حل الاختبارات العامة

وحل النماذج الوزارية للعام 2017

للصف الثالث ثانوي

في مادة الرياضيات

إعداد المدرسين

مصطفى العباس وإبراهيم قاسم

099 36 8 36 02 & 0967 293 651

السعر: 500 ليرة سورية

الفهرس

نرجو المعذرة في حال وجود أي خطأ

دمشق 20/ 4/ 2017

حل الاختبار الأول

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (30° لكل سؤال)

السؤال الأول: احسب كلاً مما يأتي:

❶ $\lim_{x\to\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

الحل: نفرض $t=\frac{1}{x}$ عندئذ $x=\frac{1}{t}$

عندما $x\to+\infty$ عندئذ $t\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}.\ln(1+t)\right)=1$$

وذلك حسب المبرهنة $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

❷ $\int_0^{\ln 2} e^x(1-e^x)^3dx$

الحل:

$$\int_0^{\ln 2} e^x(1-e^x)^3dx=-\int_0^{\ln 2}\underbrace{(-e^x)}_{u'}\underbrace{(1-e^x)^3}_{u^3}dx$$

$$=-\left[\frac{(1-e^x)^4}{4}\right]_0^{\ln 2}=-\left(\left[\frac{(1-2)^4}{4}\right]-\left[\frac{(1-1)^4}{4}\right]\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-0\right)=-\frac{1}{4}$$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $9^x-3^{x+1}+2=0$

الحل: نلاحظ أن: $9^x=3^{2x}=(3^x)^2$ و $3^{x+1}=3.3^x$

لذا نفرض $t=3^x$ عندئذ:

$$3^{2x}-3.3^x+2=0$$

$$t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)=0$$

إما $t_1=1\Rightarrow 3^{x_1}=1\Rightarrow \ln(3^{x_1})=\ln 1\Rightarrow x_1.\ln 3=0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=0}$$

أو $t_2=2\Rightarrow 3^{x_2}=2\Rightarrow \ln(3^{x_2})=\ln 2\Rightarrow x_2.\ln 3=\ln 2$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه ، مركز ثقله G ، I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[BC]$. أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة.

الحل:

I منتصف $[AD]$ عندئذ I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1),(D,1)$

J منتصف $[BC]$ عندئذ J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1),(C,1)$

G مركز ثقل $ABCD$ عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

فحسب الخاصة التجميعية فإن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2),(J,2)$

فالنقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

السؤال الرابع: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$ والمستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$

اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

بما أن المستوي P يمس الكرة عندئذ

$$R=\text{dist}(A,P)=\frac{|(2)(2)+(+1)(-1)+(-2)(0)+9|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|4-1+0+9|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{12}{3}=4$$

معادلة الكرة التي مركزها $A(2,-1,0)$ و $R=4$

$$C:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

$$\boxed{(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=16}$$

ثانياً حل التمارين الآتية: (30° لكل تمرين)

التمرين الأول: أثبت أن $\ln x\le x-1$ أياً كان $x>0$.

باختيار $x=e^{1/3}$ و $x=e^{-1/3}$ ، احصر e.

الحل: المتراجحة المعطاة تكافئ $\ln x-x+1\le 0$

لنأخذ التابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln x-x+1$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$$

في جوار $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من النمط $(\infty-\infty)$ لإزالتها نخرج x

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-1+\frac{1}{x}\right)=\infty(0-1+0)=-\infty$$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقه

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow 1 - x = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ حسب الجدول عندئذ: أياً تكن $x > 0$ فإن $f(x) \le f(1) = 0$

$$\ln x - x + 1 \le 0 \Rightarrow \boxed{\ln x \le x - 1}$$

حصر العدد e: نعوض $e^{1/3}$ في المتراجحة

$$\ln e^{\frac{1}{3}} \le e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \le e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{64}{27} \le e}$$

$$\ln e^{-\frac{1}{3}} \le e^{-\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le e^{-\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \le e^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{8}{27} \le e^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{27} \ge \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\frac{27}{8} \ge e}$$

مما سبق نجد $\frac{64}{27} \le e \le \frac{27}{8}$

التمرين الثاني: أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ متزايدة تماماً.

الحل: سنبرهن بالتدريج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً أي:

$E(n): u_n < u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

لنثبت صحة القضية $E(1)$ كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = \sqrt{1+0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 > u_0 \text{ محققة}$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$، أي: $u_{n+1} > u_n \cdots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$u_{n+1} > u_n$ (حسب $*$)

$u_{n+1}^2 > u_n^2$ (نربع الطرفين)

$u_{n+1}^2 + 1 > u_n^2 + 1$ (نضيف 1 للطرفين)

$\sqrt{u_{n+1}^2 + 1} > \sqrt{u_n^2 + 1} \Rightarrow \boxed{u_{n+2} > u_{n+1}}$ (نجذر الطرفين)

فحسب البرهان بالتدريج فإن $u_n < u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

التمرين الثالث: احسب قيمة r إذا علمت أن:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

الحل:

شرط الحل هو $r \le 4$ و $r \le 5$ و $r \le 6$ إذاً: $\boxed{r \le 4}$

$$\frac{1}{\frac{4!}{(4-r)!\,r!}} = \frac{1}{\frac{5!}{(5-r)!\,r!}} + \frac{1}{\frac{6!}{(6-r)!\,r!}}$$

$$\frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(5-r)!\,r!}{5!} + \frac{(6-r)!\,r!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!\,r!}{5.4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!\,r!}{6.5.4!}$$

نخرج عامل مشترك $\frac{(4-r)!\,r!}{4!}$ ونقسم عليه الطرفين

$$\frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(4-r)!\,r!}{4!}\left[\frac{(5-r)}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30}\right]$$

$$1 = \frac{6(5-r)}{30} + \frac{30 - 11r + r^2}{30}$$

$$30 = 30 - 6r + 30 - 11r + r^2$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0$$

$$(r - 15)(r - 2) = 0$$

$r = 15$ (مرفوض) $r = 2$ (مقبول)

التمرين الرابع: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$$

الحل: بالاتمام لمربع كامل

$$z^2 - (1+2i)z + \left(\frac{1+2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+2i}{2}\right)^2 + 3 + 3i = 0$$

$$\left(z - \frac{1+2i}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4} - 2i$$

$$\left(z - \frac{1+2i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(-15 - 8i)$$

لنفرض أن $w = a + ib$ الجذر التربيعي لـ $-15 - 8i$ عندئذ

$$w^2 = (a^2 - b^2 + 2abi) = -15 - 8i$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \\ a^2 - b^2 = -15 \\ a.b = -\frac{8}{2} = -4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بالجمع}} 2a^2 = 2$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -4 \\ a = -1 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} w_1 = 1 - 4i \\ w_2 = -1 + 4i \end{matrix}$$

$$z_1 - \frac{1+2i}{2} = \frac{1-4i}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{1-4i+1+2i}{2}$$

$$\boxed{z_1 = 1 - i}$$

$$z_2 - \frac{1+2i}{2} = \frac{-1+4i}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{-1+4i+1+2i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = 3i}$$

ثالثاً حل المسألتين التاليتين: (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

❶ أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.

❷ ادرس التابع f، وعين المقارب الشاقولي لـ C، وارسم كل مقارب وجدته، ثم ارسم C.

❸ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله 0.5.

الحل:

❶ $$h(x) = f(x) - (2x - 1) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = \ln 1 = 0$$

حيث $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$

إذن $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي لـ C و Δ:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x) = f(x) - (2x - 1)$، بما أن $\frac{x}{1+x} \le 1$ عندئذ $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) < 0$ وبالتالي C تحت Δ دوماً.

❷ $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي لـ C.

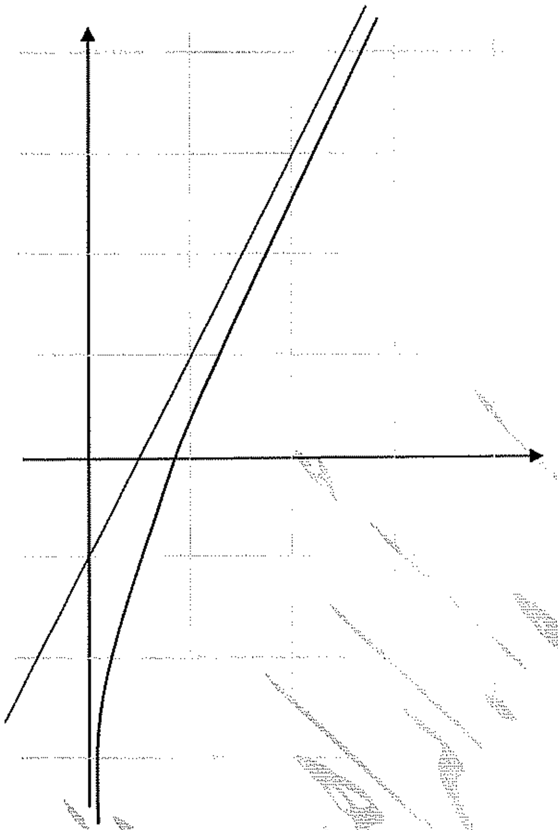
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

f معرف واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{\frac{x}{1+x}} = 2 + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{2x^2+2x+1}{x(1+x)} > 0$$

x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:



❸ بما أن $0 \in]-\infty, \infty[= f(]0, +\infty[)$ و f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$ عندئذ يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0, +\infty[$

الحصر:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = -\ln 3 < 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) - 1 + \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) = 1 - \ln 2 > 0$$

فنلاحظ أن $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $[0.5, 1]$.

المسألة الثانية: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1,2,3,4,5,6

نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة ،

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على اصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

❶ عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي

❷ احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ ، والتباين $\mathbb{V}(X)$.

الحل:

❶ مجموعة قيم X هي $\{1,2,3,4,5,6\}$

بطاقة ثانية / بطاقة أولى	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

حذفنا القطر لأن السحب على التتالي بدون إعادة (بدون تكرار)

ومنه فجدول القانون الاحتمالي للمتغير X هو

x	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

❷ حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\left(1\times\frac{10}{30}\right)+\left(2\times\frac{8}{30}\right)+\left(3\times\frac{6}{30}\right)+\left(4\times\frac{4}{30}\right)+\left(5\times\frac{2}{30}\right)$$

$$\boxed{E(X)=\frac{7}{3}}$$

$$E(X^2)=\left(1^2\times\frac{10}{30}\right)+\left(2^2\times\frac{8}{30}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{30}\right)+\left(4^2\times\frac{4}{30}\right)+\left(5^2\times\frac{2}{30}\right)$$

$$\boxed{E(X^2)=7}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=7-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$$

حل الاختبار الثاني

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

❶ أوجد $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

❷ أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C.

الحل:

❶ في جوار $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نكتب

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}=\frac{x^3+4(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\frac{x^3+4\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{4\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{4.\frac{x^2}{4}}$$

$$f(x)=x+2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x+2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=0+2\times1=2$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

❷ إثبات أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل

$$f(x)-x=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}-x=\frac{4-4\cos x}{x^2}=\frac{4(1-\cos x)}{x^2}$$

سنوجد $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)$ وفق الإحاطة

نعلم أن $-1\le\cos x\le1$ نضرب الطرفين بـ (-1): $1\ge-\cos x\ge-1$

نضيف $+1$ للطرفين: $2\ge1-\cos x\ge0$

نضرب الطرفين بـ $+4$: $8\ge4(1-\cos x)\ge0$

نقسم الطرفين على x^2: $\frac{8}{x^2}\ge\frac{4(1-\cos x)}{x^2}\ge0$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=0\end{cases}$ حسب مبرهنة الإحاطة فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4(1-\cos x)}{x^2}\right)=0}$

السؤال الثاني: نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ كما يأتي:

$$u_{n+1}=\sqrt{12+u_n} \text{ و } u_0=1$$

❶ أثبت أن $0\le u_n\le4$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

الحل:

❶ لنبرهن أن المتراجحة $E(n): 0\le u_n\le4$ بالتدريج كما يلي:

لنبرهن صحة القضية $E(0)$ محققة لأن $0\le u_0=1\le4$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ ، أي: $0\le u_n\le4$ صحيحة.

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$$0\le u_n\le4\Rightarrow0+12\le u_n+12\le4+12$$

$$\Rightarrow0\le\sqrt{12}\le\sqrt{u_n+12}\le\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow0\le\sqrt{u_n+12}\le4$$

$$\Rightarrow\boxed{0\le u_{n+1}\le4}$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي حسب التدريج فإن: $0\le u_n\le4$ محققة وذلك أيّاً كان العدد الطبيعي n.

❷ سنبرهن بالتدريج أن: $E(n): u_n\le u_{n+1}$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

لنثبت صحة القضية $E(1)$ كما يلي:

$$\left.\begin{aligned}u_0&=1\\u_1&=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_0\le u_1$$

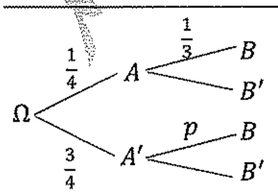
لنفرض صحة القضية $E(n)$ ، أي: $u_n\le u_{n+1}$.

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$$u_n\le u_{n+1}\Rightarrow u_n+12\le u_{n+1}+12$$

$$\Rightarrow\sqrt{u_n+12}\le\sqrt{u_{n+1}+12}\Rightarrow\boxed{u_{n+1}\le u_{n+2}}$$

السؤال الثالث: ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور.



كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟

الحل:

حتى يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً يجب أن يتحقق الشرط:

$$P(A).P(B)=P(A\cap B)\ ...(*)$$

وعليه فحسب المخطط نجد أن:

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$P(A'\cap B)=P(A').P(B|A')=\frac{3}{4}.p=\frac{3}{4}p$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=\frac{3}{4}p+\frac{1}{12}$$

نعوض ما سبق في $(*)$ فنجد:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{3}{4}p+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{p=\frac{1}{3}}$$

السؤال الرابع: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$.

❶ بيّن أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

❷ بيّن أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث $\alpha,\beta.\gamma$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A\,,z_B-z_A)=(9,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\,,y_C-y_A\,,z_C-z_A)=(3,-2,1)$

ولأن المركبات المتقابلة غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة.

ولأن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان فالنقاط A,B,C تعيّن مستوي (ABC)

❷ $\overrightarrow{AD}=(x_D-x_A\,,y_D-y_A\,,z_D-z_A)=(-1,-1,1)$

لكي تكون D,C,B,A تقع في مستوي واحد يجب أن تحقق:

$$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$(-1,-1,1)=x(9,-1,-1)+y(3,-2,1)$$

$$(-1,-1,1)=(9x,-x,-x)+(3y,-2y,y)$$

$$(-1,-1,1)=(9x+3y,-x-2y,-x+y)$$

من $\begin{cases}9x+3y=-1\ ...(1)\\-x-2y=-1\ ...(2)\\-x+y=1\ ...(3)\end{cases}$ من (3) و (2) نجد $x=-\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$

ونتحقق في (1) فنجد $-3+2=-1$ محققة.

$$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

فالأشعة الثلاث مرتبطة خطيّاً فهي تقع مستوي واحد ، إذاً: A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ وجدنا في الطلب السابق

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow-3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

نقحم D بحسب علاقة شال في الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow-3\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow-3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow-2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\boxed{2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}}$$

ومنه D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,-1),(D,2)$.

ثانياً حل التمارين الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول: أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعط عدداً حقيقياً α يحقق الشرط: إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in]2.9,3.1[$.

الحل:

$$f(x)\in]2.9,3.1[$$

$$|f(x)-3|<0.1$$

$$\left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{10}$$

$$|x+1|>10$$

$$x+1>10\Rightarrow x>9\qquad(\text{لـ } x \text{ في جوار } +\infty)$$

وبالتالي: إذا كان $x>9$ كان $f(x)\in]2.9,3.1[$

التمرين الثاني: أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$$

الحل: حل المترجحة يكافئ حل المتراجحة $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$

لنأخذ التابع $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ المعرف والاشتقاقي على المجال $]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم مشتق التابع f ، أي: $f'(x) = 0$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ من الجدول أن $f(0) = 0$ قيمة حدية صغرى

أياً تكن $x \in]-1,+\infty[$ فإن $0 = f(0) \leq f(x)$ ومنه

أياً تكن $x \in]-1,+\infty[$ فإن $0 \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ وبالتالي

أياً تكن $x \in]-1,+\infty[$ فإن $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$

التمرين الثالث:

❶ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

لاحظ أنّ: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

الحل: نلاحظ أن أمثال المعادلة حقيقية عندئذ نطبق طريقة المميز حيث

$$a = 1, b = -2(1-\sqrt{3}), c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = \left(-2(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1 - 2\sqrt{3} + 3) - 32 = 4(4 - 2\sqrt{3}) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4 + 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}$$

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين

$$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i \quad \& \quad z_B = \overline{z_A}$$

بيّن أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ و } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

الحل:

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(z_A)^2 = \left((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i\right)^2$$

$$= (\sqrt{3}+1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i + \left((\sqrt{3}-1)i\right)^2$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} + 4i - 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{(z_A)^2 = 4\sqrt{3} + 4i}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A}{\overline{z_A}} = \frac{(z_A)^2}{z_A.\overline{z_A}} = \frac{(z_A)^2}{|z_A|^2} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

وجدنا أن $\frac{(z_A)^2}{|z_A|^2} = e^{\frac{\pi}{6}i} \Leftarrow (z_A)^2 = |z_A|^2 e^{\frac{\pi}{6}i}$

$$\Rightarrow z_A = \sqrt{|z_A|^2 e^{\frac{\pi}{6}i}} = |z_A| e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

التمرين الرابع: نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة دائماً.

الحل:

الطريقة الأولى:

اختيار اللجنة مع مراعاة الشرط فيجب أن يكون في اللجنة

ثلاث أشخاص غير متخاصمين

أو شخص واحد من المتخاصمين مع شخصين غير متخاصمين.

فعدد طرق اختيار اللجنة من ثلاث أشخاص غير متخاصمين يساوي P_3^3

وعدد طرق اختيار اللجنة من شخص واحد من المتخاصمين مع شخصين غير متخاصمين يساوي $3.P_2^1.P_3^2$

وبالتالي عدد طرق اختيار اللجنة مع مراعاة الشرط يساوي

$$P_3^3 + 3!.P_2^1.P_3^2 = 6 + 3\times(2)\times 3 = 6 + 36 = \boxed{42}$$

الطريقة الثانية:

أولاً: عدد طرق تأليف اللجنة من خمسة أشخاص هو

$$P_3^5 = 5\times 4\times 3 = 60$$

ثانياً: عدد طرق تأليف اللجنة تتضمن الشخصين المتخاصمين هو:

$$3.P_2^2.P_3^1 = 3\times 2\times 3 = 18$$

ومنه عدد طرق تشكيل اللجنة المطلوبة يساوي:

$$60 - 18 = \boxed{42}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = (x+1)^2.e^{-x}$$

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه.

❷ ارسم كل مقارب وجدته ، وارسم C.

❸ بيّن أنّ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأنّ هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2,-1]$ واستنتج أنّ α تحقق المعادلة $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

❺ استنتج مجموعة تعريف التابع $x \mapsto g(x) = \ln(f(x))$ ثم حلّ المعادلة $g(x) = -x$.

الحل:

❶ نوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

ومنه $\Delta: y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي: C فوق Δ لأن: $f(x) - 0 = (x+1)^2.e^{-x} > 0$

عند $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ أي لا يوجد مقارب أفقي

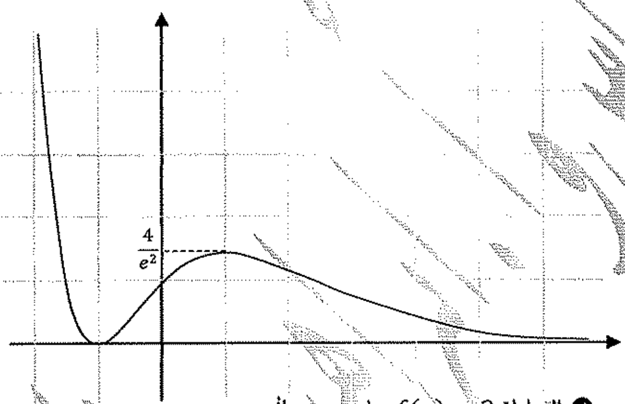
f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{4}{e^2} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

-2 رسم التابع ومقارباته



❸ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α لأن:

$2 \in]-\infty, 0[= f(]-\infty,-1[)$

و f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,-1[$

$2 \notin]0, 4.e^{-2}] = f(]-1,1])$

و f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0, 4.e^{-2}]$

$2 \notin]0, 4.e^{-2}[= f(]1,\infty[)$

و f مستمر متناقص تماماً على المجال $]0, 4.e^{-2}[$

فللمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد وهو $\alpha \in]-\infty,-1[$.

إن $\alpha \in [-2,-1]$ لأن:

$$\left.\begin{matrix} f(-2) = e^2 \\ f(-1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\alpha) = 2 \in [0, e^2] = f([-2,-1])$$

الاستنتاج: $f(\alpha) = 2 \Rightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$

$(\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha}$ (نضرب الطرفين بـ e^{α})

$|\alpha+1| = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ نجذر الطرفين

ولكن $\alpha < -1$ عندئذ $\alpha + 1 < 0$ ومنه $|\alpha+1| = -\alpha - 1$

$$-\alpha - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}}$$

❹ نلاحظ حسب الرسم أن C فوق محور الفواصل ومنه

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $u = (x+1)^2$ ، $v' = e^{-x}$ ، $u' = 2(x+1)$ ، $v = -e^{-x}$

$$I = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2(x+1)e^{-x}dx$$

$$= (-4e^{-1}) - (-1) + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$$

$$= 1 - \frac{4}{e} + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $u = (x+1)$ ، $v' = e^{-x}$ ، $u' = 1$ ، $v = -e^{-x}$

$$I = 1 - \frac{4}{e} + 2\left([-(x+1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{e} + 2\left([-2e^{-1} + 1] + \int_0^1 e^{-x}dx\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{e} - \frac{4}{4} + 2 + 2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{4}{e} - \frac{4}{e} + 2 + 2(-e^{-1} + 1) = 3 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e} + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 5 - \frac{6}{e}}$$

❺ إيجاد مجموعة تعريف $g(x) = \ln(f(x))$

حسب جدول تغيرات f نجد: $f(x) = 0$ عندما $x = -1$

و $f(x) > 0$ عندما $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

فمجموعة تعريف g هي $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

المسألة الثانية: لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء. وكلّ صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا .... ، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n.

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

❶ احسب $\mathbb{P}(R_1)$.

❷ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$.

❸ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \le k \le n$.

❹ نعرف $x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$.

1- أثبت أنّ المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسية. عيّن أساسها وحدها الأول

2- اكتب x_k بدلالة k واستنتج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k.

الحل:

❶ R_1 هو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق الأول

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{4}$$

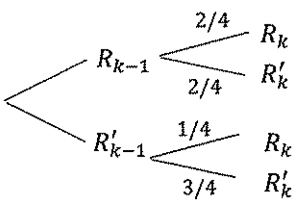
❷ إثبات صحة العلاقة $\underbrace{\mathbb{P}(R_2)}_{L_1} = \underbrace{\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}}_{L_2}$

R_2 هو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق الثاني

$$L_1 = \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1).\mathbb{P}(R_2|R_1) + \mathbb{P}(\bar{R_1}).\mathbb{P}(R_2|\bar{R_1})$$
$$= \frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{2}{4} = \frac{5}{16}$$
$$L_2 = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

ومنه $L_1 = L_2$.

❸ مخطط المرحلة $k-1$



$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(r_{k-1}).\mathbb{P}(R_k|R_{k-1}) + \mathbb{P}(R_{k-1}).\mathbb{P}(R_k|R_{k-1})$$

$$= (1 - \mathbb{P}(R_{k-1})).\frac{1}{4} + \mathbb{P}(R_{k-1}).\frac{2}{4} \ X$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{2}{4}\mathbb{P}(R_{k-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}}$$

● إثبات أن المتتالية x_k هندسية

$$x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3} \Rightarrow x_{k+1} = \mathbb{P}(R_{k+1}) - \frac{1}{3}$$

$$x_{k+1} = \left(\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{12}$$

$$x_{k+1} = \frac{3}{12}\left(\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}x_k$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{4}$$

ومنه x_k متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$x_1 = P(R_1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\boxed{x_k = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}}$$

كتابة $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k:

$$x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}}$$

حل الاختبار الثالث

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40° لكل سؤال)

السؤال الأول: أثبت أنّ للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أنّ $\alpha\in]-1,0[$.

الحل: لنفرض f تابع معرف وفق العلاقة $f(x)=x^3+x+1$ على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

إن التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

فحسب جدول تغيرات التابع f نلاحظ أنّ:

$0\in]-\infty,+\infty[=f(]-\infty,+\infty[)$ و f مستمر ومتزايد ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α.

$$\left.\begin{array}{r} f(-1)=+1 \\ f(0)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(-1).f(0)<0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فإنه يوجد $\alpha\in]-1,0[$ يحقق $f(\alpha)=0$

السؤال الثاني: حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ، ثم عيّن حلها f الذي يحقق $f(-1)=2$.

الحل:

$$2y'+y=1\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

لدينا معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حيث $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ ومجموعة حلولها هي: $ke^{ax}-\frac{b}{a}$ وبالتالي

$$y=ke^{-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\Rightarrow y=ke^{-\frac{1}{2}x}+1$$

لحساب قيمة k نعوض الشرط

$$2=ke^{-\frac{1}{2}(-1)}+1\Rightarrow 1=ke^{\frac{1}{2}}\Rightarrow k=e^{-\frac{1}{2}}$$

فحل المعادلة التفاضلية المدروسة هو:

$$y=e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}+1\Rightarrow \boxed{y=e^{-\frac{1}{2}(x+1)}+1}$$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرّف بالصيغة

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$$

احسب النهايتين: $\lim_{x\to\infty}f(x)$ (1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ (2)

الحل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$$
$$=\left(\sqrt{x^2+2x+3}-|x|\right).\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}$$
$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}$$
$$=\frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$$
$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}$$

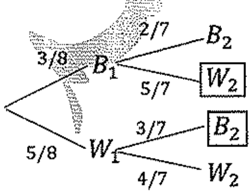
في جوار $+\infty$ نعلم أن $|x|=x$ ومنه

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

في جوار $-\infty$ نعلم أن $|x|=-x$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\frac{2}{-1-1}=-1$$

السؤال الرابع: يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين. يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط.



الحل: لنفرض أن A هو الحدث الدال على حصول اللاعب على نقطة واحدة فقط.

و B_1 هو حدث الحصول على كرة سوداء في المرة الأولى

و B_2 هو حدث الحصول على كرة سوداء في المرة الثانية

و W_1 هو حدث الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى

و W_2 هو حدث الحصول على كرة بيضاء في المرة الثانية

$$P(A) = P(B_1).P(W_2|B_1) + P(W_1).P(B_2|W_1)$$

$$= \frac{3}{8}.\frac{5}{7} + \frac{5}{8}.\frac{3}{7} = \frac{15+15}{56} = \boxed{\frac{30}{56}}$$

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70° لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتاليات $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يأتي:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \& \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

أثبت أنّ هاتين المتتاليتين متجاورتان.

الحل: دراسة إطراد المتتالية u_n:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$-u_n = -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية u_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية v_n:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)}\right) - \left(u_n + \frac{1}{4n}\right)$$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= \frac{-2(n+1)}{4n(n+1)(2n+1)(2n+2)} < 0$$

فالمتتالية v_n متناقصة.

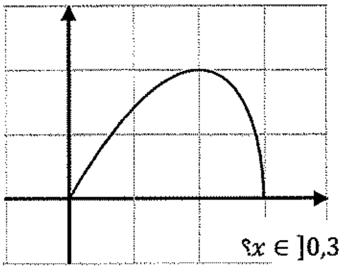
$$v_n - u_n = u_n + \frac{1}{4n} - u_n = \frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}\right) = 0$$

فالمتتاليتان u_n, v_n متجاورتان.

التمرين الثاني:

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة $f(x) = x\sqrt{3-x}$. عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S.



❶ ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$؟

❷ عيّن $A(x)$، مساحة هذا المقطع بدلالة x، ثم استنتج V حجم المجسم S.

الحل:

❶ المقطع هو دائرة نصف قطرها هو $x\sqrt{3-x}$

❷ مساحة المقطع

$$A(x) = \pi f^2(x) = \pi\left(x\sqrt{3-x}\right)^2 = \pi x^2(3-x)$$

$$\Rightarrow \boxed{A(x) = \pi(3x^2 - x^3)}$$

حجم المجسم S

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 \pi(3x^2 - x^3)dx$$

$$= \pi\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \pi\left[\left(27 - \frac{81}{4}\right) - 0\right] = \frac{27}{4}\pi$$

التمرين الثالث: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

❶ اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً.

❸ عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً حقيقياً.

الحل:

❶ الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = \sqrt{3}i$$

الشكل الأسي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

بما أن $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في A

❷ بما أن $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً عندئذ

$$\pm\frac{\pi}{2} = \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM})$$

إذاً $(\mathcal{E})$ هي مجموعة نقاط التي ترى منها $[BC]$ تحت زاوية قائمة ما عدا النقطة B، أي $(\mathcal{E})$ هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ محذوفاً منها B.

❸ بما أن $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً عندئذ

$$0 = \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) \text{ أو } \pi = \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) \text{ أو } \pi = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM})$$

إذاً فالشعاعان $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطياً أي النقاط M, C, B تقع على استقامة واحدة باستثناء B، إذاً $(\mathcal{F})$ هي نقاط المستقيم (BC) عدا B.

التمرين الرابع: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

❶ أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1,2,4)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (2,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (1,2,4).(2,1,-1) = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times (-1) = 0$

فالمثلث ABC قائم في الزاوية A.

$AB = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$

$AC = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{126}}{2}$$

❷ إثبات أن الشعاع $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC)

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (1,2,4).(2,-3,1) = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (2,1,-1).(2,-3,1) = 4 - 3 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$

وبملاحظة أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات المتقابلة إذاً الشعاع $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC)

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$2(x - 1) - 3(y - 0) + 1(z + 1) = 0$$

$$\boxed{(ABC): 2x - 3y + z - 1 = 0}$$

❸ بعد النقطة D عن المستوي (ABC):

$$h = \text{dist}(D, ABC) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2(-4) - 3(2) + 1(1) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$$

حجم رباعي الوجوه $DABC$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{126}}{2} \times \sqrt{14} = 7$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدية مبيناً نوعها.

❷ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C.

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e^2}$.

الحل:

❶ دراسة تغيرات التابع f

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x - x.\ln x} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

f معرف واشتقاقي على $]0,e[\,\cup\,]e,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{0 - \left(1.[1-\ln x] + x.\left[-\frac{1}{x}\right]\right)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$= \frac{-1+\ln x + 1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

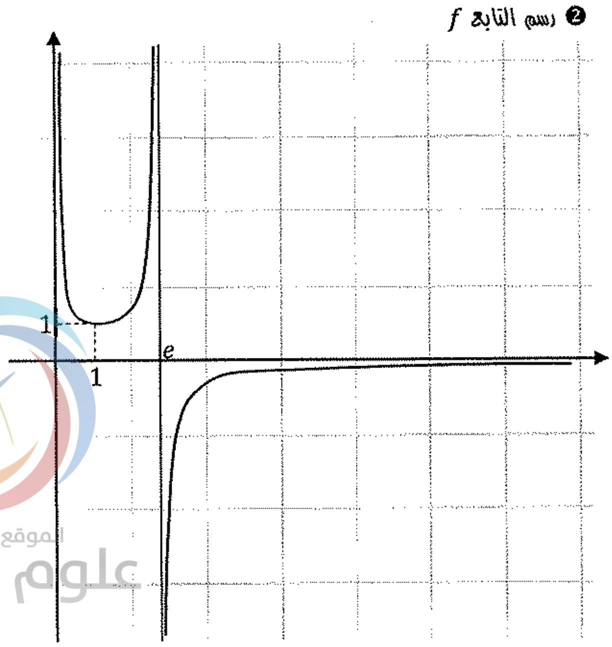
مقاربات التابع f:

$x=0$ مقارب شاقولي و $x=e$ مقارب شاقولي

$y=0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

القيمة الحدية هي $f(1)=1$ وهي قيمة حدية صغرى

❷ رسم التابع f



❸
$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx$$

$\left(\frac{u'}{u}\right.$ نكتبه على الشكل$\left.\right)$ $= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx$

$$= -[\ln(1-\ln x)]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= -(\ln 2 - \ln 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

المسألة الثانية: يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء. إذا صدّ ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 ، وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6. نفترض أنّ احتمال أن يصد أوّل ضربة جزاء يساوي 0.7.

ليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)

❶ احسب $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ و $\mathbb{P}(A_2|A_1')$.

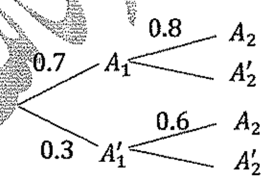
❷ استنتج أنّ $\mathbb{P}(A_2) = 0.74$.

❸ نعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$:

(a) برهن أنّ $p_{n+1} = (0.2)p_n + 0.6$

(b) لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$ بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 0.2 . استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} p_n$.

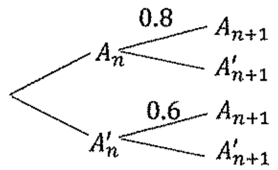
الحل:



❶ نلاحظ حسب المخطط الشجري أنّ:

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.8\,, \mathbb{P}(A_2|A_1') = 0.6$$

❷
$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(A_1').\mathbb{P}(A_2|A_1')$$
$$= (0.7)(0.8) + (0.3)(0.6) = 0.74$$



❸ $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(A'_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A'_n)$

$$= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) + (1 - \mathbb{P}(A_n))\mathbb{P}(A_{n+1}|A'_n)$$

$$= p_n.(0.8) + (1 - p_n)(0.6)$$

$$= 0.8p_n + 0.6 - 0.6p_n$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{n+1} = 0.2p_n + 0.6}$$

(b) إثبات أن u_n متتالية هندسية:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75$$

$$= 0.2p_n + 0.6 - 0.75$$

$$= 0.2p_n + 0.15$$

$$= 0.2(p_n + 0.75)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} = 0.2u_n}$$

فالمتتالية u_n هندسية أساسها 0.2 وحدها الأول

$$u_1 = p_1 + 0.75 = 0.7 - 0.75 = -0.05 = -\frac{1}{20}$$

$$u_n = -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$$

استنتاج عبارة p_n

$$u_n = p_n - 0.75 \Rightarrow \boxed{p_n = 0.75 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} p_n = \lim_{x\to+\infty}\left(0.75 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right) = 0.75 - 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} p_n = 0.75}$$

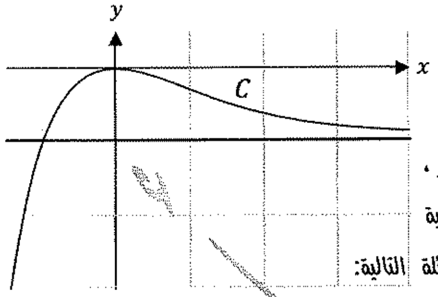
حيث $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$

حل الاختبار الرابع

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول:

في الشكل المجاور خط بياني C لدالة f ، ومن خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة التالية:



❶ ما معادلة المستقيم المقارب للخط C؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب؟

❷ يقبل f قيماً حدية محلياً. عيّنها وعيّن نوعها.

❸ في حالة عدد حقيقي k ، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

الحل:

❶ نلاحظ من الرسم $\Delta: y = -1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و C فوق Δ

❷ نعم يقبل ، القيمة الحدية $f(0) = 0$ وهي قيمة حدية كبرى.

❸ عندما $k \in]0, +\infty[$ فليس للمعادلة حل (مستحيلة الحل).

وعندما $k \in]-\infty, -1[\cup \{0\}$ فللمعادلة حل واحد.

وعندما $k \in]-1,0[$ فللمعادلة حلان.

السؤال الثاني: لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$.

❶ ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S.

❷ ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500؟

الحل:

❶ $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

❷ عدد طرق اختيار الآحاد يساوي 1

وعدد طرق اختيار المئات يساوي 2

وعدد طرق اختيار العشرات يساوي 4

فعدد الأعداد المطلوبة يساوي $2 \times 4 \times 1 = 8$ (حسب المبدأ الأساسي في العد).

السؤال الثالث: في معلمٍ متجانسٍ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,1)$ و $D(0,4,-1)$.

بيّن مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

❶ المثلث ABC قائم.

❷ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

❸ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$.

الحل:

❶ المقولة صحيحة لأن:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (3,3,3)$$

$$AB = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27}$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (3,0,-3)$$

$$AC = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (0,-3,-6)$$

$$BC = \sqrt{0+9+36} = \sqrt{45}$$

نلاحظ أن $\begin{cases} AB^2 + AC^2 = 18 + 27 = 45 \\ BC^2 = 45 \end{cases} \Leftarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

فحسب عكس فيثاغورث فالمثلث ABC قائم في A.

❷ المقولة صحيحة لأن:

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = (-3,6,-3)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = (-3)(3) + (6)(3) + (-3)(3) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = (-3)(3) + (6)(0) + (-3)(-3) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}}$$

بالإضافة لذلك $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً (لأن المركبات المتقابلة غير متناسبة)

❸ المقولة خاطئة لأن:

إن $AD = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}$ ومنه

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} . h = \frac{1}{3} \times \frac{AB.AC}{2} \times AD$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2} \times \sqrt{54} = \boxed{27 \neq 81}$$

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70° لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x.e^{-x}$ والمطلوب:

❶ احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)dx$

❷ أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$

الحل:

❶ $$\int_0^{\ln 3} f(x)dx=\int_0^{\ln 3} x.e^{-x}dx$$

نطبق التجزئة فنفرض:

$u=x$	$v'=e^{-x}$
$u'=1$	$v=-e^{-x}$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}-e^{-x}dx$$

$$=\left(-\frac{\ln 3}{3}-0\right)+\int_0^{\ln 3}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{\ln 3}{3}+\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$$

$$=-\frac{\ln 3}{3}+\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2-\ln 3}{3}$$

❷ نلاحظ أنّ $y=x.e^{-x}$ ومنه $y'=e^{-x}-xe^{-x}$

$$y'+y=(e^{-x}-xe^{-x})+xe^{-x}=e^{-x}$$

التمرين الثاني:

المستقيمان L و L' معرّفان وسيطياً وفق

$$L:\begin{cases}x=-1\\ y=1-t\\ z=1-2t\end{cases}:t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad L':\begin{cases}x=4-5s\\ y=3-2s\\ z=-1+2s\end{cases}:t\in\mathbb{R}$$

❶ أثبت أنّ L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

❷ أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L'.

الحل:

❶ $$\begin{aligned}4-5s&=-1 &&\dots(1)\\ 3-2s&=1-t &&\dots(2)\\ -1+2s&=1-2t &&\dots(3)\end{aligned}$$

من (1) نجد $s=1$ ⇐ $\begin{cases}\text{نعوض في (2) فنجد } t=0\\ \text{نعوض في (3) فنجد } t=0\end{cases}$ ⇐ المستقيمان L' و L متقاطعان

إيجاد نقطة التقاطع: نعوض $t=0$ في L فنجد :

$$x=-1,y=1,z=1\Rightarrow I(-1,1,1)$$

❷ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم للمستوي P والمحدد بالمستقيمين المتقاطعين L و L' حيث شعاعا توجيههما

$$\overrightarrow{u_1}=(0,-1,-2),\overrightarrow{u_2}=(-5,-2,2)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{u_1}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0\Rightarrow \quad -b-2c=0\dots(1')$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{u_2}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{u_2}=0\Rightarrow -5a-2b+2c=0\dots(2')$$

نجمع $(1')$ و $(2')$ عندئذ $-5a-3b=0\dots(3')$

نفرض $b=5$ ونعوض في $(1')$ و $(3')$ فنجد $a=-6$ و $c=-5$

ومنه $\vec{n}(-6,10,-5)$ عندئذ:

$$P:a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

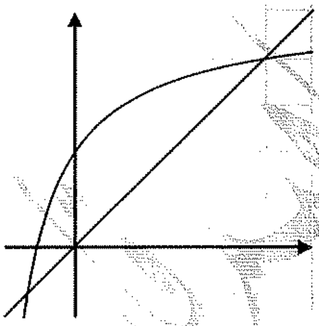
$$-6(x+1)+10(y-1)-5(z-1)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{P:-6x+10y-5z-11=0}$$

التمرين الثالث:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي

$$u_0=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$$



❶ باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0,u_1,u_2,u_3

❷ ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وتقاربها.

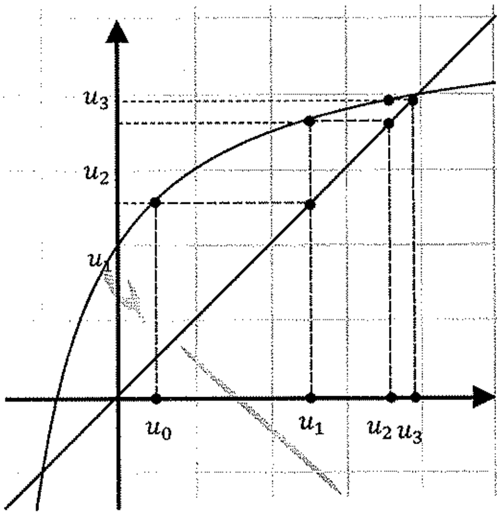
❸ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

(1) بيّن أنّ $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية ، وعيّن أساسها وحدها الأول

(2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، وعيّن نهاية المتتالية u_n.

الحل:

❶



❷ متزايدة ومتقاربة للعدد 4.

❸ (1) إثبات أن المتتالية v_n هندسية

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4}{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{5u_n + 4 - 4(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{5u_n + 4 + (u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{u_n - 4}{6u_n + 6} = \frac{u_n - 4}{6(u_n + 1)}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

أي المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{7}{3}$$

(2) كتابة v_n بدلالة n : $v_n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1} = 1 - \frac{5}{u_n + 1}$$

$$v_n - 1 = -\frac{5}{u_n + 1}$$

$$u_n = \frac{5}{1 - v_n} - 1$$

$$u_n = \frac{5}{1 - \left(-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)} - 1$$

$$u_n = \frac{5}{1 + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n} - 1$$

نهاية المتتالية u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{1 + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n} - 1\right) = \frac{5}{1 + 0} - 1 = 4$$

حيث $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

التمرين الرابع: نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية $d = 3, c = 2 - i\sqrt{3}, b = 2 + i\sqrt{3}, a = -1$ بالترتيب والمطلوب:

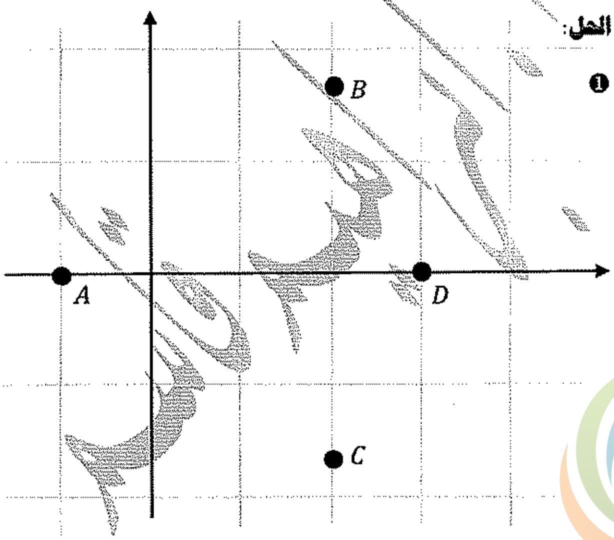
❶ ارسم النقاط A و B و C و D، ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عيّن $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC

❸ أثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

الحل:

❶



$$AB = |b - a| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |c - b| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |c - a| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

❷ $$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)=\arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\right)=\arg(i\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}$$

فالمثلث ADC مثلث قائم الزاوية في الزاوية C.

❸ نفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$

$$Z_G=\frac{(-1)Z_A+(2)Z_B+(2)Z_C}{-1+2+2}$$

$$=\frac{-(-1)+2(2+i\sqrt{3})+2(2-i\sqrt{3})}{3}$$

$$=\frac{1+4+i2\sqrt{3}+4-i2\sqrt{3}}{3}=\frac{9}{3}=3=Z_D$$

أي أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن C_f الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x(\ln x)^2$$

❶ أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x)=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

ثانياً: ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=-2x.\ln x$$

أثبت أنّه عند $x>0$ يكون $f(x)-g(x)=x.f'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g.

ثالثاً: ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

❶ بيّن أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي

$$y=x.f'(x_0)+g(x_0)$$

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ، ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_g عند النقطة التي فاصلتها x_0.

الحل:

أولاً:

❶ $$f(x)=x(\ln x)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$$

❷ دراسة تغيرات التابع f: التابع f معرف على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2=4.0=0$$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=(\ln x)^2+2x.\frac{1}{x}\ln x=\ln x\,(\ln x+2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \ln x\,(\ln x+2)=0$$

إما $\ln x=0$ ومنه $x=1\Leftarrow \boxed{f(1)=0}$

أو $\ln x+2=0$ ومنه $x=e^{-2}\Leftarrow \boxed{f(e^{-2})=4.e^{-2}}$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ثانياً: نلاحظ أن:

$$f(x)-g(x)=x(\ln x)^2+2x\ln x$$

$$=x\ln x\,(\ln x+2)=x.f'(x)$$

ومنه أياً يكن $x>0$ فإن $f(x)-g(x)=x.f'(x)$

دراسة الوضع النسبي

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	f فوق g		f تحت g		f فوق g	

ثالثاً:

❶ لدينا $f(x)=x(\ln x)^2$ عندئذٍ $f(x_0)=x_0(\ln x_0)^2$

ووجدنا $f'(x)=\ln x\,(\ln x+2)$ عندئذٍ:

$$m=f'(x_0)=\ln x_0\,(\ln x_0+2)$$

نعوض في معادلة المماس $T:y=m(x-x_0)+f(x_0)$

$$T:y=\left(\ln x_0\,(\ln x_0+2)\right)(x-x_0)+x_0(\ln x_0)^2$$

$$=\ln x_0\,(\ln x_0+2).x-x_0\ln x_0\,(\ln x_0+2)+x_0(\ln x_0)^2$$

$$=\ln x_0\,(\ln x_0+2).x-x_0(\ln x_0)^2-2x_0\ln x_0+x_0(\ln x_0)^2$$

$$=\underbrace{\ln x_0\,(\ln x_0+2)}_{f'(x_0)}.x-\underbrace{2x_0\ln x_0}_{g(x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=x.f'(x_0)-g(x_0)}$$

❷ لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور التراتيب نعوض في المعادلة $x = 0$ عندئذ: $y = g(x_0)$

الاستنتاج:

يقطع yy' لما $x = 0$ أي $g(x_0) = 0$

الإنشاء: المماس مستقيم يمر من النقطتين $(x_0, f(x_0))$ والنقطة $(0, g(x_0))$

المسألة الثانية: نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 1,2,3 ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد 2,3,4,5 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني ، والمطلوب:

❶ اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار

❷ ليكن A الحدث ((إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم (3)))

وليكن B الحدث ((مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)))

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟ علل إجابتك

❸ نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

❶ لحساب فضاء العينة نشكل الجدول التالي:

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \\ (3,2), (3,3), (3,4), (3,5) \end{Bmatrix}$$

❷ نلاحظ أن:

$$A = \{(3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (2,3), (1,3)\}$$

$$B = \{(1,5), (2,5), (2,4), (3,3), (3,4), (3,5)\}$$

$$A \cap B = \{(3,3), (3,4), (3,5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A).P(B) &= \frac{6}{12}.\frac{6}{12} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

فالحدثان A و B مستقلان.

❸ مجموعة قيم X هي $\Omega(X) = \{3,4,5,6,7,8\}$

X	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

ويكون لدينا

$$E(X) = \left(3 \times \frac{1}{12}\right) + \left(4 \times \frac{2}{12}\right) + \left(5 \times \frac{3}{12}\right) + \left(6 \times \frac{3}{12}\right) + \left(7 \times \frac{2}{12}\right) + \left(8 \times \frac{1}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{11}{2}}$$

$$E(X^2) = \left(3^2 \times \frac{1}{12}\right) + \left(4^2 \times \frac{2}{12}\right) + \left(5^2 \times \frac{3}{12}\right) + \left(6^2 \times \frac{3}{12}\right) + \left(7^2 \times \frac{2}{12}\right) + \left(8^2 \times \frac{1}{12}\right)$$

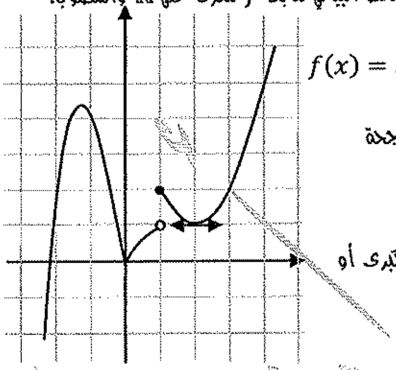
$$\Rightarrow \boxed{E(X^2) = \frac{193}{6}}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{193}{6} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{23}{12}$$

حل النموذج الوزاري الأول

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

❷ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

❸ هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟

❹ ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

❺ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$؟

❻ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$؟

الحل:

❶ حل وحيد لأن المستقيم $y = 5$ يقطع الخط البياني للتابع f بنقطة واحدة فقط.

❷ مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة قيم x التي تحقق $f(x) \geq 5$ فنلاحظ حسب الرسم أنها $[4, +\infty[$.

❸ نعم ، لأن: $I =]0,2[$ و $1 \in I$ و $I \cap \mathbb{R} = I$ فالشرط

$\forall x \in I, f(x) \leq f(2)$ (محقق)

❹ عدد القيم هو 4.

❺ بما أن المماس عند $x = 2$ أفقي عندئذ $f'(2) = 0$.

❻ لا ، لأنه غير مستمر (منقطع) عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي.

السؤال الثاني: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي لـ X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					$\frac{16}{81}$

❶ ما عدد الاختبارات في التجربة؟

❷ أكمل الجدول المجاور.

❸ احسب التوقع الرياضي وتباين المتحول العشوائي X؟

تذكرة بالتجربة البرنولية
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$
حيث $q = 1 - p$

الحل:

❶ عدد الاختبارات هو $n = 4$.

❷ كون التجربة برنولية فمن الجدول نجد أن:

$$P(X=4) = \frac{16}{81} = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow p = \frac{2}{3} \quad \& \quad q = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$P(X=0) = q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} p^1 . q^3 = 4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} p^3 q = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

للتحقق: $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

❸ حساب التوقع الرياضي: بما أن التجربة برنولية عندئذ:

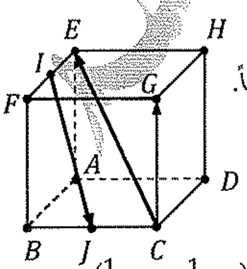
$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$V(X) = n.p(1-p) = 4$$

السؤال الثالث: في الشكل المجاور مكعب، I و J منتصفان $[EF]$ و $[BC]$

❶ أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$.

❷ أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

❶ $2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$

$$l_1 = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GE}$$

$$l_2 = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2$$

❷
$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CE}$$
$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}\right)+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CE}$$
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{JI}=\vec{0}$$

فالأشعة $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع: حل المعادلة $4^x=5^{x+1}$.

الحل:

نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x)=\ln(5^{x+1})$

$$x.\ln 4=(x+1)\ln 5 \qquad (\ln \text{ خواص})$$
$$x.\ln 4-x.\ln 5=\ln 5$$
$$x(\ln 4-\ln 5)=\ln 5$$
$$\boxed{x=\frac{\ln 5}{\ln 4-\ln 5}}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

❶ ليكن g التابع المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\sqrt{2}}{x-1}$$

الحل: حساب $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$

$$g(1)=\ln\left(\sqrt{1+1}\right)=\ln\sqrt{2}$$

إن g معرف واشتقاقي على I.

$$g'(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\sqrt{x+1}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x+1)}$$
$$g'(1)=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$

❹ احسب نهاية التابع f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق

$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$$

عند $+\infty$.

الحل: نعلم أن $-1\le \sin x\le 1$

$$2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$$

نقسم على $x-2>0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{2x-1}{x-2}\le\frac{2x+\sin x}{x-2}\le\frac{2x+1}{x-2}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-2}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=2\end{cases}$$ حسب مبرهنة الإحاطة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

التمرين الثاني: لتكن $(x_n)_{n\ge 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0=4$ و $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2$ في حالة $n\ge 0$.

نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n-8$.

أثبت أن $(y_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}y_n$

الحل: إثبات أن المتتالية هندسية $y_{n+1}=x_{n+1}-8$

$$y_{n+1}=\left(\frac{3}{4}x_n+2\right)-8$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}x_n-6=\frac{3}{4}x_n-\frac{24}{4}$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}(x_n-8)$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}y_n$$

ومنه فالمتتالية y_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول:

$$y_0=x_0-8=4-8=-4$$

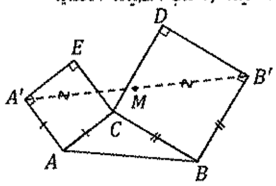
حدها العام بدلالة n هو $y_n=(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n=0 \quad \left(\left|\frac{3}{4}\right|<1 \text{ لأن}\right)$$

التمرين الثالث: ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور.

تمثل الأعداد العقدية a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'.

❶ B' هي صورة C وفق دوران مركزه B، عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b,c.



❷ أثبت أنّ $a' = i(c-a)+a$.

❸ عيّن العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

❹ كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي؟

الحل:

❶
$$b'-b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$$
$$b'-b = -i(c-b)$$
$$\boxed{b' = b - i(c-b)}$$

❷ إن A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، ومنه
$$a'-a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$$
$$\boxed{a' = i(c-a)+a}$$

❸ بما أن M منتصف $[A'B']$ عندئذ:
$$m = \frac{a'+b'}{2}$$
$$m = \frac{i(c-a)+a+b-i(c-b)}{2}$$
$$\boxed{m = \frac{a+i(b-a)}{2}}$$

❹ لا تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي، لأن m غير مرتبطة بـ c (حسب الطلب الثالث) وأيضاً a,b غير مرتبطتان بـ c.

التمرين الرابع: أثبت صحة المساواة

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$.

الحل: إثبات صحة المساواة:

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left[1-\cos^2(2x)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

حساب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}.0 - \frac{1}{4}.0\right]$$
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{16}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين — $100°$ لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = xe^{-x}$

❶ احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، احسب $f'(x)$، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعيّن قيمته الحدية، ثم ارسم C.

❷ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=1$.

❸ بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين.

❹ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي:

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ثم بيّن تقاربها واحسب نهايتها

الحل:

❶ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x.e^{-x} = -\infty$$

إن التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1.e^{-x} + (-e^{-x}.x) = (1-x)e^{-x}$$

نعدم المشتق ، أي: $f'(x)=0$

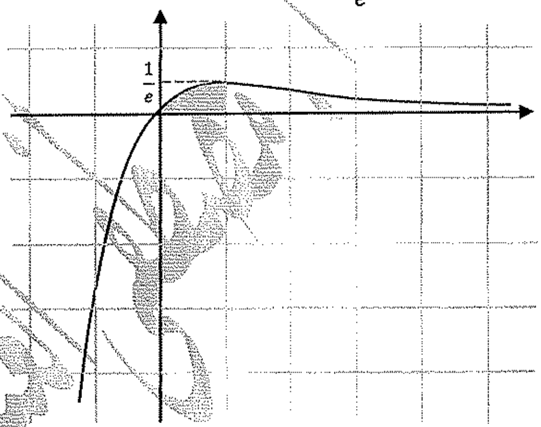
$$(1-x)e^{-x}=0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

التابع f متزايد على المجال $]-\infty,1[$ ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$.

القيمة الحدية هي $f(1)=\frac{1}{e}$



❷ $S=\int_0^1 x.e^{-x}dx$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $u=x \quad v'=e^{-x}$ ، $u'=1 \quad v=-e^{-x}$

$$S=[-xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=[-e^{-1}-0]-[e^{-x}]_0^1$$

$$S=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

$$\boxed{S=1-\frac{2}{e}}$$

❸ بملاحظة أن $f(0)=0$

$f(]0,1[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]1,\infty[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,\infty[$

إذاً: لكل $m\in]0,e^{-1}[$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلين

$x_1\in]0,1[$ و $x_2\in]1,\infty[$

❶ (a) لنبرهن بالتدريج أن: $E(n): 0<u_n\le 1$ أياً كان n.

لنثبت صحة العلاقة من أجل $E(0)$

لدينا فرضاً $u_0=1$ فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $0<u_k\le 1$ صحيحة.

ولنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ كما يلي:

$$0<u_k\le 1$$

$$f(0)<f(u_k)\le f(1) \quad \left(f \text{ متزايد على المجال } [0,1]\right)$$

$$0<u_{k+1}\le\frac{1}{e}<1$$

$$\boxed{0<u_{k+1}\le 1}$$

(b) لنبرهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة وذلك بالتدريج

أي لنثبت صحة العلاقة $E(n): u_{n+1}\le u_n$.

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$

$$\left.\begin{array}{l}u_0=1\\ u_1=\frac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow 1\ge\frac{1}{e}\Rightarrow u_1\le u_0 \quad (\text{صحيحة})$$

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $u_{k+1}\le u_k \ldots (*)$ صحيحة.

لنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ أي: $u_{k+2}\le u_{k+1}$ كما يلي:

$$u_{k+1}\le u_k \quad (\text{حسب } *)$$

$$f(u_{k+1})\le f(u_k) \quad \left(f \text{ متزايد على المجال } [0,1]\right)$$

$$u_{k+2}\le u_{k+1}$$

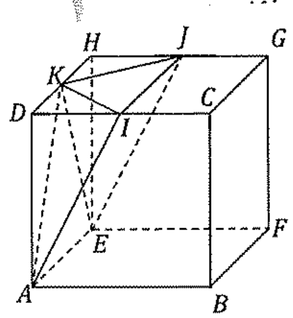
فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من $l=0$ حل المعادلة $f(x)=x$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

المسألة الثانية: نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب.

نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.



❶ أوجد إحداثيات النقاط A,I,E.

❷ اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

❸ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار النقطة K.

❺ احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

❻ أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

الحل:

❶ نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0), I\left(\frac{1}{2},0,1\right), A(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE} = (x_E - x_A, y_E - y_A, z_E - z_A)$$
$$= (0-0,1-0,0-0) = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AI} = (x_I - x_A, y_I - y_A, z_I - z_A)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-0,0-0,1-0\right) = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

❷ نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $AIJE$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AE} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AE} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AI} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a + c = 0$$

نفرض $c = 1$ لأن للمستوي أكثر من ناظم

$$\frac{1}{2}a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2$$

وبالتالي يكون $\vec{n}(-2,01)$.

معادلة المستوي $(AIJE)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$
$$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0) = 0$$
$$-2x+z = 0$$

❸ بعد K عن المستوي $(AIJE)$: نلاحظ حسب الرسم أن $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$$h = \mathrm{dist}(K,AIJE) = \frac{|(-2)(0)+0+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $KAIJE$

لذا لنحسب مساحة قاعدة الهرم $KAIJE$ وهي $AIJE$

$$S_{(AIJE)} = IJ \times AI = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{(AIJE)}.h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$$

❹ بما أن المستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$

$$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(AIJE)}} = (-2,0,1)$$

$$d:\begin{cases} x = -2t+0 \\ y = 0+\frac{1}{2} \\ z = t+1 \end{cases} ;t \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{d:\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t+1 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}}$$

❺ لحساب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ والمستقيم d

$$-2(-2t)+0\left(\frac{1}{2}\right)+t+1 = 0$$

$$4t+t+1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{5}}$$

ومنه إحداثيات N هي $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

❻ $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AE}$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = x\left(\frac{1}{2},0,1\right) + y(0,1,0)$$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{2}x,y,x\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

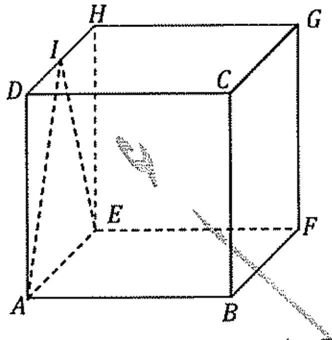
$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AI} + 5\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{AN} + 5\overrightarrow{NE}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -3\overrightarrow{NA} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$

إذاً N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3),(I,8),(E,5)$.

حل النموذج الوزاري الثاني

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول:



نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$.

1. أعط إحداثيات النقاط I و E و A.
2. جِد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.
3. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$
4. احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$.

الحل:

1. $A(0,0,0), E(0,1,0), I\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

2. $$O\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3},\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{0+0+0}{3},\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

3. $$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}$$
$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FO}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}}$$

إذا النقطة M تقع على $[FO]$

4. $$\overrightarrow{IA}=(x_A-x_I,y_A-y_I,z_A-z_I)=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$
$$\overrightarrow{IE}=(x_E-x_I,y_E-y_I,z_E-z_I)=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$
$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(1)(1)=\frac{5}{4}$$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$$

1. جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D.
2. احسب $I=\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

1. بالقسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \hline \mp x^2\mp x & x-6 \\ -6x+1 & \\ \pm 6x\pm 6 & \\ +7 & \end{array}$$

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

ومنه $a=1, b=-6, c=7$

2. $$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$$
$$=\left(\frac{2^2}{2}-6(2)+7\ln 3\right)-(0-0+7\ln 1)$$
$$\Rightarrow\boxed{I=7\ln(3)-10}$$

السؤال الثالث: ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

الحل:

نعلم أن العدد العقدي z يكون تخيلي بحت إذا حقق $\bar{z}=-z$ ومنه

$$\overline{\left(\frac{w.\bar{z}-z}{i.w-i}\right)}=\frac{\overline{w\bar{z}-z}}{\overline{iw-i}}$$
$$=\frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i.\bar{w}+i}\cdot\frac{w}{w}=\frac{\bar{w}.wz-\bar{z}.w}{-i.\bar{w}.w+iw}$$
$$=\frac{|w|z-\bar{z}.w}{-i.|w|+iw}=\frac{z-\bar{z}.w}{-i+iw}=-\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}$$

ومنه $\boxed{\overline{\left(\frac{w.\bar{z}-z}{i.w-i}\right)}=-\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}}$ وهو المطلوب.

السؤال الرابع: احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = e^{1-\sin x}$$

الحل:

$$f'(x) = (1-\sin x)'.e^{1-\sin x} = -\cos x\,.e^{1-\sin x}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

❶ ما نهاية التابع f عند $-\infty$.

❷ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x^2+1} & ; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$$

❷ $$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$$

حيث أن $f(0) = 0$ و $m = f'(0^+) = 1$

وبالتالي $T: y = 1(x-0)+0$ أي $\boxed{T: y = x}$.

التمرين الثاني:

لتكن $(x_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة

$$x_0 = 5 \quad و \quad x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$$

❶ احسب x_1, x_2, x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

❷ نعرّف $(y_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية.

❸ اكتب y_n بدلالة n. ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$.

الحل:

❶ $$x_1 = \frac{6}{5}.5 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = \frac{6}{5}\left(6+\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$$

نلاحظ أن المتتالية x_n متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج أي:

$$E(n): x_n \leq x_{n+1}$$

لنثبت صحة القضية $E(0)$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 5 \\ x_1 &= \frac{34}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \leq x_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$، أي: $x_n \leq x_{n+1} \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي: $x_{n+1} < x_{n+2}$ كما يلي:

$x_n \leq x_{n+1}$ حسب $(*)$

$\frac{6}{5}x_n \leq \frac{6}{5}x_{n+1}$ نضرب الطرفين بـ $\frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \leq \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}$ نجمع للطرفين $\frac{4}{5}$

$$x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

إذن فحسب البرهان بالتدريج فإن $x_n < x_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

❷

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n+4)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$$

فالمتتالية y_n هندسية أساسها $\frac{6}{5}$ وحدها الأول

$$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$$

❶ كتابة y_n بدلالة n: $y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

$$y_2 = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 9 \times \frac{36}{25}$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 9 \times \frac{36}{25}\, \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{1-\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{324}{25}\, \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{-\frac{1}{5}} = -\frac{324}{5}\left(1-\left(\frac{6}{5}\right)^8\right)$$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

❶ أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

❷ اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

الحل:

❶ إن $\mathcal{P}: 2x-3y+z-5=0$

كما أن المستقيم (AB) يقبل شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB} = (-3,4,5)$ نكتب معادلة المستقيم (AB) بالشكل الوسيطي

$$(AB):\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0\,; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB):\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 4t - 1 \;\; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

بالحل المشترك لمعادلة المستقيم (AB) و معادلة المستوي $\mathcal{P}$ فنجد:

$$2(-3t+2) - 3(4t-1) + (5t) - 5 = 0$$

بالإصلاح نجد أن: $-13t+2=0$ ومنه $t = \frac{2}{13}$ إذن يتقاطعان في النقطة C

$$\left.\begin{aligned} x &= -3\left(\frac{2}{13}\right)+2 = \frac{20}{13} \\ y &= 4\left(\frac{2}{13}\right)-1 = -\frac{5}{13} \\ z &= 5\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{10}{13} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

❷ نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ شعاع ناظم لـ Q.

$$Q \perp \mathcal{P} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0 \Rightarrow 2a-3b+c=0 \ldots (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -3a+4b+5c=0 \ldots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بـ 3 والمعادلة (2) بـ 2 عندئذ

$$\begin{cases} 6a-9b+6c=0 \\ -6a+8b+10c=0 \end{cases}$$ نجمع فنجد $-b+13c=0$

وبما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ: $b=13$

نعوض في (1) فنجد $a=19$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(19,13,1)$ إذا:

$$Q: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$19(x-2)+13(y+1)+1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q: 19x+13y+z-25=0}$$

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء ، وثلاث كرات زرقاء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائياً معاً كرتين من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

❶ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

❷ احسب كلاً من $P(X=1)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$.

❸ احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل:

❶ ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة فتكون مجموعة القيم التي يأخذها هي $\{1,2\}$.

❷

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{42} = \frac{3}{7}$$

إن الحدث $\{X=2\}$ هو الحدث المتمم لـ $\{X=1\}$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

❸

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{23}{14}}$$

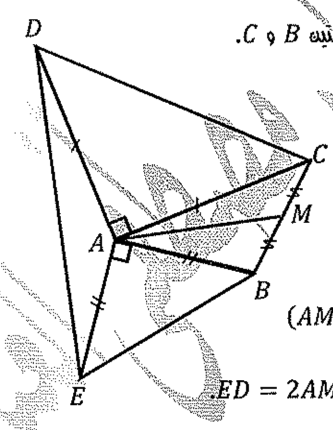
$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{4}{7} = \frac{19}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{19}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{12}{49}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين — 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

تتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$ ، ولتكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A متساويي الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A. ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C.



❶ احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و C و M بالترتيب.

❷ احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$

❸ نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$

- احسب $\frac{c}{b}$. ثم استنتج قياس الزاوية BAC.

الحل:

❶ نلاحظ أولاً أن $a = 0$ لأن A هي مبدأ المعلم.

بما أن M منتصف $[BC]$ عندئذ: $\boxed{m = \frac{b+c}{2}}$

بما أن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين فإن D ناتجة عن دوران C حول A بزاوية $+\frac{\pi}{2}$

$$d - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a) \Rightarrow d = i(c-a) + a \xRightarrow{\text{لأن } a=0} \boxed{d = ic}$$

بما أن المثلث AED قائم ومتساوي الساقين فإن E ناتجة عن دوران B حول A بزاوية $-\frac{\pi}{2}$

$$e - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow e = -i(b-a) + a \xRightarrow{\text{لأن } a=0} \boxed{e = -ib}$$

❷

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic-(-ib)}{m-0} = \frac{i(c+b)}{m} = \frac{2im}{m} = 2i$$

إثبات أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED أي إثبات أن $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ED}) = \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

إذن: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$.

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{|d-e|}{|m-a|} = 2 \Rightarrow \frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow \boxed{ED = 2AM}$$

❸ بما أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$

$$a = \frac{1.b + 1.c + 2.d + 3.e}{1+1+3+2}$$

ولكن $a = 0$ و $d = ic$ و $e = -ib$ عندئذ

$$0 = \frac{b + c + 2ic - 3ib}{7}$$

$$\Rightarrow -b(3i-1) + c(1+2i) = 0$$

$$\Rightarrow c(1+2i) = b(3i-1)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3i-1}{1+2i} . \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{b} = 1+i}$$

حساب قياس الزاوية BAC

$$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = 1+i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

❶ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

❷ أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f.

❸ ارسم الخط C في معلم متجانس.

❹ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=f(n)$ نضع

$$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

أثبت أنّ $S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

الحل:

❶ $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

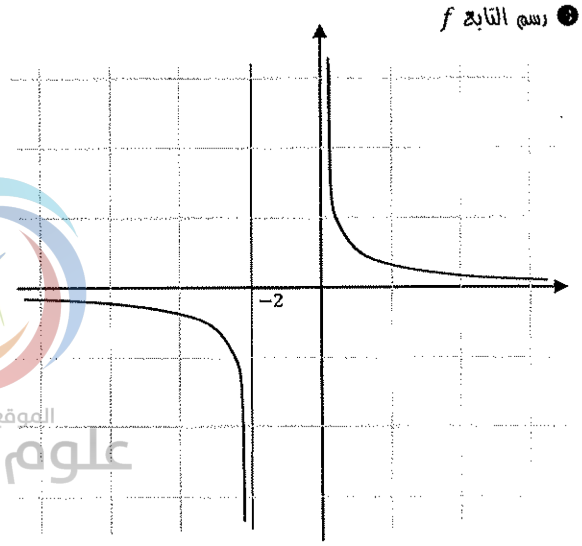
$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$

❷ إن f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}=\frac{x-x-2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{x(x+2)}<0$$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
f'		$-$			$-$	
f	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0

❸ رسم التابع f



❹ نلاحظ أن:

$$u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)=\ln(n+2)-\ln n$$

نبرهن العلاقة $E(n):S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$ بالتدريج

من أجل $E(1)$

$$S_1=\ln\left(\frac{3\times2}{2}\right)=\ln3=u_1$$

إذاً $E(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $E(n)$ أي: $S_n=\ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ صحيحة.

ولنبرهن صحة $E(n+1)$ ، أي: $S_{n+1}=\ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$=\ln\left[\frac{(n+3)(n+1)}{2}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right]$$

$$=\ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$$

فالقضية صحيحة وحسب البرهان بالتدريج فإن S_{n+1} صحيحة أياً يكن $n\in\mathbb{N}^*$

حل النموذج الوزاري الثالث

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً جدول التغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$		0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

❷ ما عدد القيم الحدية محلياً.

❸ اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

الحل:

❶ عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ هو واحد فقط لأن:

f مستمر ومتزايد على المجال $]0,1]$ و $0\in\,]-\infty,1]=f(]0,1])$ فيوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1]$ (حسب مبرهنة القيمة الوسطى)

❷ عددها واحد وهو $f(1)=1$.

❸ نلاحظ أن $f(1)=1$ قيمة حدية عندئذ المماس أفقي عند $x=1$ وهو $\boxed{T: y=1}$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2=1+i2\sqrt{2}$.

الحل: نلاحظ أن: $|1+i2\sqrt{2}|=\sqrt{1+8}=3$

نفرض $Z=a+ib$ عندئذ:

$$2ab=2\sqrt{2}\quad ...(1)$$

$$a^2-b^2=1\quad ...(2)$$

$$a^2+b^2=3\quad ...(3)$$

نجمع (2) مع (3) نجد: $2a^2=4$ ومنه $a^2=2$

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{إما}\quad a=+\sqrt{2}\Rightarrow b=+1\Rightarrow Z=\sqrt{2}+i \\ \text{أو}\quad a=-\sqrt{2}\Rightarrow b=-1\Rightarrow Z=-\sqrt{2}-i \end{cases}$$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ وفق

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ثم عين A بحيث $x>A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$$

$$f(x)\in\,]1.95,2.05[$$

$$f(x)\in\,]2-0.05,2+0.05[$$

$$|f(x)-2|<0.05$$

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|<\frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{3}{x-1}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{x-1}{3}\right|>20$$

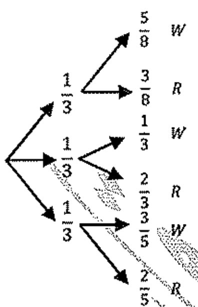
$$|x-1|>60$$

$$x-1>60 \qquad \text{كون } x \text{ في جوار } +\infty$$

$$x>61$$

إذا عندما $x>61$ فإن $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$.

السؤال الرابع: في المخطط الشجري المرسوم جانباً ، الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم اختيار كرة واحدة



❶ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء

فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل:

❶

$$P(R)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$$

❷

$$P(R_1)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{45}{173}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a,b ثم أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

❷ احسب $\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

❶

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \mp x^2 \mp 3x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ \pm x \pm 3 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

ومنه

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$$

إذاً $\Delta: y=x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

❷

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+3)\right]_0^2$$

$$=(2-2+\ln 5)-(0-0+\ln 3)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $u_0=e^3, u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$ و v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n=\ln(u_n)-2$ والمطلوب:

❶ أثبت أن v_n هندسية وعين v_0, q.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

❸ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n=e^2$

الحل:

❶

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\sqrt{u_n})-2$$

$$=\ln e+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u_n)-1=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n}$$

أي $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0=\ln(u_0)-2=\ln(e^3)-2=\ln(e^3)-2$$

$$=3\ln e-2=3-2=1$$

❷

$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\ln(u_n)-2$$

$$\ln(u_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\Rightarrow u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=e^{0+2}=e^2$$

حيث $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:

❶ جد إحداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

❷ أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

❸ أثبت أن الاشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً

❹ أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ).

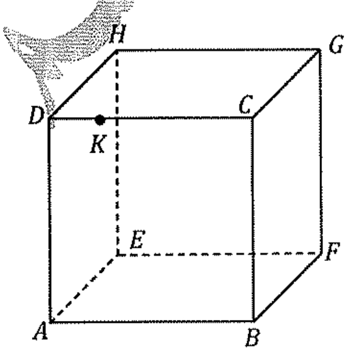
الحل:

❶ نرسم الشكل

لسهولة إيجاد

إحداثيات النقط

فنلاحظ حسب الرسم



$$G(1,1,1), K\left(\frac{1}{4},0,1\right), J\left(1,0,\frac{3}{4}\right), E(0,1,0), H(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{EG} = (x_G - x_E, y_G - y_E, z_G - z_E) = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{EJ} = (x_J - x_E, y_J - y_E, z_J - z_E) = \left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$$

❷ نلاحظ أن $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}}$ المركبات المتقابلة غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

❸ لكي تكون الأشعة مرتبطة خطياً يجب أن تحقق $\overrightarrow{HK} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \alpha(1,0,1) + \beta\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\alpha+\beta, -\beta, \alpha+\frac{3}{4}\beta\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \frac{1}{4} \quad \dots(1) \\ -\beta &= -1 \quad \dots(2) \\ \alpha+\frac{3}{4}\beta &= 0 \dots(3) \end{aligned}$$

من (2) نجد $\beta = 1$ نعوض في (3) فنجد $\alpha = -\frac{3}{4}$ نتحقق من (1) فنجد $1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ محقق ، إذا فالأشعة مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{HK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$$

❹ بما أن الأشعة مرتبطة خطياً فتقع في مستويات متوازية لأنها لا تشترك بنقطة ومنه (HK) يوازي المستوي الحاوي على EG و EJ وهو (EGJ).

التمرين الرابع: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r}x^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{8}{r}x^{8-r}\cdot x^{-r} = \binom{8}{r}x^{8-2r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $8-2r=0 \Leftarrow \boxed{r=4}$.

$$T_0 = \binom{8}{4}x^0 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$$

ثالثاً حل المسائل التالية (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$.

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$$

❶ أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x}g(x)$.

❷ بين أن للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<\frac{1}{2}$

❸ أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

❹ ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الحل:

أولاً: دراسة إطراد التابع g:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

في جوار $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ لإزالتها نكتب

$$g(x) = e^x\left(1+\frac{2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1+0-0) = +\infty$$

إن g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$g'(x) = e^x - 1$ ، نعدم المشتق ، أي: $g'(x) = 0$ ومنه

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln 1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f(0) = 3$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

إذاً: g متناقص على المجال $]-\infty,0[$ و g متزايد على المجال $]0,+\infty[$

حلول المتراجحة $g(x)>0$: حسب الجدول $]-\infty,+\infty[$.

ثانياً:

❶ إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x+1}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x-x+2}{e^x} = \frac{1}{e^x}(e^x-x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}g(x)$$

❷ نلاحظ أن:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0-e^{0}=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ وهو وحيد لأن

$$f'(x)=\frac{1}{e^{x}}g(x)>0$$

❸ نلاحظ أن:

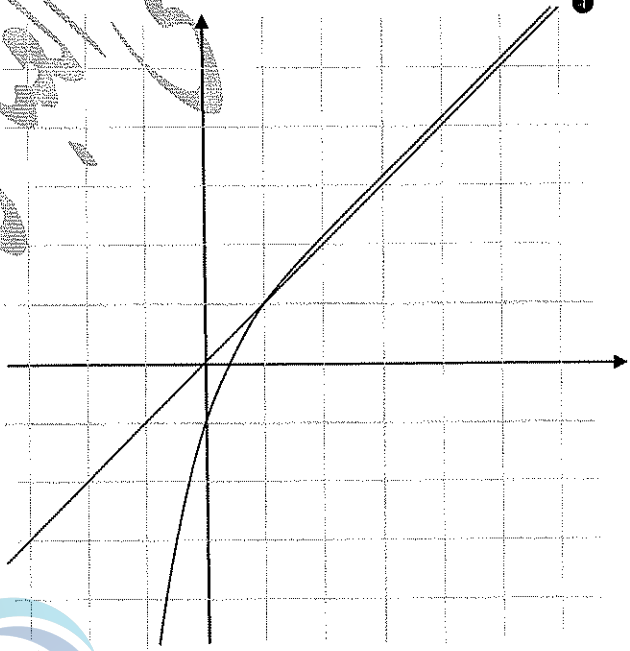
$$h(x)=f(x)-x=x+\frac{x-1}{e^{x}}-x=\frac{x-1}{e^{x}}=\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=0$$

إذا Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$. دراسة الوضع النسبي

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

❹



$$S=\int_{0}^{1}(x-f(x))dx=\int_{0}^{1}-(x-1)e^{-x}dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض
$u=x-1 \quad v'=-e^{-x}$
$u'=1 \quad v=e^{-x}$

$$S=[-(x-1)e^{-x}]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{-x}dx$$

$$S=(0+1)-[-e^{-x}]_{0}^{1}$$

$$S=1-(-e^{-1}+1)=1+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

❶ أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC).

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(1,2,4)$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B)=(1,-1,5)$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{27}$$

نلاحظ أن $BC^2=AB^2+AC^2$ فحسب عكس فيثاغورث فالمثلث ABC قائم.

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{126}}{2}$$

❷ $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow a-b+5c=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 2a+b-c=0$$

نجمع المعادلتين فنجد $3a-6c=0$

ولكن بما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ $a=2$ ومنه $b=-3$، إذا $\vec{n}(2,-3,1)$. فمعادلة المستوي (ABC)

$$(ABC): a(x-x_a)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x-3y+z-1=0}$$

❸

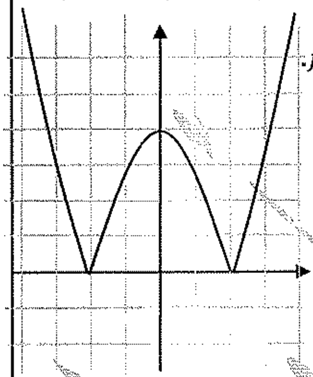
$$h=dist(D,ABC)=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\sqrt{14}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{126}}{2}\times\sqrt{14}=7$$

حل النموذج الوزاري الرابع

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانبًا الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ أوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$.

❷ احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.

❸ احسب $f([-2,2])$.

❹ كم قيمة كبرى وصغرى محليًا.

❺ اكتب جدول تغيرات التابع f.

الحل:

❶ أربع حلول لأن المستقيم $y = 2$ يقطع الخط C في أربع نقاط

❷ نلاحظ أن المستقيم المماس في النقطة $x = 0$ أفقي عندئذ $f'(0) = 0$

❸ $f([-2,2]) = [0,4]$

❹ ثلاث قيم وهي $f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$ و $f(0) = 4$.

❺ جدول تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل: شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ مقبول} \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 \text{ مرفوض}$$

السؤال الثالث:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الحل: إن المستوي المحوري يقبل شعاع ناظم $\overrightarrow{AB}$ حيث

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,4,-4)$$

ولتكن I منتصف $[AB]$ وتنتمي للمستوي المحوري P

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (3,1,1)$$

$$P: 2(x-3) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

$$2x + 4y - 4z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: x + 2y - 2z - 3 = 0}$$

السؤال الرابع: ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$؟

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$= \binom{8}{r}(y^2x^{-1})^{8-r} \cdot (xy^{-1})^r$$

$$= \binom{8}{r} y^{16-2r} x^{-8+r} x^r y^{-r} = \binom{8}{r} y^{16-3r} x^{2r-8}$$

نحصل على x^2y عندما

$$\left.\begin{array}{l} 16 - 3r = 1 \Rightarrow r = 5 \\ 2r - 8 = 2 \Rightarrow r = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r = 5}$$

$$T_5 = \binom{8}{5} x^2 y = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

ثانياً حل التمرينات الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول: إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً يكن x من $\mathbb{R}^*$

أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

الحل:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 0$$

حيث $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 1$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

❶ أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

❷ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n.

❸ اكتب u_n بدلالة n، واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

الحل:

❶ سنبرهن بالتدريج أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$ كما يلي:

لنثبت صحة القضية $E(0)$

$u_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ صحيحة

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي $0 < u_n < 1 \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$0 < u_n < 1$ (حسب $(*)$)

$f(0) < f(u_n) < f(1)$ (f متزايد)

التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ متزايد لأن: $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$

$$0 < 1 < \frac{u_n}{2-u_n} < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} < 2}$$

إذا فحسب التدريج فإنّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

❷

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

$$= \frac{2-u_n-u_n}{u_n} = \frac{2(1-u_n)}{u_n} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 2v_n}$$

إذا v_n متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

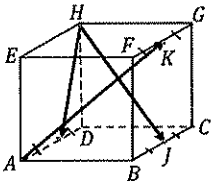
$$\Rightarrow \boxed{v_n = 2^n}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow 2^n + 1 = \frac{1}{u_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2^n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$$

حيث $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$.



❶ باختيار معلم متجانس

$(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$.

❷ أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$

ثم استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

❶ $A(1,0,0), K\left(\frac{1}{2},1,1\right), H(0,0,1), I\left(\frac{1}{2},0,0\right), J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

$$\overrightarrow{AK} = (x_K - x_A, y_K - y_A, z_K - z_A) = \left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

$$\overrightarrow{HI} = (x_I - x_H, y_I - y_H, z_I - z_H) = \left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$

$$\overrightarrow{HJ} = (x_J - x_H, y_J - y_H, z_J - z_H) = \left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

❷ إيجاد العددين المحققين لـ $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = a\left(\frac{1}{2},0,-1\right) + b\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, b, -a-b\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} \ldots (1) \\ b = 1 \ldots (2) \\ -a - b = 1 \ldots (3) \end{cases}$$

ومن (2) نجد $b = 1$

نعوض في (1) و (3) فنجد $a = -2$

ومنه $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

التمرين الرابع: عيّن العددين z_1 و z_2 حيث

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} 2\overline{z_1} - \overline{z_2} = -3 \\ 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\overline{z_1} = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{z_1} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (90° للأولى و 110° للثانية)

المسألة الأولى:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً ولتكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل.

احسب الاحتمالات التالية:

❶ $A|B$, B , A.

❷ إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

❶

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{31}{35}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\frac{22}{35}} = \frac{18}{22}$$

❷ مجموعة قيم المتحول X هي $\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$$

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{35} + 1^2 \times \frac{18}{35} + 2^2 \times \frac{12}{35} + 3^2 \times \frac{1}{35} = \frac{15}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{15}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

المسألة الثانية:

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ خطه البياني C.

❶ أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. وبين أنّه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها.

❸ استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر الآخر نرمزه بالرمز α أثبت أن $1 < \alpha < 2$.

❹ ارسم المقارب المائل ثم ارسم C، واحسب السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها

$$x = \ln 3 , x = \ln 2 , y = x - 2$$

الحل:

❶ نلاحظ أن $\Delta : y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ لـ C لأنّ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - (x-2)\right) = \lim_{x\to\infty} 2e^{-x} = 0$$

بما أن $f(x) - (x-2) = 2e^{-x} > 0$ عندئذ C فوق Δ

❷

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(2 + xe^{x} - 2e^{x}) = \infty(2 + 0 - 0) = \infty$$

إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه

$$f'(x) = -2e^{-x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{f(\ln 2) = -1 + \ln 2}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty, \ln 2[$ و

$$0 \in]-\infty, -1 + \ln 2[= f(]-\infty, \ln 2[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, \ln 2[$ وهو $x = 0$ حيث $f(0) = 0$.

f مستمر ومتزايد على المجال $]\ln 2, +\infty[$ و

$$0 \in]-1 + \ln 2, +\infty[= f(]\ln 2, +\infty[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]\ln 2, +\infty[$.

مما سبق للمعادلة جذران مختلفان في $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{matrix} f(1) = 2e^{-1} - 1 < 0 \\ f(2) = 2e^{-2} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(1).f(2) < 0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha \in]1,2[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

❹

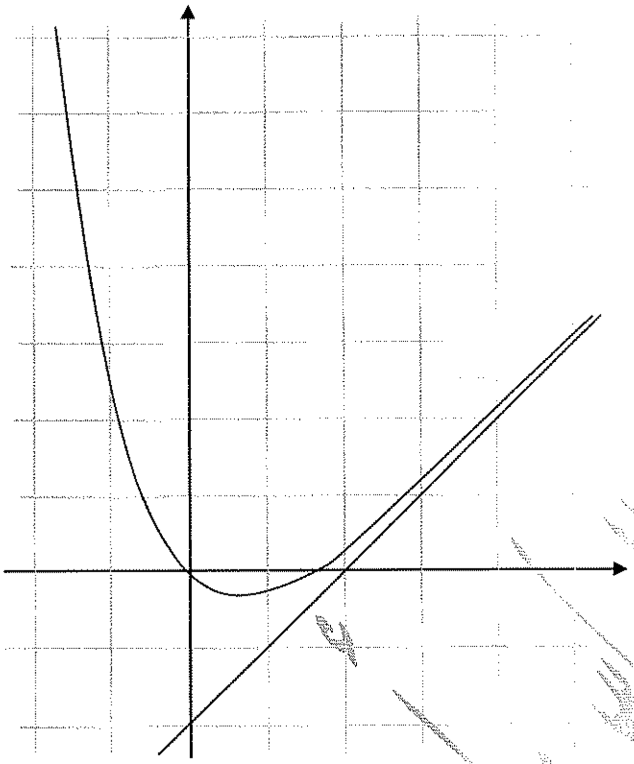
$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(f(x) - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(2e^{-x} + x - 2 - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^{-x}dx$$

$$= [-2e^{-x}]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= \left[-\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{2}\right)\right] = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$



حل النموذج الوزاري الخامس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية عيّن أساسها واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

الحل:

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1)$$
$$= 4n + 5 - 4n - 1 = 4$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$$u_{10} = u_0 + 10r = 1 + 10 \times 4 = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{1+41}{2} = 231$$

السؤال الثاني: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

الحل:

الشكل المثلثي للعدد $1 + i$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1+i| = \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1 - i\sqrt{3}| = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]}$$

السؤال الثالث:

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B

❷ بكم طريقة ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية.

الحل:

❶ عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة الأولى (للمؤلف B) يساوي $\binom{4}{3} = 4$

عدد طرق ترتيب الكتب المتبقية (ثلاث كتب للمؤلف A و كتاب للمؤلف B) يساوي $4!$

فحسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد طرق ترتيب الكتب وفق شرط هو

$$4 \times 4!$$

❷ عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية هو $1.6! = 6!$

السؤال الرابع: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل:

نفرض $X = e^x$ و $Y = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 & \dots(1) \\ 2X + Y = 4 + e & \dots(2) \end{cases}$$ نضرب المعادلة (1) بـ (-2) ونجمع

$$\boxed{Y = e} \Leftarrow \left(\frac{2}{e} + 1\right)Y = 2 + e \xLeftarrow{\text{نجمع}} \begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$$

ومنه $X = 2 \Leftarrow X - \frac{1}{e}e = 1$

إذاً $\boxed{y = 1} \Leftarrow e^y = e$

$\boxed{x = \ln 2} \Leftarrow e^x = 2$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

❶ احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right), g'(x), g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

❷ احسب مشتق التابع $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

الحل:

❶
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$g'(x) = \tan^2 x + 1$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

الاستنتاج:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

❷
$$f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

التمرين الثاني: لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}, (y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق
$$x_n = \frac{4n+5}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

برهن أنهما متجاورتين.

الحل: ★ دراسة إطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$
$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$
$$= \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1}$$
$$= \frac{4n^2+13n+9-(4n^2+13n+10)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

★★ دراسة إطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$
$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{4n^2+13n+10-(4n^2+13n+3)}{(n+3)(n+2)}$$
$$= \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{(4n+5)(n+2)-(4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{4n^2+8n+5n+10-(4n^2+4n+n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$x_n - y_n = \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}, (y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين الثالث: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

❶ عين عددين a, b يحققان $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل:

❶
$$P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$$
$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + (a^2+ab)z + a^2$$

لكن $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$ نجد أن:
$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ 2a+ab=10 \\ a^2+ab=10 \\ a^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} a=2 \Rightarrow b=3 & \text{مقبول} \\ a=-2 \Rightarrow b=7 & \text{مرفوض} \end{array}$$

عندئذ $P(z) = (z^2+2z+2)(z^2+3z+2)$

❷ $P(z) = (z^2+2z+2)(z^2+3z+2) = 0$ ومنه

إما $z^2+3z+2=0 \Leftarrow (z+2)(z+1)=0 \Leftarrow \left.\begin{array}{l} z=-1 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

أو $z^2+2z+2=0$ نحل $\Delta = 2^2 - 4(1)(2) = -4$

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \quad , \quad z_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

فمجموعة حلول $P(z) = 0$ هي $\{-1, -2, -1+i, -1-i\}$.

التمرين الرابع: يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B.

إذا علمت أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي 4% وفي انتاج B هي 10%. نسحب عشوائياً مصباحاً.

❶ ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

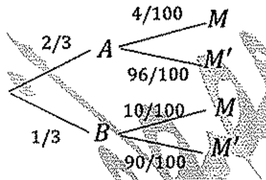
❷ إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من B.

الحل:

❶ لنفرض أن M الحدث سحب مصباح معطوب

و A الحدث سحب مصباح من المعمل A

و B الحدث سحب مصباح من المعمل B



$$P(A)=\frac{400}{600}=\frac{2}{3} \qquad P(B)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$$

$$P(M_A)=\frac{4}{100} \qquad P(M_B)=\frac{10}{100}$$

$$P(M)=P(A\cap M)+P(B\cap M)$$

$$=P(A\cap M).P(M|A)+P(B).P(M|B)$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{4}{100}+\frac{1}{3}.\frac{10}{100}=\frac{18}{300}$$

❷ $$P(M_B|M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{10}{100}}{\frac{18}{300}}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

❶ ادرس نهايات التابع عند اطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$.

❷ أوجد معادلة مقارب أفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

❸ احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ماله من قيم حدية محلية

❹ أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=-2$

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$.

الحل:

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

❷ $\Delta: y=0$ مقارب أفقي للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad و \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

دراسة الوضع النسبي:

x		-2	
$f(x)-0$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C_f تحت Δ		C_f فوق Δ

❸ حساب $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1.(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-x-3}{(x+1)}}$$

دراسة تغيرات التابع f

$$f'(x)=0\Rightarrow -x-3=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

القيمة الحدية (صغرى) هي $f(-3)=-\frac{1}{4}$.

❹ $f(-2)=0$ و $m=f'(-2)=+1$

$$T: y=m(x-(-2))+f(-2)=+1(x+2)+0$$

$$\Rightarrow \boxed{T: y=x+2}$$

❺

$$S=\int_0^3\frac{x+2}{(x+1)^2}dx=\int_0^3\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

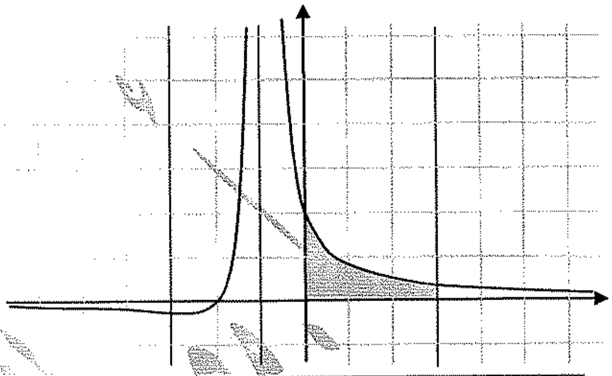
$$=\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x+1)+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^3=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

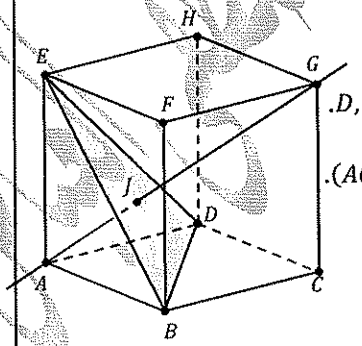
$$= \left(\ln(4) - \frac{1}{4}\right) - (\ln(1) - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \ln(4) + \frac{3}{4}}$$

رسم الخط البياني C للتابع f



المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



❶ عين إحداثيات النقاط D, B, E, G.

❷ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG).

❸ أثبت أن المستقيم (AG) ناظم مع للمستوي (EDB).

❹ المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها

❺ أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

❻ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل:

❶ $D(0,3,0), B(3,0,0), E(0,0,3), G(3,3,3)$

❷ إن المستقيم (AG) يقبل شعاع توجيه

$$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A, y_G - y_A, z_G - z_A) = (3,3,3)$$

$$(AG): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases} \Rightarrow (AG): \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

❸ $\overrightarrow{EB} = (x_B - x_E, y_B - y_E, z_B - z_E) = (3,0,-3)$

$$\overrightarrow{ED} = (x_D - x_E, y_D - y_E, z_D - z_E) = (0,3,-3)$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB} = -3(3) + 0(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED} = 0(3) + (-3)(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{ED}$$

وبما أن الشعاعان $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطان خطياً عندئذ $(AG) \perp (EDB)$

❹ نوجد معادلة المستوي (EDB)

وجدنا أن $(AG) \perp (EDB)$ عندئذ $\vec{n} = \overrightarrow{AG} = (3,3,3)$

$$(EDB): a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$$

$$3(x - 0) + 3(y - 0) + 3(z - 3) = 0$$

$$3x + 3y + 3z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(EDB): x + y + z - 3 = 0}$$

بالحل المشترك نجد أن:

$$3t + 3t + 3t - 3 = 0 \Rightarrow 9t = 3 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$

ومنه احداثيات نقطة التقاطع $J(1,1,1)$ لأن:

$$x = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, y = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, z = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

❺ إن المثلث EDB مثلث متساوي الأضلاع لأن EB, DB, ED هي أقطار لمربعات متطابقة فهي متساوية أي $EB = DB = ED$

إذن نقطة تلاقي الارتفاعات في مركز ثقل المثلث ومنه k مركز ثقل المثلث EDB

$$K = \left(\frac{x_E + x_D + x_B}{3}, \frac{y_E + y_D + y_B}{3}, \frac{z_E + z_D + z_B}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{0 + 0 + 3}{3}, \frac{0 + 3 + 0}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3}\right) = (1,1,1) = J$$

إذن J هي مركز ثقل المثلث EDB ونقطة تلاقي ارتفاعه.

❻ نعلم أن $V_{AEDB} = \frac{1}{3} S_{EDB}.h$ عندئذ لنحسب h و S_{EDB}

حيث $a = ED$
$= \sqrt{9 + 0 + 9}$
$= \sqrt{18}$

$$S_{EDB} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{18})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$h = AJ = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{9}{2}$$

حل النموذج الوزاري السادس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

❶ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

❷ هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟

❸ هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

❹ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

الحل:

❶ المستقيم $y=3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

والمستقيم $x=1$ مقارب شاقولي

والمستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي

❷ لا يوجد لأن $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)\neq\infty$

❸ لا لأن المشتق لا ينعدم.

❹ إن f متناقص على المجال $]-1,1[$ و $f(]-1,1[)=]-\infty,\infty[\ni 0$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني: اكتب العدد العقدي

$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي

الحل:

$$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=(\sqrt{2}-1)e^{\frac{4\pi}{3}i}}$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC.

جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث DBC عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{GA}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$$

فمجموعة النقاط M تشكل كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x$.

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ثم استنتج $\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}$.

الحل:

$$f(x)=e^x\Rightarrow f(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$f'(x)=e^x\Rightarrow f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}=f'(\ln 2)=2$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}\quad,\quad u_0=0$$

❶ أثبت أنّ $0\leq u_n\leq 1$.

❷ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶ سنثبت صحة العلاقة $0\leq u_n\leq 1$ بالتدريج

نثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي: $u_0=0\Rightarrow 0\leq u_0=0\leq 1$

فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي: $0\leq u_n\leq 1\ \dots(*)$

ولنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ كما يلي:

نلاحظ أن f متزايد لأن

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

$0 \le u_n \le 1$ (حسب $*$)

$f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ (لأن f متزايد)

$0 \le \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$

$0 \le u_{n+1} \le 1$

❷ لنثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة أي لنثبت أن $E(n): u_n < u_{n+1}$ بالتدريج

إن العلاقة $E(0)$ صحيحة لأن: $\left.\begin{array}{l}u_0=0\\ u_1=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow u_1 > u_0$

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي $u_{n+1} > u_n \ ... (*)$

لنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

$u_{n+1} > u_n$ (حسب $*$)

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$ (لأن f متزايد)

$u_{n+2} > u_{n+1}$

إذن فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

❸ بما أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة من $l=1$ حل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$

$\frac{2x+1}{x+2}=x$

$2x+1=x^2+x$

$x^2=1$

$x=1$ مقبول

$x=-1$ مرفوض

إذاً: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

التمرين الثاني: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه

الحل:

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{0,3,5\}$

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{60}{120}=\frac{6}{12}$$

r	0	3	5
$P(X=r)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X)=0.\frac{6}{12}+3.\frac{5}{12}+5.\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$$

$$E(X^2)=0^2.\frac{6}{12}+3^2.\frac{5}{12}+5^2.\frac{1}{12}=\frac{35}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{35}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{55}{18}$$

التمرين الثالث: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

الحل:

$$T_r=\binom{6}{r}(x^2)^{6-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{6}{r}x^{12-2r}.x^{-r}$$

$$=\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $12-3r=0 \Leftarrow \boxed{r=4}$.

$$T_0=\binom{6}{4}x^0=\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}=15$$

التمرين الرابع: عيّن مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

الحل:

الجذر معرف عندما $1+x\ge0$ أي $]-1,+\infty[$

مجموعة تعريف التابع f هي $]-1,+\infty[$ عدا القيم التي تعدم المقام أي عدا حلول المعادلة $\sqrt{1+x}-1=0$ عندئذ

$$\sqrt{1+x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{1+x}=1$$

نربع الطرفين $\Rightarrow 1+x=1 \Rightarrow x=0$

ومنه $D_f=\ ]-1,+\infty[\setminus\{-1\}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$
$$=1\left(\sqrt{1+0}+1\right)=2$$

حيث $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1. أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف.
2. ادرس اطراد التابع ونظم جدولاً بها.
3. بيّن القيم الحدية المحلية للتابع f. وارسم خطه البياني.
4. استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$

الحل:

1. $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to \infty}f(x)=0$

2. إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ: $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)e^{-x}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f(2)=4e^{-2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

اطراد التابع f: نلاحظ حسب الجدول أن:

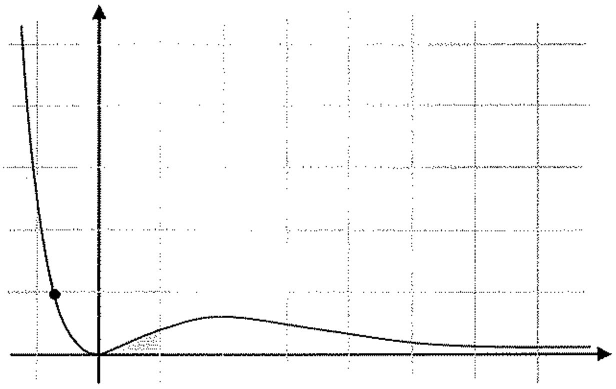
f متزايد على المجال $[0,2]$

و f متناقص على المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$

3. القيم الحدية هي $f(0)=0$ وهي قيمة حدية صغرى

$f(2)=4e^{-2}$ وهي قيمة حدية كبرى

رسم التابع f



4. عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$ هو نفس عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

فنلاحظ حسب الجدول أن:

f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$ و

$1\in]0,+\infty[=f(]-\infty,0])$

فللمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.

بما أن $1\notin[0,4e^{-2}]=f([0,2])$

فلمعادلة $f(x)=1$ مستحيلة المجال $[0,2]$.

بما أن $1\notin]0,4e^{-2}[=f(]0,+\infty[)$

فلمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$.

مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.

5. حسب الرسم نجد أن:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

نطبق التجزئة فنفرض

$u=x^2$	$v'=e^{-x}$
$u'=2x$	$v=-e^{-x}$

$$I=[-x^2e^{-x}]_0^1-\int_0^1 -2xe^{-x}dx=-e^{-1}+2\int_0^1 xe^{-x}dx$$

نطبق التجزئة مرة ثانية فنفرض

$u=x$	$v'=e^{-x}$
$u'=1$	$v=-e^{-x}$

$$I=-e^{-1}+2[-xe^{-x}]_0^1-2\int_0^1 -e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}+2(-e^{-1}+0)+2[-e^{-x}]_0^1=\boxed{2-\frac{5}{e}}$$

المسألة الثانية:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً ، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن S الكرة مركزها A ونصف قطرها AB.

❶ أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي P.

❷ جد معادلة الكرة S.

❸ أثبت أن المستوي Q مستوٍ مماس للكرة S.

❹ أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \ ;t\in\mathbb{R} \\ z=4-3t \end{cases}$$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q.

(b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

الحل:

❶
$$P: a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{P: 2x+y-z-8=0}$$

❷ الكرة التي مركزها A ونصف قطرها

$$R^2=AB^2=2^2+1^2+(-1)^2=6$$
$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$
$$S:(x-1)^2+(y-1)+(z-1)^2=6$$

❸
$$dist(A,Q)=\frac{|1-1+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow dist(A,Q)=6=AB=R$$

إذن المستوي Q يمس الكرة S.

❹ $\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2),\overrightarrow{n_Q}=(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{n_Q}=-\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\perp Q$

لنثبت أن $c\in Q$ لذا نعوض c في معادلة المستوي Q

$$0-2-2+4=0\Rightarrow 0=0$$

إذا $C\in Q$ و $\overrightarrow{AC}\perp Q$ عندئذ C المسقط القائم للنقطة C على Q.

❺ (a) إثبات أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q

$$\left.\begin{matrix} x-y+2z+4=0 \\ 2x+y-z-8=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 3x+z-4=0$$
$$\Rightarrow z=4-3x$$

نفرض $\boxed{x=t}$ عندئذ: $\boxed{z=4-3t}$ و

$$y=x+2z+4=t+2(4-3t)+4\Rightarrow \boxed{y=12-5t}$$

وبالتالي فمعادلة الفصل المشترك للمستويين P و Q هي:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \ ;t\in\mathbb{R} \\ z=4-3t \end{cases}$$

(b) نفرض R المستوي المحوري للقطعة BC

نوجد إحداثيات النقطة I منتصف $[BC]$

$$I=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2},\frac{z_B+z_C}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$$
$$R:-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0+1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\boxed{R:-3x-z+5=0}$$

حتى يكون d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ يجب أن يحقق معادلة المستوي

$$-3t-(4-3t)+4=-3t-4+3t+4=0$$

إذاً d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.