الرياضيات مع بسمة أمل

أوراق المصطفى

المتتاليات

ملخص نظري (+) تمارين شاملة (امتحانية)

إعداد المبدعان :

ابتسام العمر

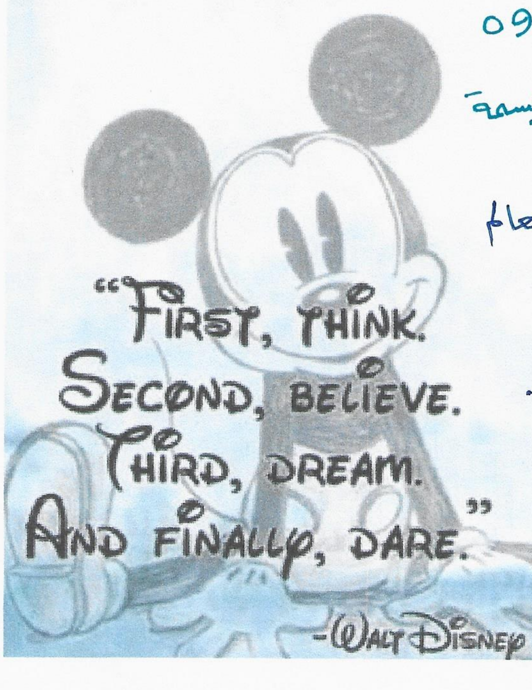
عبد الوهاب بربانة

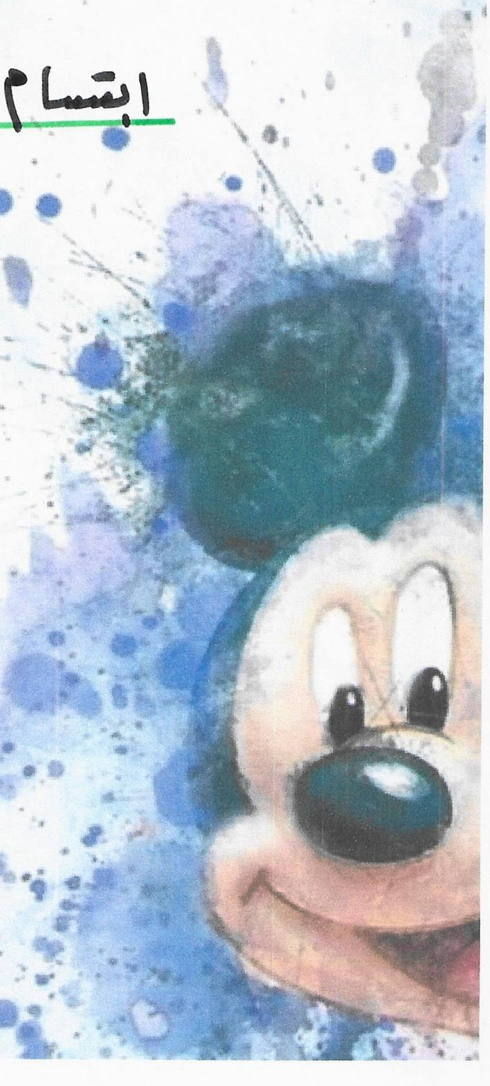
الرياضيات مع بسمة أمل.

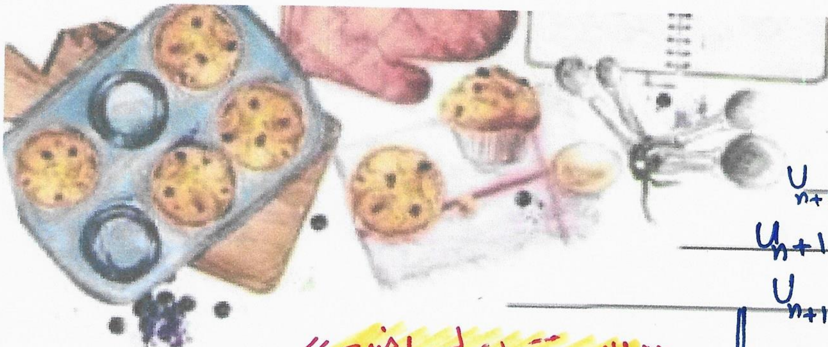
تواصل : 0991070187

تلغرام : الرياضيات مع بسمة أمل

«هناك نوعان من الألم في هذا العالم
الألم الذي يؤلمك
والألم الذي يغيرك ويعلمك»







«أعداد متتالية»

1- متزايدة: $U_{n+1} > U_n$

2- متناقصة: $U_{n+1} < U_n$

3- ثابتة: $U_{n+1} = U_n$

طرق دراسة الاطراد:

A) إشارة الفرق: $U_{n+1} - U_n$

الشرط:

a) $U_{n+1} - U_n > 0 \rightarrow$ U_n متزايدة

b) $U_{n+1} - U_n < 0 \rightarrow$ U_n متناقصة

c) $U_{n+1} - U_n = 0 \rightarrow$ U_n ثابتة

B) النسبة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = ?$

الشرط:

a) $U_{n+1} \div U_n > 1 \rightarrow$ U_n متزايدة

b) $U_{n+1} \div U_n < 1 \rightarrow$ U_n متناقصة

c) $U_{n+1} \div U_n = 1 \rightarrow$ U_n ثابتة

C) اطراد تابع: $f'(x)$

الشرط:

ندرس اطراد $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$

a) $f' > 0 \rightarrow$ U_n متزايدة

b) $f' < 0 \rightarrow$ U_n متناقصة

c) $f' = 0 \rightarrow$ U_n ثابتة

«الاستقراء الرياضي»

الخطوات:

1- نثبت صحة العلاقة من أجل $n = n_0$.

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n.

3- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$.

الأشكال:

1- متراجحة

2- علاقة

3- جملة مضاعفات.

الاستخدامات:

1- طلب صريح

2- أعداد متتالية.

3- تخمين عبارة U_n بدلالة n.

4- الاشتقاق من المراتب العليا.

Note:

a عدد حقيقي غير معدوم.

A- $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n} = a(n+1)$

a مكرر $n+1$ مرة

B- $\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n} = a^{n+1}$

a مكرر $n+1$ مرة.

C- $\underbrace{a^0 \times a^1 \times a^2 \times \dots \times a^n}_{n} = a^{0+1+2+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

a مكرر $n+1$ مرة

الرياضيات مع بسمة أمل.

«متتالية محدودة»

U_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

1 نقول عن U_n محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي M يحقق:
من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq M$
ونسمي M «عنصر راجح».

2- نقول عن U_n محدودة من الأدنى إذا وُجد عدد حقيقي m يحقق:
من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geq m$
ونسمي m «عنصر قاصر».

3- نقول أن U_n محدودة يعني
أنها محدودة من الأعلى ومن الأدنى
$m \leq U_n \leq M$.

سؤال مهم:

* كيف نثبت U_n متتالية محدودة من الأعلى
بعدد حقيقي M أو من الأسفل بعدد
حقيقي m؟

«نتبع إحدى الطرق:»

1- استعمال الإثبات بالتدريج للبرهان
على: $U_n \leq M$ أو $U_n \geq m$

2- نقارن بين U_n و M «أو U_n و m».
بدراسة إشارة $U_n - m$ أو $M - U_n$

3- إذا كانت: $U_n = f(n)$ ندرس تغيرات
التابع على المجال $[0, +\infty[$.

4- إذا كانت U_n على شكل مجموع المتتالية
هندسية نستفيد من المجموع.

«تقارب متتالية»

$\lim_{n\to\infty} U_n =$ عدد	$\lim U_n = \infty$ أو غير محدودة	دمافي عبارة U_n
U_n متقاربة	U_n متباعدة	

- U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
- U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

«نهاية متتالية» $\lim_{n\to\infty} U_n$

U_n صريحة	U_n هندسية	$\sin(n)$ $\cos(n)$ $(-1)^n$ $n!$
تعويض مع مراعاة قواعد النهايات	حسب الأساس	إحاطة

$-1 \leq \sin, \cos, (-1)^n \leq 1$

«تجاور متتاليتين»

نقول عن المتتاليتين U_n و V_n متجاورتان إذا:
U_n و V_n إحداها متزايدة والأخرى متناقصة
ونهاية الفرق تساوي صفر $\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$

- $U_{n+1} = aU_n + b$
النهاية هي حل المعادلة
$f(x) = x$

f

$n! \geq n$

$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

I will be...

Note: في بعض التمارين $f(x)=x$ تقبل أكثر من حل
وبالتالي علينا رفض كل الحلول عدا واحد فقط
ويكون بسبب: أرفض إما المجال أو اتجاه التغير.
(المحدودية)

وجه المقارنة	« المتتالية الهندسية »	« المتتالية الحسابية »
التعريف	$U_{n+1} = U_n \cdot q$	$U_{n+1} = U_n + r$
الإثبات	$\frac{U_{n+1}}{U_n} \overset{?}{=} q$	$U_{n+1} - U_n \overset{?}{=} r$
القانون الهام	$U_m = U_p * q^{m-p}$	$U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

- استخدامات -

1) حدين ← 1) إيجاد الأساس q أو r

2) حد و أساس ← 2) إيجاد U_0 أو أي حد

3) كتابة عبارة U_n بدلالة n.

المجموع	$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$	$S = \frac{n(a+l)}{2}$

حساب n:

I) الحدود متعاقبة: n = الدليل الأخير - الدليل الأول + 1

II) الحدود غير متعاقبة «لدينا قفزة مقدارها b».

$n = \frac{\text{الأخير} - \text{الأول}}{\text{مقدار القفزة}} + 1$

$U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$

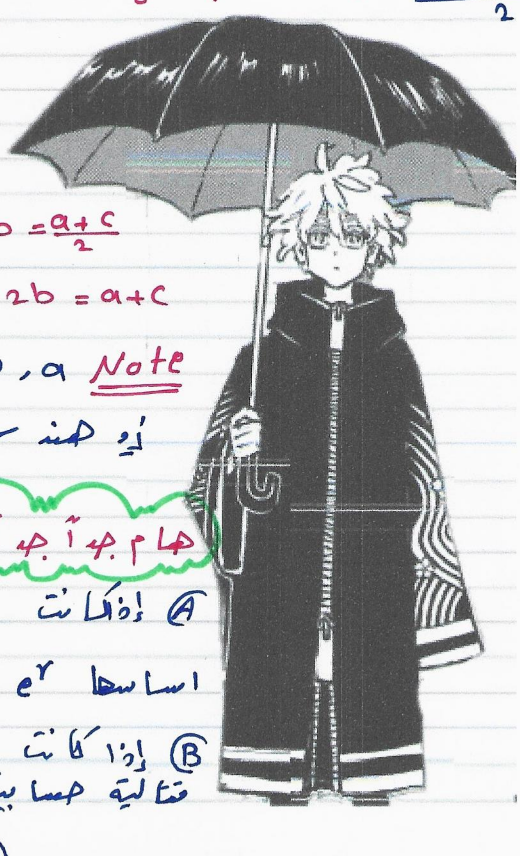
- الحالة الخاصة في المجموع - $q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- الوسط -

$b^2 = a\cdot c$ OR $b = \sqrt{a\cdot c}$

$b = \frac{a+c}{2}$ OR $2b = a+c$

Note a، b و c تشكل حدود متتالية (حسابية أو هندسية) إذا احققت شرط الوسط.



هام جداً جداً: الانتقال من الحسابية إلى الهندسية و العكس:

A) إذا كانت U_n متتالية حسابية أساسها r فإن e^{U_n} هندسية أساسها $q = e^r$.

«موجهة عاماً»

B) إذا كانت U_n متتالية هندسية أساسها q فإن $\ln U_n$ حسابية متتالية حسابية أساسها $r = \ln q$.

بعض الخواص الهامة

1 -
$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0 \; ; & -1 < q < 1 \\ +\infty \; ; & q > 1 \\ \text{غير محددة} & q \leq -1 \end{cases}$$

2 - إذا كانت U_n و V_n متتاليتان هندسيتان أساسهما بالترتيب q_1 , q_2 وحدهما الأول U_0 و V_0 ($V_n \neq 0$). فإنه:

⇐ $\frac{1}{V_n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q_2}$ وحدها الأول $\frac{1}{V_0}$

⇐ $\frac{U_n}{V_n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$ وحدها الأول $\frac{U_0}{V_0}$.

⇐ $(U_n \cdot V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q_1 \cdot q_2$ وحدها الأول $U_0 \cdot V_0$

3 - إطراد متتالية حسابية:

نعتمد على إشارة r

حيث: $U_{n+1} - U_n = r$

- $r > 0$: U_n متزايدة تماماً
- $r < 0$: U_n متناقصة تماماً
- $r = 0$: U_n ثابتة

4 - إطراد متتالية هندسية:

نعتمد على U_0 و q

A - $0 < q < 1$

* $U_0 > 0 \Leftarrow$ U_n متناقصة
* $U_0 < 0 \Leftarrow$ U_n متزايدة.

B - * $q > 1$ و $U_0 > 0$

⇐ U_n متزايدة.

* $q > 1$ و $U_0 < 0$

⇐ U_n متناقصة.

C - * $q = 1$

⇐ U_n ثابتة.

D - * $q = 0 \Leftarrow U_n$ معدومة ابتداءً من الحد الثاني.

E - * $q < 0 \Leftarrow U_n$ غير مطردة ← (انتبه)

الرياضيات مع بسمة أمل .

D.Y.K?

المتتاليتان المتجاورتان لهما نفس النهاية.

④ U_n , V_n متجاورتان $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} V_n$.

تمارين متنوعة - متتاليات -

التمرين الأول:

u_n متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث: $u_6 = 9$ ، $u_3 = 3$

1- اوجد اساسها r وحدها الأول u_0.

2- اكتب عبارة u_n بدلالة n.

3- هل العدد 37 حد من حدود المتتالية u_n؟ إذا كان حداً ما رتبته؟

4- احسب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$$

5- احسب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني:

احسب المجموعين:

$$S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \dots + 20$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \dots + 6$$

التمرين الثالث:

a ، b ، c ثلاثة أعداد متتالية حسابية متزايدة اساسها r:

$$a + b + c = 9$$

1- (a) احسب b

(b) احسب a، c بدلالة r.

(c) إذا علمت أن $a.c = -16$

* احسب r ثم استنتج a و c.

2- u_n متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ واساسها $r = 5$.

(a) عبّر عن الحد العام u_n بدلالة n.

(b) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$$

3- v_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ وفق: $v_n - 8u_n = 0$

* احسب المجموع:

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$$

التمرين الرابع:

u_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \end{cases}$$

والمتتالية v_n معرفة وفق:

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$

1- أثبت أن v_n حسابية، عين أساسها وحدها الأول.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- احسب نهاية u_n، ماذا تستنتج؟

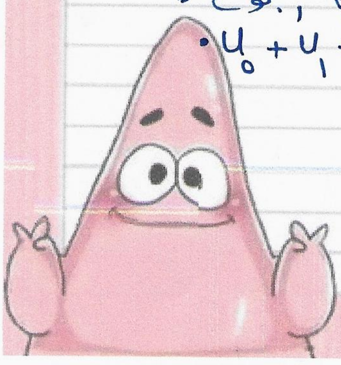
4- احسب المجموع:

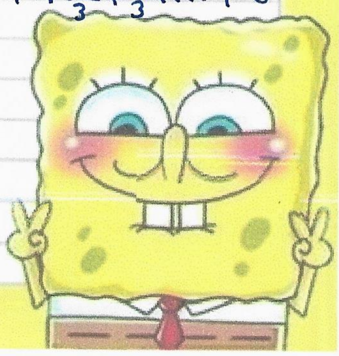
$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$$

التمرين الخامس:

لتكن $u_n = 4n + 1$ متتالية

* أثبت أن u_n حسابية وعيّن اساسها r، ثم احسب المجموع: $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.





التمرين السادس:

U_n متتالية معرفة تراجعيا وفقا:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+4U_n} \end{cases}$$

1) - أثبت بالتدريج أنه: $U_n > 0$ أيا كان $n \in \mathbb{N}$

2) - نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ وفقا: $V_n = \dfrac{1}{U_n}$

a) - أثبت أن V_n حسابية

عين أساسها وحدها الأول.

b) - اكتب عبارة V_n بدلالة n

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

c) - ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

* اكتب S_n بدلالة n واستنتج

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

التمرين السابع:

a , b , c ثلاث حدود متتالية من متتالية هندسية أساسها q

حيث $(a \neq 0)$ لتكن $5b$, $12a$ و $2c$ ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية. احسب q.

التمرين الثامن:

U_n متتالية معرفة وفقا:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{-1+2U_n}{U_n} \end{cases}$$

و V_n معرفة وفقا:

$$V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$$

a) - أثبت أن V_n حسابية

عين r و V_0.

b) - اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج أن:

$$U_n = \dfrac{n+2}{n+1}$$

c) احسب المجموع:

$$S = V_0 + V_1 + \dots + V_7$$

التمرين التاسع:

عين عددين x , y علما أن: y و 15 و x حدود متعاقبة من متتالية هندسية و y و 25 و x حدود متتالية من متتالية حسابية.

التمرين العاشر:

U_n متتالية معرفة:

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

* ونعرف V_n وفقا:

$$V_n = \ln(U_n) - 2$$

a) - أثبت أن V_n هندسية

عين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة V_n بدلالة n.

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

c) أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} U_n = e^2$

التمرين الحادي عشر:

برهن أن المتتالية الثابتة هي متتالية حسابية وهندسية في آن معا.

التمرين الثاني عشر

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \end{cases}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن $0<U_n<1$ أيا كان $n\in\mathbb{N}$.

2- نعرف v_n وفق:

$$v_n = \frac{1}{U_n} - 1$$

a) أثبت أن v_n هندسية عين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n.

c) استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3- احسب $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

التمرين الثالث عشر

U_n معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+4}{U_n+2} \end{cases}$$

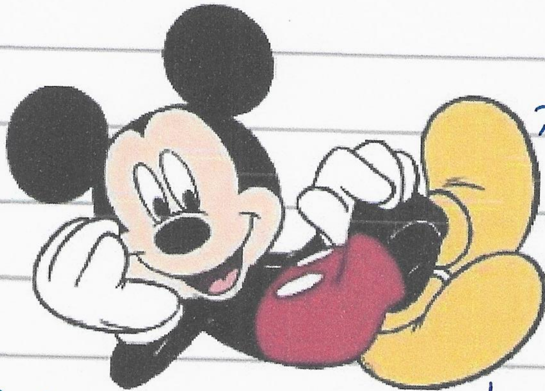
و $v_n = \frac{U_n-4}{U_n+1}$

والمطلوب:

1- أثبت أن v_n هندسية جد أساسها وحدها الأول.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n. ثم احسب نهايتها.

3) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج نهايتها. هل $(U_n)_{n\geq0}$ متقاربة؟



التمرين الرابع عشر

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$$

و v_n معرفة وفق:

$$v_n = U_n + 6$$

1) a) أثبت أن v_n هندسية عين أساسها وحدها الأول.

b- اكتب عبارة v_n بدلالة n.

c- استنتج عبارة U_n بدلالة n.

2- نعرف w_n وفق:

$$w_n = \ln(v_n)$$

a- أثبت أن w_n حسابية، عين أساسها r و w_0

b- اكتب عبارة w_n بدلالة n.

c- احسب w_5 ثم احسب $S = w_0 + w_1 + \dots + w_5$

«أنت حسبك كل خير أنت حدثك أبقا خير»

India 2009 Sam omar

التمرين الخامس عشر

U_n معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$$

1- أثبت بالتراجع أن $1<U_n$ أيا تكن $n\in\mathbb{N}$.

2- ادرس اطراد U_n واستنتج تقاربها.

3- نعرف المتتالية v_n وفق:

$$v_n = \ln(U_n)$$

a- أثبت أن v_n هندسية عين أساسها وحدها الأول.

b- اكتب v_n و U_n بدلالة n.

c- احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$

4- نضع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

1- احسب S_n ثم P_n بدلالة n.

2- عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

التمرين السادس عشر:

U_n متتالية معرفة وفق:

$$U_n = \frac{6n + 5(-1)^n}{3n}$$

1) حقق أن:

$$\frac{6n-5}{3n} \leq U_n \leq \frac{6n+5}{3n}$$

2- استنتج $\lim_{n\to\infty} U_n$

3- هل U_n متقاربة؟

التمرين السابع عشر:

لتكن المتتالية:

$$U_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

1- أعط صيغة أخرى تفيد في حساب U_n

2- احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$.

التمرين الثامن عشر:

لتكن المتتالية U_n المعرفة وفق:

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1) ادرس اطراد U_n

2) أثبت أنه العدد 2 راجع على U_n.

3- احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$

4- جد n_0 عدد طبيعي حيث: أيا تكن $n > n_0$ كانت U_n في المجال $]1.9, 2.1[$.

التمرين التاسع عشر:

نتأمل المتتالية U_n المعرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{2}{U_n} \end{cases}$$

حيث $n \geq 0$.

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماما على المجال $[2, +\infty[$.

2- أثبت بالتدريج أن: $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ مهما تكن n من $\mathbb{N}$.

3- استنتج أن المتتالية U_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين العشرون:

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases}$$

أولاً: a) أثبت أن: $U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$

b) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن: $1 \leq U_n \leq 2$ أيا كانت $n \in \mathbb{N}$.

ثانياً: a) أثبت أن: $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

b) استنتج أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

ثالثاً: a) علل تقارب المتتالية U_n.

b) احسب نهايتها.

التمرين (21):

U_n معرفة وفق:

$$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

1) أثبت أن $n \leq 2^n$ مهما تكن $n \geq 1$.

2) استنتج أن العدد $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجع على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$.

3- أثبت أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

التمرين (22):

U_n معرفة وفقا:

$$U_n = \frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\dots+\frac{n}{5^n}$$

1- أثبت أن $n \le 2^n$ وهذا لكل $n \ge 1$.

2- أثبت أن: $U_n \le \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

3- استنتج عنصر راجح على U_n.

4- ادرس اطراد U_n.

5- استنتج أن U_n متقاربة.

التمرين (23):

U_n متتالية معرفة وفقا:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

I) أثبت أن U_n يكتب بالشكل

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

II) جد عددين حقيقيين a , b بحيث أن:

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

II) في حالة عدد طبيعي n غير معدوم الشكل:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

a) عبر عن S_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية المتتالية S_n.

التمرين (24):

U_n , V_n متتاليتان معرفتان وفقا:

$$U_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

3- أثبت أن: $U_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$

1) أثبت أن U_n متزايدة

V_n متناقصة.

2- استنتج أن U_n , V_n متجاورتان.

التمرين (25):

U_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفقا:

$$U_n = \ln\left(\frac{n.e^n}{n+1}\right)$$

احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

التمرين (26):

$(U_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة وفقا:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1 \end{cases}$$

و $(V_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة وفقا:

$$V_n = U_n + \alpha n + \beta$$

حيث $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

* عين α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) هندسية

نطلب تعيين اساسها q وحدها الأول V_0

* اكتب عبارة V_n بدلالة n

واستنتج عبارة U_n بدلالة n.

الأستاذ: نور الدين.

التمرين (27):

نتأمل المتتاليتين:

s_n ، t_n المعرفتان وفق:

$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} s_0 = 12 \\ s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4} \end{cases}$

a) أثبت أن $s_n > t_n$

b) أثبت أن المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها.

c) أثبت أن s_n و t_n متجاورتان.

d) أثبت أن U_n المعرفة وفق:

$U_n = 3t_n + 8s_n$

ثابتة ، وجد قيمة حدها الثابت.

e) استنتج النهاية المشتركة لـ s_n و t_n.

التمرين (28):

x_n و y_n متتاليتان معرفتان وفق:

$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ ، $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

* أثبت أن x_n ، y_n متجاورتان.

التمرين (29):

U_n متتالية معرفة وفق:

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3 \end{cases}$

ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $v_n = U_n - n + 1$

1- أثبت أن v_n هندسية جد أساسها وحدها الأول

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3- احسب بدلالة n المجاميع (المقادير) الآتية:

$S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$S_2 = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n}$

$S_3 = v_0 + \frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{3^2} + \dots + \frac{v_n}{3^n}$

$S_4 = v_0 + 2v_1 + 2^2 \cdot v_2 + \dots + 2^n \cdot v_n$

$S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

$S_6 = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S_7 = v_0 + v_2 + v_4 + \dots + v_{2n}$

$S_8 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

* $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين (30):

U_n متتالية معرفة وفق: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

أولا:

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية U_n.

1- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq n+3$

3- استنتج أن U_n محدودة من الأدنى، هل U_n متقاربة؟

ثانيا: v_n متتالية معرفة وفق:

$v_n = U_n - n$

a) أثبت أن v_n هندسية، عين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

c) احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$

d) احسب بدلالة n المجموع:

$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

ثالثا: t_n متتالية معرفة وفق:

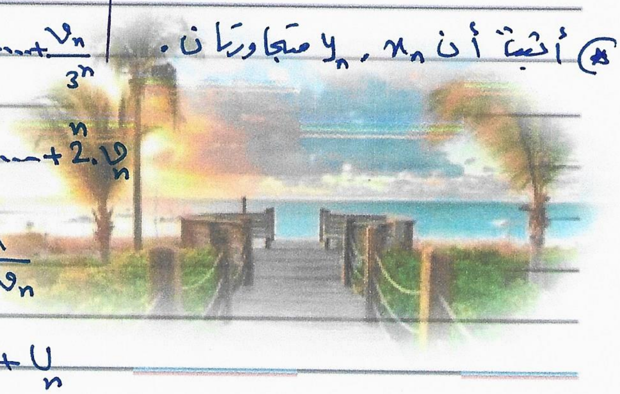
$t_n = \ln(v_n)$

a) أثبت أن t_n حسابية واحسب r، t_0

b) احسب بدلالة n المجموع:

$A_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$

ثم استنتج: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$



تمارين متتاليات

حلول

التمرين الأول:

$U_6 = 9$ و $U_3 = 3$

1- حساب r: $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_6 = U_3 + (6-3)\cdot r$

$9 = 3 + 3r \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$

حساب U_0: $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_3 = U_0 + (3-0)\cdot 2$

$3 = U_0 + 6 \Rightarrow U_0 = -3$

2- عبارة U_n: $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_n = U_0 + (n-0)\cdot 2$

$U_n = -3 + 2n$

3- $U_n \overset{?}{=} 37$

$-3 + 2n = 37$

$2n = 40$

$n = 20$

$\Leftarrow$ 37 هو حد من المتتالية U_n رتبته (21).

4- المجموع: $n = 20 - 0 + 1 = 21$

$a = U_0 = -3$

$l = U_{20} = 37$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{21(-3+37)}{2}$

$= \frac{21 \times 34}{2} = 21 \times 17 = 357$

5- $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$a = U_0 = -3$

$l = U_n = -3 + 2n$

$n = n - 0 + 1 = n+1$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)(-3-3+2n)}{2}$

$S = \frac{(n+1)(-6+2n)}{2} = (n+1)(-3+n)$

التمرين الثاني:

$S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + 20$

$(\times 4)$

$4S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 80$

مجموع $n = 80$ من متتالية حسابية حدها الأول $a = 1$، حدها الأخير $l = 80$.

$4S = \frac{n(a+l)}{2}$

$4S = \frac{80(1+80)}{2} \Rightarrow 4S = 40 \times 81$

$S = 10 \times 81 = 810$

$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \dots + 6$

$(\times 3)$

$3S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 18$

مجموع $n = 18$ من متتالية حسابية حدها الأول $a = 1$ و حدها الأخير $l = 18$

$\Rightarrow 3S_2 = \frac{n(a+l)}{2}$

$3S_2 = \frac{18(1+18)}{2} \Rightarrow 3S_2 = 9 \times 19$

$S_2 = 3 \times 19 = 57$

التمرين الثالث:

$a+b+c=9 \;\dots(*)$

① ـ a ـ بما أن a , b , c حدود من متتالية حسابية فحسب خاصية الأوساط الحسابية:

$$b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b=a+c \;\dots(**)$$

بالتعويض في $(*)$:

$$2b+b=9$$

$$3b=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$$

b ـ
الحد الأول a

الحد الثاني $b=a+r \rightarrow a=b-r$

الحد الثالث $c=b+r$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow c=3+r\\&\Rightarrow a=3-r\end{aligned}\right\}(*)$$

c ـ لدينا $a\cdot c=-16$

$$(3+r)(3-r)=-16$$

$$9-r^2=-16$$

$$r^2=25$$

$$r=\mp 5$$

بما أن المتتالية متزايدة

$$\boxed{r=5}$$

نعوض في $(*)$:

$$c=8 \;,\; a=-2$$

② ـ $r=5 \;,\; U_0=-2$

a ـ $U_m=U_p+(m-p)\cdot r$

$$U_n=U_0+(n-0)\cdot 5$$

$$U_n=-2+5n$$

* $U_{15}=-2+5(15)=-2+75=73$

$$S=U_0+U_1+\dots+U_{15}$$

$$n=15-0+1=16$$

$$a=U_0=-2$$

$$l=U_{15}=73$$

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{16(-2+73)}{2}$$

$$=8\times 71=568$$

③ ـ $V_n-8U_n=0$

$$\Rightarrow V_n=8U_n \;\dots(*)$$

$$V_0=8U_0$$

$$V_1=8U_1$$

$$V_2=8U_2$$

$$\vdots$$

$$V_n=8U_n$$

$$\Rightarrow S'=V_0+V_1+\dots+V_n$$

$$=8U_0+8U_1+\dots+8U_n$$

ع.م

$$=8\left[U_0+U_1+\dots+U_n\right]$$

"مجموع حسابية"

$$=8\left(\frac{n(a+l)}{2}\right)$$

$$=8\cdot\frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$$

$$=4\cdot(n+1)(\cancel{-2}-2+5n)$$

$$S'=(4n+4)(-4+5n)$$

التمرين الرابع:

$$\begin{cases}U_0=\frac{1}{3}\\ U_{n+1}=\frac{U_n}{1+2U_n}\end{cases}$$

$$V_n=\frac{1}{U_n}+1$$

① ـ

$$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}+1=\frac{1}{\frac{U_n}{1+2U_n}}+1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n} + 1 = \frac{2U_n}{U_n} + \frac{1}{U_n} + 1$$

$$= 2 + \frac{1}{U_n} + 1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 3 + \frac{1}{U_n}$$

نشكل الفرق :

$$V_{n+1} - V_n = 3 + \frac{1}{U_n} - \left(1 + \frac{1}{U_n}\right)$$

$$= 3 + \cancel{\frac{1}{U_n}} - 1 - \cancel{\frac{1}{U_n}} = 2 = r$$

فالمتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=2$

وحدها الأول : $V_0 = \frac{1}{U_0} + 1 = 4$

2- عبارة V_n : $V_m = V_p + (m-p)\cdot r$

$$V_n = V_0 + (n-0)\cdot 2$$

$$V_n = 4 + 2n$$

عبارة U_n : $V_n = \frac{1}{U_n} + 1$

$$\Rightarrow V_n - 1 = \frac{1}{U_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 1} = \frac{1}{4+2n-1} = \frac{1}{2n+3}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{2n+3}$$

3-

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+3}\right) = 0$$

نستنتج أن U_n متقاربة.

4- $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{10}$

$n = 10-1+1 = 10$

$a = V_1 = 4+2(1) = 6$

$l = V_{10} = 4+2(10) = 24$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{10(6+24)}{2}$$

$S = 5 \times 30$

$S = 150$

التمرين الخامس :

$U_n = 4n+1$

$U_{n+1} = 4(n+1)+1$

$= 4n+4+1 = 4n+5$

نشكل الفرق : $U_{n+1} - U_n = 4n+5-(4n+1)$

$= 4n+5-4n-1$

$= 4 = r$

فالمتتالية حسابية أساسها $r=4$

وحدها الأول : $U_0 = 4(0)+1 = 1$

المجموع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$

$n = 10-0+1 = 11$

$a = U_0 = 1$

$l = U_{10} = 4(10)+1 = 41$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{11(1+41)}{2}$$

$= 11 \times 21 = 231$

التمرين السادس :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+4U_n} \end{cases}$$

1) $E(n)$: « $U_n > 0$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$U_0 = 2 > 0$

محققة $\Leftarrow$ $E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$U_n > 0$ صحيحة.

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$U_{n+1} > 0$

* من الفرض :

$U_n > 0$

$\Rightarrow 4U_n > 0$

$\Rightarrow 1 + 4U_n > 0$

$\Rightarrow \dfrac{U}{1+4U_n} > 0$

محققة $U_{n+1} > 0$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

$\therefore$ العلاقة صحيحة من أجل n.

2- $v_n = \frac{1}{U_n}$

a- $v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{1+4U_n}} = \frac{1+4U_n}{U_n}$

$= \frac{1}{U_n} + \frac{4U_n}{U_n}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{U_n} + 4$

نشكل الفرق:

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{U_n} + 4 - \frac{1}{U_n} = 4 = r$

فالمتتالية v_n حسابية اساسها $r=4$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}$

b) عبارة v_n: $v_m = v_p + (m-p)\cdot r$

$v_n = v_0 + (n-0)\cdot 4$

$v_n = \frac{1}{2} + 4n = \frac{8n+1}{2}$

عبارة U_n:

$v_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{8n+1}{2}}$

$\Rightarrow U_n = \frac{2}{8n+1}$

c- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$a = v_0 = \frac{1}{2}$

$l = v_n = \frac{8n+1}{2}$

$n = n-0+1 = n+1$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{8n+1}{2}\right)}{2}$

$S_n = (n+1)\frac{\frac{8n+2}{2}}{2} = \frac{(n+1)(4n+1)}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(4n+1)}{2} = \infty$

التمرين السابع:

بما أن a , b , c حدود متوالية من متتالية هندسية فحسب تعريف المتتالية الهندسية

الحد الأول a

الحد الثاني $b = a.q$

الحد الثالث $c = b.q = a.q^2$

وبما أن $12a$, $5b$, $2c$ ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية ، فحسب خاصية الوسط الحسابي:

$$5b = \frac{2c+12a}{2}$$

$$\Rightarrow 10b = 2c + 12a$$

$$10aq = 2aq^2 + 12a$$

نقسم على $2a \neq 0$:

$$5q = q^2 + 6$$

$$\Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0$$

$$(q-3)(q-2) = 0$$

إما $q = 3$ أو $q = 2$

التمرين الثامن:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{-1+2U_n}{U_n} \end{cases} , \quad v_n = \frac{1}{U_n - 1}$$

a) $v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{-1+2U_n}{U_n} - 1}$

$= \frac{1}{\frac{-1+2U_n-U_n}{U_n}} = \frac{1}{\frac{U_n-1}{U_n}}$

$v_{n+1} = \frac{U_n}{U_n - 1}$

نشكل الفرق

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{U_n}{U_n-1} - \frac{1}{U_n-1} = \frac{U_n-1}{U_n-1} = 1 = r$

فالمتتالية حسابية اساسها $r=1$ وحدها الاول

$(y-45)(y-5)=0$

إما $y=45 \Rightarrow x=5$

أو $y=5 \Rightarrow x=45$

التمرين العاشر:

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

$$V_n = \ln(U_n) - 2$$

(a)

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e \cdot \sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= 1 + \ln U_n^{\frac{1}{2}} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln U_n - 1$

$= \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1}{2}(\ln(U_n) - 2)}{\ln U_n - 2} = \frac{1}{2} = q_r$

فالمتتالية هندسية اساسها $q_r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $a = V_0 = 1$ حيث:

$V_0 = \ln(U_0) - 2 = \ln e^3 - 2 = 3 - 2 = 1$

(b) عبارة V_n: $V_m = V_p \cdot q_r^{m-p}$

$V_n = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$

$V_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

عبارة U_n:

$V_n = \ln(U_n) - 2 \Rightarrow V_n + 2 = \ln(U_n)$

$\Rightarrow U_n = e^{V_n+2}$

$\Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} = e^{0+2} = e^2$$

حيث: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

التمرين الحادي عشر:

نفرض U_n متتالية ثابتة أي: $U_{n+1} = U_n$

$V_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$

(b) عبارة V_n بدلالة n: $V_m = V_p + (m-p) \cdot r$

$V_n = V_0 + (n-0) \cdot 1$

$\Rightarrow V_n = 1 + n$

عبارة U_n: $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

$\Rightarrow U_n - 1 = \frac{1}{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 1$

$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1} = \frac{n+1+1}{n+1}$

$\Rightarrow U_n = \frac{n+2}{n+1}$

(c) $S = V_0 + V_1 + \dots + V_7$

$n = 7 - 0 + 1 = 8$

$a = V_0 = 1$

$l = V_7 = 1 + 7 = 8$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{8(1+8)}{2}$

$S = 4 \times 9 = \boxed{36}$

التمرين التاسع:

حدود هندسية $x, 15, y$

$15^2 = x.y$

$225 = x.y$ ——(*)

حدود حسابية x و 25 , y

$25 = \frac{x+y}{2}$

$\Rightarrow 50 = x + y$ ——(**)

من (*)(*) لغزل x: $x = 50 - y$ —(3)

نعوض في (*):

$(50 - y)y = 225$

$50y - y^2 = 225$

$y^2 - 50y + 225 = 0$

لإثبات أن U_n حسابية: نشكل الفرق:

$$U_{n+1} - U_n = U_n - U_n = 0 = r$$

فالمتتالية حسابية

أساسها $r = 0$.

لإثبات أن U_n هندسية: نشكل النسبة:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} = 1 = q$$

فالمتتالية هندسية

أساسها $q = 1$.

التمرين الثاني عشر:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \end{cases}$$

① $E(n)$: « $0 < U_n < 1$ »

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$ محققة

⇐ $E(0)$ صحيحة

* نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$0 < U_n < 1$ «صحيحة».

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$0 < U_{n+1} < 1$

نغير شكل U_{n+1}:

$$\begin{array}{r|l} U_n & -U_n + 2 \\ \mp U_n \pm 2 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -1 + \frac{2}{2 - U_n} \quad \dots(*)$$

من الفرض: $0 < U_n < 1$

نضرب بـ $(-)$: $0 > -U_n > -1$

نضيف (2): $2 > 2 - U_n > 1$

نقسم على (2): $1 > \frac{2 - U_n}{2} > \frac{1}{2}$

نقلب: $1 < \frac{2}{2 - U_n} < 2$

نطرح (1): $0 < -1 + \frac{2}{2 - U_n} < 1$

$0 < U_{n+1} < 1$

محققة ⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ العلاقة صحيحة مهما تكن n.

②-a) $V_n = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1$

$$= \frac{1}{\frac{U_n}{2 - U_n}} - 1$$

$$= \frac{2 - U_n}{U_n} - 1$$

$$= \frac{2 - U_n - U_n}{U_n}$$

$$= \frac{2 - 2U_n}{U_n}$$

$$= \frac{2(1 - U_n)}{U_n} = 2\left(\frac{1}{U_n} - \frac{U_n}{U_n}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)}{\frac{1}{U_n} - 1} = 2 = q$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

وحدها الأول: $V_0 = \frac{1}{U_0} - 1 = 1$

b) عبارة V_n:

$$V_m = V_p * q^{m-p} \Rightarrow V_n = V_0 \cdot (2)^{n-0}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_n = 2^n}$$

c) عبارة U_n:

$$V_n = \frac{1}{U_n} - 1$$

$$v_n + 1 = \frac{1}{U_n} \to U_n = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2^n+1}$$

3 - $$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

حيث: $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

التمرين الثالث عشر:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+4}{U_n+2} \end{cases}$$

$$v_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1}$$

1 -

$$v_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5U_n+4}{U_n+2} - 4}{\frac{5U_n+4}{U_n+2} + 1} = \frac{\frac{5U_n+4-4U_n-8}{\cancel{U_n+2}}}{\frac{5U_n+4+U_n+2}{\cancel{U_n+2}}} = \frac{U_n - 4}{6U_n+6}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{U_n-4}{U_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{\frac{U_n-4}{U_n+1}}{\frac{U_n-4}{U_n+1}}\right) = \frac{1}{6} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{U_0 - 4}{U_0 + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{\frac{1}{2}+1}$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{-7}{3}$$

2 - $$v_m = v_p \cdot q^{m-p}$$

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

$$v_n = -\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = 0 \Leftarrow$$

لأن: $-1 < q = \frac{1}{6} < 1$

3 - عبارة U_n: $v_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1}$

$$\Rightarrow v_n \cdot U_n + v_n = U_n - 4$$

$$\Rightarrow v_n U_n - U_n = -4 - v_n$$

$$U_n (v_n - 1) = -4 - v_n$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{-4 - v_n}{v_n - 1} = \frac{v_n + 4}{1 - v_n} = \frac{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + 4}{1 + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{0+4}{1+0} = 4$$

U_n متقاربة.

التمرين الرابع عشر:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$$

$$v_n = U_n + 6$$

1 - $$v_{n+1} = U_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}U_n - 3 + 6$$

$$= \frac{1}{2}U_n + 3$$

$$= \frac{1}{2}(U_n + 6)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(U_n+6)}{U_n+6} = \frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{6(\ln 8-\ln 4)}{2}$$

$$=3\ln 2=\ln 2^3=\ln 8$$

التمرين الخامس عشر

$$\begin{cases}U_0=e\\ U_{n+1}=\sqrt{U_n}\end{cases}$$

(1) - >> $U_n>1$:$E(n)$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$E(0)$: $U_0=e>1$

محققة ⇐ $E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$E(n)$: $U_n>1$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$E(n+1)$: $U_{n+1}>1$

من الفرض لدينا:

$U_n>1$

نجذر الطرفين:

$\sqrt{U_n}>\sqrt{1}$

$U_{n+1}>1$ محققة

⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة مهما تكن n من $\mathbb{N}$.

(2) - إتجاه U_n :

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n}-U_n$$

$$=\frac{(\sqrt{U_n}-U_n)(\sqrt{U_n}+U_n)}{\sqrt{U_n}+U_n}$$

$$=\frac{U_n-U_n^2}{\sqrt{U_n}+U_n}=\frac{U_n(1-U_n)}{\sqrt{U_n}+U_n}$$

من الطلب الأول وجدنا:

$U_n>1$

$1-U_n<0$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n<0$

⇐ U_n متناقصة.

وحدها الأول $v_0=U_0+6=2+6=8$

(b) - عبارة v_n : $v_m=v_p\cdot q^{m-p}$

$v_n=v_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}\Rightarrow\boxed{v_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(c) عبارة U_n : $v_n=U_n+6$

$\Rightarrow U_n=v_n-6=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$

(2) - $w_n=\ln(v_n)$

(a) $w_{n+1}=\ln(v_{n+1})$

$$\Rightarrow w_{n+1}-w_n=\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$$

$$=\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$$

$=r$

فالمتتالية w_n حسابية أساسها $r=-\ln 2$

وحدها الأول $w_0=a=\ln(v_0)=\ln 8$

(b) عبارة w_n : $w_m=w_p+(m-p)\cdot r$

$w_n=w_0+(n-0)\cdot(-\ln 2)$

$w_n=\ln 8-n\ln 2$

$w_n=\ln 8-\ln 2^n=\ln\left(\frac{8}{2^n}\right)$

(c) - $w_5=\ln\left(\frac{8}{2^5}\right)=\ln\left(\frac{8}{32}\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$=-\ln 4$

$a=w_0=\ln 8$

$l=w_5=-\ln 4$

$n=5-0+1=6$

بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $m=1$ فهي متقاربة.

3- a)

$$v_n = \ln(U_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln(\sqrt{U_n}) = \frac{1}{2}\ln U_n$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}\ln U_n}{\ln U_n} = \frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0 = \ln U_0 = \ln e = 1$

b- عبارة v_n: $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

عبارة U_n:

$$v_n = \ln(U_n) \Rightarrow U_n = e^{v_n}$$

$$\Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c-

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = e^0 = 1$$

4- 1)

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$n = n-0+1 = n+1$$

$$a = v_0 = 1$$

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

$$= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^0} \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \times \dots \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$P_n = e^{S_n} = e^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

2)

$$P_n = e^{\frac{7}{4}} \rightarrow \cancel{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \cancel{e}^{\frac{7}{4}}$$

$$2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{7}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2-\frac{7}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^3}$$

$$\rightarrow 2^{n+1} = 2^3 \rightarrow n+1 = 3$$

$$\boxed{n=2}$$

التمرين السادس عشر:

$$U_n = \frac{6n+5(-1)^n}{3n}$$

1-

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

$$-5 \le 5(-1)^n \le 5$$

$$6n-5 \le 6+5(-1)^n \le 6n+5$$

$$\frac{6n-5}{3n} \le \frac{6+5(-1)^n}{3n} \le \frac{6n+5}{3n}$$

$$\frac{6n-5}{3n} \le U_n \le \frac{6n+5}{3n}$$

2- نحسب الأطراف في جوار ∞ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n-5}{3n} = \frac{6n}{3n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+5}{3n} = \frac{6n}{3n} = 2$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$$

متزايدة. U_n

$$② - \quad U_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2}{1} = \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$= \frac{-3}{n+1} < 0$$

$$U_n < 2 \Leftarrow U_n - 2 < 0 \Leftarrow$$

$n=2$ عنصر راجح على U_n.

$$③ - \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) = 2$$

* تعيين n_0 :

$$l = \frac{a+b}{b^2} = 2$$

$$r = \frac{b^2-a}{2} = 0.1$$

$$|U_n - l| < r$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - \frac{2}{1}\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{n+1}{3} > 10$$

$$\Rightarrow n+1 > 30$$

$$n > 29$$

$$\boxed{n_0 = 29}$$

فحسب مبرهنة الحاصرة: $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$

③- بما أن $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$ فالمتتالية متقاربة.

التمرين السابع عشر

$$U_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

$$①- \quad U_n = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 2 - \left[a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right]$$

$$= 2 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 2 - 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$②- \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

حيث $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

التمرين الثامن عشر

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$①- \quad U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+1} = \frac{2n+2-1}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1}$$

$$(n+1) \qquad (n+2)$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{2n^2} + \cancel{n} - 4n + 2}{(n+1)(n+2)}$$

التمرين التاسع عشر:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{2}{U_n} \end{cases}$$

1- $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

ندرس إتجاه f على المجال $[2,+\infty[$:

$$f'(x) = \underset{(x^2)}{\frac{1}{2}} - \underset{(2)}{\frac{2}{x^2}} = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

إما $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$

أو $x = -2$ مرفوض

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

⇐ f متزايدة على المجال $[2,+\infty[$

2- $E(n)$: « $2 < U_{n+1} < U_n$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$2 < U_1 < U_0$

محققة $2 < \frac{13}{6} < 3$

محققة ⇐ $E(0)$ صحيحة

«توضيح: $U_1 = \frac{U_0}{2} + \frac{2}{U_0} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$».

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$2 < U_{n+1} < U_n$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$2 < U_{n+2} < U_{n+1}$

«بما أن f متزايدة تماما ⇐ نطبق التراجح».

$f(2) < f(U_{n+2}) < f(U_{n+1})$

$2 < U_{n+1} < U_n$

وهي محققة فرضا

⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة.

3- من الطلب السابق وجدنا أن

$2 < U_{n+1} < U_n$

$U_{n+1} < U_n$ ⇐ U_n متناقصة

$2 < U_n$ ⇐ U_n محدودة من الأدنى بالعدد $m=2$

U_n متقاربة

لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى.

ـ نهاية U_n : $f(x) = x$

$$\underset{(x)}{\frac{x}{2}} + \underset{(2)}{\frac{2}{x}} = \underset{(2x)}{\frac{x}{1}}$$

$$\frac{x^2+4}{2x} = \frac{2x^2}{2x}$$

$x^2 + 4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = -2$ (مرفوض)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = 2$

التمرين العشرون:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases}$$

أولا: A

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$= \underbrace{U_n^2 - 2U_n + 1}\,-1 + 2$

$= (U_n - 1)^2 + 1$

ومنه متقاربة.

ⓑ نهاية المتتالية U_n:

$\lim_{n \to \infty} U_n = ?$

$f(x) = x$

$x^2 - 2x + 2 = x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = 1$

مرفوض (مقبول)

التمرين الواحد والعشرين:

$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$

① $E(n): \ll n \leq 2^n \gg$

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$1 \overset{?}{\leq} 2^1$

$1 \leq 2$ (محققة)

$\Rightarrow E(1)$ صحيحة

• نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$n \leq 2^n$ (صحيحة).

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$n+1 \leq 2^{n+1}$

* من الفرض:

$n \leq 2^n$

$2n \leq 2^n . 2^1$

$2n \leq 2^{n+1}$

$n+1 \leq 2n \leq 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \leq 2^{n+1}$

محققة

$\Leftarrow E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة.

ⓑ $E(n): \ll 1 \leq U_n \leq 2 \gg$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$1 \leq U_0 = \frac{3}{2} \leq 2$ محققة

$\Leftarrow E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n:

« صحيح » $1 \leq U_n \leq 2$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

من الفرض:

$1 \leq U_n \leq 2$

$0 \leq U_n - 1 \leq 1$

$0 \leq (U_n - 1)^2 \leq 1$

$1 \leq (U_n-1)^2 + 1 \leq 2$

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

محققة $\Leftarrow E(n+1)$ صحيحة.

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة.

ثانيا: ⓐ $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

$l_1 = U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$

$= U_n^2 - 3U_n + 2$

$= (U_n - 2)(U_n - 1) = l_2$

ⓑ بما أن $1 \leq U_n \leq 2$

بيان $U_n - 1 \geq 0$ & $U_n - 2 \leq 0$

$U_{n+1} - U_n = (U_n-2)(U_n-1) \leq 0$

$\Leftarrow U_n$ متناقصة.

ⓐ ثالثا: بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $m = 1$

التمرين الثاني والعشرون

1- محلول أول طلب في التمرين السابق!!

2- من الطلب السابق وجدنا: $n < 2^n$

$1 < 2^1$

$2 < 2^2$

$\vdots$

$\Rightarrow U_n < \frac{2^1}{5^1} + \frac{2^2}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^n}$

$\Rightarrow U_n < \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

وحدها الأول $a = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow U_n < a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$U_n < \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}}$

$U_n < \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}}$

$U_n < \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

$U_n < \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

3- $U_n < \frac{2}{3} - \underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\text{صفر}}$

$U_n < \frac{2}{3}$

$M = \frac{2}{3}$ عنصر راجح على U_n

4- $U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n}$

$U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n} + \frac{n+1}{5^{n+1}}$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{5^{n+1}} > 0$

U_n متزايدة:

5- بما أنه U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

2- من الطلب السابق وجدنا أن

$n < 2^n$

أي:

$1 < 2^1$

$2 < 2^2$

$\vdots$

$n < 2^n$

$\Rightarrow U_n < \frac{2^1}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \dots + \frac{2^n}{e^n}$

$U_n < \left(\frac{2}{e}\right)^1 + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

أساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $a = \frac{2}{e}$

وعدد الحدود: n

$\Rightarrow U_n < a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$\Rightarrow U_n < \frac{2}{e} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}{1 - \frac{2}{e}}$

$U_n < \frac{2}{e} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}{\frac{e-2}{e}}$

$U_n < \frac{2}{\cancel{e}} \cdot \frac{\cancel{e}}{e-2} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$

$U_n < \frac{2}{e-2}\left(1 - \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}_{\text{صفر ... يهمل}}\right)$

$U_n < \frac{2}{e-2}$

$\Leftarrow M = \frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على U_n.

3- ندرس اطراد U_n:

$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$

$U_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

$\Leftarrow U_n$ متزايدة

* بما أنه U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثالث والعشرون:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

I-

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)\cdot n!}$$

$$= \frac{1}{n}_{(n+1)} - \frac{1}{n+1}_{(n)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

II- ب:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ب c =

$$U_n = \frac{a}{n}_{(n+1)} + \frac{b}{n+1}_{(n)}$$

$$U_n = \frac{an+a+bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 1 = (a+b)n + a$$

نطابق:

$a+b=0$ — (1)

$a=1$ — (2)

نعوض (2) في (1):

$$1+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

III:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

a)

$$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

نجمع:

$$S = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

التمرين الرابع والعشرون:

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

1- اطراد U_n:

$$U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

نشكل الفرق:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

$\Leftarrow$ U_n متزايدة

اطراد V_n:

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

نشكل الفرق:

$$V_{n+1} - V_n = \underbrace{U_{n+1} - U_n}_{\downarrow} + \frac{1}{2^{n+1}}_{(1)} - \frac{1}{2^n}_{(2)}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1-2}{2^{n+1}}$$

إشارة الأكبر

الكسر الأصغر ⟵ $\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$

المقام الأكبر ⟵

V_n متناقصة

2- نحسب نهاية الفرق:

$$\lim_{n\to\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to\infty} \left(U_n - U_n - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

بما أن U_n متزايدة و v_n متناقصة

و $\lim_{n\to\infty}(U_n - v_n) = 0$

فالمتتاليتان U_n و v_n متجاورتان.

3) $U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$

مجموع n حدود متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الأول $a = \frac{1}{5}$

$U_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}$

$= \frac{1}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right) = \frac{1}{4}$

صفر

وبما أن U_n و v_n متجاورتان فإن $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{4}$

التمرين الخامس والعشرين:

$U_n = \ln\left(\frac{n \cdot e^n}{n+1}\right)$

$= \ln\left(\frac{n}{n+1} \cdot e^n\right)$

$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln e^n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n$

$U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n$

نعوض: $U_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

$U_2 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 2$

$U_3 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3$

$\vdots$

نجمع:

$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 2 + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3 + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$\boxed{+}\ \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\text{حسابية}}$

$= \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right)$

$+\ \frac{n(a+l)}{2}$

$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{n(1+n)}{2}$

$S_n = -\ln(n+1) + \frac{n^2+n}{2}$

التمرين السادس والعشرون:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1 \end{cases}$$

$v_n = U_n + \alpha n + \beta$

1) بما أن v_n هندسية فإن:

$v_{n+1} = v_n \cdot q$ --- (*)

نحسب v_{n+1}:

التمرين السابع والعشرين

$$\begin{cases} S_0 = 12 \\ S_{n+1} = \dfrac{t_n+3S_n}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n+2S_n}{3} \end{cases}$$

1) $E(n)$: « $S_n > t_n$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= 12 \\ t_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad S_0 > t_0$$

$\Leftarrow$ $E(0)$ صحيحة

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$S_n > t_n$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$S_{n+1} > t_{n+1}$$

أي : $S_{n+1} - t_{n+1} > 0$

$$S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{t_n+3S_n}{4} - \frac{t_n+2S_n}{3}$$

$$= \frac{3t_n + 9S_n - 4t_n - 8S_n}{12}$$

$$= \frac{S_n - t_n}{12} = \frac{1}{12}(S_n - t_n) > 0$$

لأنه من الفرض $S_n > t_n \Leftarrow S_n - t_n > 0$

$\Leftarrow$ $E(n+1)$ صحيحة

$\Longleftarrow$ $E(n)$ صحيحة .

2) نعرف $h_n = S_n - t_n$

$$h_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{12}(S_n - t_n)$$

$$\Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{12}\,\frac{\cancel{(S_n - t_n)}}{\cancel{S_n - t_n}} = \frac{1}{12} = q$$

المتتالية h_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0 \quad \left(-1 < q = \frac{1}{12} < 1\right)$$

$$v_{n+1} = U_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta$$

$$= 3U_n + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= 3(v_n - \alpha n - \beta) + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= 3v_n - 3\alpha n - 3\beta + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = 3v_n \underbrace{- 2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha}$$

$$v_{n+1} = q \cdot v_n + 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha = 0$$

$$(-2\alpha + 2)n - 2\beta + \alpha + 1 = 0$$

$-2\alpha + 2 = 0$ —1

$-2\beta + \alpha + 1 = 0$ —2

من 1 نجد : $\alpha = 1$

نعوض في 2 :

$$-2\beta + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

$$\Rightarrow v_n = U_n + n + 1$$

$$\Rightarrow v_0 = U_0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = 1}$$

$$\Rightarrow v_m = v_p \cdot q^{m-p}$$

$$v_n = v_0 \cdot 3^{n-0} \Rightarrow \boxed{v_n = 3^n}$$

$\Leftarrow$ عبارة U_n : $U_n = v_n - \alpha n - \beta$

$$\Rightarrow U_n = 3^n - n - 1$$

ⓒ ندرس إطراد S_n :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{S_n}{1}$$

$$= \frac{t_n + 3S_n - 4S_n}{4}$$

$$= \frac{t_n - S_n}{4} < 0$$

⇐ S_n متناقصة

ندرس إطراد t_n :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2S_n}{3} - \frac{t_n}{1}$$

$$= \frac{t_n + 2S_n - 3t_n}{3} = \frac{2S_n - 2t_n}{3} > 0$$

⇐ t_n متزايدة.

وبما أن $\lim_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0$ (حسب الطلب السابق)

فالمتتاليتان U_n و V_n متجاورتان.

ⓓ - $U_n = 3t_n + 8S_n$

$$U_{n+1} = 3t_{n+1} + 8S_{n+1}$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{t_n + 2S_n}{\cancel{3}}\right) + \cancel{8}^{2}\left(\frac{t_n + 3S_n}{\cancel{4}}\right)$$

$$= t_n + 2S_n + 2t_n + 6S_n$$

$$= 3t_n + 8S_n = U_n$$

⇐ $U_{n+1} = U_n$ فالمتتالية U_n ثابتة.

* قيمتها الثابتة : $U_0 = U_1 = \dots = U_n$

$$U_0 = 3t_0 + 8S_0$$

$$= 3(1) + 8(12) = 3 + 96 = 99$$

$$U_n = U_0 = 99$$

ⓔ - $U_n = 3t_n + 8S_n$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(3t_n + 8S_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(3t_n) + \lim_{n\to\infty}(8S_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 3\lim_{n\to\infty} t_n + 8\lim_{n\to\infty} S_n$$

بما أن S_n و t_n متجاورتان فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} t_n = l$$

و U_n ثابتة ⇐ $\lim_{n\to\infty} U_n = U_0 = 99$

$\Rightarrow 99 = 3l + 8l$

$99 = 11l \Rightarrow l = 9$

وهي النهاية المشتركة للمتتاليتين t_n و S_n.

التمرين الثامن والعشرون :

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

* ندرس اطراد x_n :

$$x_{n+1} = \frac{4(n+1)+5}{n+1+1} = \frac{4n+4+5}{n+2} = \frac{4n+9}{n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$(n+1)$ $(n+2)$

$$= \frac{\cancel{4n^2} + 9n + 4n + 9 - \cancel{4n^2} - 5n - 8n - 10}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

⇐ x_n متناقصة.

* ندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{4n+4+1}{n+3} = \frac{4n+5}{n+3}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$(n+2)$ $(n+3)$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n^2 + 5n + 8n + 10 - (4n^2 + 12n + n + 3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

y_n متزايدة.

نحسب الفرق:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2} \right)$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$\Leftarrow$ x_n و y_n متجاورتان.

التمرين التاسع والعشرون:

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3 \end{cases}$$

$$v_n = U_n - n + 1$$

1- $v_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) + 1$

$= 3U_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$

$= 3U_n - 3n + 3 = 3(U_n - n + 1)$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3\cancel{(U_n - n + 1)}}{\cancel{U_n - n + 1}} = 3 = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q = 3$

وحدها الأول:

$v_0 = U_0 - 0 + 1 = 1$

2- $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$v_n = v_0 \cdot 3^{n-0}$

$v_n = 1 \cdot 3^n \Rightarrow v_n = 3^n$

عبارة U_n:

$v_n = U_n - n + 1$

$\Rightarrow U_n = v_n + n - 1$

$U_n = 3^n + n - 1$

3- $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

مجموع هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $a = v_0 = 1$ وعدد الحدود $n+1$

$$* S_1 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$S_2 = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n}$$

متتالية هندسية:

$q = 3, \quad a = v_n = 3^n$

$n = 2n - n + 1 = n + 1$

$$\Rightarrow * S_2 = 3^n \cdot \frac{1 - 3^{n+1}}{1-3} = 3^n \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$$S_3 = v_0 + \frac{v_1}{3} + \dots + \frac{v_n}{3^n}$$

نبدأ من الحد الأخير: $\frac{v_n}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} = 1$

فالمجموع لمتتالية ثابتة

حدها الثابت $a = 1$ وعدد الحدود $n+1$

$* S_3 =$ القيمة الثابتة $\times$ عدد الحدود $= (n+1) \cdot 1$

$$* S_4 = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \dots + 2^n \cdot v_n$$

نبدأ من الحد الأخير:

$2^n \cdot v_n = 2^n \cdot 3^n = (2 \times 3)^n = 6^n$

متتالية هندسية أساسها $q = 6$

حدها الأول $a = v_0 = 1$ وعدد الحدود $n+1$

$$S_4 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-6^n}{1-6}$$

$$* S_4 = \frac{6^n - 1}{5}$$

$$* S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

نبدأ من الحد الأخير:

$\frac{1}{v_n} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

عدد الحدود $n+1$ وحدها الأول $a = \frac{1}{v_0} = 1$

* $\rightarrow S_5 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)$

* $S_6 = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

نبدأ من الحد الأخير :

$U_n = \underbrace{V_n}_{\text{هندسية}} + \underbrace{n-1}_{\text{حسابية}}$

$w_n = n-1$

w_n حسابية

أساسها $r=1$

وحدها الأول $a = 0-1$

$a = -1$

وعدد الحدود : $n-0+1 = n+1$

والحد الأخير $l = w_n = n-1$

أساسها $q=3$

وحدها الأول $a=1$

عدد الحدود n

$\rightarrow S_6 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{n(a+l)}{2}$

$= 1 \cdot \frac{1-(3)^n}{1-3} + \frac{(n+1)(-1+n-1)}{2}$

$= \frac{3^n-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

* $S_7 = V_0 + V_2 + V_4 + \dots + V_{2n}$

نبدأ من الحد الأخير :

$V_{2n} = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

هندسية أساسها $q = 9$ وحدها الأول

$V_0 = 9^0 = 1$

وعدد الحدود : $n = \frac{2n-0}{2} + 1 = \frac{2n}{2} + 1 = n+1$

$S_7 = a \cdot \frac{1-9^n}{1-9} = 1 \cdot \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{9^{n+1}-1}{8}$

* $S_8 = \ln(\frac{1}{2}) + \ln(\frac{2}{3}) + \dots + \ln(\frac{n}{n+1})$

$S_8 = \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{n+1}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$

* $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

$= 3^0 \times 3^1 \times 3^2 \times \dots \times 3^n$

$= 3^{0+1+2+\dots+n}$

الأس : مجموع الحدود حسابية :

$= 3^{\frac{n(a+l)}{2}} = 3^{\frac{(n+1)(n+0)}{2}}$

$= 3^{\frac{n^2+n}{2}}$

$= 3$

التمرين الثلاثون

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + \frac{1}{3} n + 1$

I -

$E(n)$: " $U_n < n+3$ "

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$U_0 = 2 < 0+3$

محققة $2 < 3$

$\Leftarrow$ $E(0)$ صحيحة

- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$U_n < n+3$ (صحيحة).

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$U_{n+1} < n+1+3$

$U_{n+1} < n+4$ ...(*)

من الفرض : $U_n < n+3$

$\frac{2}{3} U_n < \frac{2}{3} n + 2$ $\quad \times(\frac{2}{3})$

$(+\frac{1}{3} n + 1)$

$\underbrace{\frac{2}{3} U_n + \frac{1}{3} n + 1}_{} < \frac{2}{3} n + 2 + \frac{1}{3} n + 1$

محققة $U_{n+1} < n + 3$

$\Leftarrow$ $E(n+1)$ صحيحة.

⇐ $E(n)$ صحيحة.

② - إطراد U_n:

$U_{n+1} - U_n$

$= \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - U_n$

$= -\frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 = +\frac{1}{3}(-U_n + n + 3) > 0$

⇐ U_n متزايدة

"من الطلب السابق وجدنا أن $U_n \leq n+3$"

"$-U_n + n + 3 \geq 0$"

③ - لدينا $U_0 = 2$ والمتتالية U_n متزايدة إذاً من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n \geq 2$

⇐ U_n محدودة من الأسفل بالعدد $m = 2$.

"لا يمكن القول بأنها متقاربة".

II

$V_n = U_n - n$

a- $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}(U_n - n)$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{(U_n - n)}}{\cancel{U_n - n}} = \frac{2}{3} = q$

فالمتتالية V_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول: $a = V_0 = U_0 - 0$

$= 2 - 0 = 2$

b- عبارة V_n: $V_m = V_p \cdot q^{m-p}$

$V_n = V_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0}$

$V_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

عبارة U_n:

$V_n = U_n - n \Rightarrow U_n = V_n + n$

$\Rightarrow U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c- $\lim_{n \to 0} U_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} + \underbrace{n}_{\to \infty}$

$= \infty$

d- $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$U_0 = V_0 + 0$

$U_1 = V_1 + 1$

$U_2 = V_2 + 2$

$U_3 = V_3 + 3$

$\vdots$

$U_n = V_n + n$

$\Rightarrow S = \underbrace{V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n}_{\text{هندسية}} + \underbrace{(0+1+2+\dots+n)}_{\text{حسابية}}$

$= a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{n(a+l)}{2}$

$= 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{(n+1)(0+n)}{2}$

$= 2 \times \frac{3}{1} \cdot \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$

$= 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n^2+n}{2}$

III

$t_n = \ln(V_n)$

a- $t_{n+1} = \ln(V_{n+1})$

$\rightarrow t_{n+1} - t_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n)$

$= \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = r$

فالمتتالية t_n حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

وحدها الأول: $t_0 = \ln V_0 = \ln 2$

ب - عبارة t_n: $t_m = t_p + (m-p)\cdot r$

$$t_n = t_0 + (n-0)\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$t_n = \ln 2 + n \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \ln\left(2 \cdot \frac{2^n}{3^n}\right)$$

$$\Rightarrow t_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$$

$$A_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$$

$$a = t_0 = \ln 2$$

$$n = n - 0 + 1 = n+1$$

$$l = t_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)\left(\ln 2 + \ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2\ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\left(\ln 4 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$$

* الجداء P_n:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

نلغم الطرفين « نأخذ $\ln$ الطرفين »:

$$\ln P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$$

$$\ln P_n = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n}_{A_n}$$

$$\ln P_n = A_n \Rightarrow P_n = e^{A_n} = e^{\frac{(n+1)\left(\ln 4 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}}$$

والسلام لقلبك.