,4]=V[4,4]^-0.5
> sqV
            [,1]         [,2]          [,3]            [,4]
```

[1,] 0.4767313 0.0000000 0.000000 0.000000

[2,] 0.0000000 0.1952172 0.000000 0.000000

[3,] 0.0000000 0.0000000 1.336306 0.000000

[4,] 0.0000000 0.0000000 0.000000 1.336306

لنحسب مصفوفة الارتباط:

$$\rho_{4\times4} = V^{-\frac{1}{2}}\Sigma V^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\rho_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0.39 & 0.76 & -0.38 \\ 0.39 & 1 & 0.80 & -0.87 \\ 0.76 & 0.80 & 1 & -0.78 \\ -0.38 & -0.87 & -0.78 & 1 \end{bmatrix}$$

```
ro<-sqV%*%sigma1%*%sqV

> ro

            [,1]        [,2]        [,3]        [,4]

[1,]  1.0000000  0.3908778  0.7644708 -0.3822354

[2,]  0.3908778  1.0000000  0.8034795 -0.8660883

[3,]  0.7644708  0.8034795  1.0000000 -0.7857143

[4,] -0.3822354 -0.8660883 -0.7857143  1.0000000
```

لنحسب الجدول المعياري:

$$Z = YV^{\frac{-1}{2}} = \begin{bmatrix} -0.95 & -0.89 & -1.6 & 1.7 \\ -0.47 & -0.70 & -0.27 & -0.27 \\ 0 & 1.83 & 1.07 & -1.7 \\ -0.47 & -0.51 & -0.27 & 1.7 \\ 1.91 & 0.27 & 1.7 & -0.27 \end{bmatrix}$$

```
> y%*%sqV
      [,1]       [,2]       [,3]       [,4]
[1,] -0.9534626 -0.8979991 -1.6035675  1.0690450
[2,] -0.4767313 -0.7027819 -0.2672612 -0.2672612
[3,]  0.0000000  1.8350417  1.0690450 -1.6035675
[4,] -0.4767313 -0.5075647 -0.2672612  1.0690450
[5,]  1.9069252  0.2733041  1.0690450 -0.2672612
```

ثانياً: في حال الأثقال غير متساوية:

مصفوفة الأوزان هنا هي:

$$D = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

فقط نعرف في لغة R المصفوفة D

```
D<-matrix(
c(1/10,0,0,0,0,0,1/5,0,0,0,0,0,3/10,0,0,0,0,0,3/10,0,0,0,0,0,1/
10),  nrow=5,ncol=5,byrow=TRUE)

>D

      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]
[1,]  0.1  0.0  0.0  0.0  0.0
[2,]  0.0  0.2  0.0  0.0  0.0
[3,]  0.0  0.0  0.3  0.0  0.0
[4,]  0.0  0.0  0.0  0.3  0.0
[5,]  0.0  0.0  0.0  0.0  0.1
```

لنحسب مركز الثقل:

$$g_{p\times 1} = X'_{p\times n}.D_{n\times n}.1_{n\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 20 & 21 & 20 & 25 \\ 44 & 45 & 58 & 46 & 50 \\ 14 & 15 & 16 & 15 & 16 \\ 8 & 7 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20.7 \\ 49.6 \\ 15.3 \\ 7.1 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

```
g2=t(x)%*%D%*%o

> g2

     [,1]

[1,] 20.7

[2,] 49.6

[3,] 15.3

[4,]  7.1
```

ونكمل باقي التعليمات كما سبق.