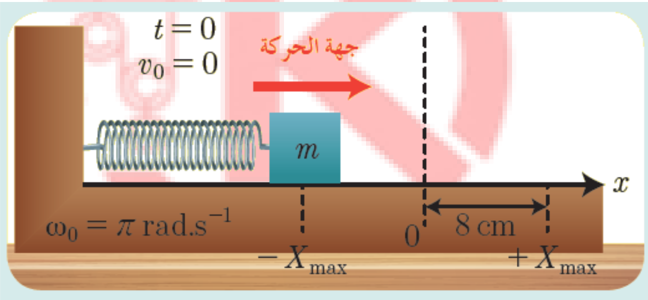
النواس المرن: اختبر نفسي $(P: 16)$

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة:

1- تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



$\overline{x}=0.08cos(\pi t+\pi)$	A
$x=8cos(\pi t-\pi)$	B
$x=0.008cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$	C
$x=0.8cos\,\pi t$	D

الشرح: من الشكل البياني نجد:

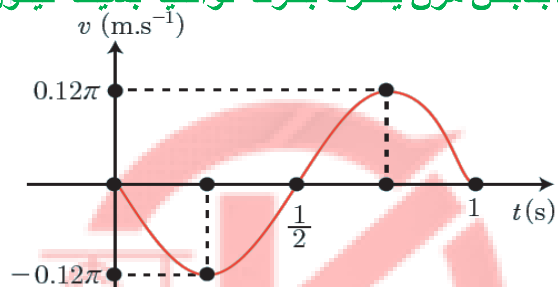
$$X_{max}=8\ cm=8\times10^{-2}=0.08\ m$$

لإيجاد $\varphi=0$ نعوض بشرط البدء:

$$\left.\begin{array}{r} t=0 \\ x=-X_{max} \\ v=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi) \\ \Rightarrow -X_{max}=X_{max}\cos(\omega_0\times0+\varphi) \\ cos=-1\Longrightarrow\varphi=\pi rad \end{array}$$

نعوض مكان الثوابت: $x=0,08\ \ cos(\pi t+\ \pi)$

2- الرسم البياني جانباً يُمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



$\overline{v}=0.06\pi\cos\pi t$	A
$\overline{v}=-0.06\pi\cos2\pi t$	B
$\overline{v}=-0.12\pi\sin2\pi t$	C
$\overline{v}=0.12\pi\sin\pi t$	D

من الشكل البياني نجد:

$$T_0=1s\ \Rightarrow\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi\ rad.s^{-1}$$

$$v_{max}=0.12\pi m.s^{-1}$$

$$v_{max}=\omega_0\,X_{max}\Longrightarrow X_{max}=\frac{0.12}{2\pi}=0,06\ m$$

$(v=0\ ,t=0)$ نبدل بتابع السرعة.

$$v=-\omega_0\,X_{max}\,sin(\omega_0 t+\overline{\varphi})$$

$$0=-\omega_0\,X_{max}\,sin(\overline{\varphi})\Longrightarrow sin\varphi=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=0rad\\ \varphi=\pi\ rad\end{array}\right.$$

تختار قيمة (φ) تحقق الشكل البياني للتابع:

* $\boxed{\varphi = 0rad}$ مقبول لأنه يحقق السرعة سالبة في اللحظة:

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\,S$$

$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06\,sin\left(2\pi \times \frac{1}{4} + 0\right)$$

$$= -0.12\pi m.s^{-1}$$

* $\boxed{\varphi = \pi rad}$ مرفوض لأنه يحقق السرعة موجبة في اللحظة:

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\,S$$

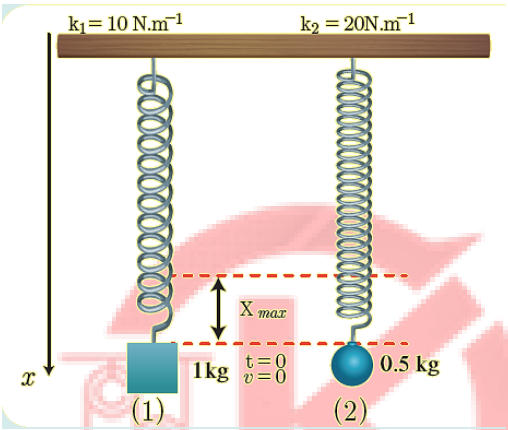
$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06\,sin\left(2\pi \times \frac{1}{4} + \pi\right)$$

$$\bar{v} = +0.12\pi m.s^{-1}$$

* نبدل مكان الثوابت نجد:

$$\boxed{v = -0.12\,\pi\,sin(2\pi t + 0)}$$

3- يمثل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها، فإنها بعد مضي $3(s)$ من بدء حركتيهما.



A	تلتقيان في مركز الاهتزاز.
B	تلتقيان في الموضع $+X_{max}$
C	لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$
D	لا تلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$.

لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$

الشرح:

$$T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2s$$

وبما أنه بدء الاهتزاز مع بدء الزمن:

$$(t = 0\,, v = 0) \Rightarrow x = +X_{max}$$

وبعد مرور $(t = 3s)$ ينجز هزة كاملة ونصف هزة $\Leftarrow x = -X_{max}$

$$T_{0_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{20}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{4 \times 10}} = 1s$$

وبما أنه بدء الاهتزاز مع بدء الزمن:

$$(t = 0\,, v = 0) \Longrightarrow x = +X_{max}$$

وبعد مرور $(t = 3s)$ ينجز ثلاث هزات أي سيعود لنقطة البدء $\Longleftarrow x = +X_{max}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

1- أثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة.

الحل:

$$E_{tot} = E_P + E_K$$

$$E_k = E_{tot} - E_P$$

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} K\, X_{max}^2 - \frac{1}{2} K\, x^2$$

$$mv^2 = k\, X_{max}^2 - kx^2$$

$$mv^2 = k\,(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v^2 = \frac{k}{m}\,(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v^2 = \omega_0{}^2 (X_{max}^2 - x^2)$$

ولكن:

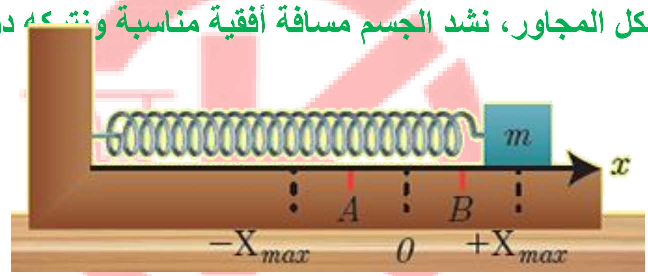
$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\overline{v} = \omega_0 \sqrt{(X_{max}^2 - x^2)}$$

العلاقة الذهبية:

نستطيع استخدام العلاقة السابقة مع المسائل دون برهان مع الانتباه على اشارة السرعة حسب نص المسألة.

2- نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k مثبت من أحد طرفيه مربوط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته (m) يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس كما في الشكل المجاور، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ونتركه دون سرعة ابتدائية المطلوب:



a- ادرس حركة الجسم واستنتج التابع الزمني للمطال.

b- استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الوضعين A . B حيث:

$$x_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$ ماذا نستنتج؟

الحل:

(a

جملة المقارنة: خارجية

الجملة المدروسة: النواس المرن

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة توتر النابض: $\vec{F_s}$

ثقل جسم: $\vec{W}$

رد فعل السطح: $\vec{R}$

انطبق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F}_s = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محورأفقي موجه كما في الشكل:

$$o + o - F_s = m\bar{a} \Longrightarrow -F_s = m\bar{a}$$

تؤثر على النابض القوة $\overrightarrow{\grave{F}_s}$ التي تسبب له الاستطالة $\bar{x}$ حيث:

$$\grave{F}_s = F_s = k\bar{x}$$

بالتعويض نجد:

$$-k\bar{x} = m(\bar{a})$$

$$a = (\bar{x})''_t$$

$$-\frac{k}{m}\,\bar{x} = m(\bar{x})''_t$$

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\,\bar{x} \dots ①$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\ \ cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = -\,\omega_0 X_{max}\, sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\,\omega_0^2 X_{max}\, cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2\ \ \bar{x} \dots ②$$

بالمساواة ① و ② نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق $0 < m\,.\,k$ موجبان دوما .

حركة الجسم هي حركة جيبية انسحابية التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max}\ \ cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b) استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max}:

$E_k = ?$ عند كل $x_A = \frac{-X_{max}}{2}$, $x_B = \frac{+X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_{tot} = E_P - E_k$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,k\,X_{max}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2$$

أ. كنانة شموط (0988055790)

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)}$$

$$\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$E_K = \frac{1}{2}\,k\,(X_{max}^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right)$$

$$E_K = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{3}{4}E_{tot}}$$

$$x_B = \frac{+X_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,k\,\left(\frac{1}{2}X_{max}^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}E_{tot}}$$

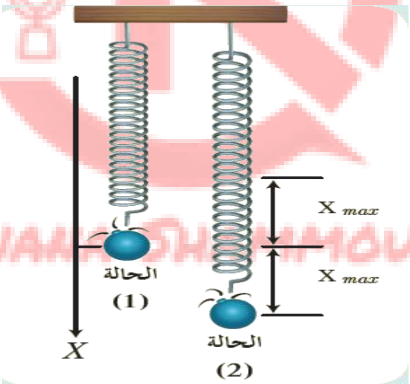
النتيجة:

بزيادة القيمة المطلقة للمطال تقل الطاقة الحركية وتزداد الطاقة الكامنة المرونية .

3- جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين:

a- مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟

b- المطال الأعظمي الموجب؟



لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} = m.\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{const}$$

a) الانفصال في مركز الاهتزاز: قذف شاقولي نحو الأعلى (لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية شاقولية نحو الأعلى). b) الانفصال في المطال الأعظمي الموجب: سقوط حر (لأن السرعة الابتدائية للجسم معدومة).

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

في جميع المسائل

$$(4\pi = 12.5\ .\ \pi^2 = 10\ .\ g = m.s^{-1})$$

المسألة الأولى:

تتألّفُ هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابية من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابتِه $k = 10N.m^{-1}$، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحملُ في طرفه الآخر جسماً كتلتُه m ، ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة $x = 0.1cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. المطلوب:

1. أوجدْ قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.
2. احسبْ كتلة الجسم m.
3. احسب قيمةَ السّرعة في موضع مطالُه $x = 6\ cm$ ، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجبِ للمحور.

$k = 10N.m^{-1}$. كتلة الجسم m

$$x = 0.1\,cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bar{x} = X_{max}\ \ cos(\omega_0 t + \varphi)$$

1 الثوابت:

$$X_{max} = 0.1\ m$$

$$\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

2 $m = ?$

$$k = m\omega_0^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{10} = 1\ kg$$

③ $v=?$ $\left[\begin{array}{l} X = 6cm = 6\times10^{-2}m \\ v > 0 \text{ يتحرك بالاتجاه الموجب} \end{array}\right]$

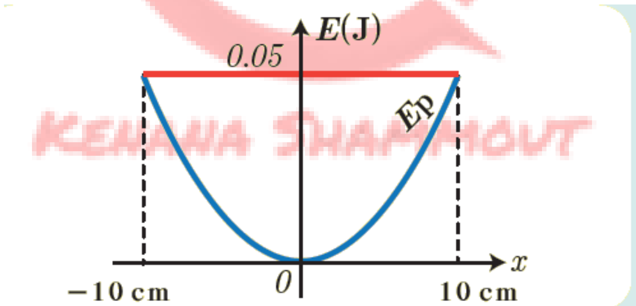
لحساب السرعة بمكان مطالة (x) يمكن استخدام العلاقة:

$$\boxed{v=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}}$$ حفظ

نعوض:

$$v=\pi\sqrt{10^{-2}-36\times10^{-4}}$$
$$=\pi\sqrt{100\times10^{-4}-36\times10^{-4}}$$
$$v=\pi\sqrt{64\times10^{-4}}=8\pi\times10^{-2}$$
$$v=25\times10^{-2}\,m.s^{-1}$$

المسألة الثانية:



يوضّحُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ الطاقةِ الكامنة المرونية بتغيّرِ الموضعِ لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلّفةٍ من نابضٍ مرنٍ حلقاتُهُ متباعدةٌ ثابتُ صلابتِهِ k معلّقٌ به جسمٌ كتلتُهُ $0.4\ kg$، المطلوب:

① استنتجْ قيمةَ ثابتِ صلابةِ النابضِ k .

② احسبْ الدورَ الخاصّ للحركةِ.

③ احسبْ قيمةَ السرعةِ عند المرورِ في مركزِ الاهتزاز.

من الشكل البياني نستنتج:

$$X_{max}=10cm=0.1\ m$$
$$E_{tot}=0.05\ J$$

الحل:

① $k=?$

$$E_{tot}=\frac{1}{2}\,k\,X_{max}^2$$
$$k=\frac{2E_{tot}}{X_{max}^2}$$
$$k=\frac{2\times0.05}{10^{-2}}=\frac{10^{-1}}{10^{-2}}=10\ N.m^{-1}$$

② $T_0=?$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}}=2\pi\sqrt{4\times10^{-2}}$$
$$T_0=2\pi\times2\times10^{-1}=\frac{4\pi}{10}=\frac{12.5}{10}$$
$$=1.25s$$

③ $v=?$ عند مركز الاهتزاز

إن قيمة السرعة (طويلة) عند المرور من مركز الاهتزاز تكون أعظمية.

$$v_{max}=\omega_0X_{max}$$
$$v_{max}=\frac{2\pi}{T_0}X_{max}$$
$$v_{max}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}}\times10^{-1}=5\times10^{-1}\ m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة:

نشكل هزّازة بسيطة من جسم كتلته $m=1\ kg$ معلّق بطرف نابضٍ مرنٍ شاقوليّ مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزّات في $10s$، ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $16\ cm$. المطلوب:

① استنتج قيمة الاستطالة السكونيّة لهذا النابض، ثمّ احسب قيمتها.

② احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).

③ احسب قيمة التسارع في مطال $x=10cm$.

④ احسب الطاقة الكامنة المرونيّة في موضع مطاله $x=-4cm$ ، واحسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ.

$$m=1\ kg$$
$$(N=10\ \text{هزة}.\quad t=10s)$$
$$(2X_{max}=16\times10^{-2}m)$$

الحل:

① استنتاج علاقة الاستطالة السكونية لهذا النابض ثم حساب $x_0=?$

يستطيل النابض x_0 بعد تعليق الجسم فيه ويتوازن.

جملة مقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة الثقل $\vec{W}$

قوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$

بتطبيق شرط التوازن الانسحابي: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$W - F_{s_0} = 0$

$W = F_{s_0}$ ①

تؤثر في النابض القوة $\vec{F}_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

إذاً: $\vec{F}_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$ ②

نعوض ① بـ ② $\Leftarrow$ $\boxed{W = kx_0}$

ولدينا العلاقة $\begin{cases} mg = kx_0 \\ k = m\omega_0^2 \end{cases}$

بحل جملة المعادلتين $\longrightarrow \frac{mg}{m\,\omega_0^2} = \frac{kx_0}{x}$

$\longrightarrow \boxed{x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}}$

لحساب الدور $T_0 =$ ؟

$$T_0 = \frac{t}{N} = \frac{10}{10} = 1\ S$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$= 2\pi\ rad.s^{-1}$$

$$x_0 = \frac{10}{[2\pi]^2} = \frac{10}{4\pi^2} == \frac{10}{40}$$

$$= 0.25\ m$$

②

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$$

$$v_{max} = \omega_0 X_{max}$$

لحساب $X_{max} =?$

$$2X_{max} = 16 \times 10^{-2}$$

$$\Longrightarrow X_{max} = 8 \times 10^{-2}\ m$$

$$v_{max} = 2\pi \times 8 \times 10^{-2} = 16\pi \times 10^{-2}$$

$$= 50\ \times 10^{-2}\ = 0.5\ m.s^{-1}$$

③ $a =?$ عند $x = 10cm = 10^{-1}m$

$\boxed{a = -\omega_0^2\,x}$ حفظ

$$a = -[2\pi]^2 \times 10^{-1} = -4\pi^2 \times 10^{-1}$$

$$a = -4\ m.s^{-2}$$

④ $E_P =?$

عند $\bar{x} = -4\ cm = -4\ \times 10^{-2}m$

وحساب $E_k =?$ (عندئذ) $\Leftarrow$ عند نفس المكان)

$$E_P = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

$$k = m\,\omega_0^2$$

$$k = 1 \times [2\pi]^2 = 4\pi^2\ = 40\ N.m^{-1}$$

$$E_P = \frac{1}{2} \times 40 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$E_P = 320 \times 10^{-4} = 32 \times 10^{-3}$$

نحسب $E_k =?$

$$E_K = E_{tot} - E_P$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\ kX_{max}^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 40 \times (8 \times 10^{-2})2$$

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E_{tot} = 1280 \times 10^{-4} = 128 \times 10^{-3}\ J$$

$$E_K = 128 \times 10^{-3} - 32 \times 10^{-3}$$

$$= 96 \times 10^{-2}\ J$$

المسألة الرابعة:

تهتز كرة معدنيّة كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16\ N.m^{-1}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورها الخاصّ $1s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1\ m$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب. ، المطلوب:

① استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

② عيّن لحظتي المرور الأوّل والثالث للكرة في موضع التوازن. احسب شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$.

③ احسب كتلة الكرة.

$k = 16\ N.m^{-1}$, $T_0 = 1\ s$

$X_{max} = 0.1\ m$

شروط البدء: $t = 0 \left[\begin{array}{l} x = \frac{X_{max}}{2} \\ v < 0 \end{array} \right.$

1

$\overline{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$

الثوابت X_{max} . ω_0 . $\overline{\varphi}$

$X_{max} = 0.1\ m$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

لحساب ($\varphi = ?$) نعوض بشروط البدء:

$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ \overline{x} = \frac{X_{max}}{2} \end{array} \right]$

$\Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(\omega_0 \times 0 + \varphi)$

$cos\varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3}\ rad \\ \frac{5\pi}{3}\ rad \end{cases}$

نختار قيمة لـ (φ) تجعل السرعة سالبة

نعوض بالتابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$\overline{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\overline{\varphi})$

$\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] > 0 \Rightarrow v < 0$

مقبول يوافق شروط البدء:

$\varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{3} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] < 0 \Rightarrow v > 0$

مرفوض يخالف شروط البدء

نعوض مكان الثوابت:

$x = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) m$

2 $t = ?$ مرور أول وثالث للكرة في موضع التوازن $(x = 0)$، نعوض بالتابع الزمني للمطال.

$\left. \begin{array}{l} t = ? \\ x = 0 \end{array} \right] \Rightarrow 0 = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\ rad$

حيث $k = 0.1.2. ...$

$\boxed{2t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + k}$

المرور الأول: $(k = 0) \Leftarrow 2t = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 0$

$2t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2t = \frac{1}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{12}\ s$

المرور الثالث $(k = 2) \Leftarrow$

$2t = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 2$

$2t + \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$

$2t = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow 2t = \frac{13}{6} \Leftarrow \frac{13}{12}\ s$

* ومطلوب حساب $F = ?$ [شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $(x = +0.1m)$]

شدة قوة الإرجاع $F = -k\,\overline{x}$

$F = 16 \times 0.1 = 1.6\ N$

3 حساب $m = ?$

$k = m\omega_0^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2}$

$m = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} = 0.4\ kg$

مسألة عامة (1):

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطةً مؤلّفةً من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُه متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ مثبّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُه $m = 0.1kg$ فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز التوازن، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v = -3m.s^{-1}$. المطلوب:

1 احسبْ نبضَ الحركة.

2 استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة.

3 احسبْ شدّةَ قوّةِ الإرجاع.

$k = 10\ N.m^{-1}\ .\ m = 0.1kg$

الحل:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ v = -3m.s^{-1} \end{cases}$$

1 حساب $\omega_0 = ?$

$$k = m\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{10}{0.1} = 100$$

$$\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$$

2 استنتاج التابع الزمني لمطال الحركة:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الثوابت $(\bar{\varphi}\ .\ \omega_0\ .\ X_{max})$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \bar{x} = 0 \\ \bar{v} = -3m.s^{-1} \end{matrix}\right\} v_{max} = 3m.s^{-1}$$

$$v_{max} = \omega_0 X_{max}$$

$$\Rightarrow X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{3}{10} = 0.3m$$

لإيجاد $\varphi = ?$ من شروط البدء:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} 0 = X_{max}\cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$X_{max} \neq 0 \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 0$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}rad\ .\ \bar{\varphi} = \frac{3\pi}{2}rad.\bar{\varphi} = \left(-\frac{\pi}{2}rad\right)$$

نختار قيمة لـ $\bar{\varphi}$ نجعل $(v < 0)$

التابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin\bar{\varphi}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}rad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0 \Rightarrow \bar{v} < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}rad \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{v > 0}$$

مرفوض يخالف شروط البدء.

نعوض مكان الثوابت: $\bar{x} = 0.3\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)m$

شدة $F = -kx \Rightarrow F = kx$

$$F = 10 \times 3 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-1}\ (N)$$

مسألة عامة (2):

تهتزُّ نقطة ماديَّة كتلتها $0.5\ kg$ بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور $4s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8cm$ فإذا علمت أنّ النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرّكة بالاتِّجاه السالب. المطلوب:

1 استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.

2 عيّن لحظتي المرور الأوّل والثالث في وضع التوازن.

3 عيّن المواضع التي تكون فيها شدّة محصِّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدّة هذه المحصِّلة.

4 احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟

5. احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاص $1s$.

$$X_{max} = 8cm = 8 \times 10^{-2}m$$

$$T_0 = 4s\ .\ m = 0.5kg$$

الحل:

شروط البدء:

$$t = 0 \begin{cases} x = \frac{X_{max}}{2} \\ \bar{v} < 0 \text{(متحرك بالاتجاه السالب)} \end{cases}$$

1 التابع الزمني:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الثوابت $(\bar{\varphi}\ .\ \omega_0\ .\ X_{max})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = 8 \times 10^{-2} m$$

لإيجاد $\bar{\varphi} = ?$ من شروط البدء:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \bar{x} = \frac{X_{max}}{2} \end{matrix}\right\} \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\ rad \\ \bar{\varphi}_2 = \frac{5\pi}{3}\ rad \end{cases}$$

نختار قيمة لـ φ تجعل $(\bar{v} < 0)$

التابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow v < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء

$$\varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow v > 0$$

مرفوض يخالف شروط البدء

نعوض مكان الثوابت:

$$\bar{x} = 8 \times 10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \dots m$$

2 $t = ?$

(مرور أول – مرور ثاني) من وضع التوازن $\boxed{x = 0}$

نعوض بالتابع الزمني للمطال:

$$0 = 8 \times 10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

المرور الأول: $(k = 0) \Leftarrow$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}t = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$t_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\quad (s)$$

المرور الثالث: $(k = 2) \Leftarrow$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{t}{2} = \frac{13}{6} \Rightarrow t = \frac{13 \times 2}{6} = \frac{13}{3}\quad (s)$$

3 شدة محصلة القوى (شدة قوة الإرجاع) (شدة $\Leftarrow$ بلا إشارة)

a) تكون عظمى في الوضعين المتطرفين $x = X_{max}$ ولحسابها :

$$a = a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$$

$$F_{max} = m\, a_{max} \Rightarrow F_{max} = m\,\omega_0^2 X_{max}$$

$$F_{max} = 0.5 \times \frac{\pi^2}{4} \times 8 \times 10^{-2}$$

$$= 0.1\ (N)$$

طريقة ثانية: $F_{max} = kX_{max}$ (الشدة)

تُحسب (k) من العلاقة $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ونعوض...

b) تنعدم محصلة القوى في مركز الاهتزاز (عند المرور بوضع التوازن) حيث:

$$x = 0 \Rightarrow F = 0$$

4 $k = ?$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_0^2$$

$$k = 0.5 \times \frac{\pi^2}{4}$$

$$k = 5 \times 10^{-1} \times \frac{10}{4} = \frac{5}{4}\quad N.m^{-1}$$

لا تتغير قيمة الثابت باستبدال الكتلة المعلقة.

5 $m' = ?$ من أجل $T_0'^2 = 1\ s$

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \Rightarrow T'^2_0 = 4\pi^2\frac{m'}{k}$$

$$m' = \frac{T'^2_0\, k}{40} = \frac{\frac{5}{4} \times 1}{4 \times 10} = \frac{5}{16} \times 10^{-1}\ kg$$

$$m' = 31.25 \times 10^{-3}\ kg$$

مسائل الدورات

المسألة الأولى:

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من جسم صلب كتلته $(m = 2g)$ معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $(k = 20N.m^{-1})$ نزيح الجسم عن وضع توازنه شاقولياً نحو الأسفل بالاتجاه الموجب ضمن حدود مرونة النابض مسافة قدرها $(8cm)$ ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$، المطلوب:

1-حساب الدور الخاص للهزازة.

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقاً من شكله العام.

3-احسب سرعة الجسم لحظة مروره الأول بمركز الاهتزاز.

4- احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة.

$(\pi^2 = 10)$

المسألة الثانية:

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$، بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}\ s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 12\ cm$، باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب، المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقاً من شكله العام

2- عيّن لحظة المرور الأول للكرة في موضع التوازن، ثم احسب سرعتها عندئذٍ.

3- احسب كتلة الكرة m

4- احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 4\ cm$

5- احسب الاستطالة السكونية للنابض.

6- احسب الطاقة الميكانيكية (الكليّة) لهذا النواس.

$(g = 10m.s^{-2} . \pi^2 = 10)$
