الاشتقاق

للاستاذ إياد ادريس

مشرف مادّة الرّياضيّات في ثانويّة السّعادة

* الوحدة الثالثة: الاشتقاق

* العدد المشتق والتابع المشتق:

إذا كان لتابع نسبة التغير $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ المعرف على $D_f/\{a\}$ نهاية مساوية $\ell \in R$ (عدد حقيقي) عندما $x \to a$ قلنا أن f اشتقاقي عند a

وتسمى هذه النهاية بالعدد المشتق عند a ونرمز لها ب $f'(a)$ (النهاية)

ملاحظات:

① عندما نقول أن التابع f اشتقاقي عند النقطة a هندسياً يعني أن الخط البياني للتابع f في هذه النقطة يقبل مماساً وحيداً لا يوازي محور التراتيب.

② إذا كان التابع f اشتقاقي عند a فهو مستمر عند a. (إنما بينزم المماس وإذا كانت

③ إذا كان التابع f مستمر عند a فليس بالضرورة (النقطة معزولة)

أن يكون اشتقاقي عند a.

④ إذا كان التابع f غير مستمر عند a فهو غير اشتقاقي عند a.

$\left(\dfrac{9}{105}\right.$ في كل من الحالات الآتية ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر.

1) $f(x)=x^2\sqrt{x}$

$D_f: [0,+\infty[\quad , a=0$

نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad ; f(0)=0$

$g(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x} \Rightarrow g(x)=x\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0=f'(0)$

إذاً f اشتقاقي عند (0)

2) $f(x)=x|x|$

$D_f=R \quad , a=0$

نشكل تابع نسبة تغير g المعرف على $R/\{0\}$ وفق

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad ; f(0)=0$

$g(x) = \frac{x|x|}{x}$, $|x|$

(إذا : نحينا القيمة المطلقة إما x أو $-x$ ، في الحالتين (0))

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = f'(0)$

ومنه f اشتقاقي عند الصفر

3) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$, $a = 0$

نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وفق

$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$: $f(0) = 0$

$\Rightarrow g(x) = \frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}$

$g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x(x^2+1)}$

1) من أجل $x > 0$ نكتب:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
	$-$	0	$+$

$g(x) = \frac{x^2 + x}{x(x^2+1)} = \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 = f'(0^+)$

إذاً f اشتقاقي عند (0) من اليمين

2) من أجل $x < 0$ نكتب:

$g(x) = \frac{x^2 - x}{x(x^2+1)} = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1 = f'(0^-)$

إذاً f اشتقاقي عند (0) من اليسار

من (1) و (2) نجد $\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x)$ $\Leftarrow$ ومنه f غير اشتقاقي عند (0) (يقبل مماسين)

مثال) ليكن (1) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[1, +\infty[$ وفق $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

ادرس قابلية اشتقاق التابع عند (1).

نشكل تابع نسبة التغير المعرف على $]1, +\infty[$ وفق

$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $f(1) =$

$g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1} - 1}{x - 1} \Longrightarrow g(x) = \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-1}}{x-1}$

$$g(x) = \frac{x-1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1} \Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim g(x) = 1 - \frac{2}{0^+} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذاً f غير اشتقاقي عند (1) (يقبل مماس شاقولي)

نشاط ص 102 هام

$|x| - 1 \Rightarrow |x| = 1$

$D_f = \mathbb{R} / \{-1, 1\}$

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

1) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخط البياني C_f في النقطة $A(0,2)$

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار لخط البياني C_f في النقطة $A(0,2)$

3) ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f على المجال $[-2,2]$

معادلة نصف المماس
الاشتقاق

1) من أجل $x > 0$ نشكل تابع نسبة التغير المعرف على $]0, +\infty[$ وفق

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad ; \quad f(0) = 2$$

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x} = \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} g(x) = -1 = f'(0)$$

إذاً f اشتقاقي عند (0) من اليمين

معادلة نصف المماس من اليمين لخط البياني في النقطة $A(0,2) \Leftarrow y - 2 = -1(x - 0)$

$$\boxed{d_1 : y = -x + 2}$$

2) من أجل $x < 0$ نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad ; \quad f(0) = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x}$$

$$g(x) = \frac{3x}{x(-x+1)} \Rightarrow g(x) = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 3 = f'(0^-)$$

إذن: f اشتقاقي عند 0 من اليسار ومعادلة نصف المماس من اليسار لخط البياني في النقطة $A(0,2)$

$$y-2 = 3(x-0) \Rightarrow \boxed{d_2 : y = 3x+2}$$

3) الرسم نقطي: لا نعتمد على جدول تغيرات وإنما على نقاط مساعدة)

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$$

x	-2	-1	0 (A)	1	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$

إذن: طلب

هل التابع اشتقاقي عند A

ليس اشتقاقي لأنه يقبل نصف مماسين في النقطة.

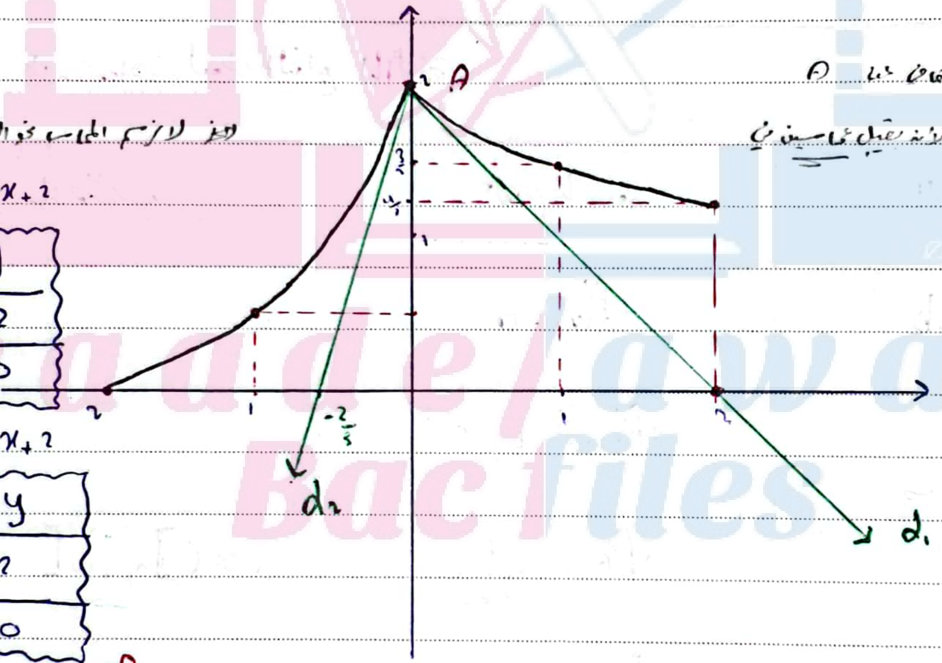
الخط لا نرسم المماس في الفرع لأنه لا يوجد تابع

$* \; d_2 : y = 3x+2$

x	y
0	2
$-\frac{2}{3}$	0

$* \; d_1 : y = -x+2$

x	y
0	2
2	0



للتدريب: ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+3}{|x|+2}$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند (1) من اليمين ثم اكتب معادلة نصف المماس اليميني لخط البياني في النقطة $A(1,1)$

من أجل $x>-1$ نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $]-1,+\infty[$ ومن

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \quad ; \quad f(-1)=1$$

$$g(x)=\frac{\frac{x+3}{x+3}-1}{x+1}=\frac{1-1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=0=f'(-1^+)$$

(الميل معدوم ⇐ المماس أفقي $y=y_0$)

ومنه f اشتقاقي عند (-1) من اليمين

$y-y_0=m(x-x_0)$, $A(-1,1)$

$y-1=0(x+1)$

$y-1=0 \Rightarrow y=1$

$d: y=1$

وهي معادلة نصف المماس لخط البياني من اليمين عند النقطة $A(-1,1)$

قواعد الاشتقاق لبعض التوابع المألوفة

التابع	التابع المشتق	ملاحظات
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	
$f(x)=x^r$	$f'(x)=rx^{r-1}$	
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in]0,+\infty[$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$

/ /

مراجعة:

* $(u \mp v)' = u' \mp v'$
* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$
* $(u.v)' = u'.v + v'.u$
* $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
* $(k.u)' = k.u'$

$\dfrac{?}{34}$) احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي نحسب المشتق عليها

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$D_f = R$, f اشتقاقي على R

$f'(x) = 2x^2 - x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{4}$

$D_f = R$, f اشتقاقي على R

$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 3x - 1)$

$f'(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$

ملاحظة: في التابع الجذري
مفتوح: اشتقاقي على تعريفه
مغلق: بعد الاشتقاق إذا كان
الطرف المغلق يجعل المشتق غير
معرف ← نفتحه

3) $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$

$D_f = [0, +\infty[$

$f(x) = x^4 - 2x^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x}$

{ f اشتقاقي على $[0, +\infty[$ }

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1)}{x}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$

(~~f اشتقاقي على $]0, +\infty[$~~)

5) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}/\{-2,2\}$

$f'(x) = \dfrac{1(x^2-4) - 2x(x-1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^2-4-2x^2+2x}{(x^2-4)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$

6) $f(x) = x\cos x$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2}+\pi k\}$

$f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x(\sin x - 1) - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \dfrac{-(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin x}{(\sin x - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} = \dfrac{1}{\sin x - 1}$

★ إيجاد معادلة المماس

لإيجاد معادلة المماس نميز حالتين:

$\boxed{1}$ نقطة التماس معلومة عندئذٍ نشتق لإيجاد الميل.

$\boxed{2}$ ميل المماس معلوم عندئذٍ نشتق لإيجاد نقطة التماس

مثال: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \sqrt{2x+1}$

أوجد معادلة المماس لـ (C) في نقطة منه فاصلتها (4)

$D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$

$f(4) = 3 \Rightarrow A(4,3)$ نقطة التماس

$f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ (f اشتقاقي على المجال $]-\frac{1}{2}, +\infty[$)

127 f معرف ومعادلة

$f'(4) = \frac{1}{3}$

ومنه معادلة المماس في النقطة $A(4,3)$: $y - 3 = \frac{1}{3}(x-4)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$$

2) $\frac{}{104}$ ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1) اكتب معادلة المماس لـ (C) في النقطة التي فاصلتها (1)

2) هل يقبل (C) مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$

3) هل يقبل (C) مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

① نقطة التماس $N(1, -\frac{1}{2}) \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2}$

اشتقاق f على $R/\{-1\}$

$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - 1(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2+2x-3x-3-x^2+3x-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$

ميل المماس $f'(1) = \frac{1+2-4}{4} = -\frac{1}{4}$

ومنه معادلة المماس في النقطة N

$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

② إذا قبل (C) مماساً موازياً للمستقيم $y = -4x$ يجب أن يكون ميله (-4)

أي $f'(x) = -4$ فاصلة نقطة التماس

نعوض في عبارة المشتق : $-4 = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} \Rightarrow x^2+2x-4 = -4(x^2+2x+1)$

$\Rightarrow x^2+2x-4 = -4x^2-8x-4$

$\Rightarrow 5x^2+10x = 0 \Rightarrow 5x(x+2) = 0$

إما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ أو $x = -2 \Rightarrow f(-2) = -11$

$\Leftarrow y = mx$ $\quad m = \frac{-a \to \text{أمثال } x}{b \to \text{أمثال } y} \Leftarrow ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$\boxed{128}$

نقطتي التماس $N_2(-2,-11)$ $\quad N_1(0,1)$

إذا (C) يقبل مماسين للمستقيم موازيين $y=4x$ معادلتها هما

$$\begin{cases} y-1 = -4(x-0) \\ y+11 = -4(x+2) \end{cases}$$

3) إذا قبل (C) مماسا موازيا للمستقيم $3x-2y=0 \Rightarrow -2y = -3x \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x}$

يجب أن يكون ميله $\left(\frac{3}{2}\right)$

أي: $f'(x) = \frac{3}{2}$

نعوض في عبارة المشتق $\frac{3}{2} = \frac{x^2+2x-4}{x^2+2x+1} \Rightarrow 3x^2+6x+3 = 2x^2+4x-8$

$\Rightarrow x^2+2x+11=0$

$\Delta = b^2-4ac = 4-4(1)(11) = 4-44$

$\Delta = -40 < 0$ مستحيلة الحل في R

ومنه (C) لا يقبل مماسا موازيا للمستقيم $3x-2y=0$

للتوابع $\frac{3}{104}$) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

1) اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي فاصلتها 1

2) هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{1}{4}x$

3) هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$

1) $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow N\left(1, \frac{1}{3}\right)$ نقطة التماس

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{x^2+2-2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$

$f'(1) = \frac{1}{9}$ ميل المماس

ومنه معادلة المماس في النقطة N

$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$

2) إذا قبل C مماسا موازيا للمستقيم $y = -\frac{1}{4}x$ يجب أن يكون ميله $\left(-\frac{1}{4}\right)$

أي $f'(x) = \frac{3}{2}$

نعوض في عبارة المشتق $f'(x) = -\frac{1}{4} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow -x^4-4x^2-4 = -4x^2+8$

$x^4 = -12$ مستحيلة

ومنه (C) لا يقبل مماسا موازيا للمستقيم $y = -\frac{1}{4}x$

ر. و جبا ٤

179

/ /

3) إذا قبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0 \Leftarrow y=4x$

يجب أن يكون ميله $m=4$ $\quad f'(x)=4$

نعوض في معادلة المشتق $y=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow 2-x^2=4x^4+16x^2+16 \Rightarrow 4x^4+17x^2+14=0$

$\Delta=289-4(4)(14)=65$

$x_1^2=\frac{-17+\sqrt{65}}{2(4)}<0$ مرفوضة ، $x_1^2=\frac{-17-\sqrt{65}}{2(4)}<0$ مرفوض

أي أن C لا يقبل مماساً موازياً للمستقيم $4x-y=0$

اشتقاق تابع مركب

$$[g(u(x))]'=g'(u).u'(x)$$

$$\downarrow$$

$$(g\circ u)(x)$$

مثال: أوجد مشتق التابع

$$f(x)=\sin(5x-\frac{\pi}{4})$$

$u(x)=5x-\frac{\pi}{4}$, $g(x)=\sin x \Rightarrow \boxed{g'(x)=\cos x}$

إذاً $f(x)=(g\circ u)(x)$

$f(x)=g(u)$

$f'(x)=g'(u).u'(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(5x-\frac{\pi}{4}).(5)$

$$f'(x)=5\cos(5x-\frac{\pi}{4})$$

$$f(x)=\sqrt{3x-4}$$

g مرجعي ، g برا ، u جوا

$u(x)=3x-4$ $\quad g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

إذاً $f(x)=(g\circ u)(x)$

$f(x)=g(u) \Rightarrow f'(x)=g'(u).u'(x)$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x-4}}.3 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$

اشتقاق التوابع المثلثية

التابع المثلثي	التابع المشتق
$f(x)=\sin(u(x))$	$f'(x)=u'(x)\cos(u(x))$
$f(x)=\cos(u(x))$	$f'(x)=-u'(x)\sin(u(x))$
$f(x)=\tan(u(x))$	$f'(x)=u'(x)[1+\tan^2(u(x))]$ / $f'(x)=\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

$f(x) = \cot(u(x))$	$f'(x) = -u'(x)\left[1+\cot^2(u(x))\right] = \dfrac{-u'(x)}{\sin^2(u(x))}$

مشتق التابع $f(x) = \sqrt{u(x)}$

إذا كان u تابعاً موجباً تماماً، اشتقاقياً على مجال I، كان التابع f المعرف على I بالصيغة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ اشتقاقياً على I، وأياً كان x من I كان:

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

مثال: ليكن التابع f المعرف على $I = [-2,2]$ وفق $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

1) اثبت أن f اشتقاقي على $]-2,2[$

2) أوجد $f'(x)$

1) ندرس إشارة $(4-x^2)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

التابع $u(x) = 4-x^2$ موجب تماماً على المجال $]-2,2[$، وهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على المجال $]-2,2[$

ومنه f اشتقاقي على $]-2,2[$

2) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

مشتق قوة تابع

$$f(x) = \left[u(x)\right]^r \Rightarrow f'(x) = r\left[u(x)\right]^{r-1} \cdot u'(x)$$

نزل — نقص — اشتق

$\frac{1}{94}$) احسب مشتق التابع f على المجموعة D المرافقة له

1) $f(x) = (2x^3-1)^5$; $D = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = 5(2x^3-1)^4 \cdot (6x^2) = 30x^2(2x^3-1)^4$

2) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

3) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ $D = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

4) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ $D = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x$

$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

5) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

6) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^3 x}{\cos^6 x} = \frac{2\sin x \cos^2 x + 3\sin^3 x}{\cos^4 x}$

7) $f(x) = \tan 3x$ $D = \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = 3\left[1 + \tan^2 3x\right]$ أو $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$

8) $f(x) = \tan^2 x$ $\quad D = [0, \frac{\pi}{2}[$

f اشتقاقي على D

$f'(x) = 2\tan x (\tan x)' = 2\tan x (1 + \tan^2 x)$

$\frac{2}{94}$) (C) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1) احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$

2) استنتج معادلة المماس T لـ (C) في النقطة A التي فاصلتها $(\frac{1}{2})$

3) تحقق أنّ المستقيم (OA) والمماس T متعامدان

1) f اشتقاقي على المجال $[0,1[$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Leftarrow$ نقطة التماس $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ميل المماس

ومنه معادلة المماس في النقطة A

$$T: y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})$$

3) لدينا $O(0,0)$ $\Leftarrow$ $m(OA) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \sqrt{3}$

D_1 ميل المستقيم OA

ولدينا $m(T) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$$m(OA) \cdot m(T) = \sqrt{3} \times -\frac{1}{\sqrt{3}} = -1$$

فالمستقيم (OA) والمماس T متعامدان

$\frac{10}{105}$) التابع f المعرف على R وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ في حالة $x \neq 0$ أي أنّ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل اجابتك

2) احسب $f'(x)$ على R^*

133

1) نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$$

$$g(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$

1) من أجل $x>0$ نكتب:

$-x\leq g(x)\leq x$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$ إذا حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$

2) من أجل $x<0$ نكتب:

$-x\geq g(x)\geq x$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^-}(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)$ إذا حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$

من 1 و 2 بما أن $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$

إذا f اشتقاقي عند (0)

2) f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)x^2=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\cancel{-\frac{1}{x^2}\sin}$

$\frac{14}{108}$) التابع f معرف على المجال $[0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

2) احسب $f'(x)$ على المجال $]0,1[$

1) نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $]0,1[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\quad ; f(0)=0$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}=\frac{\sqrt{x^3}}{x\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{x^2\cdot x}}{x\sqrt{1-x}}$$

$$g(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}}\quad ; x>0\quad\Rightarrow g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$ ومنه f اشتقاقي عند (0)

134

2) f اشتقاقي على $]0,1[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x)+x^3}{2(1-x)^2\cdot\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

16/108) أوجد التابع المشتق للتابع f و حدد المجموعة التي تنجز المشتق عليها

1) $f(x)=\cos^2 3x$

f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=2\cos 3x(\cos 3x)'=2\cos 3x(-3\sin 3x)=-6\cos 3x\sin 3x$$

2) $f(x)=\sin^3 2x$

f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=3\sin^2 2x(\sin 2x)'=3\sin^2 2x(2\cos 2x)=6\sin^2 2x\cos 2x$$

3) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$

$\sin^2 3x=0 \Rightarrow 3x=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi k}{3}$

f معرف و اشتقاقي على $\boxed{\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi k}{3}\right\}:k\in\mathbb{Z}}$

$$f'(x)=\frac{-(\sin^2 3x)'}{(\sin^2 3x)^2}=\frac{-2\sin 3x(\sin 3x)'}{\sin^4 3x}=\frac{-2\sin 3x\times 3\cos 3x}{\sin^4 3x}$$

$$f'(x)=\frac{-6\sin 3x\cos 3x}{\sin^4 3x}=\frac{-6\cos 3x}{\sin^3 3x}$$

4) $f(x)=\frac{1}{\cos^3 2x}$

f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right\}:k\in\mathbb{Z}$

$$f'(x)=\frac{-(\cos^3 2x)'}{\cos^6 2x}=\frac{-3\cos^2 2x(-2\sin 2x)}{\cos^6 2x}=\frac{6\sin 2x}{\cos^4 2x}$$

مشتق f بالنسبة للجوار مشتق على ...

15/108 نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

1) احسب التابع المشتق للتابع f.

2) استنتج مشتق كل من التوابع:

1) $g: x \to \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ 2) $h: x \to \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

3) $k: x \to \dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$ 4) $\ell: x \to \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$

1) f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}$$

(2

1) $g(x)=f(\sqrt{x})$

$$g'(x)=f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=\frac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}$$

2) $h(x)=f(x^2)$

$$h'(x)=f'(x^2)\cdot(x^2)'=\frac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2}\cdot(2x)=\frac{2x^5-4x^3-2x}{(x^2-1)^2}$$

3) $k(x)=f(\sin x)$

$$k'(x)=f'(\sin x)\cdot(\sin x)'=\frac{\sin^2 x-2\sin x-1}{(\sin x-1)^2}\cdot(\cos x)=\frac{\sin^2 x\cos x-2\sin x\cos x-\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

4) $\ell(x)=\sqrt{f(x)}$

$$\ell'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

حالة ثانية من إثبات الاشتقاق عن جدال.

17/108 (دورة) ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

1) عين التابع المشتق f' للتابع f

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2}}$$

الأعداد المشتقة على ؟

136

2) نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$ اثبت أن
g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I

$$g(x) = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$$

البسط: $x \to 2\sin x + 3$ اشتقاقي على R نجد اشتقاقي على I

المقام: $x \to \sin x - 1$ اشتقاقي على R نجد اشتقاقي على I ولا ينعدم على I

(لا ينعدم عند نقطة في I لكي يكون g غير اشتقاقي)

فالتابع g اشتقاقي على I

$$g'(x) = f'(\sin x)\,(\sin x)' = \frac{-5}{(\sin x - 1)^2} \cdot \cos x$$

$$g'(x) = \frac{-5\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

3) نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $J =]1, +\infty[$ وفق $h(x) = f(\sqrt{x})$
اثبت أن h اشتقاقي على J ثم احسب $h'(x)$ على J

$$h(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$$

البسط: $x \to 2\sqrt{x} + 3$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$ نجد اشتقاقي على J

المقام: $x \to \sqrt{x} - 1$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$ نجد اشتقاقي على J

ولا ينعدم على J

فالتابع h اشتقاقي على J

$h'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$

$$h'(x) = \frac{-5}{(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$$

تبيين من الشكل ÷ التابع يلي عنا يلا نفس ال g

137

توظيف تعريف العدد المشتق في إيجاد نهاية تابع

الإضبار لتطبيق القاعدة
1. عدم تعيين
2. التابع يلي عنا يا نفس ال g

لإيجاد نهاية تابع بالاعتماد على تعريف العدد المشتق نتبع الخطوات:

① نختار التابع $H(x)$ من البسط

② نوجد $H'(x)$

③ نعين $H(a)$, $H'(a)$

④ نشكل تابع نسبة التغير g على التابع H ونطبق تعريف العدد المشتق لإيجاد النهاية

مثال) بالاعتماد على تعريف العدد المشتق ، أوجد نهاية التابع

$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ عند (0)

ليكن التابع $H(x) = \cos x$ (H معرف على $\mathbb{R}$)

فيكون $H'(x) = -\sin x$ (H اشتقاقي على $\mathbb{R}$)

$H'(0) = 0$, $H(0) = 1$

نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق

$$g(x) = \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} \Rightarrow g(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = f(x)$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = H'(0) = 0$$

مثال) بالاعتماد على تعريف العدد المشتق أوجد نهاية التابع

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1}$ عند (1)

ليكن التابع $H(x) = \sqrt{x^2+x+2}$ (H معرف على $\mathbb{R}$)

فيكون $H'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$ (H اشتقاقي على $\mathbb{R}$)

$H'(1) = \frac{3}{4}$ $H(1) = 2$

نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $\mathbb{R}/\{1\}$ وفق $\mathbb{R}/\{1\}$ وفق

$$g(x) = \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} \Rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} = f(x)$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} = H'(1) = \frac{3}{4}$$

مثال) أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$

ليكن التابع $H(x) = \sin x$ (H معرف على $\mathbb{R}$)

فيكون $H'(x) = \cos x$ (H اشتقاقي على $\mathbb{R}$)

$H(\frac{\pi}{2})=1 \qquad H'(\frac{\pi}{2})=0$

نشكل تابع نسبة التغير g المعرف على $R/\{\frac{\pi}{2}\}$

وفق $g(x)=\dfrac{H(x)-H(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow g(x)=\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=f(x)$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=H'(\frac{\pi}{2})=0$$

مثال: ليكن التابع $f(x)=\tan x$

① أوجد $f'(x)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f'(\frac{\pi}{4})$

② استنتج $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

$D_f=R/\{\frac{\pi}{2}+\pi K\} : K\in Z$

① $f'(x)=1+\tan^2 x$ (f اشتقاقي على D_f)

$f(\frac{\pi}{4})=1 \quad , \quad f'(\frac{\pi}{4})=2$

② حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=f'(\frac{\pi}{4})=2$$

مثال: ليكن التابع $f(x)=\tan 2x$

① أوجد $f(\frac{\pi}{8})$, $f'(\frac{\pi}{8})$

② استنتج $\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\dfrac{\tan 2x-1}{x-\frac{\pi}{8}}\right)$

1) $D_f=R/\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi K}{2}\} : K\in Z$

f اشتقاقي على D_f :

$f'(x)=2(1+\tan^2 2x)$

$f'(x)=2+2\tan^2 2x$

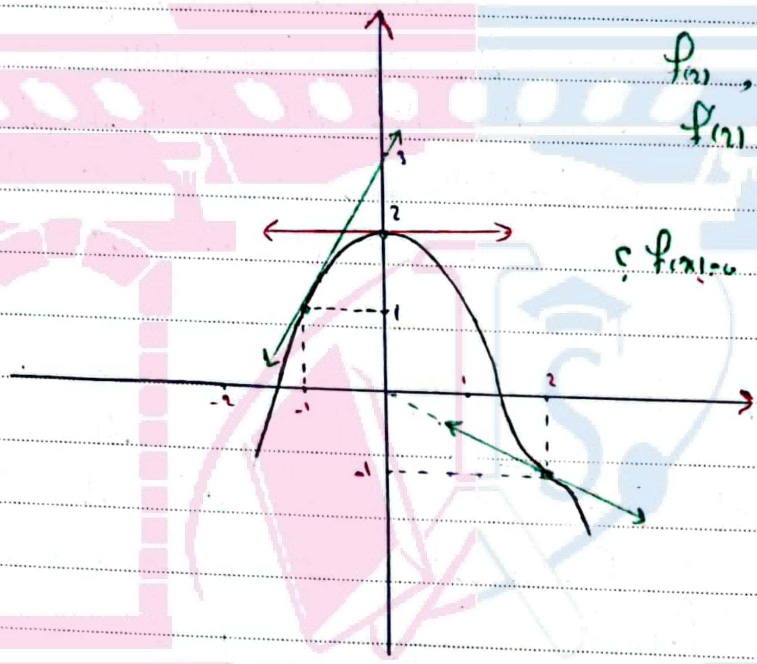
$f(\frac{\pi}{8})=1 \qquad f'(\frac{\pi}{8})=4$

2)

$$\lim\frac{\tan 2x-1}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{8})}{x-\frac{\pi}{8}}=f'(\frac{\pi}{8})=4$$

139

2/84) في الشكل المرافق C_f هو الخط البياني للتابع f تأمل الشكل وأجب.



1) عين كلاً من $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$

2) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ أوجد عددين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x)=0$

1) $f(0)=2$ $f(2)=-1$

$f(-1)=1$

$f'(0)=0$ ميل المماس في النقطة $(0,2)$

$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$ ميل المماس في النقطة $(2,-1)$، المماس يمر من $(0,0)$

$f'(-1) = \frac{2}{1} = 2$ ميل المماس في النقطة $(-1,1)$، المماس يمر من $(0,3)$

2) بما أن المستقيم $y=0$ يقطع الخط البياني C_f بنقطتين فالمعادلة $f(x)=0$ حلان

أحدهما $1 < x_1 < 2$

والآخر $-2 < x_2 < -1$

دراسة تغيرات تابع عددي

لدراسة تغيرات تابع عددي نتبع الخطوات التالية

1. نعين مجموعة تعريف التابع ونكتبها على هيئة مجال أو اجتماع مجالات ونعين مجالات استمراره
2. نعين قيم التابع عند الأطراف المغلقة لمجالات الاستمرار ونهايات التابع عند الأطراف المفتوحة
3. ندرس اطراد التابع وفق إشارة مشتقه الأول وننظم جدولاً بالمعلومات السابقة ونسميه جدول التغيرات

مثال) ليكن f التابع المعرف على R وفق

$$f(x)=x^3-3x+5$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② دل على قيمه الحدية

③ تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]-3,-2[$

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\boxed{f'(x)=3x^2-3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1$ ، $x=1$ ، $x=-1$

$f(1)=3$ $\qquad$ $f(-1)=7$

x	$-\infty$	-3	-2	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-13	3 ↗	7	↘	3 ↗	$+\infty$

2) $f(-1)=7$ قيمة كبرى محلية ، $f(1)=3$ قيمة صغرى محلية

3) $f(-3)=-13$ $\qquad$ $f(-2)=3$

من جدول التغيرات نجد:

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$ { جزء من $]-\infty,-1]$ يكون وحيد }

$0\in f(]-3,-2[)=]-13,3[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x\in]-3,-2[$

5/65) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(3)(-1) = 16$

$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1$ $x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$

$f(1) = -\frac{1}{2}$ $f(-\frac{1}{3}) = \frac{37}{54}$

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{1}{3}$	x_2	1	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) من جدول التغيرات نجد:

* f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -\frac{1}{3}[$

$0 \in f(]-\infty, -\frac{1}{3}[) =]-\infty, \frac{37}{54}[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x_1 \in]-\infty, -\frac{1}{3}[$

* f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[-\frac{1}{3}, 1]$

$0 \in f([-\frac{1}{3}, 1]) = [-\frac{1}{2}, \frac{37}{54}]$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x_2 \in [-\frac{1}{3}, 1]$

* f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$

$0 \in f(]1,+\infty[) =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x_3 \in]1,+\infty[$

مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول في R

x	$-\frac{3}{2}$	
$2x+3$	0	$+$

25/72) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

1) اثبت أنه f متزايد تماماً على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

2) نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

3) أوجد $f([-\frac{3}{2}, -1[)$ وأثبت أنه للمعادلة $f(x)=10$ حل وحيد في المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

1) f اشتقاقي على $[-\frac{3}{2}, -1[$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

بما أن: $x^2 > 0$ على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

$2x+3 \geq 0$ على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

$(x+1)^2 > 0$ " "

$\Leftarrow$ إذاً $f'(x) \geq 0$ على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

فالتابع متزايد تماماً على $[-\frac{3}{2}, -1[$

في التوابع دائماً متزايد تماماً $\neq$ المتتاليات

في الكتاب

2) f معرف واشتقاقي ومستمر على $[-\frac{3}{2}, -1[$

$$f(-\tfrac{3}{2}) = \frac{27}{4}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$	0	$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$ 10	$+\infty$ ‖

3) $f([-\frac{3}{2}, -1[) = [\frac{27}{4}, +\infty[$

من جدول التغيرات: f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

$10 \in f([-\frac{3}{2}, -1[) = [\frac{27}{4}, +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=10$ حل وحيد في المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$

مثال: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1) احسب $f(1)$ ، $f(-\frac{1}{2})$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

2) ادرس تغيرات f. نظم جدولاً بها

3) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$

الحل: 1) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

$f(-1) = -\frac{3}{2}$

2) f معرفة واشتقاقية ومستمرة على $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$: $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−	0	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗		↗	$+\infty$

من جدول التغيرات نجد:

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1, -\frac{1}{2}]$

$0 \in f([-1,-\frac{1}{2}]) = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد $x_1 \in [-1, -\frac{1}{2}]$

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$0 \in f(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[) =]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد $x_2 \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\frac{1}{2}, 1]$

$0 \in f([\frac{1}{2},1]) = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد $x_3 \in [\frac{1}{2}, 1]$

مما سبق نجد أن المعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$

مثال: التابع f معرف على R وفق $f(x)=x^3-3x^2+1$

علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول حقيقية

ندرس تغيرات التابع f :

f معرف واشتقاقي ومستمر على $R=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$

إما: $3x=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=2$

$f(0)=1$ $\qquad$ $f(2)=-3$

x	$-\infty$	x_1		0		x_2		2		x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0		$-$		0		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1		-3	$\nearrow$	-1	$+\infty$

$f(x)+1=0 \Rightarrow f(x)=-1$

من جدول التغيرات:

* f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,0]$

$-1\in f(]-\infty,0])=]-\infty,1]$

ومنه للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد $x_1\in]-\infty,0]$

* f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0,2[$

$-1\in f(]0,2[)=]1,-3[$

ومنه للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد $x_2\in]0,2[$

* f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $[2,+\infty[$

$-1\in f([2,+\infty[)=[-3,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد $x_3\in[2,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول في R

$-1 < \alpha < 0$

موجب 0 سالب

السؤال الأول سؤال خيار (3) الجزء B

أثبت أن للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في R ثم بيّن أن $\alpha\in]-1,0[$

ليكن التابع $f(x)=x^3+x+1=0$ المعرف على R.

ندرس تغيرات التابع f :

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x)=3x^2+1>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$

من جدول التغيرات :

f مستمر ومتزايد تماماً على R

$0\in f(R)=R$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in\mathbb{R}$

$-1<\alpha<0$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
سالب $<0<$ موجب

★ إما : f مستمر ومتزايد تماماً على $]-1,0[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-1<0 \\ f(0)=1>0 \end{array}\right\} f(-1)\times f(0)<0$$

إذاً $\alpha\in]-1,0[$

أو f مستمر ومتزايد تماماً على $]-1,0[$

$0\in f(]-1,0[)=]-1,1[\leftarrow$ α هو حل لـ $f(x)=0$

ومنه $\alpha\in]-1,0[$ إذاً للمعادلة $f(x)=x^3+x-1=0$ حل وحيد

تمرين 24 / 109

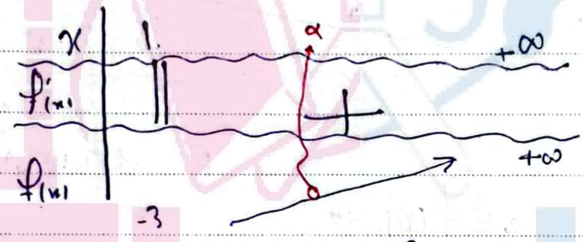
ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$

1) ادرس متغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على قيمه الحدية
2) اكتب معادلة المماس لـ (C) في نقطة منه فاصلتها (1)
3) اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α
4) احسب جبرياً القيمة الحقيقية لهذا الجذر للمعادلة
5) ارسم C_f

عند كل طرف مغلق من أطراف مجموعة تعريف التابع يوجد للتابع قيمة (كبرى أو صغرى)

1) f معرف ومستمر على $[1,+\infty[$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $f(1)=3$

$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$ (f اشتقاقي على $]1,+\infty[$)



$f(1)=-3$ قيمة صغرى محلية

2) معادلة مماس المماس لـ (C) في النقطة $(1,3)$ هي $x=1$ (المشتق غير معرف) $(x=x_0)$

3) من جدول التغيرات f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$

مجال التزايد $]1,+\infty[$

$0\in f(]1,+\infty[)=]-3,+\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]1,+\infty[$

4) $f(x)=0 \Rightarrow x+\sqrt{x-1}-4=0$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}=4-x$

نربع بشرط (الطرف الثاني أكبر أو يساوي الصفر) $x\leq 4$

$x-1=(4-x)^2$

$x-1=16-8x+x^2$

$x^2-9x+17=0$

$\Delta=81-4(17)=81-68=13$

$x_1 = \frac{9+\sqrt{13}}{2}$ مرفوض

$x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2}$ مقبول

$\boxed{\alpha = \frac{9-\sqrt{13}}{2}}$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

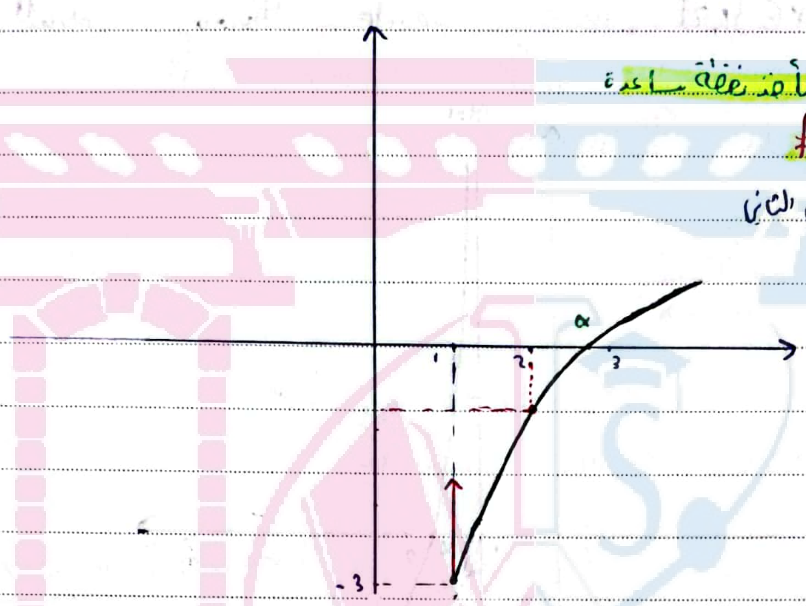
فائدة (غير مطلوبة)

• لمعرفة جهة التقعر نأخذ نقطة مساعدة

مثلاً $f(2)=-1$

أو حسب إشارة المشتق الثاني

$f''(x)<0 \Leftarrow$ التقعر لتحت



25/109) ليكن f التابع المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α يقع في المجال $]1,2[$

3) ارسم f

الحل: 1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو oy^+

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

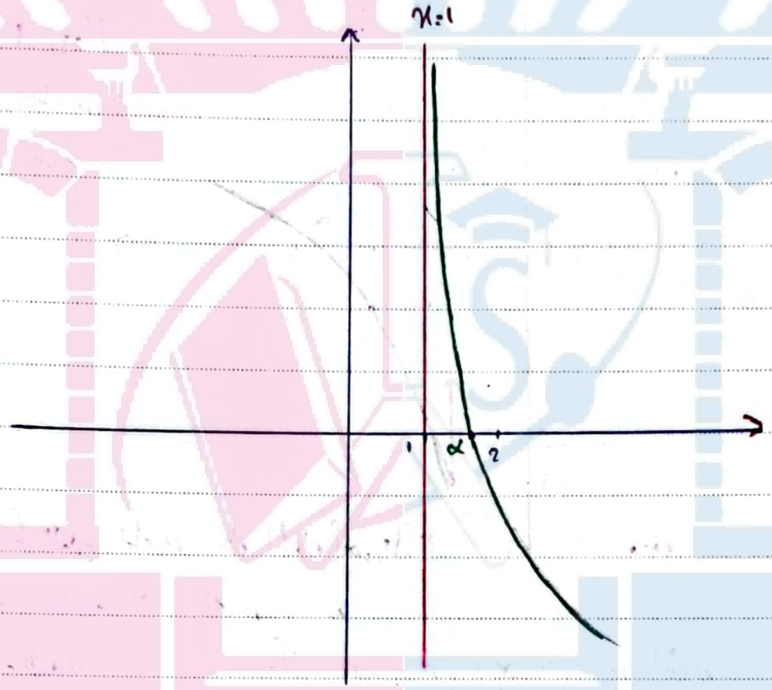
2) $f(2) = 1-\sqrt{2} < 0$ سالب

من جدول التغيرات:

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1,2[$

$]1,\sqrt{2},+\infty[$. $0\in f(]1,2[)$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]1,2[$



تذكرة:

شروط التابع الزوجي:

1) أياً يكن $x\in D_f$ فإن $-x\in D_f$

2) $f(-x)=f(x)$

خطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy'

شروط التابع الفردي:

1) أياً يكن $x\in D_f$ فإن $-x\in D_f$

2) $f(-x)=-f(x)$

خطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

$\frac{3}{94}$) ليكن (c) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1) تحقق أن التابع زوجي

2) احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$

3) علل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ (c) بجوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة المائل لـ (c) بجوار $-\infty$.

/ /

٤) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

٥) ارسم مقاربات (C) ثم ارسم (C)

① 1) أياً يكن $x \in R$ فإن $-x \in R$ محقق

2) $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1}$

$$f(-x) = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

من (1) و (2) نجد أن f تابع زوجي

(2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(3 $f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta]$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين

$$f(x) - y_\Delta = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

* بما أن f تابع زوجي فخطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy' فيكون المستقيم $\Delta' : y = -x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ (في حال الزوجي نعكس x / أما في حال الفردي نعكس x و y)

٤) f معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

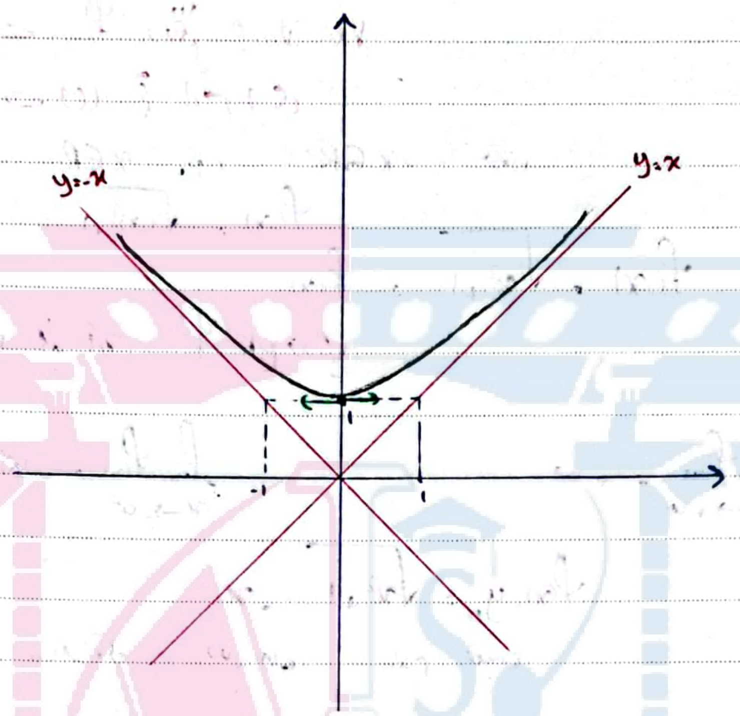
(مجاورة البدء (المطلوب)

$y=x$

x	0	1
y	0	1

$y=-x$

x	0	1
y	0	-1



تمرين

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-2,2]$ وفق $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

1) أثبت أنه f تابع زوجي

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على قيمه الحدية

3) اكتب معادلتي نصفي المماسين لـ (C) في النقطتين $(-2,0)$ $(2,0)$

4) ارسم نصفي المماسين ثم ارسم (C)

1) (1 أياً يكن $x\in[-2,2]$ فإن $-x\in[-2,2]$ محقق

(2 $f(-x)=\sqrt{4-x^2}=f(x) \Rightarrow f(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}$

من (1) و (2) نجد أنه f تابع زوجي

2) f معرف ومستمر على $[-2,2]$

$f(2)=0$ $\qquad f(-2)=0$

f اشتقاقي على $]-2,2[$ (

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=2$

$y = \sqrt{4-x^2}$

نربع بشرط $y \geq 0$ نضيف الى

$y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$y = \sqrt{4-x^2}$

نربع بشرط $y \geq 0$

$y^2 = 4-x^2 \iff x^2+y^2=4$

$y \geq 0$ معادلة نصف دائرة الأ...

x	-2		0		$+2$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(0)=2$ قيمة كبرى محلية.

$f(-2)=0$ قيمة صغرى محلية.

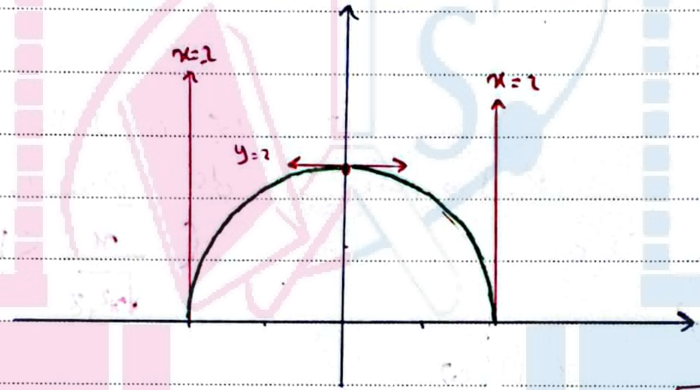
$f(2)=0$ قيمة صغرى محلية.

3) معادلة نصف المماس في النقطة $(-2,0)$ هي $x=-2$ شاقولي

ومعادلة نصف المماس في النقطة $(2,0)$ هي $x=2$ شاقولي

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

نصف دائرة



29/110) $f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$ معرف على R

1) احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، هل يقبل (C) مقارباً أفقياً.

2) تحقق أن $d: y=2x$ مقارب للخط (C)

3) نظم جدول تغيرات f وارسم مقاربات C ثم ارسم C

1) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $\infty - \infty$ عدم تعيين:

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2+8})}{(x+\sqrt{x^2+8})} \Longrightarrow f(x) = \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

ومنه $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

(2 $f(x)-y_d = x-\sqrt{x^2+8}-2x \Rightarrow f(x)-y_d = -x-\sqrt{x^2+8}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = -\infty$$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d]$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to-\infty$ نكتب

$$f(x)-y_d = \frac{(-x-\sqrt{x^2+8})(-x+\sqrt{x^2+8})}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d] = 0$$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

(3 f معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} > 0$$

(لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} < 1$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

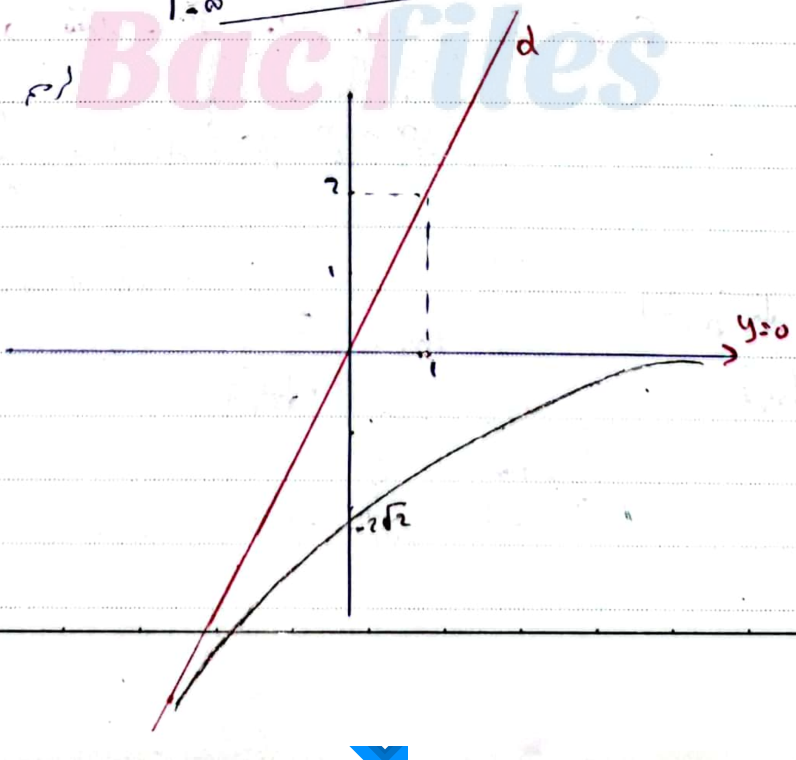
رسم $d: y = 2x$

x	0	1
y	0	2

تقاطع محور التراتيب

$x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{8}$

$y = -2\sqrt{2}$



ملاحظة : نقول أن النقطة $I(x_0,y_0)$ مركز تناظر لـ (C) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

1) أياً يكن $x \in D_f$ فإن $2x_0 - x \in D_f$

2) $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$

($\frac{27}{11}$ $f(x)=\dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}/\{-1\}$

1) أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) اثبت أن $d: y=2x-1$ مقارب لـ (C) وادرس وضع (C) مع d

$$f(x)-y_d = \frac{2x^2+x+7}{x+1} - \frac{(2x-1)}{1}\ \Rightarrow\ f(x)-y_d = \frac{2x^2+x+7-2x^2-2x+x+1}{x+1}$$

$$f(x)-y_d = \frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d]=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d]=0$$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

وضع (C) مع d:

$$f(x)-y_d = \frac{8}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$	||	$+$
الوضع النسبي	(C) تحت d	||	(C) فوق d

3) ادرس نهاية f عند (-1) ، ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمنحنى (C)

$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

ومنه $x=-1$ مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو oy^+ ونحو oy^-

$(-a-b)^2 = (a+b)^2$

4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها

f معرف، اشتقاقي ومستمر على $\mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1) - 1(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0$

$\Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

إما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$f(-3) = -11$ $\qquad$ $f(1) = 5$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

5) دل على قيم الحدية، وأوجد المستقر الفعلي للتابع f

• قيمة كبرى محلياً $f(-3) = -11$

• قيمة صغرى محلياً $f(1) = 5$

يلي أصلو صورة منكر عنده

$$f(D_f) =]-\infty,-11] \cup [5,+\infty[$$

6) اثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للخط (C)

1) أياً يكن $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ فإن $2x_0 - x = -2-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

لأنه

$$\left(\begin{array}{c} x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ -x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ -2-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \end{array}\right)$$

2) $f(2x_0-x) + f(x) = 2y_0$

/ /

$L_1 = f(-2-x) + f(x) \Rightarrow$

$L_1 = \dfrac{2(-2-x)^2-2-x+7}{-2-x+1} + \dfrac{2x^2+x+7}{x+1} \Rightarrow L_1 = \dfrac{2(4+4x+x^2)-x+5}{-x-1} + \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$

$L_1 = \dfrac{2x^2+7x+13}{-x-1}_{(-1)} + \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}_{(1)}$

$L_1 = \dfrac{-2x^2-7x-13+2x^2+x+7}{x+1} = \dfrac{-6x-6}{x+1} = \dfrac{-6(x+1)}{x+1}$

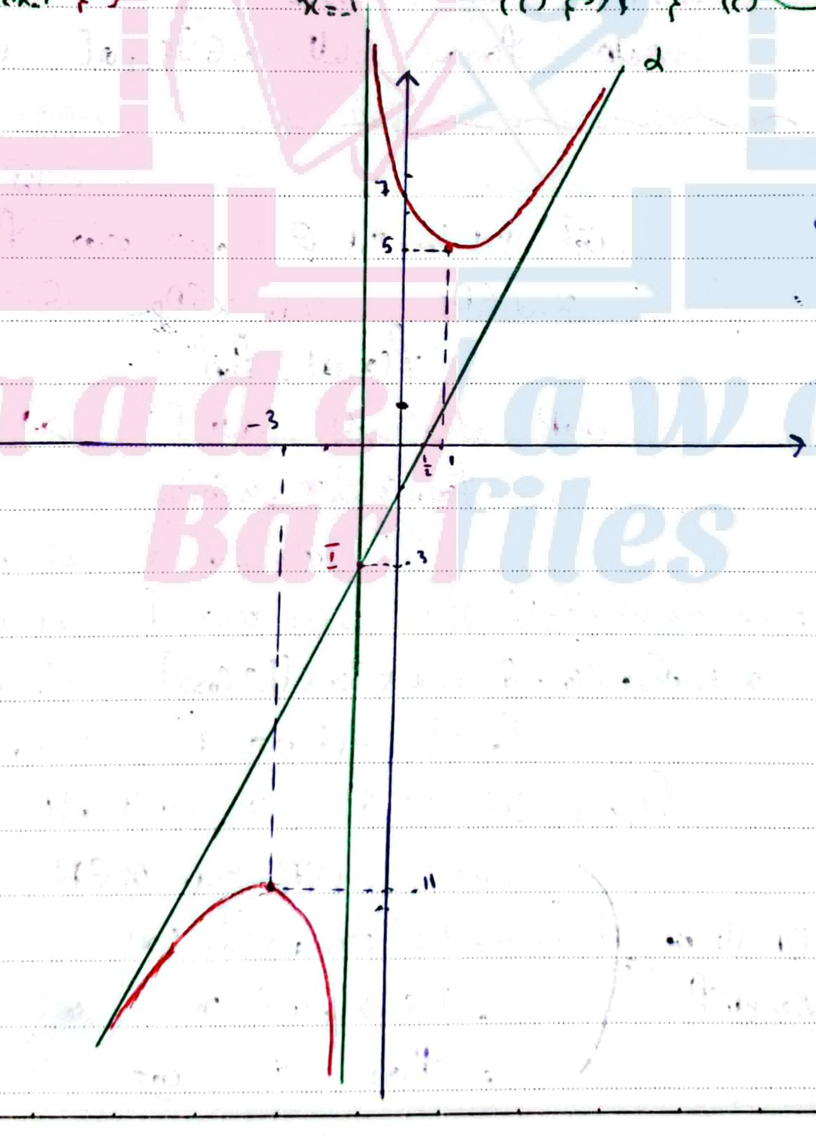
$L_1 = -6 = 2y_0 = L_2$ (محققة)

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أن I مركز تناظر لـ (C)

7) ارسم مقاربات (C) ثم ارسم (C)

نرسم $d: y = 2x-1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0



ملاحظة نحوي وسيط (m) مثلا لمناقشة
نرد المعادلة للشكل $f(x)=m$ ومنه الرسم نناقش
حلول المعادلة (على حدى الوسائط)

156

8) حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $2x^2+x+7-mx-m=0$

المعادلة تكافئ $2x^2+x+7=mx+m$

وهي تكافئ $2x^2+x+7=m(x+1)$

وهي تكافئ

$$\frac{2x^2+x+7}{x+1}=m \quad (x\neq -1)$$

وهي تكافئ $f(x)=m$

من الرسم نجد:

* عندما $m\in]-\infty,-11[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.
* عندما $m=-11$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.
* عندما $m\in]-11,5[$ ليس للمعادلة $f(x)=m$ حلول (المعادلة مستحيلة).
* عندما $m=5$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.
* عندما $m\in]5,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

ملاحظة هامة:

التابع f دوري دوره θ إذا وفقط إذا تحقق:

1) أيا يكن $x\in D_f$ فإن $x+\theta\in D_f$

2) $f(x+\theta)=f(x)$

الدور - طول مجال الدراسة

دوره 2π: $[-\pi,\pi]$, $[0,2\pi]$, $[-2\pi,0]$

دوره π: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $[0,\pi]$, $[-\pi,0]$

$\frac{30}{114}$) ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$

إذا دورت التابع الزوجي نأخذ نصف الدور

1) اثبت أن f تابع زوجي

2) اثبت أن f دوري دوره 2π ثم استنتج أنه تكفي دراسة f على المجال $[0,\pi]$ لأنه زوجي دوره

الدور كله

3) اثبت أن $f'(x)=6\cos x\times\sin x(1-2\cos x)$ عند كل $x\in R$

4) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

5) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[-\pi,\pi]$

$[-\pi,\pi]$ ← $[0,\pi]$

$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ← $[0,\frac{\pi}{2}]$

$\boxed{1}$ 1) أيا يكن $x\in R$ فإن $-x\in R$ محقق

2)

$$\left\{\begin{aligned} f(-x)&=3\sin^2(-x)+4\cos^3(-x)\\ &=3\sin^2 x+4\cos^3 x\\ &=f(x) \end{aligned}\right.$$

محقق

$\Leftarrow$ من $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ نجد f تابع زوجي

1م7

2

1) ايا يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $x+2\pi \in \mathbb{R}$ محققة

2) $f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi)$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

$= f(x)$ محققة

من (1) و (2) نجد أن f تابع دوري دوره 2π

بما أن f دوري دوره 2π فيمكن دراسة f على مجال طوله 2π وليكن $[-\pi,\pi]$

وبما أن f زوجي فخطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy' فنكتفي بدراسة f على المجال $[0,\pi]$

3

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x$

$f'(x) = 6\cos x\sin x\,(1-2\cos x)$

4

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

$f(0)=4$ $\quad f(\pi)=-4$

$f'(x) = 6\cos x\sin x\,(1-2\cos x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6\cos x\sin x\,(1-2\cos x)=0$

$\boxed{6\cos x\sin x = 0} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (لا مجال محدد) إما

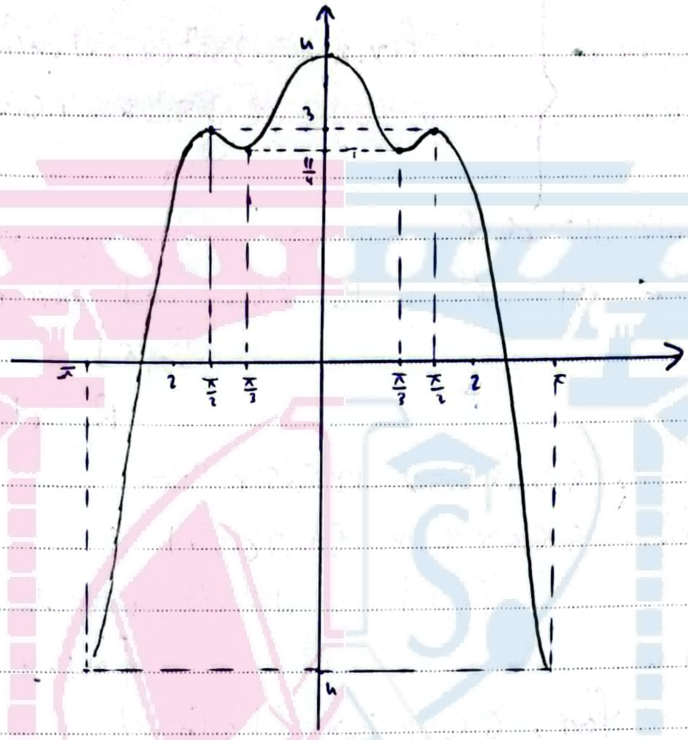
$f(\frac{\pi}{2}) = 3$

$\sin x = 0$: $x=0$, $f(0)=4$; $x=\pi$, $f(\pi)=-4$

$\boxed{1-2\cos x = 0} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ أو

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{11}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4



تمرين: ليكن التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \tan x$

1) عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2) اثبت أن f تابع فردي.

3) اثبت أن f دوري دوره π ثم استنتج أنه يكفي دراسة f على المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$

4) ادرس تغيرات f على المجال $[0; \frac{\pi}{2}[$

5) ارسم $\mathcal{C}_f$ على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1) $D_f = \mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$ ، $k \in \mathbb{Z}$

2) 1) أياً يكن $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$ محقق

2) $f(-x) = \tan(-x)$

$= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x}$

$f(-x) = -\tan x = -f(x)$

من 1 و 2 نجد أن f تابع فردي

159

$\pi - \theta$ | θ
$\pi + \theta$ | $-\theta$

عند $k=1$ $D_f = \mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

3) أ) 1) أ) نبين أنه $x \in D_f$ فإن $x + \pi \in D_f$ تحقق

2) $f(x+\pi) = \tan(x+\pi)$ ش ③

$= \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x}$

$f(x+\pi) = \tan x = f(x)$

من 1) و 2)
نجد أن f تابع دوري
دوره π

ب) بما أن f دوري دوره π ، فيمكن دراسة f على مجال طوله π وليكن وليكن $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
وبما أن f فردي فخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات فنكتفي بدراسة f على المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$

4) التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $f(0) = 0$

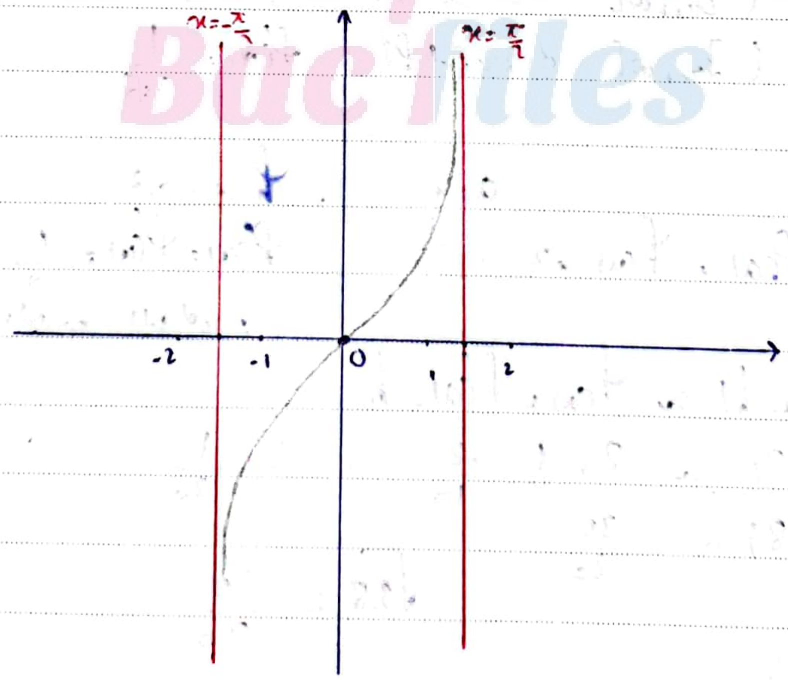
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$x = \frac{\pi}{2}$ مقارب شاقولي لـ (C)

نعوض بقيمة أصغر من $\frac{\pi}{2}$
ولتكن $\frac{\pi}{3}$ نجد أن الـ $\cos$ موجب

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Scanned with CamScanner

عدد 2 صفحات
شرب
/ /

التقريب التآلفي المحلي

قانونه $f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$

خطواته:

* نعين التابع $f(x)$
* نوجد $f'(x)$
* نعين a, h
* نوجد $f(a)$, $f'(a)$
* نعوض في عبارة التقريب التآلفي

$\underbrace{3}_{a=3 \text{ القسم الصحيح}}.\underbrace{2}_{h=0.1 \text{ القسم العشري}}$

$\underbrace{3}_{a=4}.\underbrace{6}_{h=-0.4}$ $\longrightarrow$ $5 <$ خطاطي

نخالطك f صفر 5

مثال: أوجد قيمة تقريبية لـ $\sin(0.1)$

ليكن التابع $f(x) = \sin x$ (f معرف على $\mathbb{R}$)

فيكون $f'(x) = \cos x$ (f اشتقاقي على $\mathbb{R}$)

$h = 0.1$, $a = 0$

$f'(a) = f'(0) = 1$, $f(a) = f(0) = 0$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$

نعوض في عبارة التقريب التآلفي

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$
$$f(0.1) \approx 0 + (1)(0.1)$$
$$f(0.1) \approx 0.1 \Rightarrow \sin(0.1) \approx 0.1$$

مثال: أوجد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{3.8}$

ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x}$ (f معرف على $[0, +\infty[$)

فيكون التابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (f اشتقاقي على $]0, +\infty[$)

$h = -0.2$, $a = 4$

$f'(a) = f'(4) = \frac{1}{4}$, $f(a) = f(4) = 2$

نعوض في عبارة التقريب التآلفي:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$
$$f(3.8) \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{10} = 2 - \frac{1}{20}$$
$$f(3.8) \approx \frac{39}{20}$$
$$\sqrt{3.8} \approx \frac{39}{20}$$

للتدريب: مثال 2 ص 100 : $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ المعرف على R

1) بين أن f دوري ودوره 2π . ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f . استنتج امكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$

① أياً يكن $x\in R$ فإن $x+2\pi\in R$ محقق

② $f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)$

$=2\sin x+\sin 2x=f(x)$

من ① و ② f تابع دوري ودوره 2π

① أياً يكن $x\in R$ فإن $-x\in R$ محقق

② $f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)$

$f(-x)=-(2\sin x+\sin 2x)=-f(x)$

من ① و ② f تابع فردي

نلاحظ أن f تابع دوري دوره 2π إذاً يمكن دراسة f على المجال $[-\pi,\pi]$

وبما أن f تابع فردي فإن خطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات إذاً نكتفي بدراسة f على المجال $[0,\pi]$

2) أثبت أن: $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

f اشتقاقي على R

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$

$f'(x)=2(\cos x+\cos 2x)$

$f'(x)=2(\cos x+2\cos^2 x-1)$

$f'(x)=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

$f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$2\cos^2 x+\cos x-1$

$\Delta=9$

$\cos x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{-1-3}{4}=-1$

$2\cos^2 x+\cos x-1=2(\cos x-\frac{1}{2})(\cos x+1)$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

f معرف واشتقاقي ومستمر على المجال $[0,\pi]$

$f(0)=0$ $\quad f(\pi)=0$

$f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

إما $2\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

أو $\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x=-1$

$x=\pi$

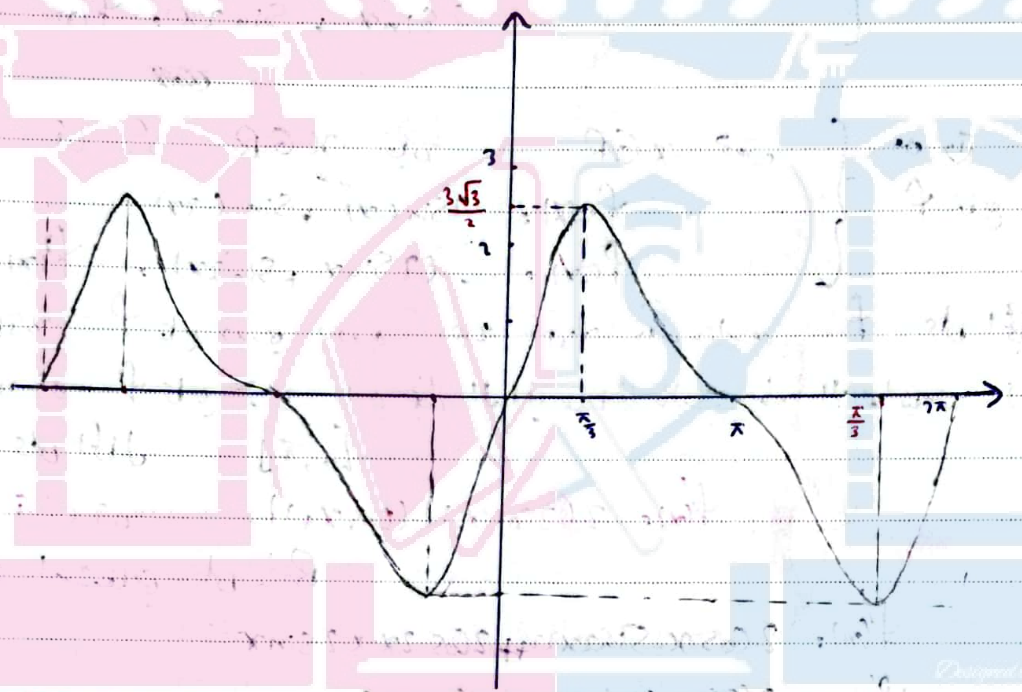
$f(\pi)=0$

$f' = f^{(n)} \cdot f'''$

$f^{(n)} = [f^{(n)}]'$ $\boxed{162}$ $3\sqrt{3} \approx 5$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-2\pi, ...]$



المشتقات من مرتبة عليا

$\frac{8}{105}$) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1) تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\, f'(x) = f(x)$ أيا يكن x من R

2) استنتج أن $(1+x^2) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$ أيا يكن x من R

1) f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{1+x^2}\, f'(x) = \sqrt{1+x^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1+x^2} + x = f(x)$$

2) f' اشتقاقي على R

$$f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$

عندما نضيف الأربع $-\sin$ ← $+\cos$ $\frac{\pi}{2}$

163

$$(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}$$

$$=\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}$$

$$(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

دورة

تمرين: ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=\cos x$

1) أوجد $f'(x)$ ، $f''(x)$ $f'''(x)$

2) أثبت بالتدريج أنه أياً يكن $n\geq 1$ فإن $f^{(n)}(x)=\cos(\frac{n\pi}{2}+x)$

1) f اشتقاقي على R

$f'(x)=-\sin x$

f' اشتقاقي على R

يعبر عن طريق اشتقاق العرف

$f''(x)=-\cos x$

f'' اشتقاقي على R

$f'''(x)=\sin x$

2) لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): f^{(n)}(x)=\cos(\frac{n\pi}{2}+x)$; $n\geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأنه

أي عدد لا يتعلق بـ متغير

$f^{(1)}(x)=\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

ولكن $f'(x)=-\sin x$

(تحقق) $f^{(1)}(x)=f'(x)$

II) نفرض صحة القضية

انها

$E(n): f^{(n)}(x)=\cos(\frac{n\pi}{2}+x)$; $n\geq 1$

III) نبرهن صحة القضية

$E(n+1): f^{(n+1)}(x)=\cos\left[\frac{(n+1)\pi}{2}+x\right]$

مستفيداً من الفرض

الاثبات:

$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'$ $\Rightarrow$ $f^{(n+1)}(x)=\left[\cos(\frac{n\pi}{2}+x)\right]'$

$$f^{(n+1)}(x)=-\sin\big(\overbrace{\frac{n\pi}{2}+x}^{\theta}\big)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}+x\right]$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \cos\left[\frac{(n+1)\pi}{2} + x\right]$$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 1$

تمرين: ص 95

ليكن f التابع المعرف على $R/\{1\}$ وفق $f_{(x)} = \frac{1}{1-x}$

اثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة $(x \neq 1)$ $f^{(n)}_{(x)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E_{(n)}: f^{(n)}_{(x)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$; $n \geq 1$

I) القضية $E_{(1)}$ صحيحة لأن:

و f اشتقاقي على $R/\{1\}$

$$\begin{cases} E_{(1)} : f^{(1)}_{(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \\ f'_{(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$$

$L_1 = L_2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: f^{(n)}_{(x)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$; $n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: f^{(n+1)}_{(x)} = \frac{n+1}{(1-x)^{n+2}}$

الإثبات (نشتق الفرض)

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \left[f^{(n)}_{(x)}\right]' = \frac{-(n+1)(1-x)^{n}(-1).(n!)}{\left[(1-x)^{n+1}\right]^2}$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \frac{(n+1)\,n!\,(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

نفس الأساس نطرح الأسس

$(1-x)^{n}\,(1-x)^{n+2}$

ومنه القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة فالقضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 1$

للتدريب: $\frac{33}{110}$ ليكن: $f_{(x)} = x\cos x$ المعرف على R

1) احسب $f'_{(x)}$, $f''_{(x)}$, $f'''_{(x)}$

f اشتقاقي على R

$$f'_{(x)} = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$$

f' اشتقاقي على R

$$f''_{(x)} = -\sin x - \sin x - \cos x\,(x) = -2\sin x - x\cos x$$

f'' اشتقاقي على R

$$f'''_{(x)} = -2\cos x - (\cos x - x\sin x) = -2\cos x - \cos x + x\sin x$$

$$= -3\cos x + \sin x$$

2) أثبت بالتدريج $f^{(n)}_{(x)} = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة فالقضية $E_{(n)}$ صحيحة أياً كان $n \geq 1$

لنبرهن بالتراجع صحة القضية: $E_{(n)}: f^{(n)}_{(x)} = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right); n \geq 1$

I) القضية $E_{(1)}$ صحيحة لأن

$$f^{(1)}_{(x)} = x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) = \cos x - x\sin x$$

ولدينا من الطلب الأول $f'_{(x)} = \cos x - x\sin x = f'_{(x)}$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: f^{(n)}_{(x)} = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right); n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: f^{(n+1)}_{(x)} = x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

الإثبات:

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \left[f^{(n)}_{(x)}\right]' = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - n\sin\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

تعيين الثوابت:

$\frac{3}{89}$) ليكن التابع f المعرف على R وفق $f_{(x)} = x^3 - x^2 + ax$

عين a ليكون للتابع f قيمة حدية محلية عند $x=1$.

f اشتقاقي على R

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 2x + a$$

$f_{(a)} = b$ قيمة حدية / $(a,b) \in (c)$

f اشتقاقي عند a / $f'_{(a)} = 0$

لأنه لو لم يكن اشتقاقي كان الميل غير معرف (مماس شاقولي) وليس (0) (مماس أفقي)

لما أن $f_{(1)}$ قيمة حدية و f اشتقاقي عند (1) فإن $f'_{(1)} = 0$

لو لم يكن اشتقاقياً ماذا فعلنا

$$f'_{(1)} = 0 \Rightarrow 3 - 2 + a = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

ومنه التابع الموافق $f_{(x)} = x^3 - x^2 - x$

$\frac{4}{89}$) دورة $f_{(x)} = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ معرف على $R\setminus\{1\}$

عين a, b علماً أن $f_{(1)} = 0$ قيمة حدية محلية للتابع f

$$f_{(-1)} = 0 \Rightarrow \frac{a-b+1}{-2} = 0 \Rightarrow \boxed{a-b+1=0} \quad (1)$$

الثوابت من نقطة التماس وميل المماس.

166

f اشتقاقي على $R/\{1\}$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1) - 1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

لنا أنّ $f(-1)=0$ نتيجة صحيح

و f اشتقاقي عند (-1) فإنّ $f'(-1)=0$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow \frac{(-2a+b)(-2) - 1(a-b+1)}{4} = 0$$

بالاستفادة من (1) نجد $4a-2b=0$

ومنه $\boxed{2a-b=0}$ (2)

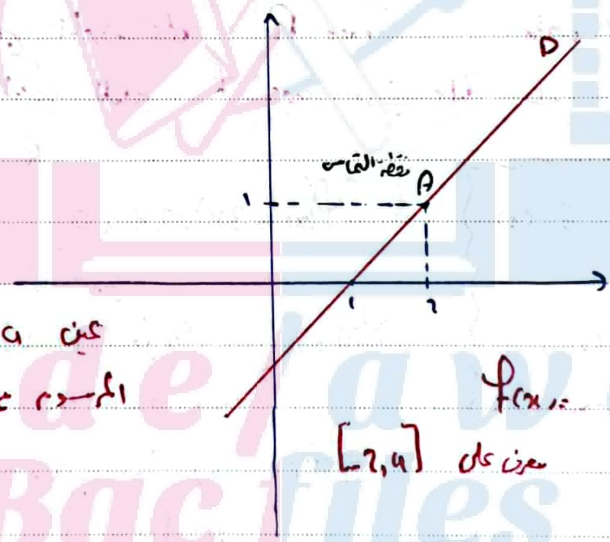
بالطرح:

$(2)-(1) \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

ومنه $\boxed{b=2}$

ومنه التابع الموافق $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

$\left(\dfrac{1}{89}\right.$



عيّن a و b علماً أنّ المستقيم D المرسوم مماس للخط (C) في النقطة A

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ معرّف على $[-2,4]$

الحل:

$f(2)=1 \Rightarrow \dfrac{2a+b}{5} = 1 \Rightarrow \boxed{2a+b=5}$ --- (1)

المماس يمر من النقطتين $(1,0)$ $(2,1)$

m ميل المماس $= \dfrac{1-0}{2-1} = 1$

يساوي المشتق عند نقطة التماس

أي $f'(2) = 1$

f اشتقاقي على $[-2,4]$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

167

$f'(2)=1 \Rightarrow \frac{5a-4(2a+b)}{25}=1$

بالاستفادة من (1) نجد:

$5a-20=25 \Rightarrow 5a=45 \Rightarrow \boxed{a=9}$

نعوض في (1) فنجد:

$18+b=5 \Rightarrow \boxed{b=-13}$

ومنه التابع الموافق: $f(x)=\frac{9x-13}{x^2+1}$

(19/108) a و b عددان حقيقيان، (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عين a و b ليكون $y=4x+3$ معادلة المماس للخط (C) في النقطة التي فاصلتها (0) منه

نعوض $x=0$ في معادلة المماس فنجد $y=3$ ومنه نقطة التماس $A(0,3)$

$f(0)=3 \Rightarrow \frac{b}{1}=3 \Rightarrow \boxed{b=3}$

f اشتقاقي على R

$$f'(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)}$$

ميل المماس $m=4 \Rightarrow f'(0)=4$

$f'(0)=4 \Rightarrow \frac{a}{1}=4 \Rightarrow \boxed{a=4}$

ومنه التابع الموافق:

$$f(x)=\frac{3x^3+4x+3}{x^2+1}$$

(18/108) a و b عددان حقيقيان، (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل (C) مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2$

$\Rightarrow \boxed{a+b=1}$ (1)

f اشتقاقي على R

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$

ويكون $f'(1)=0$ لأن المماس أفقي

$f'(1)=0 \Rightarrow \boxed{3a+2b=0}$ (2)

نضرب المعادلة الأولى بـ (2) ثم نجمع مع المعادلة الثانية فنجد $\boxed{a=-2}$

نعوض في (1) فنجد

$\boxed{b=3}$

ومنه التابع المولتق $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

نشاط (3) ص 99

ليكن (c) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$

1) تحقق أن f معرف على المجال $[0,2]$

2) أثبت أن f اشتقاقي على المجال $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال

3) ادرس قابلية اشتقاق f عند (0)

4) ادرس قابلية اشتقاق f عند (2)

5) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

6) عين مماسي (c) في النقطتين $A(0,0)$ ، $B(2,0)$

7) ارسم مماسي (c) في A ، B ثم ارسم (c)

1) $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$

$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

f معرف عندما $2x-x^2\geq 0$

$2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
المناقشة				مقبول			

$D_f=[0,2]$

2) التابع $x\to x$ اشتقاقي على المجال $]0,2[$

* بما أن التابع $x\to 2x-x^2$ موجب تماماً على المجال $]0,2[$ واشتقاقي عليه فالتابع $x\to\sqrt{2x-x^2}$ اشتقاقي على المجال $]0,2[$

ومنه f اشتقاقي على المجال $]0,2[$ لأنه جداء تابعين اشتقاقيين على المجال $]0,2[$

$$f'(x) = \sqrt{2x-x^2} + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot x$$

$$f'(x) = \sqrt{2x-x^2} + \frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x-x^2+x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \boxed{\frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

3) نشكل التابع نسبة التغير g المعرف على $]0,2]$ وفق

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad , \quad f(0)=0$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x} = \boxed{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

إذاً f اشتقاقي عند 0

4) نشكل تابع نسبة التغير H المعرف على $[0,2[$ وفق

$$H(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad ; \quad f(2)=0$$

$$H(x) = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2} = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$H(x) = \frac{x(2x-x^2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x^2(2-x)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}} = \boxed{\frac{-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$\lim_{x \to 2} H(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

إذاً f غير اشتقاقي عند (2)

5) f معرف ومستمر على المجال $[0,2]$ واشتقاقي على $[0,2[$

$f(0)=0$ $\quad$ $f(2)=0$

$$f'(x) = \frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \quad , \quad f'(x)=0 \Rightarrow 3x-2x^2=0$$
$$\Rightarrow x(3-2x)=0$$

إما $x=0$ أو $x=\frac{3}{2}$

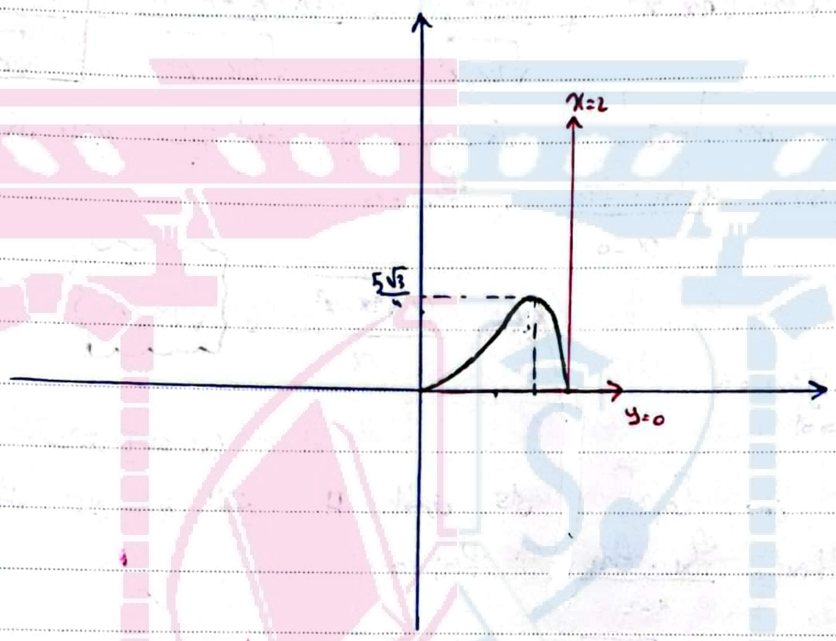
$$f(0)=0 \quad , \quad f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

نفا الفئة العلمية مندرسة إستمارة

6) معادلة المماس في النقطة $(0,0)$ هي $\boxed{y=0}$ أفقي

ومعادلة المماس في النقطة $(2,0)$ هي $\boxed{x=2}$ شاقولي



مسألة: $\left(\frac{37}{75}\right.$ ليكن (c) الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f: \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$$

1) اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

2) ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f، واستنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لـ (c)

3) ادرس تغيرات f، ونظم جدولاً بها

4) تحقق أنه $D_1: y = x+1$ و $D_2: y = -x-1$ مقاربان مائلان لـ (c) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

5) أوجد معادلة المماس T لـ (c) في النقطة A التي فاصلتها تساوي الصفر

1) ندرس إشارة $|x+1|$ على D_f

x	$-\infty$	-1	1	
$x+1$	$-$	‖	$+$ ‖	$+$

صنو الحضارة

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty,-1[\\ x+1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$ لازم يكون D_f

(2 $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ (C) $\qquad$ $x=-1$ مقارب شاقولي لـ (C)

(3 f اشتقاقي على D_f

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty,-1[\\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

من أجل $x \in]-\infty,-1[$ يكون $f'(x) < 0$

عندما $x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[$ يكون $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0$

إما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $x^2 = 3$: $x = -\sqrt{3}$ مرفوض ، $x = \sqrt{3}$ مقبول

$f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 1$ $\qquad$ $f(0) = 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	↗	$+\infty$

4) $f(x) - y_{D_1} = \frac{x}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y_{D_1}] = 0$ ومنه D_1 مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

$f(x) - y_{D_2} = \frac{x}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y_{D_2}] = 0$ ومنه D_2 مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

5) $f(0) = 1$ نقطة التقاطع $A(0, 1)$

الميل $f'(0) = 0$ ← نعوض بالعزم يلي قبلنا من الجدول

ومنه معادلة المماس $T: y = 1$

173

السؤال الأول :

فيما يأتي جدول تغيّرات لتابع f و المطلوب :

❶ عيّن D_f مجموعة تعريف f

❷ عيّن القيم الحديّة المحليّة للتابع f

❸ هل f محدود ؟ علّل ذلك .

❹ اكتب معادلة كل مماس شاقولي أو أفقي لِـ (C) .

❺ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

x	1		3		5
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	→ مماس مائل
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

① $D_f=[1,5]$

② $f(1)=0$ قيمة صغرى محلية ، $f(3)=2$ قيمة كبرى محلية ، $f(5)=0$ قيمة صغرى محلية

③ $f(D_f)=[0;2]$ ، f محدود من الأدنى وحده الأدنى (0) ، f محدود من الأعلى وحده الأعلى (2)
إذاً f محدود

④ $x=1$ مماس شاقولي ، $y=2$ مماس أفقي

⑤ للمعادلة $f(x)=1$ حلان

السؤال الثاني :

فيما يأتي جدول لتغيّرات تابع f خطه البياني (C)

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$3 \Vert -2$	$-$	
$f(x)$	3	↘	$-\infty \Vert -\infty$	↗	4	↘	-3

❶ اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لِـ (C)

❷ اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط (C) في النقطة (1.4) .

❸ هل f اشتقاقي عند (1) ؟ ولماذا ؟

❹ أوجد المستقر الفعلي للتابع f .

❺ هل يوجد مقاربات مائلة لِـ (C) ؟ علّل. لأن الخط C يقبل مقارباً أفقياً بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$ إذاً لا يوجد مقاربات مائلة

❻ عيّن القيم الحديّة للتابع f . $f(1)=4$ قيمة كبرى محلية

❼ عيّن مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ ← تؤول على (x)

① $y=3$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ ، $y=-3$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$
$x=-4$ مقارب شاقولي لـ (C)

② معادلة نصف المماس من اليمين لخط البياني في النقطة $(1,4)$ هي $y-4=-2(x-1)$
$f'(1^+)=-2$
$\boxed{y=-2x+6}$

③ لأن $f'(1)\neq f'(1^+)$ ، (C) يقبل مماسين في النقطة $(1,4)$ ومنه f غير اشتقاقي عند (1)

④ المستقر الفعلي $f(D_f)=]-\infty,3[\ \cup\ ]-\infty,4]=\ ]-\infty,4]$
تقاطع
اجتماع (اشتراك + غير مشترك)

⑦ $x\in\ ]-\infty,-4[\ \cup\ ]1,+\infty[$