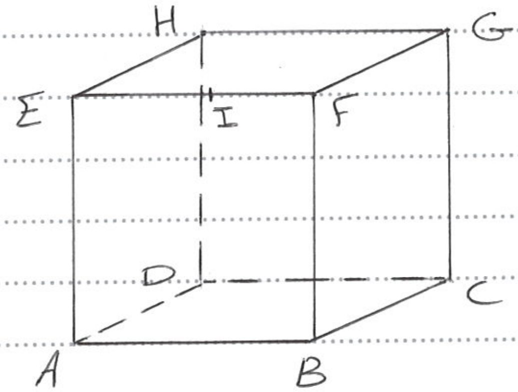
السؤال الأول

في الشكل المجاور مكعب فيه I منتصف EF ، عين موقع النقطة M التي تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI}$$
$$= \overrightarrow{AI}$$

M تنطبق على I

السؤال الثاني

نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط التالية :

$A(0,2,-2)$ $B(-1,2,-1)$

$C(-2,1,1)$

1- أوجد معادلة الكرة التي مركزها B وتمر بالنقطة C

2- عند أي قيمة للوسيط α تنتمي النقطة $M(-2,-1,\alpha)$ إلى المستوي ABC

1- $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

$r = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

2- $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$ $\overrightarrow{AC}(-2,-1,3)$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي النقاط C, B, A تشكل مستوياً

شرط انتماء النقطة M إلى المستوي ABC

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$(-2,-3,\alpha+2) = a(-1,0,1)+b(-2,-1,3)$

بالمطابقة

$-2 = -a-2b$ ... (1)

$-3 = -b$ ... (2)

$\alpha+2 = a+3b$ ... (3)

من (2) نجد $\boxed{b=3}$

نعوض في (1)

$-2 = -a-6 \rightarrow \boxed{a=-4}$

نعوض في (3)

$\alpha+2 = -4+9$

$\alpha+2 = 5$

$\boxed{\alpha = 3}$

السؤال الثالث

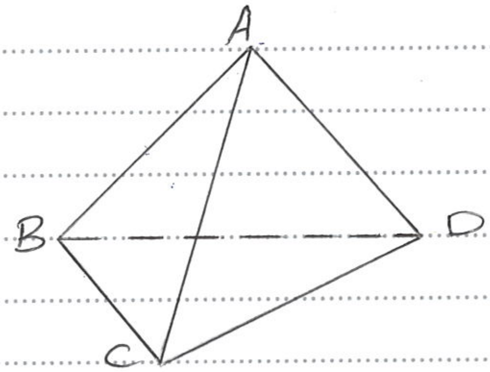
أولاً: $ABCD$ رباعي وجوه والنقطة K هي النقطة المحققة للعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$$

1- أثبت أن النقطة K تنتمي للمستوي ABC

2- وضع النقطة K

ثانياً: بفرض I مركز ثقل المثلث ABC وليكن M نظيرة D بالنسبة لـ I. عبر عن M بصفتها مركز أبعاد متناسبة لـ A, B, C, D.



أولاً:

1- من العلاقة المعطاة:

$$2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$$

$$2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC} + \cancel{2\overrightarrow{CD}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{2\overrightarrow{DC}}$$

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

هو شرط انتماء النقطة K إلى المستوي ABC.

2- لدينا:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\cancel{2\overrightarrow{AK}} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} + \cancel{2\overrightarrow{AK}} + 2\overrightarrow{KC}$$

$$-\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 0$$

ومنه K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(C,2)$ $(B,1)$ $(A,-1)$

لتعيين K:

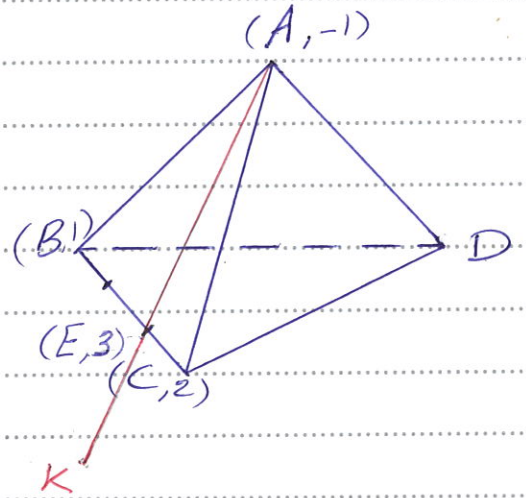
* نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,2)$ و $(B,1)$ وليكن E

$$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

فيكون $(E,3)$

* نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,-1)$ و $(E,3)$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$$



ثانياً :

بما أن I مركز ثقل للمثلث ABC

فإن :

$$\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$$

أياً كانت M من الفراغ فإن

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MI}$$

بما أن M نظيرة D بالنسبة

لـ I فإن $\vec{MI}=\vec{ID}$

$$\Rightarrow 2\vec{MI}=\vec{MD} \Rightarrow \vec{MI}=\frac{1}{2}\vec{MD}$$

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\frac{3}{2}\vec{MD}$$

$$2\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}-3\vec{MD}=0$$

ومنه مركز أبعاد متناسبة

للنقاط المثقلة

$(A,2)$ $(B,2)$ $(C,2)$ $(D,-3)$

السؤال الرابع

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المثقلة $(A,1)(B,2)(C,-1)$

لتكن مجموعة النقاط M من الفراغ

التي تحقق :

$$\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\|=\|2\vec{AD}-2\vec{AM}\|$$

استنتج ماذا تمثل مجموعة النقاط

M في الفراغ.

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,-1)$

فإن :

$$\vec{GA}+2\vec{GB}-\vec{GC}=\vec{0}$$

أياً كانت M من الفراغ فإن

$$\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}=2\vec{MG}$$

$$\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\|=\|2\vec{MG}\|$$

$$2\vec{AD}-2\vec{AM}=2\vec{AD}+2\vec{MA}$$
$$=2(\vec{MA}+\vec{AD})=2\vec{MD}$$

$$\|2\vec{AD}-2\vec{AM}\|=\|2\vec{MD}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\|=\|2\vec{AD}-2\vec{AM}\|$$

$$\|2\vec{MG}\|=\|2\vec{MD}\|$$
$$\|\vec{MG}\|=\|\vec{MD}\|$$

وهي تمثل معادلة مستوي محوري

للقطعة المستقيمة GD

السؤال الخامس

OABCD هرم قاعدته مربع ومنه

OA عمودي على القاعدة ومنه طول

ضلع القاعدة AB = 4 وارتفاعه OA = 4

ومنه أيضاً I منتصف OC ومنه

J منتصف AB

1- بين أن الأشعة $\vec{JI}$ و $\vec{AO}$

و $\vec{BC}$ مرتبطة خطياً

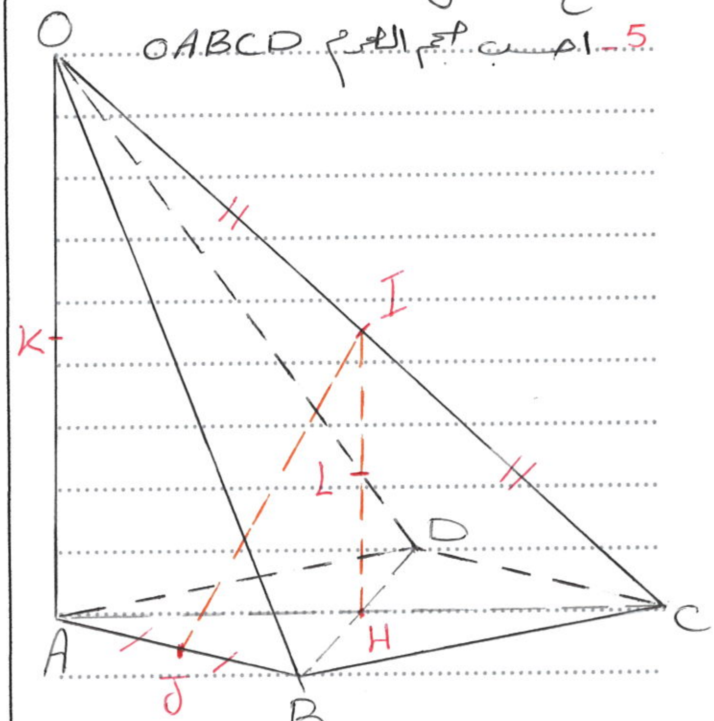
2- لتكن H مركز القاعدة أثبت أن

IH يوازي المستوي OAB

3- لتكن L منتصف HI و K
منتصف AO
أثبت أن النقاط K, L, C على
استقامة واحدة

4- أثبت أن النقطة G مركز أبعاد
متناسبة للنقاط المثقلة
(A,1) (B,1) (C,1) (O,1)
تقع على IJ وحدد موقعها

5- احسب حجم الهرم OABCD



نأخذ معلماً متجانساً
$(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AO})$

$A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(4,4,0)$
$D(0,4,0)$ $O(0,0,4)$ $J(2,0,0)$
$I(2,2,2)$

1- حتى تكون الأشعة مرتبطة خطياً
يجب أن تتحقق العلاقة
$\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{JI} + b\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{JI} + b\overrightarrow{BC}$
$(0,0,4) = a(0,2,2) + b(0,4,0)$

$0 = 0$ --- (1)
$0 = 2a + 4b$ --- (2)
$4 = 2a$ --- (3)

من (3) $\boxed{a = 2}$
نعوض في (2)
$0 = 4 + 4b \rightarrow \boxed{b = -1}$

$\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{BC}$
ومنه الأشعة $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{BC}$
مرتبطة خطياً.

2- $H(2,2,0)$
$\overrightarrow{HI}(0,0,2)$ $\overrightarrow{AO}(0,0,4)$
$\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{HI}$
الشعاعان مرتبطان خطياً ومنه HI
يوازي AO ومنه HI يوازي
كل مستوي يحتوي AO
أي HI يوازي المستوي OAB

3- $K(0,0,2)$ $L(2,2,1)$
$\overrightarrow{CL}(-2,-2,1)$ $\overrightarrow{CK}(-4,-4,2)$
$\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CL}$
الشعاعان مرتبطان خطياً ومنه النقاط
K, L, C تقع على استقامة واحدة

4 ـ I تقع في منتصف (C,1) و (O,1)
وتكون مركز أبعاد متناسبة لهما
وتكون (I, 2)

J تقع في منتصف (A,1) (B,1)
ومنه J مركز أبعاد متناسبة
لهما وتكون (J,2)

وحسب الخاصية التجميعية بما أن G
مركز أبعاد متناسبة لـ
(A,1) (B,1) (C,1) (O,1)
فهي نفسها مركز أبعاد متناسبة
لـ (I,2) و (J,2)
وهي تقع في منتصف IJ

5 ـ $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times h$

$S_{ABCD} = AB^2 = 16$

$h = 4$

$V = \frac{1}{3} \times 16 \times 4 = \frac{64}{3}$

طريقة ثانية : شعاعياً

1 ـ نبحث عن علاقة من الشكل :

$\overrightarrow{JI} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}$

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI}$

بالجمع :

$2\overrightarrow{JI} = \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA}}_{0} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{OI}}_{0}$

$2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

ومنه الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً .

2 ـ لإثبات أن IH يوازي المستوي
OAB يجب أن نثبت أن IH يوازي
أحد المستقيمات الموجودة في المستوي

$\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

$\cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{HI} = \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{AO}$ مرتبطين
خطياً فهما متوازيان

HI يوازي أي مستوي يحوي AO فهو يوازي المستوي OAB

3- حسب قاعدة متوازي الأضلاع:

$$\vec{CH}+\vec{CI}=2\vec{CL}$$

$$\frac{1}{2}\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{CO}=2\vec{CL}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CO})=2\vec{CL}$$

$$\frac{1}{2}\times 2\vec{CK}=2\vec{CL}$$

$$\vec{CK}=2\vec{CL}$$

الشعاعان مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط L, K, C تقع على استقامة واحدة

4- بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,1) (B,1) (C,1) (O,1)

فإن:

$$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GO}=0$$

$$\vec{GI}+\vec{IA}+\vec{GI}+\vec{IB}+\vec{GI}+\cancel{\vec{IC}}+\vec{GI}+\cancel{\vec{IO}}=0$$

$$4\vec{GI}+\vec{IA}+\vec{IB}=0$$

$$4\vec{GI}+\vec{IJ}+\cancel{\vec{JA}}+\vec{IJ}+\cancel{\vec{JB}}=0$$

$$4\vec{GI}+2\vec{IJ}=0$$

$$4\vec{GI}=2\vec{JI}$$

$$\vec{GI}=\frac{1}{2}\vec{JI}$$

ومنه G تقع في منتصف IJ

5- $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times h$

$S_{ABCD}=4\times 4=16$

$h=4$

$$V=\frac{1}{3}\times 16\times 4=\frac{64}{3}$$