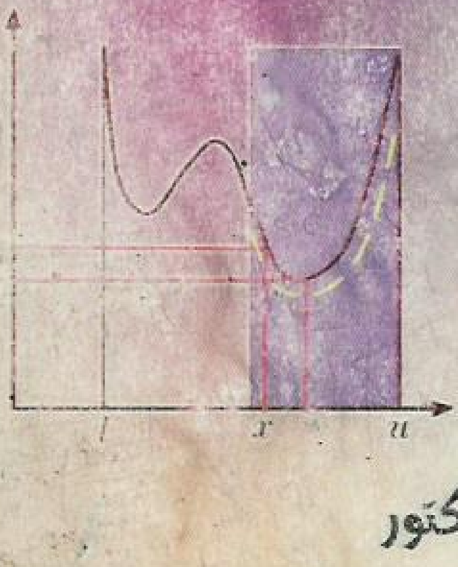
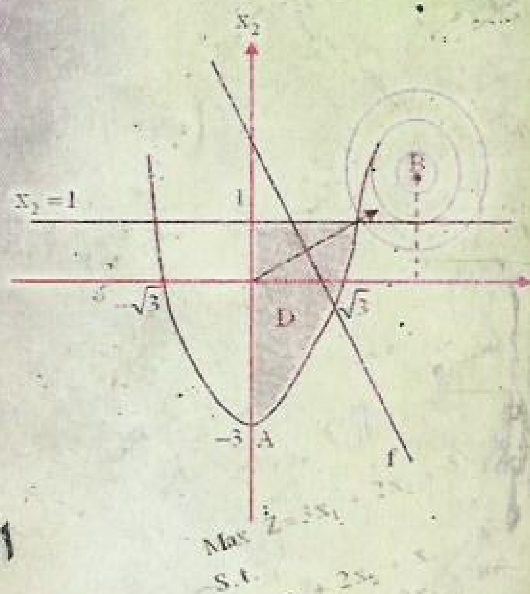
منشورات جامعة حلب
كلية الهندسة المعلوماتية

البرمجة الرياضية





الدكتور
محمد دباس الحميد
أستاذ في قسم هندسة البرمجيات ونظم المعلومات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

منشورات جامعة حلب
كلية الهندسة المعلوماتية

البرمجة الرياضية

الدكتور
محمد دبّاس الحميد
أستاذ في قسم هندسة البرمجيات ونظم المعلومات

لطـــلاب السـنة الثانية
كلية الهندسة المعلوماتية

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

الفهرس

III - الفصل الثالث: الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الرياضية الخطية

IV - الفصل الرابع : الطريقة الجبرية في حل مسائل البرمجة الرياضية الخطية

V - الفصل الخامس: استخدام الحاسوب حل مسائل البرمجة الرياضية

VI – الفصل السادس: المسألة المرافقة لمسألة برمجة رياضية خطية

VII – الفصل السابع : تحليل الحساسية

VIII - الفصل الثامن: البرمجة بقيم صحيحة

IX - الفصل التاسع: نظرية الألعاب الاستراتيجية

المقدمة

البرمجة الرياضية هي فن وعلم، يتمثل الفن فيها في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة في نموذج رياضي محدد تحديداً جيداً بالنسبة لموقف أو نظام معين. أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرائق الحسابية لحل هذا النموذج الرياضي. تستخدم البرمجة الرياضية في مجالات شتى، فمثلاً، قد تكون لدينا فكرة لتصميم نظام ما تنتظر التنفيذ ونريد تمييز البنية الأفضل لهذا النظام. أو قد يكون لدينا نظام ما ونريد تحديد السلوك الأمثل له لتحسين أدائه.

انطلاقاً من شعورنا بأهمية هذا الموضوع، قمنا بتقديم هذا الجهد المتواضع محاولين التبسيط والشمولية في عرض الموضوعات التي تمت تغطيتها في هذا الكتاب. وقد قمنا بإعداد كتاب سابق تحت عنوان بحوث العمليات(1) لطلاب السنة الثالثة في كلية الهندسة المعلوماتية. إلا أن ذلك الكتاب يغطي موضوع البرمجة الرياضية الخطية فقط، حيث يعرض تعريفها وطرائق حلها ويسلط الضوء على أهم تطبيقاتها.

قصدنا من وضع هذا الكتاب تغطية مفردات مقرر البرمجة الرياضية لطلاب السنة الثانية في كلية الهندسة المعلوماتية بجامعة حلب، نعرض من خلاله مواضيع البرمجة الرياضية الخطية وغير الخطية وأهم تطبيقاتهما. حيث تضمن **الفصل الأول** تعريفاً بعلم النمذجة الرياضية ومراحل اتخاذ القرار. وخُصص **الفصل الثاني** للتعريف بالبرمجة الخطية. أما **الفصل الثالث** تضمن إحدى طرق حل مسائل البرمجة الخطية وهي الطريقة البيانية (الهندسية) التي تستخدم لحل مسائل البرمجة الخطية التي لا تزيد متحولات القرار فيها على ثلاثة.

في **الفصل الرابع** بحثنا إحدى طرق الحل في البرمجة الخطية ألا وهي الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) مفصلين خطوات الحل باستخدام هذه الطريقة في حالتي تعظيم الربح وتخفيض التكاليف. وعرضنا في **الفصل الخامس** كيفية حل مسائل

البرمجة الخطية باستخدام الحاسوب، حيث استخدمنا برنامج Excel لسهولة استخدامه وشعبيته.

كما عرفنا في **الفصل السادس** مفهوم الترافق في البرمجة الخطية وكيفية استنتاج حل المسألة المرافقة من الحل النهائي للمسألة الأولية وبالعكس. تناولنا في **الفصل السابع** موضوع التحليل الحساس، أي المجالات التي يحافظ ضمنها الحل الأمثل الناتج على أمثليته. قدمنا في **الفصل الثامن** مفهوم البرمجة بقيم صحيحة وعرضنا أهم خوارزمياتها وطرق حلها.

خصصنا **الفصل التاسع** لإحدى أهم تطبيقات البرمجة الخطية وهي نظرية الألعاب الاستراتيجية وبيّنا العلاقة بينها وبين مسائل البرمجة الخطية. إن كل لعبة يمكن أن تحول إلى مسألة برمجة خطية والعكس أيضاً صحيح. تضمن **الفصل العاشر** تطبيقاً آخر للبرمجة الخطية وهو مسألة النقل، فبعد تعريف مسألة النقل وأهميتها في الحياة العملية، قمنا بعرض عدة طرائق حل لهذا النوع من المسائل. واحتوى **الفصل الحادي عشر** عرضاً لمسألة التعيين وهي إحدى التطبيقات المهمة للبرمجة الخطية.

بدأنا بعرض الصيغة العامة لمسألة البرمجة غير الخطية في **الفصل الثاني عشر** وبيّنا كيفية حل مسائل البرمجة غير الخطية بيانياً ثم عرضنا الحل الجبري لهذا النوع من المسائل عندما لا تكون خاضعة لقيود. كما قدمنا في **الفصل الثالث عشر** حل مسائل البرمجية الرياضية غير الخطية الخاضعة لقيود سواء كانت هذه القيود مساويات أو متراجحات. ثم تعرفنا على نوع خاص من مسائل البرمجة غير الخطية الخاضعة لقيود ألا وهي البرمجة التربيعية. أما **الفصل الرابع عشر** والأخير فقد خصصناه للبرمجة الديناميكية وأهم تطبيقاتها.

ومن أجل العودة إلى بعض المفاهيم الخاصة بالتحليل المحدب، التي يعد فهمها ضرورياً لاستيعاب بعض نظريات البرمجة الرياضية غير الخطية كان لا بدّ من إضافة ملحق يتضمن ما يحتاجه الطالب من مفاهيم ونظريات في التحليل المحدب.

وتوخينا في هذا الكتاب التبسيط والوضوح في العرض، ودعمنا التعاريف والمفاهيم النظرية فيه بأمثلة محلولة وأخرى غير محلولة للتدريب، حيث تضمنت جميع

الفصول مجموعة كبيرة من الأمثلة والمسائل المحلولة بهدف توضيح الأساليب المدروسة وتمكين القارئ من المادة العلمية المقدمة. وقد تجاهلنا في أكثر من موقع البراهين النظرية وركزنا على التطبيق لزيادة ثقة القارئ في جدوى هذا العلم التطبيقي.

أرجو من زملائي المدرسين وأيضاً أعزائي الطلاب ألا يبخلوا عليّ بخبراتهم وملاحظاتهم وأفكارهم عن فقرات هذا الكتاب وذلك لمراعاتها في الطبعات القادمة إن شاء الله. آمل أن يلبي هذا الكتاب الغرض الذي وجد من أجله، و نسأل الباري عزّ وجلّ أن يوفقنا في هذا الطريق و لما فيه الخير والنفع للناس أجمعين.

2010/06/06

المؤلف

أ.د. محمد دبّاس الحميد

الفصل الأول

النمذجة الرياضية

Mathematical Modeling

1 – 1 مقدمة:

إن عملية اتخاذ القرارات هي عملية ملازمة للإنسان منذ أول نشأته، حيث كان عليه أن يقرر كيف يعيش وأين يعيش، وكيف يحمي نفسه. كما أنه كان بحاجة إلى اتخاذ قرار بشأن أية مشكلة تواجهه في حياته. لقد كان الأفراد يتخذون قراراتهم معتمدين على قدراتهم وخبراتهم و ظروفهم الشخصية، والبيئة التي يعيشون فيها والتي تشكل بحد ذاتها تعقيداً لهذه العملية إضافة إلى الصعوبة المتمثلة بعدم توافر أسس علمية ثابتة ومتعارف عليها لهذه العملية. إلا أنه ونتيجة لازدياد حجم المشاكل التي تواجه الإنسان وتداخلها وتقسيم العمل وتعدد الإدارات والأقسام، وكذلك تنوع المنتجات والسلع الذي أدى إلى تعقيد الأعمال وظهور كثير من المشكلات الإدارية والإنتاجية، كان لا بد من البحث عن أساليب أكثر ملاءمة وفعالية لمواجهة هذه المشكلات.

نطلق على مجموعة الأساليب العلمية المستخدمة في تحليل المشكلات والبحث عن الحلول المثلى اسم بحوث العمليات، أو بتعبير آخر، **بحوث العمليات هي مصطلح أطلق على مجموعة البحوث والدراسات التي تساعدنا على اتخاذ قرار علمي ومدروس للقيام بعمل ما على أفضل وجه وضمن الإمكانات المتاحة.**

تعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحاً واسعاً في مختلف مجالات الحياة. إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة والتنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم ومن ثم اتخاذ القرارت المناسبة والسليمة. نلاحظ مما سبق أن تعريف بحوث العمليات يركز على النواحي الأساسية الآتية:

- إن بحوث العمليات تستخدم الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة.
- إن جوهر بحوث العمليات هو بناء نموذج و الاعتماد عليه.
- إن الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة و المعقدة.

I – 2 تاريخ بحوث العمليات

بما أنه يصعب تحديد فترة معينة بوصفها نقطة بداية لتطبيق مفاهيم بحوث العمليات، إلا أنه و من خلال استعراض تطور مفهوم الإدارة بشكل عام، نستطيع أن نرى أن هناك فترات بدأت تتميز بها هذه المفاهيم أكثر من غيرها كفترة الثورة الصناعية مثلاً. وعلى الرغم من ذلك فإنه يمكن القول إن بحوث العمليات لم تظهر حقلاً علمياً مستقلاً إلا في بداية الحرب العالمية الثانية. حيث شكّلت بريطانيا فريقاً من العلماء يشمل مختلف المجالات العلمية للبحث عن أفضل الأساليب والوسائل العلمية لاستخدامها في طريقة توزيع أفضل للقوات العسكرية، وكذلك في استخدام الأجهزة المتطورة كقاذفات القنابل والرادارات لكسب الحرب. كما شكّلت الولايات المتحدة الأمريكية فريقاً آخر من العلماء في تخصصات مختلفة لمعالجة المشكلات العسكرية إبان الحرب. وسُمّيت مثل هذه الفرق بفرق بحوث العمليات. وقد نجح كلا الفريقين نجاحاً كبيراً في حل مشكلات عسكرية سواء كانت بحرية أم برية أم جوية.

بعد نهاية الحرب، بدأت القطاعات الاقتصادية بالاستفادة من هذه الأساليب في زيادة إنتاجها وربحها عن طريق الاستغلال الأفضل لمواردها. ويعد ظهور الحاسب وتطوره السريع عاملاً أساسياً في ازدهار بحوث العمليات والتوسع في استخدامها. كما يمكن القول إن أحد أهم العوامل التي ساعدت في تطور بحوث العمليات هو الرواج الاقتصادي الذي أعقب الحرب العالمية الثانية وما صاحب ذلك من الاتساع في استخدام المكننة والوسائل الآلية وتقسيم العمل وتفويض السلطات، الأمر الذي أدى إلى ظهور مشاكل إدارية كثيرة ومعقدة مما دفع بعض العلماء والباحثين إلى دراسة تلك المشكلات و إيجاد أفضل الحلول لها باستخدام أساليب بحوث العمليات.

يرجع السبب في تكوين فريق بحوث عمليات بدلاً من الاعتماد على الفرد الواحد إلى أن كثيراً من المشاكل الاستراتيجية و التكتيكية المرتبطة بالنواحي العسكرية معقدة جداً لدرجة أنه يتعذر على الفرد الواحد الوصول إلى حلول فرضية، ولذلك كان يتم تشكيل فريق لبحوث العمليات يتكون من عدد من العلماء ذوي تأهيل علمي متنوع، حتى يكون فريق بحوث العمليات قادراً على حل أية مشكلة تواجهه، ولكي يستطيع استخدام الوسائل العلمية الأفضل، فلا بد من أن يكون مكوناً من مختصين في الاقتصاد والرياضيات والإحصاء والإدارة والحاسب والعلوم الطبيعية وغيرها من العلوم حتى يلم هذا الفريق بجميع مجالات الحياة.

I – 3 مجال تطبيق علم بحوث العمليات

تستخدم بحوث العمليات الآن في مجالات عديدة، ولم تعد مقتصرة على النواحي العسكرية فقط، بل اتسع استخدامها ليشمل مجالات أخرى، ومنها:

1. المجال العسكري، وهنا يأتي دوره المهم في مجال الخطط الاستراتيجية واتخاذ القرارات والتوزيع الأمثل للإمكانات العسكرية المتاحة من عسكريين وأسلحة وطائرات ... الخ.
2. يستخدم في النواحي المالية، كالمصاريف وميزانية الدول وتوزيع الميزانية الأمثل في الأغراض المختلفة.
3. يستخدم في الصناعة، لذا تحتاج المصانع إلى هذا العلم لتقليل التكاليف وتحقيق أعظم ربح ضمن الإمكانات المتاحة.
4. في مجال الإنشاءات، لبناء الجسور والمشاريع الضخمة، لتقييم الوقت المستغرق لكل مشروع وتقليل هذا الوقت.
5. في الأسواق المالية والأسهم والتنبؤ عن الأوضاع الاقتصادية.
6. في إدارة المستشفيات وضبط عملية التغذية والأدوية ضمن الإمكانات.
7. في الزراعة والتسويق الزراعي.

وهناك مجالات أخرى لا حصر لها حتى تصل إلى بيتك لتنظيم المصروفات البيتية ضمن الإمكانات المتاحة.

I – 4 مراحل اتخاذ القرار

في ضوء التعاريف الواردة في بداية هذا الفصل نستطيع أن نذكر الآن تعريف بحوث العمليات كما صاغته جمعية بحوث العمليات البريطانية على وجه الخصوص لكونها الجمعية الأم لبحوث العمليات، والجمعيات الأخرى تعد تفرعات وامتداداً لتلك الجمعية. إذ عرفت بحوث العمليات بأنها **استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة والمعدات والمواد الأولية، والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة.**

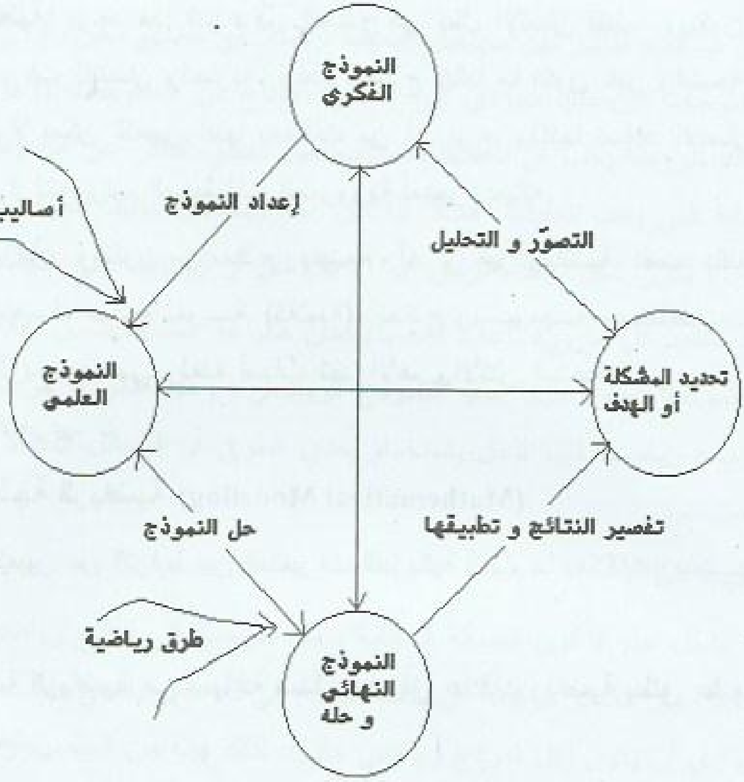
. وأياً كان التعريف المعتمد في توضيح مفهوم بحوث العمليات فإنه يجب الإشارة إلى أن بحوث العمليات هي مجموعة البحوث والدراسات التي تساعدنا على اتخاذ قرار علمي ومدروس للقيام بعمل ما على أفضل وجه وضمن الإمكانات المتاحة. إن عملية اتخاذ القرار العلمي بحسب مفهوم بحوث العمليات و مهما كانت طبيعة هذه القرارات، تمر بعدد من المراحل التي لا بد من اتباعها إذا أردنا أن يكون القرار المتخذ سليماً.

يمكن تمثيل مراحل اتخاذ القرار بالشكل (1). بناءً على هذا الرسم التوضيحي لخطوات اتخاذ قرار علمي، يمكن تلخيص هذه الخطوات كما يأتي:

1. تحديد المشكلة أو الهدف ضمن افتراضات معينة تتناسب وطبيعة المشكلة أو مع رغبة متخذ القرار.
2. وضع نموذج فكري أو تصور لأبعاد المشكلة كلها. أي أن الدراسة هنا تعتمد على الخبرة والقدرة على التفكير العلمي المنظم الذي يسهل علينا إعداد النموذج المناسب لتحقيق الهدف الذي نريد.
3. إيجاد النموذج العلمي باستخدام الأساليب العلمية المناسبة.

يمكن أن نعد هذه الخطوات الثلاث مرحلة واحدة، نسميها "**النمذجة**".

4. حل النموذج العلمي باستخدام الطرق الرياضية الموافقة، والبحث عن أفضل الحلول وتطبيقها على المشكلة الحقيقية. وهذا يكون ممكناً باستخدام طرق البرمجة الرياضية.



الشكل (1): مراحل اتخاذ القرار

سنعرض فيما يأتي معنى كلٍ من المصطلحين ، النمذجة و البرمجة الرياضية.

I - 5 النمذجة (Modeling)

النمذجة هي بالتعريف مجموعة إجراءات تتضمن عمليات معقدة مرتبطة ببعضها لإنشاء نموذج ممثل لمشكلة حقيقية. أي تمثيل المشكلة الحقيقية بشيء أبسط منها نسميه النموذج. ويمكن أن نصنف النماذج وفق ما يأتي:

1. **نماذج فيزيائية:** وهي تمثل أنظمة فيزيائية تكون تكلفة تصميمها كبيرة أو تأخذ وقتاً طويلاً. فيكون النموذج تبسيطاً لعرض هذا النظام الفيزيائي الحقيقي. ويكون الهدف من النمذجة هو تحليل سلوك النظام لمعرفة ميزاته (إذا كان النظام موجوداً) أو من أجل إيجاد أفضل تصميم له في المستقبل(إذا كان النظام فكرة تنتظر التنفيذ).

2. **نماذج ذهنية:** يوجد هذا النوع من النماذج في عقل الإنسان فقط. ويتكون نتيجة لتراكم خبرات الإنسان وتجاربه. وهذه النماذج غالباً ما تكون غير واضحة وغير محددة، ولا يمكن التعبير عنها بعلاقات من أي نوع، ولكنها تساعد الإنسان على اتخاذ القرارات ورسم المخططات الضرورية لمسيرة حياته.

3. **نماذج رمزية:** وتتكون من نماذج رياضية وأخرى غير رياضية. نقصد بالنماذج غير الرياضية، نماذج لغوية (كلامية)، نماذج رسومية ومخططات...، أما النماذج الرياضية فهي ولعدة أسباب تعد الأهم والأكثر استخداماً من سائر أنواع النماذج الأخرى.

I – 6 النمذجة الرياضية (Mathematical Modeling)

هي التعبير عن الترابط بين المتغيرات الفيزيائية لنظام ما بعلاقات رياضية، أو بشكل آخر.

النمذجة الرياضية هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي.

ولتكوين نماذج رياضية لأي مسألة أو مشكلة مطروحة لا بد من اتباع الخطوات الآتية:

1. دراسة المشكلة المطروحة وتحديد غايتها ومكوناتها . فيجب أن تكون هناك غاية ما يراد الوصول إليها، مثل تأمين ربح أعظمي أو تأمين كلفة أصغرية أو تأمين توفير أعظمي بالوقت والجهد. كما يجب تحديد مجاهيل المسألة التي يجب إيجاد قيمها للوصول للغاية المطلوبة، يمكن أن تكون هذه المجاهيل كميات إنتاج لمنتوجات معينة أو ساعات عمل في مؤسسة اقتصادية أو مبالغ من المال لفعاليات معينة أو كميات منقولة على طرق معينة وغير ذلك.

2. تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة، وتحديد القيود المفروضة على المشكلة، فمثلاً الشركة لا تستطيع توفير أكثر من حجم معين من المواد الأولية لأسباب قد تكون خارجة عن إرادتها، أو في نظام ميكانيكي مثلاً يجب ألا تزيد سرعته على حد معين.

3. بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المسألة . فمثلاً في مصنع معين، إذا زاد إنتاج أحد المنتوجات فإن ذلك سيؤدي إلى إنقاص الإنتاج من المنتوجات الأخرى. كما أن هناك شروطاً يجب أن تحققها هذه المجاهيل بغض النظر عن مردودها من حيث الغاية التي يجب تحقيقها. فمثلاً إذا كان أحد المجاهيل ممثلاً لكمية منتجة، يشترط فيه ألا يكون سالباً، وقد يفترض فيه ألا يقل عن أو أن يزيد على كمية معينة.

4. بعد تحديد كل ما ورد أعلاه فإنه بالإمكان صياغة المسألة ضمن علاقات رياضية بمجموعها نطلق عليها اسم "**النموذج الرياضي**". وهذا النموذج هو تمثيل للمشكلة بصيغة رياضية قابلة للحل باستخدام إحدى الطرق أو الوسائل المتوافرة في بحوث العمليات.

ملاحظـــة " 1":

بشكل عام لاتكون المسألة الحقيقية سهلة الترجمة إلى نماذج رياضية. حتى لو فرضنا أنه من الممكن ترجمة أي مسألة نصية إلى نموذج رياضي، فإنه ليس من الضروري أن يكون لكل نموذج رياضي حلول. لذلك فإنه من الضروري أن نبسط المسألة أو نقربها إلى مسألة أخرى قريبة منها، وفي الوقت نفسه تكون أسهل للترجمة إلى نموذج رياضي، على أن نحافظ في أثناء عملية التقريب (التبسيط) لمسألة ما على كل الميزات الأساسية لها. فمثلاً، عند دراسة حركة كوكب ، يمكن أن نعده نقطة في الفضاء ونهمل حجمه وشكله.

ملاحظة "2":

بعد إيجاد النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة الحقيقية ، نكون أمام إحدى حالتين:

- إذا كانت هذه النتائج جيدة ومُرْضية، نكون قد وفقنا إلى إيجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المسألة الحقيقية.
- وإذا لم تكن النتائج مُرْضية، فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغييرات في الفرضيات التي اعتبرناها عند تقريب المسألة، أو البحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي.

الفصل الثاني

البرمجة الرياضية

Mathematical Programming

II – 1 مقدمة

رأينا في الفصل الأول من هذا الكتاب أنه يمكن اتخاذ أي قرار على مـرحلتين رئيستين الأولى هي صياغة المسألة وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسـم النمـوذج الرياضي، والثانية هي حل النموذج الرياضي والبحث عن أفضل الحلول وتطبيقها على المشكلة الحقيقية. وهذا يكون ممكناً باستخدام طرق البرمجة الرياضـية. فمـاذا نعنـي بالبرمجة الرياضية؟

II - 2 البرمجة الرياضية Mathematical Programming

إن مسألة البرمجة الرياضية تعني – بشكل عام – البحث عـن القيمـة المثلـى (صغرى أو عظمى) لتابع جبري يضم عدة متغيرات. تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة مساويات أو متراجحات. ونعبر عن ذلك كله بالشكل الآتي:

$$\text{Minimize } f(X) \quad \text{أو} \quad \text{Maximize } f(X)$$

$$\text{Subject to}$$

$$g_i(X) \le 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,m$$
$$\hbar_j(X) = 0 \quad ; \quad j=1,2,\dots,\ell$$
$$X \in S \subset R^n$$

- حيث $X \in R^n$ شعاع مركباته $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وهذه المركبات هي مجاهيل المسألة.
- التابع $f(X)$ هو التابع الذي نرغب بإيجاد قيمته المثلى (عظمى أو صغرى) ويدعى **تابع الهدف**.

- مجموعة المتراجحات $g_i(x) \le 0 \; ; \; (i=1,2, ..., m)$ ومجموعة المساويات $\hbar_j(X) = 0 \; ; \; (j=1,2, ..., \ell)$ هي توابع معرفة في الفضاء R^n وتدعى قيود المسألة.
- نسمي مجموعة الأشعة $X \in R^n$ والتي تحقق جميع قيود المسألة بالحلول الممكنة. ونسمي المنطقة التي تحوي مجموعة الحلول الممكنة بمنطقة الإمكانيات.
- نسمي الشعاع $X \in R^n$ الذي يحقق جميع قيود المسألة ويبلغ التابع فيه قيمته المثلى بالحل الأمثل .

إن حل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب إذاً إيجاد الشعاع $X \in R^n$ الذي يحقق جميع القيود ويُبلِغ تابع الهدف قيمته المثلى.

ملاحظة "1":

إن كلمة برمجة لم يكن لها علاقة بالحاسبات الإلكترونية في بادئ الأمر وإنما كانت تعني التخطيط . وهذا البرنامج الرياضي هو نموذج رياضي لمسألة ما.

II – 3 البرمجة الخطية Linear Programming

في مسألة البرمجة الرياضية، إذا كان تابع الهدف ومجموعة القيود جميعها من الدرجة الأولى للمتحولات $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن البرنامج الرياضي يدعى برنامجاً خطياً. وتعد البرمجة الخطية من أوائل مواضيع بحوث العمليات. وقد بدأ بعرض مواضيعها العالم **G-Stiegler** بُعيد الحرب العالمية الثانية، عندما حاول مقارنة الحد الأدنى لتكاليف المعيشة في ألمانيا قبل الحرب وبعدها، فحصل على مسألة برمجة خطية.

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما لبلوغ هدف معين. أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيراً ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية سهلة.

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والاقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظراً للتقدم التقني الذي ساعد على تطوير الحاسبات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة.

نتعرّف على مفاهيم البرمجة الرياضية الخطية وطرائق حل مسائلها وأهم تطبيقاتها اعتباراً من الفصل الثالث ولغاية الفصل الحادي عشر من هذا الكتاب.

II – 4 البرمجة غير الخطية Non-Linear Programming

إذا كان تابع الهدف أو أحد قيود مسألة برمجة رياضية من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة للمتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإننا ندعوها مسألة برمجة غير خطية .

لقد عولجت مسائل البرمجة غير الخطية باستخدام طرق تقليدية قدمها رياضيو القرن السابع عشر والثامن عشر (**لاغرانج ونيوتن، ...**).

أما القفزة العظمى في هذا المجال، فكانت عام 1951 عندما توصل **كين– تيوكر (Khun-Tuker)** إلى إضافة شروط جديدة على أسلوب **مضاريب لاغرانج**، مما أدى إلى السيطرة على معظم مشاكل البرمجة غير الخطية.

ندرس مفاهيم البرمجة الرياضية غير الخطية وطرائق حل مسائلها وأهم تطبيقاتها اعتباراً من الفصل الثاني عشر ولغاية الفصل الرابع عشر من هذا الكتاب.

II – 5 صياغة النماذج الرياضية

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية، ونعني التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله. من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توافر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- تحديد الهدف بصورة كمية. ويعبر عنه بتابع الهدف وهو عبارة عن التابع المطلوب إيجاد القيمة العظمى (أو الصغرى) له. يجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو تأمين أصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد.

• تحديد القيود. يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس. ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات.

• تحديد البدائل المختلفة. ويشير هذا العنصر إلى أن يكون للمشكلة أكثر من حل واحد حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية. إذ لو كان للمشكلة حل واحد لما كانت هناك ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية، إذ إن فائدتها تتركز في المساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المختلفة والمتعددة.

II – 6 أمثلــة Examples

سنذكر فيما يأتي بعض الأمثلة البسيطة من مسائل اقتصادية تؤدي نمذجتها إلــى برامج خطية.

مثــال "1":

يقوم مصنع للألبسة بإنتاج أربعة أصناف من الملبوسات (S_4 , S_3 , S_2 , S_1) ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية الآتية (M_3 , M_2 , M_1). ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلاً) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتوج من أجل تحقيق ربح أعظمي، علماً بأن الربح يتناسب طرداً وعدد الوحدات المباعة من المنتوجات. نرتب المعلومات التي حصلنا عليها وفق الجدول الآتي:

المواد الأولية	نــوع المنــتــج				الكميات المتوافرة
	S_1	S_2	S_3	S_4	
M_1	1.5	1	2.4	1	2000
M_2	1	5	1	3.5	8000
M_3	1.5	3	3.5	1	5000
ربح واحدة المنتج	5.24	7.3	8.34	4.18	

نلاحظ أن هذا الجدول يوضح ما يأتي :

1. الكميات المتوافرة من كل مادة أولية خلال الفترة الإنتاجية (شهر في مثالنا).

2. مقدار ما يلزم من كل مادة أولية في إنتاج واحدة منتج (دستة مثلاً) من كل من المنتوجات الأربعة.

3. الربح الناتج عن بيع واحدة المنتج من كل من المنتوجات الأربعة .

لنفرض أن x_1 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الأول S_1 خلال الفترة الإنتاجية (شهر في مثالنا). لنفرض أن x_2 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الثاني S_2 خلال الفترة الإنتاجية (شهر في مثالنا). لنفرض أن x_3 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الثالث S_3 خلال الفترة الإنتاجية (شهر في مثالنا). لنفرض أن x_4 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الرابع S_4 خلال الفترة الإنتاجية (شهر في مثالنا).

إن الكميات المتوافرة من المواد الأولية هي مقادير محدودة، ومن ثم فإننا لا نستطيع زيادة الإنتاج بشكل عشوائي لأي منتج، وإنما يجب توزيع الإنتاج بين الأصناف الأربعة بحيث يكون الربح أعظمياً ومن غير تجاوز الكميات المتوفرة من كل مادة أولية من المواد الثلاث. كما أنه لا يمكن قصر الإنتاج على صنف واحد أو صنفين من الإنتاج فقط، وذلك لضرورات السوق أو لتحقيق توازن في استهلاك المواد الأولية.

نلاحظ أنه يتم استهلاك كمية من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة من الملابس قدرها:

$$1.5\,x_1 + x_2 + 2.4\,x_3 + x_4$$

لأنه يلزم كمية قدرها 1.5 من أجل إنتاج واحدة منتج من الصنف الأول، علماً بأنه يتم إنتاج كمية قدرها x_1 من الصنف الأول S_1. كما يلزم كمية قدرها 1 من أجل إنتاج واحدة منتج من الصنف الثاني، علماً بأنه يتم إنتاج كمية قدرها x_2 من الصنف الثاني S_2. وهكذا بالنسبة لبقية الأصناف. ولكن مجموع ما يلزم من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة لا يمكن أن يتجاوز 2000 (المقدار المتوافر من هذه المادة) ونعبر عن هذا رياضياً بالصيغة الآتية:

$$1.5\,x_1 + x_2 + 2.4\,x_3 + x_4 \le 2000 \qquad (1)$$

بطريقة مماثلة، نستطيع أن نكتب من أجل المادة الأولية M_2:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \le 8000 \qquad (2)$$

ومن أجل المادة الأولية M_3:

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \le 5000 \qquad (3)$$

بالإضافة إلى ذلك، فإنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة، فإما أن ننتج كمية موجبة من أي صنف أو ألا ننتج أي كمية على الإطلاق. ومن ثم نحصل على القيود الإضافية:

$$x_4 \ge 0 \;,\quad x_3 \ge 0 \;,\quad x_2 \ge 0 \;,\quad x_1 \ge 0 \qquad (4)$$

وهو ما يسمى بشروط عدم السلبية .

بهذا نكون قد حددنا جميع القيود المفروضة على متحولات المسألة .

واضح أنه إذا تم إنتاج واحدات قدرها x_4 , x_3 , x_2 , x_1 من الأصناف S_4 , S_3 , S_2 , S_1 على الترتيب، فإن الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون:

$$f(X) = 5.24x_1 + 7.3x_2 + 8.34x_3 + 4.18x_4 \qquad (5)$$

وهو يمثل تابع الهدف.

نرغب الآن في إيجاد قيم المنتوجات x_4 , x_3 , x_2 , x_1 التي تحقق القيود (1 - 4) وتجعل الربح (5) أعظم ما يمكن. وعليه فإننا نكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة بالشكل الإجمالي على النحو الآتي:

$$\text{Max} \quad f(X) = 5.24x_1 + 7.3x_2 + 8.34x_3 + 4.18x_4$$

وفقاً للقيود:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \le 2000$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \le 8000$$

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \le 5000$$

وشروط عدم السلبية

$$x_4 \ge 0 \;,\quad x_3 \ge 0 \;,\quad x_2 \ge 0 \;,\quad x_1 \ge 0$$

ملاحظة "2":

نستطيع صياغة نموذج رياضي خطي لمسألة يطلب فيها حساب القيمة العظمى للتابع الهدف بشكل عام كالآتي:

$$\text{Max} \quad f(X) = C^t X$$
$$\text{Subject to}$$
$$AX \le B$$
$$X \ge 0$$

حيث $C \in R^n$, $B \in R^m$ والمصفوفة A من المرتبة $m \times n$.

مثـال "2":

ترغب شركة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من العلف . كـل نـوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصـة لتـصبح جـاهزة للاستعمال. نرتب المعلومات المعروفة حول هذه المسألة بالجدول الآتي :

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نـوع العـلـف			الاحتياجات الأسبوعية / كغ
	A	B	C	
I	1	4	2	1500
II	2	2	1	300
III	4	1	1	800
IV	3	2	1	280
V	1	0.75	0.5	187
تكلفة الوحدة	15	25	30	

نلاحظ في هذا الجدول ما يأتي :

1. الاحتياجات الأسبوعية التي يجب تأمينها في السوق .
2. مقدار ما يلزم من كل مادة أولية في إنتاج واحدة منتوج من كل نوع من أنواع العلف .
3. تكلفة واحدة المنتج من كل نوع من أنواع العلف .

ترغب الشركة في وضع نموذج رياضي للعلف الحيواني بحيث تكون التكــاليف أقل ما يمكن وتحقق جميع الاحتياجات الأسبوعية.

الحل:

لنفرض أن x_1 هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول A من العلف خــلال الفترة الإنتاجية (أسبوع).

لنفرض أن x_2 هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني B من العلف خــلال الفترة الإنتاجية (أسبوع).

لنفرض أن x_3 هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الثالث C من العلف خلال الفترة الإنتاجية (أسبوع).

نلاحظ أنه يتم استهلاك كمية من المادة الأولية I في إنتاج المواد الثلاثة من الأعلاف قدرها: $x_1 + 4x_2 + 2x_3$

لأنه يلزم كمية قدرها 1 من أجل إنتاج واحدة منتج من النوع الأول A من الأعــلاف، علماً بأنه يتم إنتاج كمية قدرها x_1 من المنتج.

وهكذا بالنسبة للنوعين C , B.

لكن كما هو مبين في الجدول إن الاحتياجات الأسبوعية من المــادة الأوليــة I هو 1500 كغ. لذلك يجب ألا يقل الإنتاج عن هذه الاحتياجات، بل يجب أن يكون أكبر منها أو يساويها على الأقل. ونعبر عن ذلك بالشكل الآتي:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1500$$

وهذا يشكل القيد الأول في المسألة.

وبطريقة مماثلة نجد بقية القيود، أي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 300 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\geq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 280 \\ x_1 + 0.75x_2 + 0.5x_3 &\geq 187 \end{aligned}$$

بالإضافة إلى شرط عدم السلبية، حيث لا يمكن أن ننتج كميات سالبة من الأعلاف

$$x_3 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 \geq 0$$

الآن، عند إنتاج الكميات x_3 , x_2 , x_1 من الأنواع C , B , A من الأعـلاف، فإن تكلفة الإنتاج تعطى بالشكل:

$$15\, x_1 + 25\, x_2 + 30\, x_3$$

ونحن نرغب في أن تكون هذه التكلفة أصغر ما يمكن. وعليه فإننا نكتب النموذج الرياضي بشكل إجمالي على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad f(X) = 15\, x_1 + 25\, x_2 + 30\, x_3$$

$$\text{Subject t o}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4\, x_2 + 2\, x_3 &\geq 1500 \\ 2\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 &\geq 300 \\ 4\, x_1 + x_2 + x_3 &\geq 800 \\ 3\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 &\geq 280 \\ x_1 + 0.75\, x_2 + 0.5\, x_3 &\geq 187 \end{aligned}$$

وشرط عدم السلبية

$$x_3 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 \geq 0$$

ملاحظة "3":

نستطيع صياغة نموذج رياضي خطي لمسألة يطلب فيها حساب القيمة الصغرى للتابع الهدف بشكل عام كالآتي:

$$\text{Min} \quad f(X) = C^t X$$

$$\text{Subject to}$$

$$A X \geq B$$

$$X \geq 0$$

حيث $B \in R^m \; , \; C \in R^n$ والمصفوفة A من المرتبة $m \times n$.

ملاحظة "4":

نستطيع بسهولة تحويل مسألة البحث عن قيمة عظمى لتابع هدف $C^t X$ إلى مسألة البحث عن قيمة صغرى للتابع الهدف $-C^t X$، وذلك بالاستفادة من العلاقة الآتية:

$$\operatorname{Min}(-C^t X) = -\operatorname{Max}(C^t X)$$

فمثلاً، لو كان التابع الهدف $C^t X$ يأخذ القيم $(4, 3, 2, 1)$ فإن:

$$-\operatorname{Max}(C^t X) = -4$$

والتابع $-C^t X$ يأخذ القيم $(-1, -2, -3, -4)$ أي:

$$\operatorname{Min}(-C^t X) = -4$$

II - 7 الشكل العام لمسألة برمجة خطية

General Definition of Linear Programming

من خلال الأمثلة السابقة، نلاحظ أنه يمكن أن تتلخص مسألة البرمجة الخطية في إيجاد القيم المثلى (الأعظمية أو الأصغرية) للتابع الخطي

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad ; \quad i=1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad ; \quad i=s+1,s+2,\dots,s+t$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad ; \quad i=s+t+1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j=1,2,\dots,r$$

حيث c_j , b_i , a_{ij} $(j=1,2,\dots,n \ , \ i=1,2,\dots,m)$ ثوابت تعين قيمها بحسب الخواص الفيزيائية والتقنية للمسألة المعطاة، و x_j متحولات القرار.

بعد إعطاء نموذج البرنامج الخطي لمسألة ما ، فإننا نتوجه للبحث عن حل هـذا النموذج. وبما أن نماذج البرمجة الخطية متنوعة هدفها البحث عن قيمـة صـغرى أو عظمى لتابع الهدف وخاضعة لقيود قد تكون بشكل (≥ أكبر أو يساوي) أو بالـشـكل (≤ أصغر أو يساوي) أو بالشكل (= يساوي)، فإننا نجد أنه من الـضروري تعـديل الشكل العام للبرامج الخطية لنتمكن من تطبيق خوارزميات الحل التي نستعرضها فـي الفصول القادمة.

ولهذا، نعرف صيغتين للنماذج الخطية، الصيغة المعيارية والتي تكون مفيدة جداً عند دراسة نظرية الترافق والصيغة النموذجية المستخدمة مباشرة لحل هـذا النمـوذج الخطي.

II – 8 الصيغة المعيارية لنموذج خطي

The Canonical Form of Linear Model

إن الشكل العام المذكور أعلاه لنموذج خطي، يمكن أن يوضع دائماً بالشكل المعياري الآتي:

$$\text{Max} \quad f(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\text{Subject to}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

حيث نلاحظ في هذا الشكل المعياري أن جميع متحولات القرار x_j غير سالبة، وأن جميع القيود من الشكل (≤). كما أنه يطلب إيجاد القيمة العظمى للتابع الهدف.

يمكن أن نضع أي مسألة برمجة خطية بهذا الشكل المعياري باتباع التحويلات الأولية الآتية:

1. إذا كان المطلوب هو إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف $f(X)$، فإن هذا مكافئ (رياضياً) لإيجاد القيمة العظمى للتابع $-f(X)$. فمثلاً، إيجاد القيمة الصغرى للتابع:

$$Z = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$$

مكافئ تماماً لعملية إيجاد القيمة العظمى للتابع

$$Z = -c_1 x_1 - .... - c_n x_n$$

أي أنه يمكن أن يكون الهدف هو إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف في أي مسألة برمجة خطية، ثم نجد بالاستفادة من العلاقة:

$$\text{Min}\,(-C^t X) = -\text{Max}\,(C^t X)$$

القيمة الصغرى لتابع الهدف للمسألة الأصلية.

2. إذا كانت المتراجحة من الشكل ($\geq$ أكبر أو يساوي) فإنه يمكن تغيير اتجاهها بضرب طرفيها بـــ -1. فمثلاً إذا كان القيد الخطي بالشكل:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$$

فإنه مكافئ تماماً للقيد:

$$-a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq -b$$

3. إذا كان القيد بشـــكل مســـاواة ، فإنه يمكن تحويله إلى متراجحتين مختلفتي الاتجاه ومحققتين معاً. فمثلاً القيد:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

مكافئ للقيدين:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$$

و

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$$

4. إذا كان الطرف الأيســـر من قيد متراجحة معطى بالقيمة المطلقة، فإنـــه يمكن تحويله إلى متراجحتين نظاميتين. فمثلاً من أجل $b \geq 0$ فإن القيد

$$|\, a_1 x_1 + a_2 x_2 \,| \leq b$$

مكافئ تماماً للقيدين:

$$-a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq b$$

و:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \le b$$

5. إذا كان أحد متحولات القرار غير مقيد بشرط عدم السلبية (أي يمكن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفراً) ، فإننا يمكن أن نعبر عنه بالفرق بين متحولين غير سالبين x' , x'' كما يأتي:

$$x = x' - x'' \quad ; \quad x' \ge 0 \; , \; x'' \ge 0$$

مثال "3":

لنأخذ مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Min } z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$\begin{aligned} &\text{Subject to} \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 \le 40 \\ &x_1 + 9x_2 - 7x_3 \ge 50 \\ &5x_1 + 3x_2 = 20 \\ &|5x_2 + 8x_3| \le 100 \\ &x_1 \ge 0 \; , \; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

يمكن وضع هذه المسألة بالشكل المعياري بعد إجراء التحويلات الآتية:

1. القيد $|5x_2 + 8x_3| \le 100$ مكافئ للقيدين :

$$-5x_2 - 8x_3 \le 100$$

و:

$$5x_2 + 8x_3 \le 100$$

2. المتحول x_3 يمكن الاستعاضة عنه بـــ $x_3 = x_3' - x_3''$ حيث $x_3' \ge 0$; $x_3'' \ge 0$

3. تابع الهدف (حيث يطلب حساب قيمته الصغرى) يمكن الاستعاضة عنه بتابع هدف (يطلب حساب قيمته العظمى) فتصبح المسألة بالشكل:

$$\text{Max } Z = (-z) = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3''$$

Subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' &\le 40 \\
-x_1 - 9x_2 + 7x_3' - 7x_3'' &\le -50 \\
5x_1 + 3x_2 &\le 20 \\
-5x_1 - 3x_2 &\le -20 \\
5x_2 + 8x_3' - 8x_3'' &\le 100 \\
-5x_2 - 8x_3' + 8x_3'' &\le 100 \\
x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0 \ , \ x_3' \ge 0 \ , \ x_3'' &\ge 0
\end{aligned}
$$

على ألا ننسى عند إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف حساب القيمة الصغرى لتابع الهدف للمسألة الأصلية وفق العلاقة :

$$\text{Min } z = -\text{Max } Z$$

II – 9 الصيغة النموذجية لمسألة برمجة خطية

The Standard Form of Linear Programming Problem

يمكن كتابة أي مسألة برمجة خطية بالشكل النموذجي الآتي:

أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للتابع : $Z = C^t X$

وفقاً للشروط :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \ \ \& \ \ b_i \ge 0$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

نلاحظ في هذا الشكل النموذجي أن جميع القيود هي مساويات ما عدا شروط عدم السلبية فإنها تبقى متراجحات. كما أن الطرف الأيمن من كل قيد مساواة يجب أن يكون غير سالب. كما أن جميع متحولات القرار غير سالبة. أما تابع الهدف في الشكل النموذجي فيمكن أن يطلب حساب قيمته العظمى أو الصغرى.

يمكن تحويل أي مسألة برمجة خطية من شكلها العام (أو من الشكل المعياري) إلى الشكل النموذجي باتباع الخطوات الآتية، بالإضافة إلى التحويلات الأولية المذكورة في الفقرة السابقة:

1. إذا كان القيد عبارة عن متراجحة ($\leq$ أصغر أو يساوي) فلتحويله إلى قيد مساواة يكفي أن نضيف إليه متحولاً جديداً غير سالب. فمثلاً، القيد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i$$

يمكن كتابته بالشكل (بعد إضافة المجهول $0 \leq x_{n+i}$):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \quad ; \quad x_{n+i} \geq 0$$

2. أما إذا كان القيد عبارة عن متراجحة ($\geq$ أكبر أو يساوي)، فيمكن تحويله إلى مساواة بطرح مجهول جديد غير سالب. فمثلاً، القيد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i$$

يمكن كتابته بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \quad ; \quad x_{n+i} \geq 0$$

نسمي هذه المجاهيل الجديدة غير السالبة بمجاهيل الفروق.

3. إذا كان الطرف الأيمن من المساواة سالباً نضرب طرفي المساواة بـــ -1.

مثـــال "4":

اكتب الشكل النموذجي لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

Subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &\leq 2 \\
x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 3 \\
2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &\leq 6 \\
x_1 + x_4 - 5x_5 &\geq 8 \\
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\geq 0
\end{aligned}$$

إن الشكل النموذجي للمسألة المعطاة هو:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

Subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 &= 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 &= 8 \\ (x_1, x_2, \dots, x_9) &\geq 0 \end{aligned}$$

ملاحظة "5":

يلعب الشكل النموذجي دوراً مهماً في إيجاد حل مسائل البرمجة الخطية ، حيث تم تحويل قضية البحث عن حل لمسألة برمجة خطية إلى عملية البحث عن حل لجملة معادلات خطية مؤلفة من m معادلة بـ m + n مجهول. وحل هذه الجملة من المعادلات يكون مفيداً إذا كان ممكناً، أي إذا كان يحقق شروط عدم السلبية $x_j \geq 0$. ومن ثم، فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون معطى بالحل الممكن الذي يجعل قيمة التابع مثلى.

إن فكرة تحويل مسألة البحث عن حل برنامج خطي إلى مسألة البحث عن حل لـ m معادلة بـ m + n مجهول هي فكرة جيدة ، ولكن كما نعلم فإننا نحصل في هذه الحالة على عدد غير منته من الحلول، وهنا تكمن المشكلة. ومن ثم، بما أنه غير ممكن تحديد نقطة الحل الممكن حسابياً، فإننا بحاجة إلى خوارزمية لتحديد نقطة الحل الأمثل بعد إيجاد عدد محدود من نقاط الحل.

في الفصل الرابع سنتعرف خوارزمية السمبلكس التي تزودنا بخوارزمية تكرارية تتقارب إلى الحل الأمثل (إذا وجد) بعد عدد من التكرارات .

ملاحظة " 6 " :

في حل جملة المعادلات الخطية :

$$A_{m.n} \cdot X = B \;;\; B \in R^m \;\&\; X \in R^n \quad (m < n,\ r(A) = m)$$

حيث نعني بـ $r(A)$ رتبة المصفوفة A.

نقول عن مجموعة الأشعة $A_{\bullet J}$ أنها تشكل أساساً في هذه الجملة إذا كان $| J | = m$ وإذا كان $r(A_{\bullet J}) = m$. نلاحظ أن كل أساس في هذه الجملة يعين حلولاً لها على الشكل:

$$X_J = A_{\bullet J}^{-1} \cdot B - A_{\bullet J}^{-1} \cdot A_{\bar{J}} \cdot X_{\bar{J}}$$

حيث J أدلة مجاهيل الأساس و $\bar{J}$ أدلة بقية المجاهيل.

ملاحظة "7":

يمكننا دائماً أن نفرض $r(A) = m$. في الواقع إذا كان $r(A) < m$ فهذا يعني أن هناك سطراً أو عدة أسطر من هذه المصفوفة يمكن كتابتها بوصفها تركيباً خطياً للأسطر الأخرى. إن القيود المقابلة لهذه الأسطر يمكن أن تكون زائدة (وفي هذه الحالة يمكن حذفها من قيود المسألة) أو أن تكون غير متوافقة مع بقية الأسطر (في هذه الحالة لا يوجد حل لجملة المعادلات $A . X = B$)، وذلك بحسب قيم الثوابت b_i.

تعريف "1":

نقول عن الشعاع $X \in R^n$ إنه حل أساسي للشكل النموذجي لبرنامج خطي، إذا كان ناتجاً عن أساس وإذا كانت قيم المجاهيل من خارج هذا الأساس (أو القاعدة) معدومة. ونقول إن لدينا حلاً أساسياً إذا كان عدد عناصره غير المعدومة (أي الموجبة تماماً) لا يتجاوز m لأجل الحل المقابل لهذا الأساس، أي $X = A_{\bullet J}^{-1} . B$ هو الحل الأساس لأجل الأساس المكون من الأعمدة ذات الأدلة J.

نظرية "1":

إن منطقة الإمكانيات (أي مجموعة الحلول الممكنة الأساسية أو غير الأساسية) في برنامج خطي هي مجموعة محدبة. هذه المنطقة المحددة بمساويات ومتراجحات القيود الخطية وشروط عدم السلبية هي بالفعل تقاطع لمجموعات محدبة، وهذا التقاطع هو مجموعة محدبة. انظر التعريف "2" أدناه للمجموعة المحدبة.

نتيجة "1":

إن كل نقطة حدية في منطقة الإمكانيات في برنامج خطي تسمى ذروة، وهي تقابل حلاً أساسياً ممكناً للبرنامج الخطي.

نظرية "2":

إذا كان لبرنامج خطي حل أمثل ، فإن التابع الهدفي يبلغ قيمته المثلى في ذروة من ذروات منطقة الإمكانيات. أما إذا بلغ قيمته المثلى في أكثر من ذروة فإنه يبلغ هذه القيمة في كل نقطة من التركيب الخطي المحدب لهذه الذروات. ومن ثم فإنه يكفي التفتيش عن حلول البرنامج الخطي في ذروات منطقة الإمكانيات (والتي تشكل الحلول الأساسية الممكنة للبرنامج).

بالفعل، إذا كان X_1 حل أمثل ، X_2 حل أمثل آخر ، فإن :

$$f(X_1) = f(X_2) = f^*$$

وإذا كانت:

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \quad ; \quad \lambda \in [0,1]$$

فإن:

$$f(X) = \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) = \lambda f^*(X_1) + (1-\lambda) f^*(X_2) = f^*$$

تعريف "2" المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة $S \subset R^n$ أنها محدبة ، إذا كانت جميع نقاط القطعة المستقيمة المغلقة التي طرفاها أي نقطتين من نقاط المجموعة منتمية أيضاً إلى هذه المجموعة. أي:

$$\forall \ X,Y \in S \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda) Y \in S \quad ; \quad \lambda \in [0,1]$$

كما ندعو مجموعة النقاط التي من الشكل:

$$\{ Z = \lambda X + (1-\lambda) Y \quad ; \quad 0 \le \lambda \le 1 \}$$

تركيبات خطية محدبة للنقطتين Y , X.

مثال "5":

مجموعة غير محدبة   مجموعة محدبة   مجموعة محدبة

الشكل (2): مجموعات محدبة و غير محدبة

مثــال "6":

المجموعة P من الفضاء R^3 المعرفة بالشكل:

$$P=\{ X=(x_1, x_2, x_3) : \ x_1+2x_2-x_3=4 \}$$

هي مجموعة محدبة. تدعى مستوياً في الفضاء R^3.

وبشكل عام فان المجموعة المعرفة بالشكل:

$$P=\{X: \ C^t X=\alpha \ ; \ \alpha\in R \ \ \& \ \ C\in R^n\}$$

هي مجموعة محدبة تدعى مستوياً في الفضاء R^n. حيث نقـصد هنـا بالـشعاع C^t منقول الشعاع C.

مثــال "7":

المجموعة P من الفضاء R^2 المعرفة بالشكل:

$$P=\{ X=(x_1, x_2) : \ x_1+x_2 \le 2 \}$$

هي مجموعة محدبة تدعى نصف فضاء، وجميع نقاطها واقعة في جهة واحدة بالنـسبة للمستقيم.

$$\{ X=(x_1, x_2) : \ x_1+x_2 = 2 \}$$

وبشكل عام فان المجموعة المعرفة بالشكل :

$$P=\{X: C^t X\le\alpha \ ; \ \alpha\in R \ \ \& \ \ C\in R^n \}$$

هي نصف فضاء من الفضاء R^n ، وهو مجموعة محدبة.

ملاحظة "8":

إن أي مستوٍ P يعرف لنا نصفي فضاء مغلقين.

$$P^{+}=\{X:\ C^{t}X\geq\alpha\quad;\quad X\in R^{n}\ \&\ \alpha\in R\}\ ,$$
$$P^{-}=\{X:\ C^{t}X\leq\alpha\quad;\quad X\in R^{n}\ \&\ \alpha\in R\}$$

وكل منهما مجموعة محدبة.

كما أن أي مستوٍ P يعرف لنا نصفي فضاء مفتوحين:

$$P^{+}=\{X:\ C^{t}X>\alpha\ ;\ \alpha\in R\ \ \&\ X\in R^{n}\}\ ,$$
$$P^{-}=\{X:\ C^{t}X<\alpha\ ;\ \alpha\in R\ ,\&\ X\in R^{n}\}$$

وكل منهما مجموعة محدبة.

مثـــال "8":

المجموعة $S\subset R^{n}$ المعرفة بالشكل :

$$S=\{X=(x_1,x_2):\ x_1^2+x_2^2\leq 4\}$$

هي مجموعة محدبة ، وذلك لأن :

$$\forall\ X,Y\in S\quad \&\quad \lambda\in[0,1]$$

فإن:

$$\lambda X+(1-\lambda)Y=\lambda(x_1,x_2)+(1-\lambda)(y_1,y_2)$$
$$=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1\ ,\ \lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$
$$(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2+(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2=$$
$$\lambda^2x_1^2+2\lambda(1-\lambda)x_1y_1+(1-\lambda)^2y_1^2+\lambda^2x_2^2+$$
$$2\lambda(1-\lambda)x_2y_2+(1-\lambda)^2y_2^2$$

وبالاستفادة من المتراجحة:

$$2xy\leq x^2+y^2$$

نجد:

$$\lambda X+(1-\lambda)Y\leq\ \lambda^2x_1^2+\lambda(1-\lambda)(x_1^2+y_1^2)+(1-\lambda)^2y_1^2+$$
$$\lambda^2x_2^2+\lambda(1-\lambda)(x_2^2+y_2^2)+(1-\lambda)^2y_2^2=4$$

وهذا يعني أن:

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in S$$

أي أن S مجموعة محدبة .

لمعرفة المزيد عن مفاهيم المجموعات المحدبة والتوابع المحدبة وخواصها، يمكن الاطلاع على الملحق في هذا الكتاب.

II – 10 مسائل محلولة Solved Problems

1– ينتج أحد المصانع نوعين A_1 , A_2 من المنتوجات، ربح الواحدة من النوع الأول A_1 هو (10) ليرات سورية، ومن النوع الثاني A_2 هو (6) ليرات سورية. يوجد في هذا المصنع ثلاثة أقسام، يعمل في القسم الأول (60) عاملاً، وفي القسم الثاني (150) عاملاً، وفي القسم الثالث (40) عاملاً. إذا علمنا أن إنتاج الواحدة من كل من النوعين A_1 , A_2 يحتاج إلى ساعات عمل (عامل × ساعة) في الأقسام المختلفة كما هو مبين في الجدول الآتي:

ساعات العمل اللازمة في القسم الثالث	ساعات العمل اللازمة في القسم الثاني	ساعات العمل اللازمة في القسم الأول	
0	7	10	الواحدة من A_1
8	10	5	الواحدة من A_2

وأن ساعات العمل الأسبوعية للعامل الواحد هي 40 . فالمطلوب تنظيم الإنتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظمياً .

الحـــل :

نلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الأول هو $60 \times 40 = 2400$ ساعة عمل.

نلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الثاني هو $150 \times 40 = 6000$ ساعة عمل.

نلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الثالث هو $40 \times 40 = 1600$ ساعة عمل.

لنفرض أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول A_1 في الأسبوع هو x_1، وأن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول A_2 في الأسبوع هو x_2 ،عندئذ يكون عدد ساعات العمل اللازمة في القسم الأول لإنتاج x_1 من المنتج الأول A_1 و x_2 من المنتج الثاني معطى كما يأتي:

$$10\,x_1 + 5\,x_2$$

ولكن القسم الأول لا يستطيع أن يقدم أكثر من 2400 ساعة عمل في الأسبوع، أي:

$$10\,x_1 + 5\,x_2 \le 2400$$

وبشكل مشابه نجد أن عدد ساعات العمل الأسبوعية في القسمين الثاني والثالث اللازمة لإنتاج x_1 من المنتوج الأول A_1 و x_2 من المنتوج الثاني A_2 مقيدة بالشرطين الآتيين:

$$7\,x_1 + 10\,x_2 \le 6000$$
$$8\,x_2 \le 1600$$

كما أن x_2 , x_1 يجب أن يكونا غير سالبين لأنهما يعبران عن عدد الوحدات المنتجة، أي:

$$x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0$$

أما الربح الذي نحصل عليه عند إنتاج x_2 , x_1 يعطى بالعلاقة:

$$Z = 10\,x_1 + 6\,x_2$$

وبما أننا نسعى لأن يكون الربح أعظمياً، فإننا نحصل على البرنامج الرياضي الخطي الآتي:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 10x_1 + 6x_2 \\
&\text{S.t} \\
&\qquad 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 2400 \\
&\qquad 7\,x_1 + 10\,x_2 \le 6000 \\
&\qquad 8\,x_2 \le 1600 \\
&\qquad (x_1\ ,\ x_2) \ge 0
\end{aligned}$$

2 – يمكن لأحد المصانع أن ينتج ثلاثة أنواع A_1 , A_2 , A_3 من المنتجات، وذلك باستخدام مادتين أوليتين B_1 , B_2. يتوافر من المادة الأولية B_1 الكمية (20)، ومن المادة الثانية B_2 يتوفر (30). إذا كان إنتاج الواحدة من A_1 يتطلب استخدام الكمية (2) من B_1 والكمية (4) من B_2. أما إنتاج الواحدة من A_3 فيتطلب استخدام الكمية (2) من B_1 والكمية (3) من B_2. **والمطلوب:** تنظيم عملية الإنتاج هذه: علماً بأن:

أ – ربح الواحدة من المنتوجات A_1 , A_2 , A_3 هو بالترتيب 3 , 1 , 2.

ب – المصنع ملزم بإنتاج (7) وحدات على الأقل من النوع A_1 .

الحـل: بفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_1. وبفرض x_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_2. وبفرض x_3 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_3. عندئذ، بالطريقة نفسها المتبعة في المسألة السابقة، سنكون أمام البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 7 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

II – 11 مسائل غير محلولة Unsolved Problems

1– تنتج شركة ثلاثة أنواع من المنتجات m_1 , m_2 , m_3 وذلك باستخدام المواد الأولية A , B , C. وعلى اعتبار أن المواد الأولية محدودة، فإن إدارة الشركة قررت تخصيص عدد من وحدات المواد الأولية لإنتاج وحدة ما. الجدول الآتي يبين ذلك التخصيص ، بالإضافة إلى ربح كل وحدة من المنتجات :

المواد الأولية المنتج	A	B	C	ربح الوحدة الواحدة
m_1	4	9	10	8
m_2	3	8	12	6
m_3	6	18	15	12
كمية المواد المتاحة	96	126	150	

المطلوب: أوجد نموذجاً رياضياً من نماذج البرمجة الخطية يحقق أعظم ربح ممكن لهذه المسألة.

2- يمتلك أحد صناع الأثاث 6 وحدات من الخشب و 28 ساعة من الوقت يستغلها في صنع شاشات ديكور. وقد باع نوعين منها في الماضي، لذلك فإنه سيقيد نفسه بهما. ويقدر أن النوع الأول يحتاج إلى وحدتين من الخشب و7 ساعات، بينما يحتاج النوع الثاني وحدة واحدة من الخشب و8 ساعات. وتقدر أثمان النوعين بـ 120 ليرة و 80 ليرة على التوالي. كم عدد شاشات الديكور من كل نوع يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد أن يحصل على أكبر عائد من المبيعات؟

3- تقوم إحدى شركات صناعة الأدوات المنزلية الكهربائية بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات A , B , C. يبلغ ربح الوحدة من كل منتج وعلى التوالي، 45 ،170، 210 ليرة سورية. تمر كل وحدة من هذه المنتجات بثلاث مراحل إنتاجية هي التصنيع والتجميع ومن ثم الفحص والاختبار. وفيما يأتي عدد الساعات الذي يحتاجه إنتاج كل وحدة من هذه المنتجات في الأقسام الثلاثة:

عدد الساعات التي تحتاجها كل وحدة			
المنتج	التصنيع	التجميع	الاختبار
A	3	3	1
B	4	2	3/4
C	1	1/2	1/2

فإذا علمت أن عدد ساعات العمل الأسبوعية المتوافرة في الأقسام الثلاثة وعلى التوالي هي 400 , 350 , 200 فالمطلوب: اكتب النموذج الرياضي الممثل لهذه المسألة والذي يعطي أكبر ربح ممكن.

1- في مزرعة تعاونية أرض زراعية مساحتها (50) هكتاراً، وفيها من المزارعين ما يكفي (1000) ساعة عمل. وخصص لهذه الأرض مبلغ 15000 ليرة سورية، ويمكن زراعة هذه الأرض بالفاصولياء والبندورة والقمح. إذا كانت الكلفة (بالمال

وبساعات العمل) لزراعة الهكتار الواحد من هذه الأرض والربح الصافي من منتوج الهكتار الواحد لأجل كل من هذه المزروعات معطاة بالجدول الآتي:

	الكلفة بالليرات السورية	ساعات العمل اللازمة	الربح الصافي بالليرات السورية
فاصولياء	300	25	400
بندورة	400	40	800
قمح	200	15	300

المطلوب: أوجد النموذج الرياضي الذي يعطي أفضل استخدام لهذه الأرض.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الرياضية الخطية

Graphical Method

III – 1 مقدمة

الطريقة البيانية هي عبارة عن رسم بياني لنموذج البرمجة الخطية. تستخدم هذه الطريقة في حل مسائل البرمجة الخطية الحاوية على متحولين (مجهولين) أو ثلاثة. ونظراً لصعوبة تمثيل المسائل ذات المتحولات الثلاثة في الطريقة البيانية، فإننا نقتصر على استخدام هذه الطريقة لحل مسائل برمجة ذات متحولين فقط.

تعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كفوءة في معالجة هذا النوع من المشاكل في الحياة العملية، لأن المسائل العملية تحوي غالباً عدداً كبيراً من المتحولات، تكمن فائدتها في إعطاء الدارس معلومات جيدة تساعده على إدراك خصائص البرمجة الخطية وفهمها وتساعد الدارس على استيعاب الطرق الأخرى والوقوف على تفاصيل حل المشكلة وكيفية معالجة وتطوير الحل لمسائل البرمجة الخطية التي تحوي أكثر من متحولين.

III– 2 خطوات حل مسألة برمجة رياضية خطية بالطريقة البيانية

لإيجاد حل برنامج خطي بيانياً يجب أن نتبع الخطوات الآتية:

1. نحدد أنصاف المستويات المعرَّفة بمتراجحات القيود، وذلك بأن نرسم المستقيمات الناتجة من تحويل متراجحات القيود إلى مساويات، ثم نحدد أي جهة من المستقيم تحقق المتراجحة، فتكون هي نصف المستوي المعرف بالمتراجحة القيد.
2. نحدد منطقة إمكانيات الحل، وهي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود. يجب أن تكون هذه المنطقة غير خالية لكي نستطيع متابعة الحل.

3. نرسم تابع الهدف، ونحدد جهة تزايده أو تناقصه. وذلك بأن نرسم المستقيم الممثل لتابع الهدف $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ (لأجل z ثابت ما) فتكون جهة تزايده هي باتجاه الشعاع:

$$\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

وبالطبع جهة التناقص هي عكس اتجاه هذا الشعاع.

4. نوجد منطقة الحل الأمثل . وذلك بأن نسحب المستقيم $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ (لأجل z ثابت ما) بشكل مواز لنفسه باتجاه الشعاع $\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ لإيجاد القيمة الأعظمية للتابع الهدف (أو بعكس هذا الاتجاه لإيجاد القيمة الأصغرية لهذا التابع) حتى يمر بآخر نقطة من نقاط منطقة الإمكانيات وأي إزاحة أخرى مهما كانت صغيرة تخرجه منها .

5. نحسب إحداثيات نقطة الحل الأمثل ونعوضها في التابع الهدفي فنحصل على الحل الأمثل لهذه المسألة.

III- 3 أمثلة متنوعة

مثال "1":

حل بالطريقة البيانية المسألة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Subject to} \\ &\qquad x_1 + 2x_2 \le 8 \\ &\qquad 3x_1 + x_2 \le 6 \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 4 \\ &\qquad (x_1, x_2) \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

لحل مثل هذه المسألة نتبع الخطوات الواردة أعلاه. نرسم المتراجحة الأولى التي تمثل القيد الأول بيانياً وذلك بمكافأتها بمعادلة كما يأتي:

متراجحة القيد الأول: $x_1 + 2x_2 \leq 8$

المعادلة المكافئة لها: $x_1 + 2x_2 = 8$

نرسم المستقيم $x_1 + 2x_2 = 8$ وذلك بتحديد نقطتين منه.

نعوض مثلاً $x_1 = 0$ في هذه المعادلة فنجد $x_2 = 4$ فتكون النقطة $(0, 4)$ هي النقطة الأولى منه.

نعوض مثلاً $x_2 = 0$ في هذه المعادلة فنجد $x_1 = 8$ فتكون النقطة $(8, 0)$ هي النقطة الثانية منه.

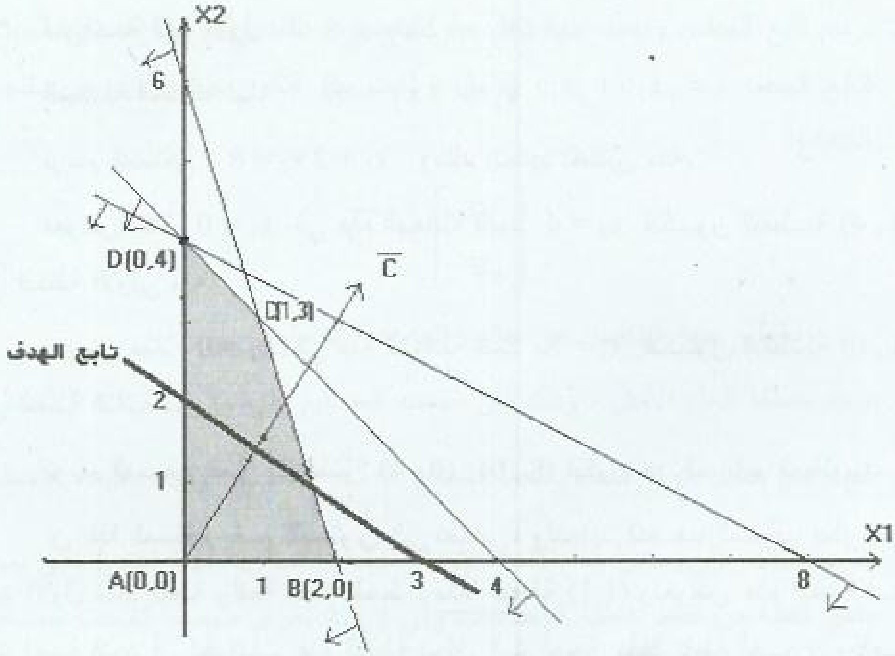
نرسم المستقيم المار بالنقطتين $(0, 4)$, $(8, 0)$ فيكون هو المستقيم المطلوب.

إن هذا المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين، ولتحديد النصف المعرّف بمتراجحة القيد الأول نأخذ نقطة واقعة تحت الخط . مثلاً النقطة (1,1) ونعوض هذه النقطة في المتراجحة فنجد أن إحداثيات هذه النقطة تحقق المتراجحة. نأخذ نقطة أخرى واقعة فوق المستقيم، مثلاً النقطة (4,4) فنجد أن إحداثياتها لا تحقق المتراجحة. ومن ثم فإن نصف المستوي المعرّف بالمتراجحة الأولى هو النصف الذي يحوي النقطة (1,1). وبالطريقة نفسها، نحدد أنصاف المستويات المعرفة بالمتراجحات الباقية في قيود المسألة.

فيتعين نتيجة تقاطع أنصاف المستويات منطقة الإمكانيات وهي المضلع ABCD الموضح بالشكل (1).

نرسم تابع الهدف $2x_1 + 3x_2 = Z$ (من أجل $Z = 6$ مثلاً) ثم نسحبه بشكل موازٍ لنفسه باتجاه الشعاع $\overline{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ فنجد أن آخر نقطة من منطقة الإمكانيات يغادرها تابع الهدف هي النقطة D فتكون هي نقطة الحل الأمثل. نلاحظ أن هذه النقطة ناتجة من تقاطع المستقيمين:

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_1 + 2x_2 = 8$$



الشكل (1): منطقة الامكانيات للمثال 1

بالحل المشترك لهذين المستقيمين نجد:

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 4$$

ومن ثم فإن إحداثيات نقطة الحل الأمثل هي D (0 , 4). نعوض في تابع الهدف فنجد أن $Z^* = \text{Max } Z = 12$، وهي الحل الأمثل للمسألة المطروحة.

ملاحظة "1":

بعد تحديد منطقة الإمكانيات فإنه يمكن أن نحدد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية وذلك بحساب قيمة تابع الهدف في ذروات (رؤوس) منطقة الإمكانيات ثم نعتبر الزاوية التي تعطي التابع أعظم قيمة (أو أصغر قيمة) كنقطة حل أمثل. غير أن هذه الطريقة ليست سهلة التطبيق عندما يكون عدد ذروات (رؤوس) منطقة الإمكانيات كبيراً جداً.

في المثال السابق ، نجد أن لمنطقة الإمكانيات الرؤوس ABCD إحداثياتها هي:

$$D(0,4) \;,\; C(1,3) \;,\; B(2,0) \;,\; A(0,0)$$

نحسب قيمة تابع الهدف في كل منها فنجد:

$$z_A = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$$
$$z_B = 2 \times 2 + 3 \times 0 = 4$$
$$z_C = 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$$
$$z_D = 2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$$

ومن ثم فإن أعظم قيمة لتابع الهدف هي $Z^* = 12$ ويبلغها في النقطة $D\,(0,4)$ كما وجدنا سابقاً.

مثـــال "2": أوجد بالطريقة البيانية الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + x_2$$

Subject to

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 2$$

شروط عدم السلبية: $(x_1 \,,\, x_2) \ge 0$

الحـــل:

نأخذ المتراجحة الأولى

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

ونكتب المعادلة المكافئة لها:

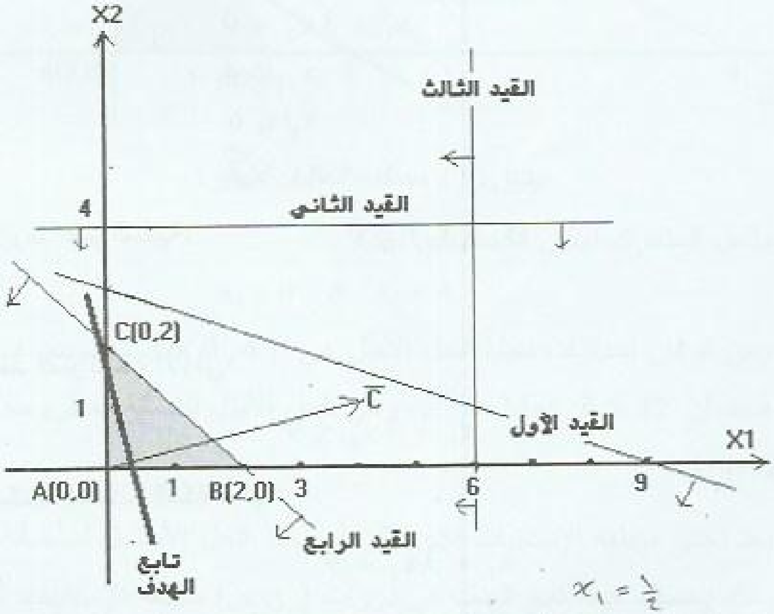
$$x_1 + 3x_2 = 9$$

نرسم المستقيم $x_1 + 3\,x_2 = 9$ بعد تحديد نقطتين منه. نعوض $x_1 = 0$ في معادلة المستقيم فنجد أن $x_2 = 3$ فتكون النقطة $(\,3\,,\,0\,)$ هي النقطـــة الأولـــى منـــه. نعوض $x_2 = 0$ في معادلة المستقيم فنجد أن $x_1 = 9$ فتكون النقطة (9,0) هي النقطة الثانية منه. نرسم المستقيم المار من هاتين النقطتين، فيكون هو المستقيم المطلوب.

نلاحظ أن النقطة (0,0) تحقق المتراجحة، فيكون نـــصف المـــستوي المعـــرّف بالمتراجحة الأولى هو النصف الذي يحوي النقطة (0,0).

نأخذ المتراجحة الثانية $x_2 \leq 4$ فتكون المعادلة المكافئة لها هي $x_2 = 4$ وهو مستقيم موازٍ للمحور Ox_1. ونصف المستوي المعرف بالمتراجحة الثانية هو نصف المستوي الواقع تحت المستقيم $x_2 = 4$.

أما بالنسبة إلى المتراجحة الثالثة $x_1 \leq 6$ فالمعادلة المكافئة لها هي $x_1 = 6$ وهو مستقيم موازٍ للمحور Ox_2. ونصف المستوي المعرف بالمتراجحة الثالثة هو نصف المستوي الواقع على يسار المستقيم $x_1 = 6$. وهكذا بالنسبة لبقية القيود. نحدد منطقة الإمكانيات الناتجة من تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بالمتراجحات القيود فنجد أنها محددة بالمضلع ABC كما هو مبين بالشكل (2).



$x_1 = \frac{1}{2}$

الشكل (2): منطقة الامكانيات للمثال 2 $x_2 = 2$

نرسم تابع الهدف $4x_1 + x_2 = Z$ (من أجل $Z = 2$) ثم نسحبه باتجاه الشعاع:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$4x_1 + x_2 = 2$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$x_2 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}$

بشكل موازٍ لنفسه فنجد أن آخر نقطة من منطقة الإمكانيات يغادرها تابع الهدف هي النقطة B، وهي ناتجة من تقاطع مستقيم القيد الرابع مع المحور x_1 0 أي تنتج من تقاطع $x_1 + x_2 = 2$ & $x_2 = 0$.

بالحل المشترك نجد إحداثيات B وهي $x_2 = 0$, $x_1 = 2$ أي النقطة $B(2,0)$ هي نقطة الحل الأمثل، وتكون القيمة العظمى للتابع عندها هي:

$$Z^* = \text{Max } Z = 4 \times 2 + 0 = 8$$

مثال "3":

أوجد بالطريقة البيانية الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Min } z = 2x_1 + 4x_2$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

شروط عدم السلبية: $(x_1 , x_2) \geq 0$

الحل:

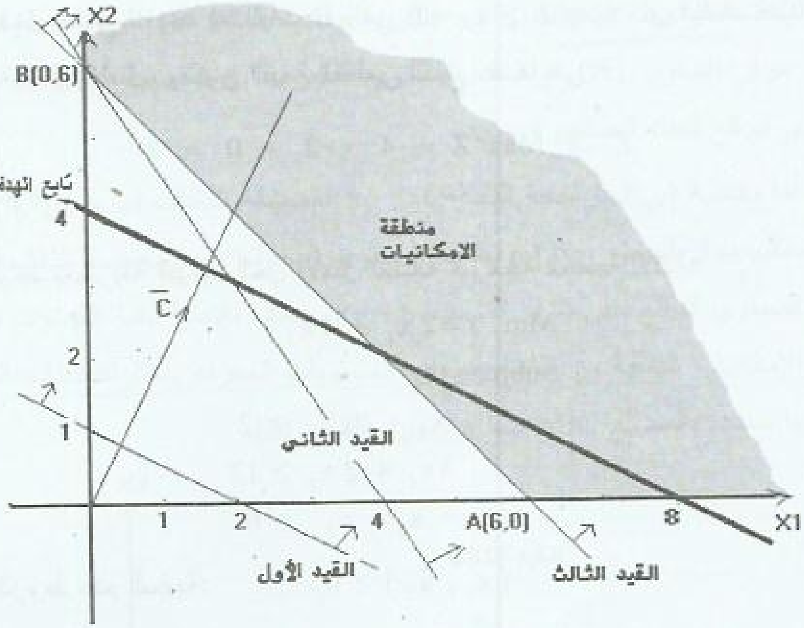
نحدد منطقة الإمكانيات بطريقة مشابهة تماماً للأمثلة السابقة، فنجد أن هذه المنطقة محددة كما في الشكل (3)، وهي منطقة مفتوحة من اليمين (غير محدودة من اليمين).

نرسم تابع الهدف $z = 2x_1 + 4x_2$ من أجل $z = 16$ ثم نسحبه بشكل موازٍ لنفسه بعكس اتجاه الشعاع (لأن المطلوب هو القيمة الصغرى لتابع الهدف).

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نجد أن آخر نقطة منطقة الإمكانيات يخرج منها تابع الهدف هي النقطة A الناتجة من تقاطع القيد الثالث مع المحور $0x_1$. إحداثيات هذه النقطة هي $A\ (6,0)$، ومن ثم فإن أصغر قيمة يبلغها التابع في هذه المنطقة هي:

$$z^* = \text{Min } z = 2 \times 6 + 4 \times 0 = 12$$



الشكل (3): منطقة الامكانيات للمثال 3

ملاحظة "2":

إن وجود شرط عدم السلبية في البرنامج الخطي يعني أن منطقة الإمكانيات موجودة حصراً في الربع الأول من مستوي الإحداثيات.

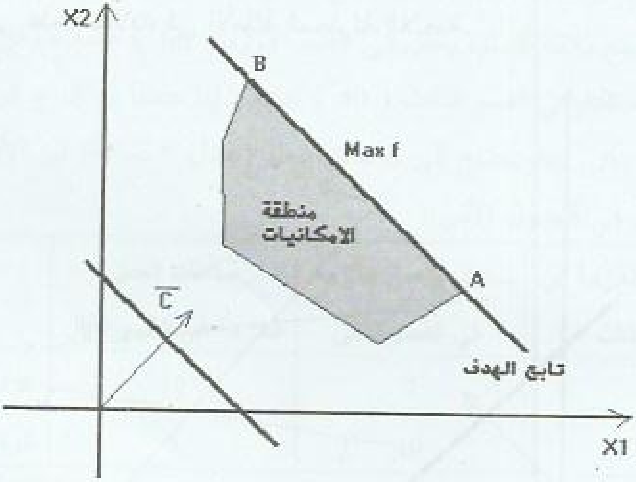
ملاحظة "3":

عندما تكون المجاميع في جميع أطراف القيود من النوع (أصغر أو تساوي)، فإن منطقة الإمكانيات تكون محصورة بين المحورين وأقرب معادلات القيود للمحورين. وهذا ما لاحظناه في الأمثلة السابقة التي يطلب فيها حساب القيمة العظمى لتابع الهدف. أما في حال العكس (كما في أمثلة حساب القيمة الصغرى) فإن منطقة الحل تقع فوق أبعد معادلات القيود على المحورين.

III – 4 حالات خاصة

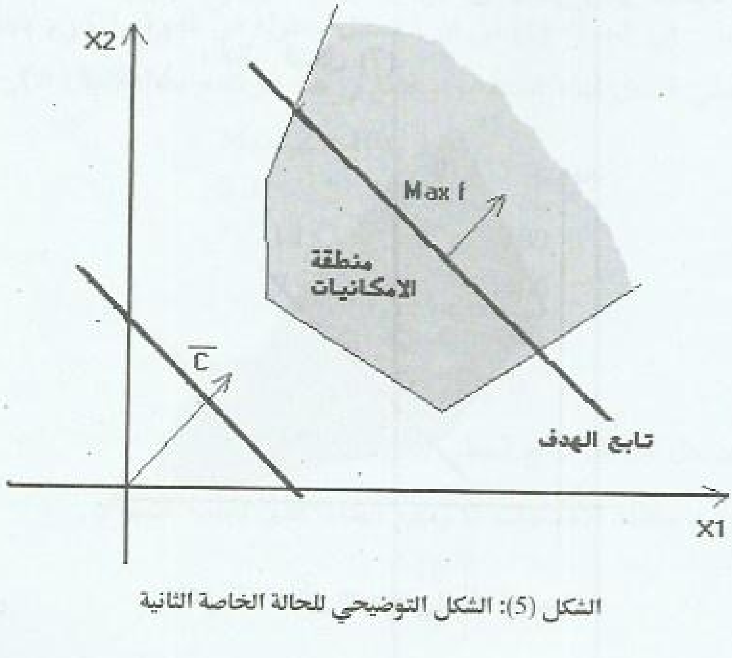
لاحظنا في الأمثلة السابقة أن تابع الهدف يبلغ قيمته المثلى (العظمى أو الصغرى) في نقطة من منطقة الإمكانيات. ولكن هناك حالات خاصة يجب أخذها بعين الاعتبار ونوجزها بما يأتي:

الحالة الأولى: قد يبلغ تابع الهدف قيمته المثلى في أي نقطة من نقاط قطعة مستقيمة تمثل ضلعاً في منطقة الإمكانيات. أي أنه قد يكون هناك عدد غير منتهٍ من نقاط الحل الأمثل . انظر الشكل (4).



الشكل (4): الشكل التوضيحي للحالة الخاصة الأولى

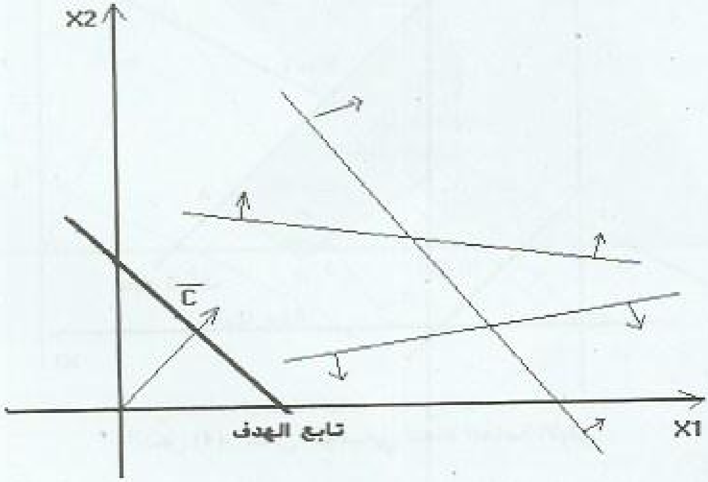
الحالة الثانية: قد يكون تابع الهدف غير محدود من الأعلى في منطقة الإمكانيات. انظر الشكل (5).



الشكل (5): الشكل التوضيحي للحالة الخاصة الثانية

الحالة الثالثة: قد تكون جملة الشروط الخطية متناقضة ومن ثم فإن منطقة الإمكانيات مجموعة خالية. انظر الشكل(6).

الحالة الرابعة: قد يكون تابع الهدف غير محدود من الأسفل في منطقـــة الإمكانيـــات. وسنتعرض إلى هذه الحالات في الأمثلة المحلولة اللاحقة.

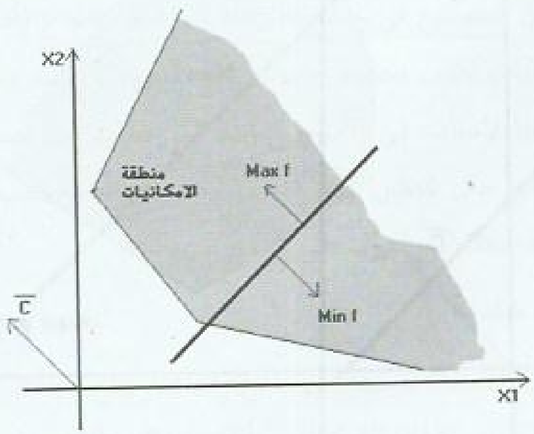


الشكل (6): الشكل التوضيحي للحالة الخاصة الثالثة

الحالة الخامسة: قد يكون تابع الهدف غير محدود من الأعلى وغير محدود من الأسفل

$$\begin{matrix} \text{Min } f(x) \to -\infty \\ \text{Max } f(x) \to +\infty \end{matrix}$$

، انظر الشكل (7).



الشكل (7): الشكل التوضيحي للحالة الخامسة

5 – III مسائل محلولة Solved Problems

1- ينتج أحد المصانع نوعين A_1 , A_2 من المنتوجات، ربح الواحدة من النوع الأول A_1 هو (10) ليرات سورية، ومن النوع الثاني A_2 هو (6) ليرات سورية. يوجد في هذا المصنع ثلاثة أقسام، يعمل في القسم الأول (60) عاملاً، وفي القسم الثاني (150) عاملاً، وفي القسم الثالث (40) عاملاً. إذا علمنا أن إنتاج الواحدة من كل من النوعين A_1 , A_2 يحتاج إلى ساعات عمل (عامل × ساعة) في الأقسام المختلفة كما هو مبين في الجدول الآتي:

ساعات العمل اللازمة في القسم الثالث	ساعات العمل اللازمة في القسم الثاني	ساعات العمل اللازمة في القسم الأول	
0	7	10	الواحدة من A1
8	10	5	الواحدة من A2

وأن ساعات العمل الأسبوعية للعامل الواحد هي 40. فالمطلوب تنظيم الإنتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل:

لقد بينا – في المسألة (1) من فقرة مسائل محلولة في الفصل الثاني- كيفية إيجاد البرنامج الخطي الممثل لهذه المسألة و وجدنا أن هذا البرنامج يأخذ الشكل الآتي:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 6x_2$$
$$\text{S.t}$$
$$10x_1 + 5x_2 \le 2400$$
$$7x_1 + 10x_2 \le 6000$$
$$8x_2 \le 1600$$
$$(x_1\ ,\ x_2) \ge 0$$

والآن، لنوجد حل هذا البرنامج الخطي بيانياً:

بعد رسم منطقة الإمكانيات D وتابع الهدف الذي ناظمه الشعاع:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

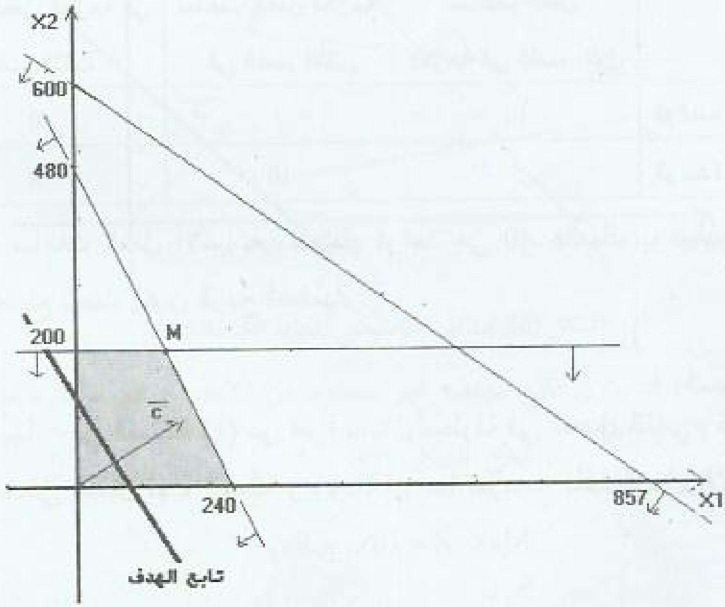
نجد أن نقطة الحل الأمثل هي M والتي تكون عند تقاطع المستقيمين (1) و (3) الممثلين للمعادلتين:

$$10\,x_1 + 5\,x_2 = 2400$$
$$8\,x_2 = 1600$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد:

$$x_2 = 200 \quad , \quad x_1 = 140$$

بالتعويض في تابع الهدف ، نجد أن الربح الأعظمي مساوياً لـــ $Z^{*} = Max\ Z = 2600$ ليرة سورية.



الشكل (8): التمثيل البياني للمسألة1

2 – أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 - x_2 \geq 12$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0$$

الحــل:

بعد رسم منطقة الإمكانيات D وتابع الهدف z والذي ناظمه الشعاع:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي النقطة A وهي تقاطع المستقيمين (1) و(2) المقابلين للمعادلتين:

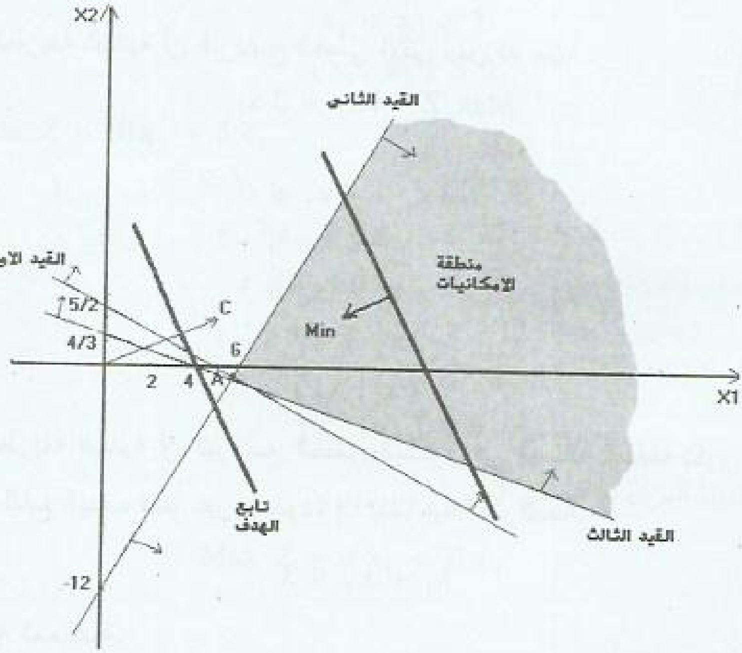
$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$2x_1 - x_2 = 12$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد:

$$x_2 = -\frac{2}{5} \quad , \quad x_1 = \frac{29}{5}$$

بالتعويض في تابع الهدف نجد أن القيمة الصغرى له هي:

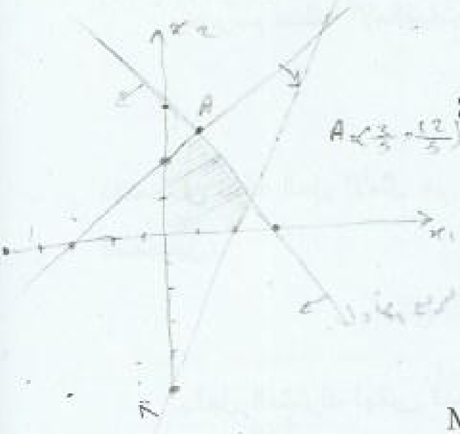
$$z^* = \frac{141}{5}$$



الشكل (9): التمثيل البياني للمسألة 2

III – 6 مسائل غير محلولة Unsolved Problems

1. أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي الآتي:

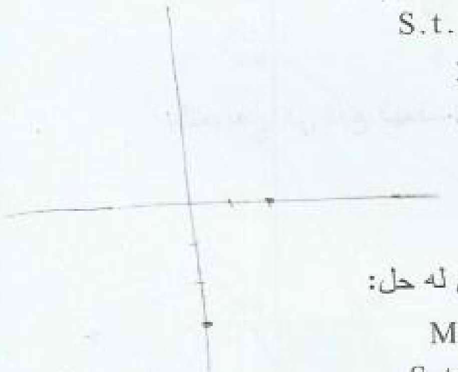


$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 = \frac{18}{5}$$

S.t.

$$-2x_1 + 3x_2 \le 6 \quad (0,2)\ (-3,0)$$
$$x_1 + x_2 \le 3 \quad (0,3)\ (3,0)$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 10 \quad (0,-5)\ (2,0)$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

2. أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي الآتي:



$$\text{Min } z = -3x_1 + x_2$$

S.t.

$$2x_1 - 3x_2 \ge -6 \quad (0,2)\ (-3,0)$$
$$-x_1 - x_2 \ge -3 \quad (0,+3)\ (+3,0)$$
$$-5x_1 + 2x_2 \ge -10 \quad (0,-5)\ (+2,0)$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

3. بيّن بالطريقة البيانية أن البرنامج الخطي الآتي ليس له حل:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

S.t.

$$-3x_1 + 4x_2 \le 6$$
$$-2x_2 \le -7 \quad x_2 \ge \frac{7}{2}$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$-2x_1 + x_2 \le -1$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

4. بيّن بالطريقة البيانية أن البرنامج الخطي المذكور في المسألة السابقة تكون له حلول تعطي لتابع الهدف قيماً غير محدودة إذا بدلنا فيه المتراجحة:

$$x_1 + x_2 \le 3$$

بالمتراجحة المعاكسة:

$$x_1 + x_2 \ge 3 .$$

5. بيّن بالطريقة البيانية أن للبرنامج الخطي المعطى نفسه في المسألة السابقة (أي بعد تعديل الشروط الخطية للمسألة السابعة) حلاً إذا كان تابع الهدف معطى بالشكل :

$$\text{Max } Z = -x_1 + x_2$$

6. أوجد حل كل من البرامج الخطية الآتية بالطريقة البيانية :

a) $\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$

$$\text{S.t.}$$
$$2x_1 - 2x_2 \geq -5$$
$$5x_1 - 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$(x_1 , x_2) \geq 0$$

b) $\text{Max } Z = x_1 - 3x_2$

$$\text{S.t.}$$
$$3x_1 - 5x_2 \leq -3$$
$$x_1 - 3x_2 \leq -4$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$(x_1 , x_2) \geq 0$$

c) $\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{S.t.}$$
$$3x_1 + 9x_2 \leq 27 \rightarrow (0,3) , (9,0)$$
$$8x_1 + 6x_2 \leq 48 \rightarrow (0,8) , (6,0)$$
$$\pm 4x_1 \mp 6x_2 \geq \pm 12 \rightarrow (0,-2) \quad (3,0)$$
$$\mp 8x_1 \mp 12x_2 \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} 24 \qquad (0,2) \quad (3,0)$$
$$(x_1 , x_2) \geq 0$$

7. ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = \alpha x_1 + \beta x_2$$

S.t.

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 4x_2 &\leq -12 \\
-2x_1 - x_2 &\leq -10 \\
x_1 + x_2 &\geq 2 \\
-x_1 - x_2 &\leq -7 \\
(x_1 , x_2) &\geq 0
\end{aligned}
$$

حيث $\alpha \in R$, $\beta \in R$ هما وسيطان للبرنامج. ناقش بالطريقة البيانية حلـول هذا البرنامج من أجل القيم المختلفة لهذين الوسيطين.

الفصل الرابع

الطريقة الجبرية

لحل مسائل البرمجة الرياضية الخطية

The Simplex Method

IV -1 مقدمة

لقد تعلمنا في الفصل السابق كيفية إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطيـــة ذات مجهولين وذلك باستخدام الطريقة البيانية. لاحظنا في ذلك الفصل أنه يمكــن الوصـــول إلى الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية من خلال اختبار القيم المرافقة لكل ذروة من منطقة الإمكانيات. كذلك عرفنا من نظرية البرمجة الخطية أن الحـل الأمثـل لمـسألة برمجة خطية يقع على إحدى ذروات منطقة الإمكانيات. إلا أن المسائل التي تواجهنـــا في الحياة العملية غالباً ما تحتوي على عدد كبير من المجاهيل والقيـــود، ممـــا يجعـــل إمكانية استخدام الطريقة البيانية لحل هذه المسائل أمراً متعذراً. لذا كان لابد من البحث عن طريقة أخرى ملائمة لهذا النوع من المسائل.

نقدم في هذا الفصل طريقة جبرية لحل مـــسائل البرمجـــة الخطيـــة تـــدعى **"الطريقة المبسطة" (The Simplex Method)**. لقد ابتكـــر هـــذه الطريقـــة العـــالِم George Dantzig في عام 1947م، وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليـــل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب علـــى اختيـــار المتغيـــرات ذات التـــأثير الأساسي في كل من تابع الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تـــؤثر فـــي تابع الهدف والقيود.

تعمل هذه الطريقة بشـــكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة المبسطة بفحص ذروات منطقـــة الإمكانيـــات بـــشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة. ويتم ذلك بشكل متكرر، وهذا يعني إعـــادة الإجراءات نفسها مرة تلو الأخرى ولحين الوصول إلى الحل الأمثل.

عندما يكون عدد المتغيرات كبيراً في مسألة برمجة خطية، قد لا نستطيع رسم منطقة الإمكانيات، ولكن هذا لا يمنع حقيقة أن الحل الأمثل ما زال يقع على إحدى ذروات منطقة الإمكانيات الممثلة بشكل ذي جوانب وأبعاد متعددة.

نبدأ هذا الفصل بحل مثال لمسألة برمجة خطية ذات مجهولين بالطريقة البيانية، وذلك لاستخدامه في شرح وتسهيل فهم الطريقة المبسطة.

مثـــال "1":

أوجد الحل الأمثل للمسألة الآتية:

$$\boxed{\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{S.t.} \\
&2x_1 + 3x_2 \le 6 && (1) \\
&-3x_1 + 2x_2 \le 3 && (2) \\
&2x_2 \le 5 && (3) \\
&2x_1 + x_2 \le 4 && (4) \\
&(x_1\ ,\ x_2) \ge 0 && (5)
\end{aligned}$$

الحـــل:

1 2 3

نرسم منطقة الإمكانيات ونرسم تابع الهدف ونبحث عن النقطة التي تعطيه أكبر قيمة ممكنة.

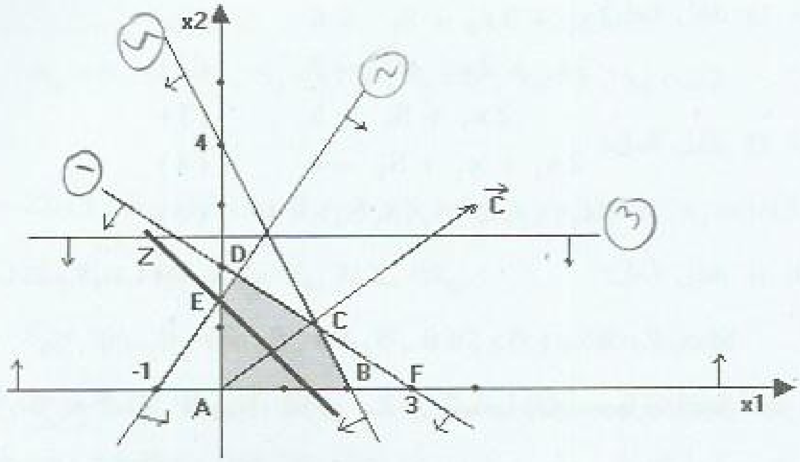
نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي C ناتجة عن تقاطع المستقيمين:

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

لان النقطة
C محصورة D

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد أن:

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad x_2 = 1$$



الشكل (1): التمثيل البياني للمثال 1

والقيمة العظمى لتابع الهدف هي:

$$Z^{*} = 4 \times \frac{3}{2} + 3 \times 1 = 9$$

IV - 2 إيجاد الحل وفق الطريقة المبسطة

لاستخدام الطريقة المبسطة، فإنه يجب علينا ترتيب مصفوفة الحل الأولي، وذلك بتحويل القيود (المتراجحات) إلى معادلات. أي تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية. وذلك لأن هذه الطريقة ما هي إلا عبارة عن طريقة جبرية يجب أن تكون كل العلاقات الرياضية مرتبة بشكل معادلات تحتوي على كل المجاهيل، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الجبري الأولي.

أ – تحويل القيود (المتراجحات) إلى معادلات:

يتم ذلك بإضافة مجاهيل فروق (Slack Variable) لهذه القيود. حيث يمثل مجهول الفرق في كل قيد مصادر غير مستخدمة. إذا عدنا إلى مثالنا، وفرضنا أن S_i هو مجهول الفرق في القيد i فإن القيود السابقة تصبح بالشكل الآتي:

$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6 \qquad (1)$$
$$-3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3 \qquad (2)$$
$$2x_2 + S_3 = 5 \qquad (3)$$
$$2x_1 + x_2 + S_4 = 4 \qquad (4)$$
$$(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3\ S_4) \geq 0 \qquad (5)$$

أما تابع الهدف فإنه يصبح على الشكل الآتي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0 . S_1 + 0 . S_2 + 0 . S_3 + 0 . S_4$$

وذلك لأن الربح المقابل لمجهول الفرق يساوي الصفر (لأن مجهول الفرق عبارة عن مصادر غير مستخدمة) .

بناءً على ما تقدم وإذا افترضنا حالة اللا إنتاج (أي قررنا عدم إنتاج أي شيء) فإن هذا يعني أننا لم نستخدم مواردنا المتاحة، وأن $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$.

وتكون الموارد غير المستخدمة هي:

$$S_4 = 4 \quad , \quad S_3 = 5 \quad , \quad S_2 = 3 \quad , \quad S_1 = 6$$

ب – إيجاد الحل الجبري الأولي:

إذا نظرنا إلى القيود بعد تحويلها إلى معادلات بإضافة مجاهيل الفروق، نجد أن لدينا أربع معادلات بستة مجاهيل $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4)$. يمكن إيجاد حل لهذه المسألة بإعطاءِ قيمٍ كيفية لاثنين من المجاهيل ثم حل المعادلات الأربع لإيجاد قيم المجاهيل الأخرى. وهذا واضح في الطريقة البيانية، حيث كل ذروة في منطقة الإمكانيات تقابل حالة يكون فيها اثنان من المجاهيل مساويين للصفر. فمثلاً، إن أخذنا $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ فإن هذا الحل يقابل النقطة A (ذروة) في منطقة الإمكانيات، وتكون من أجله قيم المتحولات الأخرى غير مساوية للصفر. كما أن كل ذروة في منطقة الإمكانيات يمكن التعبير عنها بحل يكون فيه اثنان من المجاهيل مساويين للصفر.

النقطة B تقابل الحل:

$$S_4 = 0 \ , \ S_3 = 5 \ , \ S_2 = 9 \ , \ S_1 = 2 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 2$$

النقطة C تقابل الحل:

$$S_4=0\ ,\ S_3=3\ ,\ S_2=11/2\ ,\ S_1=0\ ,\ x_2=1\ ,\ x_1=3/2$$

النقطة D تقابل الحل:

$$S_4=22/13\ ,\ S_3=17/13\ ,\ S_2=0\ ,\ S_1=0\ ,\ x_2=24/13\ ,\ x_1=3/13$$

النقطة E تقابل الحل:

$$S_4=5/2\ ,\ S_3=2\ ,\ S_2=0\ ,\ S_1=3/2\ ,\ x_2=3/2\ ,\ x_1=0$$

تبدأ الطريقة المبسطة بحل أولي ممكن، والذي تكون فيه كل المجاهيل الحقيقية x_1 وx_2 مساوية للصفر. وشيء بديهي أن يعطي هذا الحل ربحاً مقداره صفر. هذا الحل ليس حلاً مثالياً، ولكنه يمثل ذروة في منطقة الإمكانيات، وهي النقطة A.

إن الطريقة المبسطة تأخذ بعين الاعتبار الحل الممكن فقط، ومن ثم فهي تأخذ ذروات منطقة الإمكانيات، وتبدأ بالذروة $A\ (0\ ,0)$ وتتحرك نحو الذروات الأخرى حتى تصل إلى الحل الأمثل.

لتسهيل التعامل مع المعادلات وتابع الهدف، فإننا نرتبها في الجدول الآتي:

الجدول (I)

		Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
سطر تابع الهدف	Z	1	-4	-3	0	0	0	0	0
سطر S_1	S_1	0	2	3	1	0	0	0	6
سطر S_2	S_2	0	-3	2	0	1	0	0	3
سطر S_3	S_3	0	0	2	0	0	1	0	5
سطر S_4	S_4	0	2	1	0	0	0	1	4

نلاحظ أننا كتبنا في الجدول السابق تابع الهدف بالشكل الآتي:

$$Z-4x_1-3x_2-0\ .\ S_1-0\ .\ S_2-0\ .\ S_3-0\ .\ S_4=0$$

إن العناصر الموجودة في السطر الأول (سطر S_1) هي معاملات القيد الأول، أما العناصر الموجودة في السطر الثاني (سطر S_2) هي معاملات القيد الثاني، وهكذا ...

أما العمود الأخير في هذا الجدول فيشكل الطرف الأيمن في معاملات القيود وتابع الهدف.

ذكرنا سابقاً أن الطريقة المبسطة تبدأ من نقطة الأصل (المبدأ)، حيث تكون المجاهيل الحقيقية مساوية للصفر $(x_1 = x_2 = 0)$ مما يؤدي إلى عدم وجودها في عمود الحل. كما أن المجاهيل غير الحقيقية (مجاهيل الفروق) موجودة في عمود الحل $S_1 = 6$, $S_2 = 3$ $S_3 = 5$, $S_4 = 4$. وهذا يدعى بالحل الأساسي الممكن. ويمكن كتابته بشكل شعاعي كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ملاحظات على هذا الحل:

1. تسمى المتغيرات المكونة للحل بالمتغيرات الأساسية أو متغيرات القاعدة، في مثالنا الحالي متغيرات القاعدة هي (S_4 , S_3 , S_2 , S_1). وتسمى المتغيرات غير الداخلة في الحل بالمتغيرات غير الأساسية أو متغيرات خارج القاعدة، في مثالنا الحالي متغيرات خارج القاعدة هي (x_2 , x_1).
2. إن كل متغير يظهر في عمود الحل يجب أن تكون قيمته واحداً. وتظهر هذه القيمة عند نقطة التقاطع بين عمود وسطر المتغير المذكور، وقيماً صفرية في الأماكن الأخرى من العمود. ويكون هذا الكلام صحيحاً عندما تكون جميع القيود بشكل متراجحات LE $(\leq)$ أصغر أو تساوي، وجميع قيم الطرف الأيمن غير سالبة.

أما الحالات الأخرى (القيود متراجحات GE ($\geq$) أكبر أو تساوي، أو الطرف الأيمن سالب) فسوف تناقش فيما بعد.

3. من الواضح أن الربح الناجم عن هذا الحل هو صفر، وهو حل غير مثالي. ومن الواضح أيضاً أننا نستطيع زيادة الربح بمقدار 4 لو تمَّ إعطاء المتغير x_1 القيمة واحد، ونستطيع زيادته بمقدار 3 إذا أعطي x_2 القيمة 1، وهكذا.

4. إن وجود رقم موجب في صف تابع الهدف ينبئنا بأن الربح سوف يتناقص إذا أضفنا المتغير المرتبط به إلى الحل.

5. نصل إلى الحل الأمثل بالطريقة المبسّطة عندما تكون جميع عناصر سطر تابع الهدف موجبة أو مساوية للصفر.

IV - 3 خطوات الطريقة المبسطة

بعد الانتهاء من الجدول الأول الممثل للحل الأولي، يجب أن نتبع مجموعة من الخطوات بهدف إيجاد القيم المطلوبة للجدول الجديد. وبالرغم من أن حساب هذه القيم ليس صعباً بحد ذاته، ولكن حدوث أي خطأ فيه قد يؤدي إلى الوصول إلى نتائج خاطئة.

IV – 3-1 تحديد المتغير الداخل :

يتم من خلال اختيار المتغير غير الأساسي، أي المتغير غير الداخل في الحل الحالي، والذي يمكن بواسطته تحسين الحل الموجود بأكبر قدر ممكن. وهذا يعني تحديد العمود الذي يحوي العنصر الأكثر سلبية في سطر تابع الهدف. ويسمى هذا العمود بعمود الارتكاز أو العمود المحوري.

في مثالنا، نلاحظ أن كلاً من x_2 , x_1 يمتلك معاملات سالبة في سطر تابع الهدف، والأكثر سلبية هو x_1، لذلك نعتبر أن المتغير x_1 هو متغير داخل إلى الحل وعمود x_1 هو عمود الارتكاز أو العمود المحوري.

IV – 3-2 تحديد المتغير الأساسي الخارج:

يتم ذلك من خلال اختبار المتغير الأساسي الذي يصل إلى الصفر أولاً، أي الذي ترافقه أقل كمية موجبة، وهذه الكمية هي ناتج قسمة عناصر الطرف الثاني على

عناصر عمود الارتكاز من أجل جميع القيود التي تتقاطع مع المحور x_1 (حيث x_1 هو المتغير الداخل) بالاتجاه غير السالب. القيد الذي يعطي التقاطع الأول يعرّف المتغير الخارج.

في المثال السابق ومن الشكل نلاحظ أن كلاً من القيدين (1) و(4) يتقاطع مع الجزء غير السالب مع المحور x_1 ، بينما يتقاطع القيد (2) مع الجزء السالب من المحور x_1. أما القيد (3) فهو موازٍ للمحور x_1 . يمكن قراءة هذه النتيجة مباشرة من الجدول حيث تكون معاملات القيدين الأول والرابع في عمود x_1 هي معاملات موجبة (2 , 2) وتكون معاملات القيدين (2) و(3) مساوية (3- , 0)

وكخلاصة عامة إذا كان القيد يمتلك معاملاً سالباً أو صفراً في عمود العنصر الداخل فإن هذا القيد لا يتقاطع مع الجزء غير السالب من المحور المعرف للعنصر الداخل، ومن ثم لن يكون له تأثير في إمكانية الحل .

في الشكل، نجد أن القيدين (1) , (4) يتقاطعان مع الجزء غير السالب من المحور x_1، وتقاطعهما معطى بـ $AB=\frac{4}{2}=2$, $AF=\frac{6}{2}=3$. ومن ثم فإن AB هو الأصغر، ومنه نجد أن قيمة x_1 هي $AB = 2$. وبما أن المتغير S_4 في الذروة B (المقابل للقيد (4)) يصبح مساوياً للصفر، فإنه سيكون المتغير الخارج. يسمى السطر الذي يخرج المتغير المرتبط به بسطر الارتكاز أو السطر المحوري. ونسمي العنصر الذي يمثّل تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري بالعنصر المحوري أو عنصر الدوران.

IV – 3-3 حساب القيم الجديدة للسطر المحوري الجديد :

حسب طريقة **غوص – جوردان**، فإنه يتم ذلك من خلال قسمة كل عنصر في السطر المحوري القديم على العنصر المحوري (عنصر الدوران)، وهو نقطة تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري. وتساعدنا هذه الخطوة على إيجاد الرقم (1) في عمود المتغير الذي دخل الحل. فمن أجل المثال السابق نجد:

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z								
S_1								
S_2								
S_3								
x_1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	2

IV – 3-4 حساب الحل الممكن الجديد:

وذلك بحساب القيم الجديدة للأسطر الأخرى وفق طريقة غوص – جوردان:

i) لحساب سطر التابع الهدف الجديد:

نضرب السطر المحوري الجديد بـ 4 – (وهو العنصر الموجود في العمود المحوري وفي سطر التابع الهدف) ثم نطرح الناتج من سطر تابع الهدف القديم .

	1	-4	-3	0	0	0	0	0
_	0	-4	-2	0	0	0	-2	-8
	1	0	-1	0	0	0	2	8

ii) لحساب سطر S_1 الجديد:

نضرب السطر المحوري الجديد بـ 2 (العنصر الموجود في العمود المحوري وسطر S_1) ثم نطرح الناتج من سطر S_1.

	0	2	3	1	0	0	0	6
_	0	2	1	0	0	0	1	4
	0	0	2	1	0	0	-1	2

iii) لحساب سطر S_2 الجديد:

نضرب السطر المحوري الجديد بـ 3- ونطرح الناتج من سطر S_2.

	0	-3	2	0	1	0	0	3
−	0	-3	-3/2	0	0	0	-3/2	-6
	0	0	7/2	0	1	0	3/2	9

iv) لحساب سطر S_3 الجديد:

نضرب السطر المحوري الجديد بـــ 0 ونطرح الناتج من سطر S_3.

	0	0	2	0	0	1	0	5
−	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	2	0	0	1	0	5

فنحصل على الجدول الممثل للحل الجديد كما يأتي:

الجدول (2)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z	1	0	-1	0	0	0	2	8
S_1	0	0	**2**	1	0	0	-1	2
S_2	0	0	7/2	0	1	0	3/2	9
S_3	0	0	2	0	0	1	0	5
x_1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	2

وهذا يعني أن الحل الجديد هو:

$$S_4 = x_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 5 \quad , \quad S_2 = 9 \quad , \quad S_1 = 2 \quad , \quad x_1 = 2$$

وقيمة تابع الهدف الموافقة لهذا الحل هي $Z = 8$. وهذه ما هي إلا النقطة B في الرسم البياني.

IV – 3-5 اختبار الحل الأمثل :

إذا كانت جميع العناصر في سطر تابع الهدف موجبة أو صفراً، فإن هذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل. أما إذا لم يكن كذلك، فنعود إلى الخطوة الأولى، وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل.

في مثالنا، ومن خلال الجدول (2)، نلاحظ أنه مازال هناك متغير غير أساسي يمتلك معاملاً سالباً في سطر التابع الهدفي (وهو x_2). إذاً، ما زالت هناك إمكانية لتحسين الحل، لأن الحل الناتج في الجدول (2) لا يمثل حلاً مثالياً .

إن العنصر الداخل هو x_2، ومن ثم فإن عمود x_2 هو العمود المحوري. كما أن العنصر الخارج هو S_1، لأننا إذا حسبنا النسب الناتجة من تقسيم العمود R.S على المعاملات الموجبة من العمود المحوري، نجد أن أصغر نسبة هي المقابلة للعنصر S_1. ومن ثم فإن السطر المحوري هو سطر S_1، وأن العنصر 2 هو عنصر الدوران. بإعادة خطوات الحساب السابقة نجد الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z	1	0	0	1/2	0	0	3/2	9
x_2	0	0	1	1/2	0	0	-1/2	1
S_2	0	0	0	-7/4	1	0	13/4	11/2
S_3	0	0	0	-1	0	1	1	3
x_1	0	1	0	-1/4	0	0	3/4	3/2

نلاحظ أن هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، لأن جميع معاملات سطر التابع الهدفي موجبة أو مساوية للصفر، ومن ثم لا توجد إمكانية لتحسين الحل.

والحل هو:

$$S_1 = S_4 = 0 \quad , \quad S_3 = 3 \quad , \quad S_2 = 11/2 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_1 = 3/2$$

والقيمة العظمى للتابع هي:

$$Z^* = 9$$

وهو الحل نفسه الذي حصلنا عليه بالطريقة البيانية.

ملاحظة "1":

من هذا المثال لاحظنا أننا مررنا بثلاث نقاط تمثل ذروات من منطقة الإمكانيات حتى وصلنا إلى الحل الأمثل. إذاً، ليس من الضروري أن يتم الحساب عند نقاط الذروات الخمس الموجودة. وهذا ما يبين ميزة من ميزات الطريقة المبسطة.

ملاحظة "2":

للاطلاع على المزيد من المعلومات عن التحويلات الأولية علـــى المـــصفوفات وخواصها يمكن الاطلاع على المراجع المختصة في الجبر الخطي.

مثـــال "2":

ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$

$$x_1 + 4x_2 \le 420$$

$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي باستخدام الطريقة المبسطة.

الحـــل: نقوم أولاً بإيجاد الصيغة النموذجية للبرنامج الحالي، وذلك بإضـــافة مجاهيـــل الفروق.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0 \,.\, S_1 + 0 \,.\, S_2 + 0 \,.\, S_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$

$$3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$

$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$

$$(x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3) \ge 0$$

نبدأ بحل أولي، بحيث تكون فيه جميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، أي:

$$S_3 = 420 \quad , \quad S_2 = 640 \quad , \quad S_1 = 430 \quad , \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

ولنرتب هذه المعلومات في الجدول الآتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
S_1	0	1	2	1	1	0	0	430
S_2	0	3	0	2	0	1	0	460
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

حيث يمكن كتابة تابع الهدف كما يأتي:

$$\text{Max } Z-3x_1-2x_2-5x_3-0\,.\,S_1-0\,.\,S_2-0\,.\,S_3=0$$

من هذا الجدول نجد أن المتغير الداخل هو x_3 ، والمتغير الخارج هو S_2 ، وعنصر الدوران هو نقطة تقاطع سطر S_2 مع عمود x_3. وبتطبيق طريقة غوص – جوردان، يمكن حساب الجدول الجديد الآتي:

الجدول (2)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	9/2	-2	0	0	5/2	0	1150
S_1	0	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

من الجدول (2) نجد أن المتغير الداخل هو x_2 ، والمتغير الخارج هو S_1. لذلك يمكن الحصول على الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

من الجدول (3) نجد أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، لأن جميع معاملات سطر تابع الهدف غير سالبة. والحل الأمثل هو:

$$S_3=20 \quad , \quad S_1=S_2=0 \quad , \quad x_3=230 \quad , \quad x_2=100 \quad , \quad x_1=0$$

والقيمة العظمى لتابع الهدف:

$$Z^*=1350$$

ملاحظة "3":

إذا كنا نبحث في مشكلة خفض التكاليف، أي أننا نسعى لإيجاد أصغر قيمة لتابع الهدف، فإننا نعالج هذه المسألة بشكل مشابه لمسألة البحث عن أعظم قيمة لتابع الهدف.

الفرق الوحيد بينهما متعلق بسطر تابع الهدف، ذلك أن هدفنا هو تخفيض التكاليف، لـذا فإن المتغير الداخل (المتغير الذي سيدخل الحل الجديد) سيكون المتغير الـذي يرافقـه أكبر عنصر موجب في سطر تابع الهدف، لأن إدخال هذا المتغير سيؤدي إلى تخفيض التكاليف أكثر من أي متغير آخر. ونتوصل أيضاً إلى الحل الأمثـل لمـسألة تخفـيض التكاليف عندما نجد أن العناصر في سطر تابع الهـدف جميعهـا أصـغر أو تـساوي الصفر.

مثـال "3":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\
&\text{S.t.} \\
&3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\
&-2x_1 + 4x_2 \le 12 \\
&-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\
&(x_1 , x_2 , x_3) \ge 0
\end{aligned}$$

الحـل:

نكتب هذه المسألة بالصيغة النموذجية، وذلك بإضافة متغيرات الفروق:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 0 . S_1 + 0 . S_2 + 0 . S_3 \\
&\text{S.t.} \\
&3x_1 - x_2 + 2x_3 + S_1 = 7 \\
&-2x_1 + 4x_2 + S_2 = 12 \\
&-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + S_3 = 10 \\
&(x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3) \ge 0
\end{aligned}$$

تبدأ طريقة السمبلكس بحل أولي تكون فيه جميع قيم المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، أي:

$$S_3 = 10 \quad , \quad S_2 = 12 \quad , \quad S_1 = 7 \quad \& \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

كما يمكن ترتيب هذا الحل في الجدول الآتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.	
Z	1	-1	3	2	0	0	0	0	
S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7	-7 X
S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12	3
S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10	

بما أن المسألة هي مسألة البحث عن قيمة صغرى لتابع الهدف، فإن المتغير الداخل إلى الحل هو ذلك المتغير الذي يرافقه أكبر عنصر موجب في سطر التابع الهدفي، أي x_2، فيكون عمود x_2 هو العمود المحوري.

أما المتغير الخارج من الحل الحالي فهو المتغير الذي تقابله أقل نسبة ناتجة من تقسيم عناصر عمود الطرف الأيمن على العناصر المقابلة لها من العمود المحوري (الأرقام الموجبة فقط). ومن ثم فالمتغير الخارج من الحل الحالي هو S_2 والعنصر المحوري هو 4.

وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في حساب الحل الجديد، نحصل على الجدول الآتي:

الجدول (2)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.	
Z	1	1/2	0	2	0	-3/4	0	-9	
S_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10	5
x_2	0	-1/2	1	0	0	1/4	0	3	X
S_3	0	-5/2	0	8	0	-3/4	1	1	1/8

من الجدول (2) نجد أن المتغير الداخل هو x_3 والمتغير الخارج هو S_3 والعنصر المحوري 8. وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في الحساب، يمكن الحصول على الجدول (3).

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	18/16	0	0	0	-9/16	-2/8	-74/8
S_1	0	**25/8**	0	0	1	7/16	-2/8	78/8
x_2	0	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
x_3	0	-5/16	0	1	0	-3/32	1/8	1/8

من الجدول (3) نجد أن المتغير الداخل هـو x_1 والمتغيـر الخـارج هـو S_1 والعنصر المحوري $25 / 8$. وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في الحـساب يمكـن الحصول على الجدول (4).

الجدول (4)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	0	-9/25	-288/400	-32/200	-2552/200
x_1	0	1	0	0	8/25	7/50	-2/25	78/25
x_2	0	0	1	0	1/50	13/50	-1/50	228/50
x_3	0	0	0	1	1/10	-28/160	1/10	88/80

من الجدول (4) نجد أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث جميع معـاملات سـطر تابع الهدف غير موجبة، ومن ثم فإن الحل الأمثل هو:

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad , \quad x_3 = 88/80 \quad , \quad x_2 = 228/50 \quad , \quad x_1 = 78/25$$

وأن القيمة الصغرى لتابع الهدف هي : $z^* = -2552/200$

IV - 4 طريقة المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables Method

لاحظنا في الفقرة السابقة، أن الطريقة المبسطة تبدأ بحل أولي ممكن تكون فيـه متغيرات الفروق هي المتغيرات الأساسية وجميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر.

بالطبع، هذه البداية ممكنة كما رأينا عندما تكون جميع القيود بشكل متراجحـات ($\leq$ أصغر أو يساوي) وجميع قيم الطرف الأيمن غير سالبة.

سوف ندرس في هذه الفقرة الحالات التي لا يمكن فيها اعتبار متغيرات الفروق متغيرات أساسية في الحل الأولي (أي لا تعطي حلاً أولياً ممكناً)، ويمكن أن نـصادف

هذه الحالات، بشكل عام، عندما تكون جميع أو بعض القيود بشكل متراجحات (≤ أكبر أو يساوي) أو بشكل مساويات. في مثل هذه الحالات نستخدم طريقة المتغيرات الاصطناعية، والتي يمكن أن تُعرَض بأحد الشكلين الآتيين:

"1- طريقة M الكبيرة. "2- طريقة الحل على مرحلتين.

ولندرس كلاً من هاتين الطريقتين:

IV – 1-4 تقنية M الكبيرة: Big - M Technique:

لنفرض أننا نريد إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{pmatrix} \text{Min} \\ \text{Max} \end{pmatrix} z = 10x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$-S_1 \quad +R_1$ تدرج ←
$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 320$$

$+R_2$
$$2x_1 + 3x_2 = 100$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

لكي نبدأ بحل هذه المسألة، يجب تحويلها إلى الصيغة النموذجية، وبعد ذلك نبدأ الحل من نقطة الأصل (المبدأ).

في القيد الأول: $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 320$

نلاحظ أن المتراجحة بشكل (≤ أكبر أو يساوي)، ومن ثم يجب طرح متغير فرق لكي يصبح هذا القيد بشكل مساواة:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - S_1 = 320$$

إذا أردنا حل هذه المسألة مبتدئين بنقطة الأصل (المبدأ)، حيث تكون جميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، فإن هذا يعني أن:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad \& \qquad S_1 = -320$$

ويكون هذا طبعاً مخالفاً لأحد افتراضات البرمجة الخطية لأن $S_1 = -320$ لا يحقق شرط عدم السلبية.

لحل هذه المشكلة، لا بد من القيام بخطوة أخرى. وتتمثل هذه الخطوة بإضافة متغير اصطناعي للقيد، كالآتي:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - S_1 + R_1 = 320$$

حيث R_1 هو المتغير الاصطناعي. في هذه الحالة يمكن افتراض القيم:

$$x_1 = x_2 = x_3 = S_1 = 0 \quad \& \quad R_1 = 320$$

ونكون بذلك قد تخلصنا من مشكلة عدم تحقق شرط عدم السلبية للمتغيرات.

أما فيما يتعلق بالقيد الثاني:

$$2x_1 + 3x_2 = 100$$

فهنا لا نستطيع إضافة أو طرح متغير فرق، لذلك نضيف متغيراً اصطناعياً لكي نتمكن من إدراج هذا القيد في جدول الطريقة المبسطة، كالآتي:

$$2x_1 + 3x_2 + R_2 = 100$$

الهدف من إضافة المتغير الاصطناعي للقيد بعلاقة مساواة هو ليس حلاً لمشكلة بسيطة كهذه، ولكن يعد حلاً لمسائل تحتوي على متغيرات وقيود كثيرة. إذ إننا بإضافة المتغير الاصطناعي وافتراض قيم المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، فإنه يمكننا إيجاد الحل الأولي.

جدير بالاهتمام ملاحظة أن المتغيرات الاصطناعية ليس لها معنى بالواقع، ولكنها عبارة عن وسائل حسابية للمساعدة في إيجاد الحل الأولي لمسألة برمجة خطية. وتختفي هذه المتغيرات من الحل قبل الوصول إلى الحل الأمثل. ولكن من المنطقي أن نسأل السؤال الآتي: كيف تُمثّل المتغيرات الاصطناعية في تابع الهدف؟ الجواب هو الآتي:

عند إضافة المتغيرات غير الحقيقيـة (متغيـرات الفـروق و/ أو المتغيـرات الاصطناعية) لا بد لهذه المتغيرات من أن تظهر كذلك في تابع الهدف، تماماً كما حدث عندما أضفنا متغيرات الفروق في حالة (أصغر أو يساوي). ولما كان من الـضروري إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل، فهذا يعني أن بإمكاننا افتراض كلفـة عاليـة لهذه المتغيرات.

إذا كانت المسألة تهدف إلى إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف، فإنه من المفضل إدخال المتغيرات ذات الكلفة الأقل للحل، والمتغيرات ذات الكلفة الأكبر يجب إخراجها

من الحل بسرعة. لذلك نضيف في هذه الحالة المتغيرات الاصطناعية إلى تابع الهدف بأمثال كبيرة جداً، ولتكن M.

أما إذا كانت المسألة تهدف إلى إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف، فإنه من المفضل إدخال المتغيرات ذات الكلفة العالية للحل، والمتغيرات ذات الكلفة الأقل يجب إخراجها من الحل بسرعة. لذلك في هذه الحالة يجب علينا إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى تابع الهدف بأمثال كبيرة (M) وبإشارة سالبة.

مثال "4": دورة

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Min} \quad z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{array}{lrl}
+R_1 & 3x_1 + x_2 = 3 & (1) \\
-S_2 + R_2 & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & (2) \\
+S_3 & x_1 + 2x_2 \leq 3 & (3) \\
 & (x_1 , x_2) \geq 0 &
\end{array}$$

الحل:

نحول هذه المسألة إلى الصيغة النموذجية فنلاحظ أنه يجب إضافة متغيري فرق للقيدين الثاني والثالث فيصبحان بالشكل الآتي:

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$$

وتصبح المسألة بالشكل الآتي:

$$\text{Min} \quad z = 4x_1 + x_2 + 0 \,.\, S_2 + 0 \,.\, S_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{array}{rl}
3x_1 + x_2 = 3 & (1) \\
4x_1 + 3x_2 - S_2 = 6 & (2) \\
x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 & (3) \\
(x_1 , x_2 , S_2 , S_3) \geq 0 &
\end{array}$$

نلاحظ هنا أن القيدين الأول والثاني لا يعطيان متغيرات يمكن أن نبدأ بها متغيرات أساسية. ولكن القيد الثالث يعطي S_3 والذي يمكن اعتباره متغيراً أساسياً في الحل الأولي. لذلك نضيف متغيرات اصطناعية للقيدين الأول والثاني، وبناءً على ما سبق تصبح المسألة كالآتي:

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0 \,.\, S_2 + 0 \,.\, S_3 + MR_1 + MR_2$$

S.t.

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 6 \qquad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \qquad (3)$$

$$(x_1 \,,\, x_2 \,,\, S_2 \,,\, S_3 \,,\, R_1 \,,\, R_2) \geq 0$$

حيث M عدد موجب كبير جداً.

يمكن أن نرتب هذه المعلومات في الجدول الآتي، وذلك بعد اعتبار الحل الأولي الممكن كالآتي:

$$S_3 = 3 \quad , \quad R_2 = 6 \quad , \quad R_1 = 3 \quad \& \quad x_1 = x_2 = S_2 = 0$$

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	-4	-1	0	-M	-M	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

نلاحظ من الجدول (1) أنه يجب إجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الممثلة للحل الأولي الذي بدأنا به، وذلك لأن أمثال المتغيرات الأساسية في تابع الهدف يجب أن تكون مساوية للصفر. وللحصول على هذا فإننا نضرب كلاً من سطري R_2 ، R_1 بـ M ونجمعهما إلى سطر تابع الهدف، فنحصل على الجدول الجديد الآتي:

الجدول (2)

$Z = Z(\text{القديم}) + MR_1 + MR_2$

	Z	x_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	-4+7M	-1+4M	-M	0	0	0	9M
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

بما أن المسألة هي مسألة بحث عن قيم صغرى لتابع الهدف، فإن يمكن تحسين الحل بإدخال المتغير الذي يرافقه معامل موجب في سطر تابع الهدف. ومن الجدول (2) نجد أن المتغير الذي سيدخل الحل هو x_1 ، والمتغير الخارج هو R_1. وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في حساب الجدول الجديد نجد:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	(1+5M)/3	-M	(4-7M)/3	0	0	4+2M
x_1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2	0	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
S_3	0	0	5/3	0	-1/3	0	1	2

ومن هذا الجدول نجد أنه يمكن إدخال المتغير x_2 واخراج R_2 فنحصل على الآتي:

الجدول (4)

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	1/5	8/5 – M	-1/5 – M	0	18/5
x_1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	-1	1	0

كذلك من الجدول (4) نلاحظ أنه يجب إدخال المتغير S_2 لتحسين الحل وأن المتغير الخارج من الحل هو المتغير S_3 والعنصر المحوري هو (1). بتطبيق طريقة غوص – جوردان نحصل على ما يأتي:

الجدول (5)

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	0	7/5 – M	-M	-1/5	18/5
x_1	0	1	0	0	2/5	0	-1/5	3/5
x_2	0	0	1	0	-1/5	0	3/5	6/5
S_2	0	0	0	1	1	-1	1	0

الجدول (5) يعطي الحل الأمثل لهذه المسألة والذي يكون:

$R_2 = 0$, $R_1 = 0$, $S_3 = 0$, $S_2 = 0$, $x_2 = 6/5$, $x_1 = 3/5$

وأن أصغر قيمة لتابع الهدف هي: $z^* = 18/5$

ملاحظة "4":

هناك نقطة ضعف في طريقة M الكبيرة، وهي إمكانية حدوث خطأ حسابي عندما نعطي M قيمة كبيرة جداً. ولتوضيح ذلك نفترض أن $M = 10000$ في المثال السابق.

في الجدول (2) من هذا المثال نلاحظ أن معامل x_1 في تابع الهدف هو (-4 + 70000) ومعامل x_2 في تابع الهدف هو ((-1 + 40000. كما أن تأثير معاملات المتغيرات الحقيقية (4 , 1) صغير جداً مقارنة بالعدد الكبير الناتج من ضرب M بعدة أمثال. عند إجراء الحسابات في أي جهاز حاسوب الذي يمكن أن يقوم بعمليات تقريب الأعداد، فإن الحل لن يكون حساساً للقيم العائدة إلى معاملات المتغيرات الحقيقية x_2 , x_1 في سطر تابع الهدف. والأخطر من ذلك أنه قد يعامل x_2 , x_1 وكأن لها معاملات متساوية في تابع الهدف. لتجنب هذه الصعوبة في طريقة M الكبيرة، نقدم طريقة ثانية تسمى طريقة الحل على مرحلتين.

IV – 4-2 طريقة الحل بمرحلتين: (Two - Phase Method):

سُمّيَت هذه الطريقة بهذا الاسم لأنها تحل مسألة البرمجة الخطية على مرحلتين:

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة يتم تشكيل مسألة جديدة يكون الهدف فيها البحث عن القيمة الصغرى لتابع هدف جديد مساوٍ لمجموع المتغيرات الاصطناعية وخاضع لمجموعة قيود المسألة الأصلية.

إذا كان هناك حل للمسألة الجديدة، فإن القيمة الصغرى لتابع الهدف الجديد هي الصفر (وهذا ما يشير إلى أن كل المتغيرات الاصطناعية تأخذ قيمة الصفر)، ومن ثم نذهب إلى المرحلة الثانية. أما إذا لم يكن هناك حل للمسألة الجديدة وكانت القيمة

الصغرى لتابع الهدف الجديد أكبر من الصفر، فإننا أمام حالة عدم وجود حل للمسألة الأصلية.

المرحلة الثانية:

نأخذ الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى ونعده حلاً أولياً نبدأ منه لحل المسألة الأصلية. وفي هذه الحالة، يعبّر عن تابع الهدف للمسألة الأصلية بواسطة المتغيرات غير الأساسية باستخدام طريقة غوص – جوردان.

مثال "5":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية المذكورة في المثال السابق والمحلولة وفق طريقة M الكبيرة.

الحـــل:

المرحلة الأولى: نشكل تابع الهدف الجديـد: $\text{Min} \;\; z_0 = R_1 + R_2$، أمـا القيـود فتبقى كما هي (أي قيود المسألة الأصلية نفسها)، ومن ثم نحصل على الجدول:

الجدول (1)

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

لكي نحصل على جدول يعطي حلاً أولياً ممكناً مبتدئين من نقطة الأصل نجمـع كلاً من سطري R_2 , R_1 إلى سطر تابع الهدف، فنحصل على الجدول الآتي:

الجدول (2)

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

بما أننا نبحث عن القيمة الصغرى لتابع الهدف Z_0 فإننا ندخل المتغير x_1 إلى الحل ونخرج المتغير R_1 فنحصل على الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2
x_1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2	0	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
S_3	0	0	5/3	0	-1/3	0	1	2

نقوم بإدخال المتغير x_2 إلى الحل ونخرج المتغير R_2 من الحل فنحصل على:

الجدول (4)

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	-1	1	0

من هذا الجدول نلاحظ أننا وصلنا إلى الحل الأمثل للمسألة الجديدة والتي تكون فيها القيمة الصغرى لتابع الهدف مساوية للصفر، كما أن قيمة كل من المتغيرات الاصطناعية مساوية للصفر. والآن باستطاعتنا البدء بالمرحلة الثانية من الحل.

المرحلة الثانية: نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية قد حذفت من الجدول الأخير في المرحلة الأولى، ومن ثم فهي ليست متغيرات أساسية. الآن نبدأ المرحلة الثانية من الجدول (4)، وذلك بعد تبديل تابع الهدف Z_0 بتابع الهدف في المسألة الأصلية، فيكون لدينا:

الجدول (5)

	Z	x_1	x_2	S_2	S_3	R.S.
Z	1	-4	-1	0	0	0
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	0

ومرة أخرى، فإن معاملات المتغيرات الأساسية في سطر تابع الهدف يجب أن تكون أصفاراً لذلك تجري بعض التحويلات الأولية على المصفوفة. نضرب سطر x_1 بـ 4، ونضرب سطر x_2 بـ 1 ونجمعهما إلى سطر تابع الهدف، فنحصل على ما يأتي:

الجدول (6)

	Z	x_1	x_2	S_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	1/5	0	18/5
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	0

الجدول (6) لا يعطي الحل الأمثل، لأنه ما زال المتغير S_2 يرافقه معامل موجب في سطر تابع الهدف، ومن ثم يمكن تحسين الحل. نلاحظ أن المتغير الداخل إلى الحل هو S_2، والمتغير الخارج من الحل هو S_3، وبتطبيق طريقة غوص – جوردان نحصل على الجدول الذي يعطي الحل الأمثل وهو مطابق تماماً لجدول الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في طريقة M الكبيرة.

ملاحظة مهمة " 5 ":

في المرحلة الأولى من الحل يكون هدف المسألة الجديدة المشكّلة هو إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف الجديد Z_0 بغض النظر عن هدف المسألة الأصلية سواءً أكان إيجاد القيمة العظمى أم الصغرى لتابع الهدف الأصلي.

ملاحظة "6":

يجب ملاحظة أنه يتم حذف المتغيرات الاصطناعية في المرحلة الثانية فقط عندما تكون متغيرات غير أساسية في نهاية المرحلة الأولى. كما يمكن أن نصادف حالات يبقى المتغير الاصطناعي متغير أساسي، ولكن قيمته مساوية للصفر. وكمثال على هذه الحالات، نلاحظ في الجدول (3) من المثال السابق أنه يمكن إخراج S_3 أو R_2 من الحل. فإذا قررنا إخراج S_3، فإن R_2 سيبقى متغيراً أساسياً في جدول الحل

الأمثل، ولكن بقيمة صفر. وفي هذه الحالة يجب استخدام المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأولي الذي نبدأ فيه المرحلة الثانية.

IV - 5 حالات خاصة

نتعرض في هذه الفقرة لبعض الحالات الخاصة التي يمكن أن نصادفها في أثناء حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة.

IV – 1-5 التكرار (الدوران): (Degeneracy)

نصادف هذه المشكلة عندما يكون أحد قيود المسألة قيداً فائضاً، وتبرز مشكلة الدوران عند حساب النسبة (العناصر في عمود الطرف الثاني ÷ العناصر في العمود المحوري) من أجل تحديد المتغير الخارج من الحل وكان هناك مساواة في النسبة الأقل لأكثر من سطر، وهذا يعني أن هناك دوراناً في الحل.

إن وجود تعادل في النسبة الأقل لأكثر من سطر يعني أن قيمة أحد المتغيرات الأساسية في الحل القادم تساوي الصفر. إن وجود قيمة صفرية لأحد المتغيرات الأساسية ليست مشكلة، ولكنها ستكون مشكلة إذا ظهرت هذه القيمة قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وذلك أن هذا يستدعي الدوران (التحرك للخلف والأمام) وقد يؤدي إلى عدم الوصول إلى الحل الأمثل.

بشكل عام، إذا حصل تعادل في النسبة الأقل لمسألة برمجة خطية، فإننا ننصح باختيار السطر الأعلى من الجدول المذكور ليكون السطر المحوري.

مثـــال "6":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$x_1 + 4x_2 \le 8$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$(x_1, x_2) \ge 0$$

الحــل:

بعد إيجاد الصيغة النموذجية لهذه المسألة بإضافة متغيرات الفروق وترتيب المعطيات في جدول، نجد ما يأتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-3	-9	0	0	0
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4

من الجدول (1) نلاحظ أنه يمكننا تحسين الحل بادخـــال المتغيــر x_2 وإخـــراج المتغير S_1 فنجد:

الجدول (2)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-3/4	0	9/4	0	18
x_2	0	1/4	1	1/4	0	2
S_2	0	1/2	0	-1/2	1	0

ندخل المتغير x_1 إلى الحل ونخرج S_2 فنحصل على الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	3/2	3/2	18
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	2
x_1	0	1	0	-1	2	0

وبهذا نكون وصلنا إلى الحل الأمثل، وهو:

$$Z^* = 18 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_1 = 0$$

نلاحظ في هذا المثال، أن قيمة المتحولات في الجدولين (2) و(3) كانت نفـسها بالضبط. وهنا نكون أمام حالة دوران في الحل، وذلك لأن في الجدولين تكون قيمة أحد المتغيرات الأساسية صفراً.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن، لماذا لا نتوقف عن الحل عند ظهور المشكلة لأول مرة؟ الجواب عن ذلك هو أنه لا أحد يستطيع أن يتوقع أنه تم الوصول إلى الحل الأمثل عند ظهور مشكلة الدوران، كما أنه يمكن أن تكون مشكلة الدوران مؤقتة وتزول في الجداول اللاحقة.

IV – 2-5 عدم محدودية الحل: (Unboundness)

تصادف هذه الحالة عندما تكون منطقة الإمكانيات غير محدودة، ومن ثم نستطيع زيادة الربح إلى اللانهاية. عند استخدام الطريقة المبسطة، نحصل على حل غير محدود إذا كانت عناصر العمود المحوري لأي متغير يمكن إدخاله إلى الحل سالبة أو مساوية للصفر في جدول من جداول الحل. أي لا يمكننا إيجاد العنصر المحوري (عنصر الدوران).

مثال "7":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$x_1 - x_2 \le 10$$

$$2x_1 - x_2 \le 40$$

$$(x_1, x_2) \ge 0$$

الحل:

نوجد الصيغة النموذجية لهذه المسألة، ونرتب الحل الأولي في الجدول الآتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-2	-1	0	0	0
S_1	0	1	-1	1	0	10
S_2	0	-2	-1	0	1	40

نلاحظ أن يمكننا تحسين الحل بإدخال المتغير x_1 أو بإدخال المتغير x_2. بما أن معاملات x_2 جميعها سالبة، فإنه يمكن أن يأخذ قيمة كبيرة وغير محدودة. ومن ثم فإن تابع الهدف سيكون غير محدود، ويمكن أن يأخذ قيماً كبيرة حتى اللانهاية.

IV – 3-5 وجود أكثر من حل أمثل:

(Alternative Optimal Solutions)

نصادف هذه الحالة عندما يخرج تابع الهدف من منطقة الإمكانيات بشكل مواز للقيد الذي يحدها. وفي هذه الحالة يبلغ تابع الهدف قيمته المثلى في أية نقطة من نقاط المستقيم الذي خرج منه تابع الهدف.

عند استخدام الطريقة المبسطة، فإن ذلك يعني أن تابع الهدف يبلغ قيمته المثلى عند أكثر من حل أساسي. ويمكن أن تحصل هذه الحالة إذا كان في الحل النهائي معامل أحد المتغيرات غير الأساسية في سطر تابع الهدف مساوياً للصفر.

مثـــال "8":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 14x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$

$$7x_1 + 2x_2 \le 21$$

$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

الحـــل: بعد إيجاد الصيغة النموذجية لهذه المسألة، نرتب المعطيات في جدول الحل الأولي الآتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-4	-14	0	0	0
S_1	0	2	7	1	0	21
S_2	0	7	2	0	1	21

إن المتغير الداخل إلى الحل هو x_2، والمتغير الخارج من الحل هو S_1.

الجدول (2)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	2	0	42
x_2	0	2/7	1	1/7	0	3
S_2	0	45/7	0	-2/7	1	15

نلاحظ أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، وهو :

$$Z^* = 42 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 0$$

ولكن نلاحظ أن معامل x1 في سطر تابع الهدف مساوٍ للصفر، وهذا يعني أن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول. وكمثال على حلٍ آخر نقوم بإدخال المتغير x_1 إلى الحل، وإخراج S_2، فنحصل على الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	2	0	42
x_2	0	0	1	7/45	-2/45	7/3
x_1	0	1	0	-2/45	7/45	7/3

الحل الأمثل الجديد هو:

$$Z^* = 42 \quad , \quad x_1 = x_2 = 7/3$$

أي أن قيمة تابع الهدف لم تتغير.

الآن، لو أخذنا الحلين الأساسيين:

$$x_1 = x_2 = 7/3 \text{ و } \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 0$$

يمكن البرهان على أن أي حل ناتج من تركيب خطي محدب لهذين الحلين هو حل أمثل. فإذا كان:

$$x_2 = \lambda(3) + (1-\lambda)\left(\frac{7}{3}\right) \quad , \quad x_1 = \lambda(0) + (1-\lambda)\left(\frac{7}{3}\right)$$

أو:

$$\bar{x}_2 = (\frac{1}{3})(7+2\lambda) \quad , \quad \bar{x}_1 = (\frac{7}{3})(1-\lambda)$$

حيث: $0 \le \lambda \le 1$.

الحل $(\bar{x}_2 , \bar{x}_1)$ سـيعطي القيمة نفسـها لتابع الهدف Z من أجل أي قيمة لـ $\lambda \in [0,1]$.

IV – 4-5 حالة عدم وجود حل: (Infeasibility)

يعني ذلك عدم وجود أية نقطة تحقق جميع قيود المسألة. وبتعبير آخر، تكون منطقة الإمكانيات عبارة عن مجموعة خالية. عند استخدام الطريقة المبسطة، نلاحظ ذلك عند الوصول إلى الجدول الذي يعطي الحل الأمثل، ولكن هناك متغيراً اصطناعياً لا يزال موجوداً في الحل بين المتغيرات الأساسية وبقيمة موجبة.

مثـال "9":

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

S.t.

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$

$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

الحـل:

بعد إيجاد الصيغة النموذجية لهذه المسألة وإضافة المتغير الاصطناعي للقيد الثاني، نرتب المعطيات في جدول الحل الأولي الممكن الآتي:

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_1	R.S.
Z	1	-3-3M	-2-4M	M	0	0	-12M
S_1	0	2	1	0	1	0	2
R_1	0	3	4	-1	0	1	12

المتغير الداخل إلى الحل هو x_2، والمتغير الخارج هو S_1، فنجد:

الجدول (2)

	Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_1	R.S.
Z	1	1+5M	0	M	2+4M	0	4-4M
x_2	0	2	1	0	1	0	2
R_1	0	-5	0	-1	-4	1	4

نلاحظ هنا أن هذا الجدول لا يعطي إمكانية لإدخال متغير إلـى الحـل، وهـو بحسب شرط المثالية يعطي حلاً مثالياً. ولكن المتغير الاصطناعي R_1 بقـي متغيـراً أساسياً وبقيمة موجبة، وهذا يعني أنه لا يوجد حل لهذه المسألة.

ملاحظة "7": جدير بالاهتمام ملاحظة أنه إذا بقيت قيمة المتغير الاصـطناعي فـي الحل الأمثل مساوية للصفر، فإن ذلك لا يشكل حاجزاً أمام وجود الحل الأمثل، ويمكـن أن يوجد حل للمسألة.

IV – 6 مسائل غير محلولة

1 – أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة).

a) Max $Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

S.t.

$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7$

$-x_1 + x_2 - x_3 \le -1 \rightarrow x_1 - x_2 + x_3 \ge 1$

$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$

b) Min $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$x_1 + x_2 - x_3 \ge 4$

$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$

$(x_1, x_2) \ge 0$

c) Max $Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

S.t.

$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$

d) Max $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

S.t.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -6$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$$

2 – أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة M الكبيرة.

a) Min $z = 2x_1 + 3x_2$

S.t.

$$4x_1 + x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

b) Min $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

c) Min $z = 4x_1 + 6x_2$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 \ge 10$$
$$x_1 + 2x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 14$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

3 – أوجد حل البرنامج الخطي بطريقة المرحلتين ثم بطريقة M الكبيرة.

Max $Z = -x_1 - 2x_2 + x_3$

S.t.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6$$
$$x_1 + x_3 \le 12$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

4 – أوجد حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة M الكبيرة .

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.t.

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le 40$$

$$(x_1 , x_2 , x_3) \ge 0$$

5 – لنفرض أن المعاملات في المسألة السابقة (4) لـ x_2 تكون: $(\alpha+5 , -5+\alpha , 5-\alpha)$ بدلاً من (5- ,5) حيث α ثابت غير سالب. أوجد قيم α التي لا تؤدي إلى أي تغيير في الحل الأمثل للمسألة (4).

6 – لنفرض أن الطرف الأيمن للقيود في المسألة (4) أصبح: $(\alpha+30 , 40-\alpha)$، حيث α ثابت غير سالب. ولنفرض أن معاملات تابع الهدف أصبحت $(5-\alpha , 2+\alpha , 3+\alpha)$. أوجد في هذه الحالة قيم α التي تحافظ على حل المسألة (4) كحل أساسي ممكن وأمثل.

7 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Min } z = 3x_1 + 2x_2$$

S.t.

$3x_1 + 2x_2 \ge 4$ $\quad 3x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 4$

$2x_1 + 4x_2 \ge 1$ $\quad 2x_1 + 4x_2 - S_2 + R_2 = 1$

$x_1 + x_2 \ge 3$ $\quad x_1 + x_2 - S_3 + R_3 = 3$

$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

المطلوب :

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة البيانية .
2. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة السمبلكس مستخدماً طريقة M الكبيرة.

9 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

S.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le -2$$
$$3x_1 + 2x_3 = 5$$
$$x_2 - x_3 \ge 1$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

$x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 7$

$-x_1 + x_2 - x_3 - S_2 + R_2 = 2$

$3x_1 + 2x_3 + R_3 = 5$

$x_1 - x_3 - S_4 + R_4 = 1$

المطلوب:

طريقة M

أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة التي تراها مناسبة.

10 - لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$$

S.t.

$$3x_1 + 9x_2 \le 27$$
$$8x_1 + 6x_2 \le 48$$
$$-4x_1 + 6x_2 \ge -12$$
$$8x_1 + 12x_2 \boxed{=} 24$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة البيانية ثم بالطريقة المبسطة. M

11 - لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$$

S.t.

$$2x_1 - 2x_2 \ge -5 \rightarrow -2x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$5x_1 - 3x_2 \le 3 \qquad 5x_1 - 3x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$(x_1, x_2) \ge 0 \qquad (\;) \ge 0$$

$\text{Max } z = -5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

s.t

طريقة مبسطة

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة البيانية ثم بالطريقة المبسطة.

الفصل الخامس

استخدام الحاسوب

في حل مسائل البرمجة الخطية

V – 1 مقدمة

بعد أن رأينا كيفية حل مسائل البرمجة الخطية بأكثر من طريقة، و بما أن هـذا الكتاب موجه لطلاب كلية الهندسة المعلوماتية فإنني أرى أنه من الـضروري إعطـاء فكرة عن كيفية حل هذا النوع من المسائل باستخدام الحاسوب.

يمكن حل مسائل البرمجة الخطية وغيـر الخطيـة باسـتعمال أنظمـة الـ Spreadsheets مثل Excel أو Quattro Pro، كما يمكن الحصول علـى برمجيـات كثيرة متخصصة في حل مسائل بحوث العمليات من خلال البحث في الانترنيت. سوف أعرض في هذا الفصل كيفية حل مسائل البرمجة الخطيـة باسـتخدام برنـامج Excel لتوفره و شعبيته و سهولة استخدامه.

V – 2 حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام برنامج Excel

سنقوم فيما يأتي بعرض كيفية استخدام برنامج Excel لحل مثل هذه المـسائل. نقوم بكتابة مجموعة من القيود المشكلة لمسألة البرمجة الخطية على شكل متراجحـات أو مساويات كما تتم كتابة تابع الهدف Z الذي يتم بالاعتماد عليه البحث عـن الحـل المثالي للمسألة المطلوبة. سنوضح كيفية حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام برنـامج Excel من خلال بعض الأمثلة.

مثال 1:

بفرض أننا نريد إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية الـواردة فـي المثال (1) من الفصل الرابع:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 \le 6 \qquad (1)$$

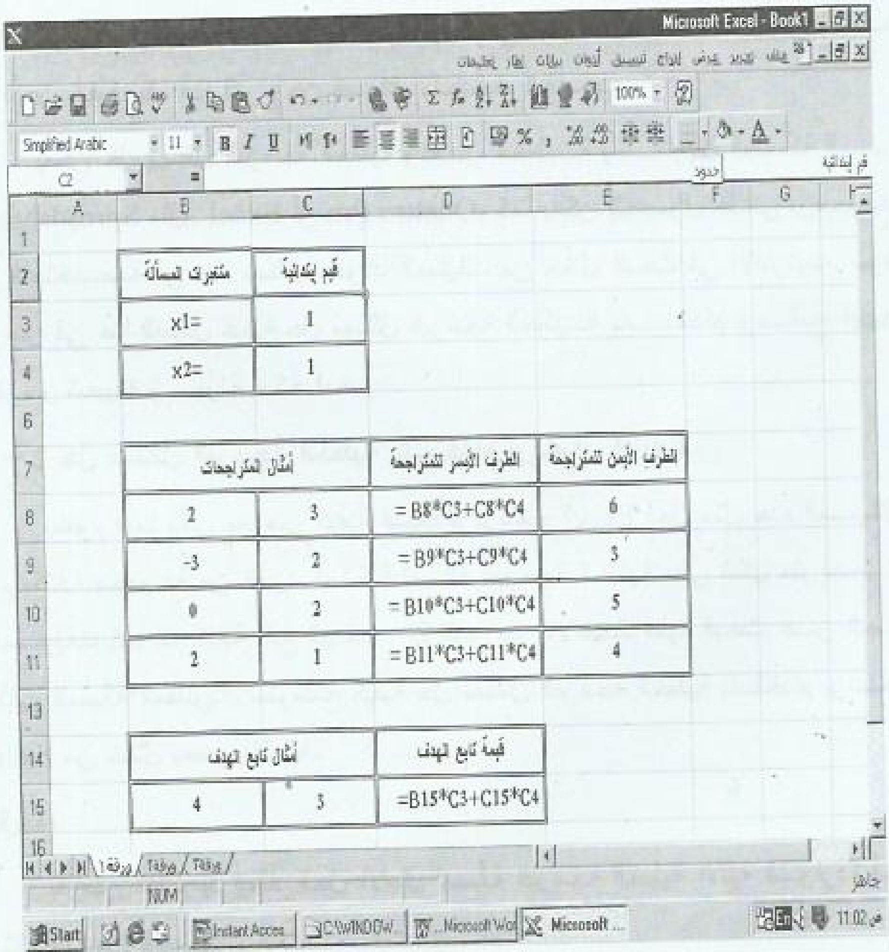
$$-3x_1 + 2x_2 \le 3 \qquad (2)$$

$$2x_2 \le 5 \qquad (3)$$

$$2x_1 + x_2 \le 4 \qquad (4)$$

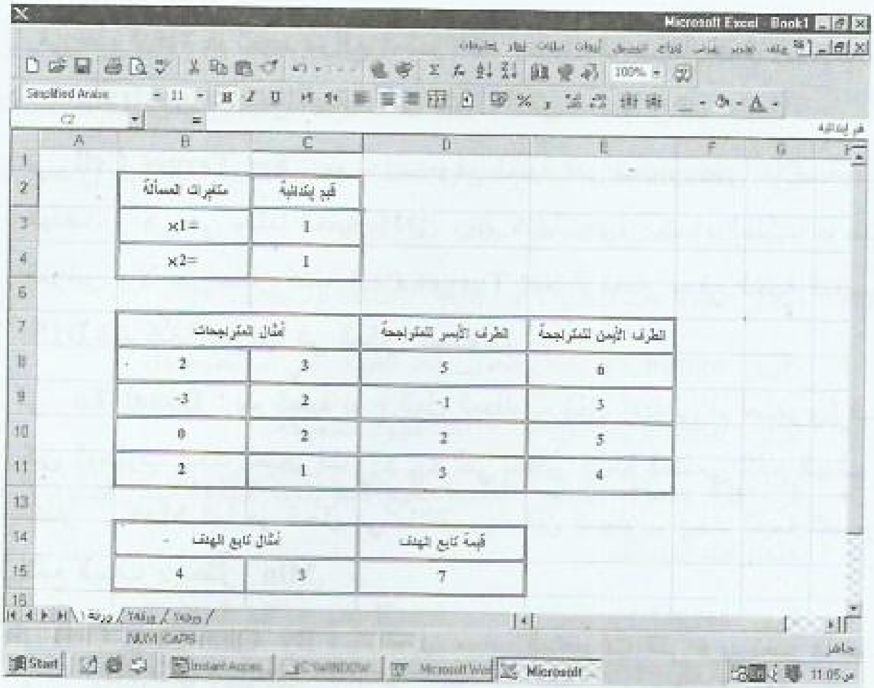
$$(x_1 , x_2) \ge 0 \qquad (5)$$

الحل: لحل هذه المسألة نقوم بكتابة تابع الهدف و قيود المسألة في ورقة عمل على الشكل الآتي:



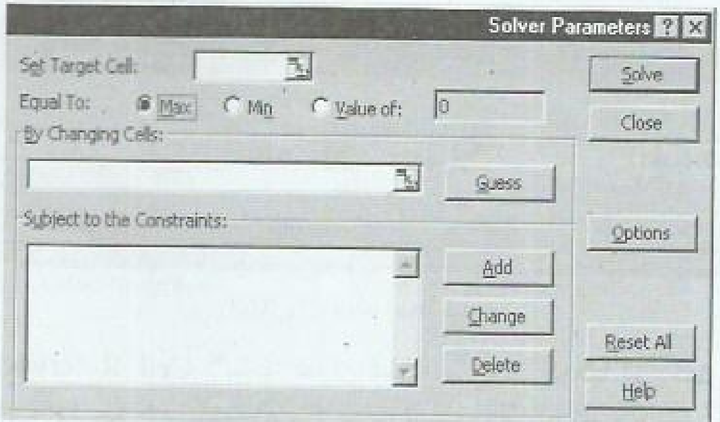
	B	C	D	E
2	متغيرات المسألة	قيم ابتدائية		
3	x1=	1		
4	x2=	1		
7	أمثال المتراجحات		الطرف الأيسر للمتراجحة	الطرف الأيمن للمتراجحة
8	2	3	=B8*C3+C8*C4	6
9	-3	2	=B9*C3+C9*C4	3
10	0	2	=B10*C3+C10*C4	5
11	2	1	=B11*C3+C11*C4	4
14	أمثال تابع الهدف		قيمة تابع الهدف	
15	4	3	=B15*C3+C15*C4	

الشكل(1): ورقة العمل مبين فيها العلاقات المستخدمة في الخلايا



الشكل(2): ورقة العمل بعد تحضيرها

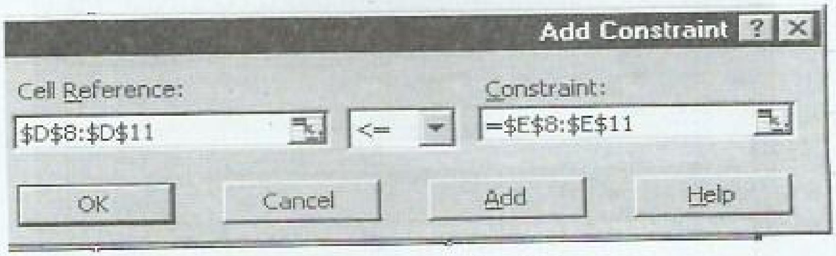
لاحظ أنه يجب إعطاء قيم ابتدائية لمتحولات المسألة (في مثالنا، أعطينا القيم الابتدائية $x_1=1$ ، $x_2=1$) . يجب أن نعطي قيماً ابتدائية منطقية محققة لشروط الحل الابتدائي لمسألة برمجة خطية. بعد ذلك نطلب الأمر **Solver** من قائمة الأدوات **Tools** فتظهر لدينا النافذة الآتية:



الشكل(3): نافذة معاملات الحل

في هذه النافذة يتم تحديد مواقع المتحولات x_1, x_2 في ورقة العمل و يتم تعريف القيود **Constraints** و تابع الهدف على الشكل الآتي:

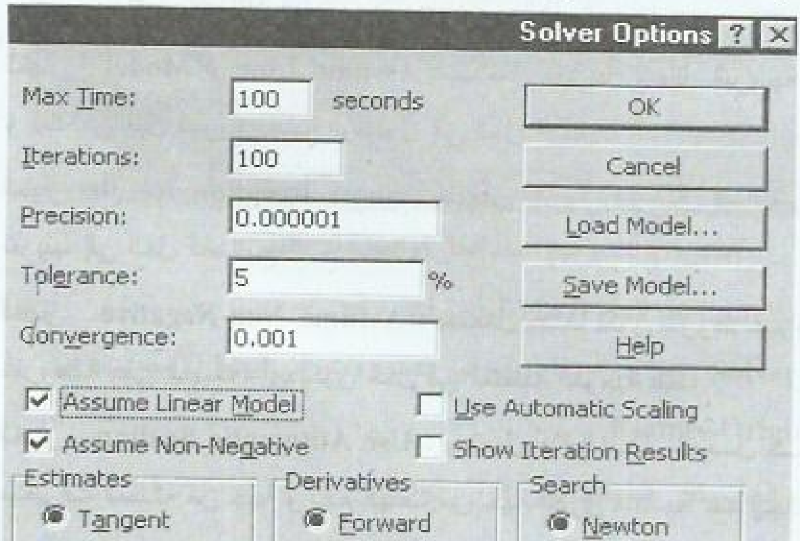
- في **Set Target Cell** : يتم تحديد موقع الخلية التي تحتوي على علاقة تابع الهدف. و هي في مثالنا الخلية **D15** . تتم كتابة عنوان هذه الخلية بوضع المؤشر أولاً على مكان كتابة **Set Target Cell** ثم نختار موقع الخلية المقصودة **D15** فتتم كتابة عنوانها في المكان المطلوب.
- في **Equal To** : يتم تحديد نوع الحل المطلوب (حل أعظمي أم أصغري) فإذا كان المطلوب إيجاد المتغيرات x_1, x_2 التي تعطي القيمة العظمى لتابع الهدف **Z** نختار **Max** كما هو الحال في مثالنا. وإذا كان المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف z نختار **Min**.
- في **By Changing Cell** : يتم تحديد مواقع المتغيرات التي نريد تغييرها بهدف الحصول على الحل المطلوب، أي قيم x_1, x_2. و هنا يجب تحديد مجال الخلايا أي في مثالنا **C3:C4**.
- في المجال **Subject to the Constraints**: يتم تعريف القيود المفروضة على المسألة. لإضافة قيد جديد إلى مجموعة القيود المعرفة في ورقة العمل نضغط على الزر **Add** فتظهر لدينا النافذة الآتية الخاصة بتحديد أماكن وضع القيود في ورقة العمل:



الشكل(4): نافذة إضافة قيد

- في **Cell Reference** : نكتب عنوان الخلية أو مجال الخلايا التي تحتوي على نتيجة الطرف الأيسر من المتراجحة. في مثالنا المجال **D8:D11**

- نختار اتجاه المتراجحة = , <= , >= باستعمال الزر ذي السهم الموجه نحو الأسفل. يمكن أيضاً استعمال **int** عندما نريد أن يكون الحل بقيم صحيحة.
- في **Constraint**: نضع عنوان الخلية مجال الخلايا التي تحتوي على الطرف الأيمن من المتراجحة. في مثالنا **E8:E11**
- نختار **OK** عند الانتهاء أو **Add** لإضافة قيد جديد.
- الزر **Change** يستعمل لتعديل أحد القيود التي تم اختيارها.
- الزر **Delete** يستعمل لمسح أحد القيود المعرفة.
- الزر **Reset All**: يستعمل لمسح جميع التعريفات السابقة من قيود و عناوين متغيرات المسألة.
- الزر **Guess** : يستعمل لجعل **Excel** يقدر مواقع الخلايا للمتغيرات المستعملة في خلية تابع الهدف لوضعها في مكان **By Changing Cells** .
- الزر **Options**: يستعمل لتغيير بعض الخيارات في طريقة حل مسألة البرمجة الخطية. عند الضغط على هذا الزر تظهر النافذة الآتية:

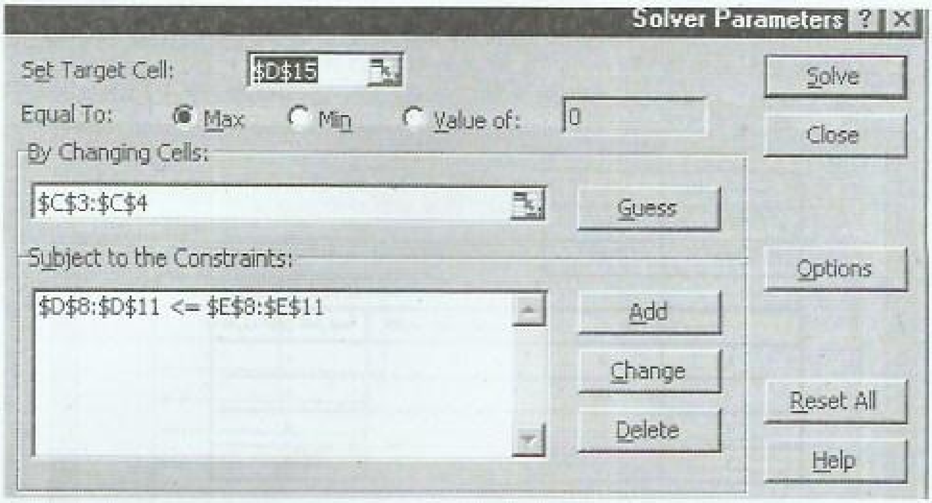


الشكل(5): نافذة خيارات الحل

في هذه النافذة يتم:

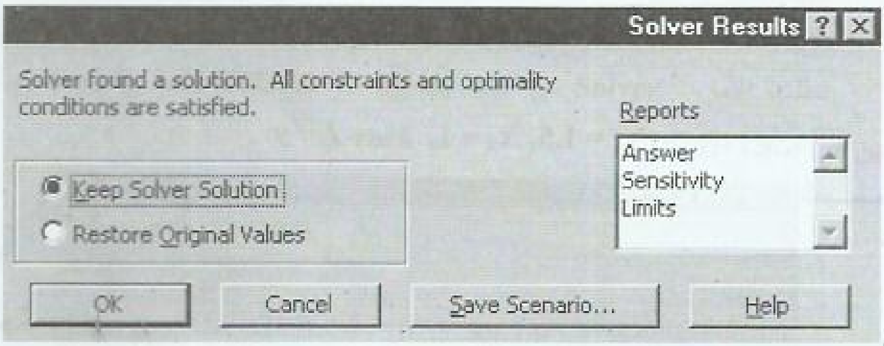
- في **Max Time** تحديد الزمن الأعظم الذي يجب ألا يتجاوزه البرنامج في الحل (في حال عدم وجود حل)، أي البرنامج سيتوقف عن البحث عن حل في حال تجاوز هذا الزمن.
- في **Iterations** : يتم تحديد العدد الأعظم للمحاولات التي يجريها الحاسب لإيجاد الحل.
- في **Precision** : يتم تحديد الدقة المقبولة في اقتراب الطرف الأيسر لمتراجحات القيود من قيم الطرف الأيمن منها، و ذلك عند الوصول إلى الحل المطلوب.
- في **Tolerance** : يتم تحديد الدقة المقبولة كنسبة مئوية في حال استعمال متغيرات صحيحة الأرقام.
- في **Convergence**: عندما يكون التغير النسبي في قيمة الخلية المستهدفة أقل من الرقم المعرف في **Convergence** بالنسبة إلى عمليات التكرار الخمس الأخيرة يتوقف **Solver** و يكون قد وصل إلى الحل المطلوب.
- الخيار **Assume Linear Model** : يستعمل عند حل مسائل البرمجة الخطية. و ذلك من أجل تسريع عملية الوصول إلى الحل الأمثل.
- الخيار **Show Iteration Results** : يستعمل لإظهار قيم الحل الحالية بعد كل تقريب إلى الحل الصحيح.
- الخيار **Assume Non-Negative** : يستعمل عندما تكون شروط عدم السلبية مفروضة على المسألة، أي يكون الحل في المنطقة الموجبة فقط.
- الخيار **Use Automatic Scaling** : يستعمل هذا الخيار لجعل كل من متغيرات المسألة من جهة و تابع الهدف من جهة أخرى متناسبة عند إيجاد الحل.

بعد تحديد القيود و تابع الهدف و الخيارات المطلوبة تظهر نافذة **Solver Parameters** بالشكل الآتي:



الشكل(6): نافذة معاملات الحل بعد إدخال القيود و تابع الهدف

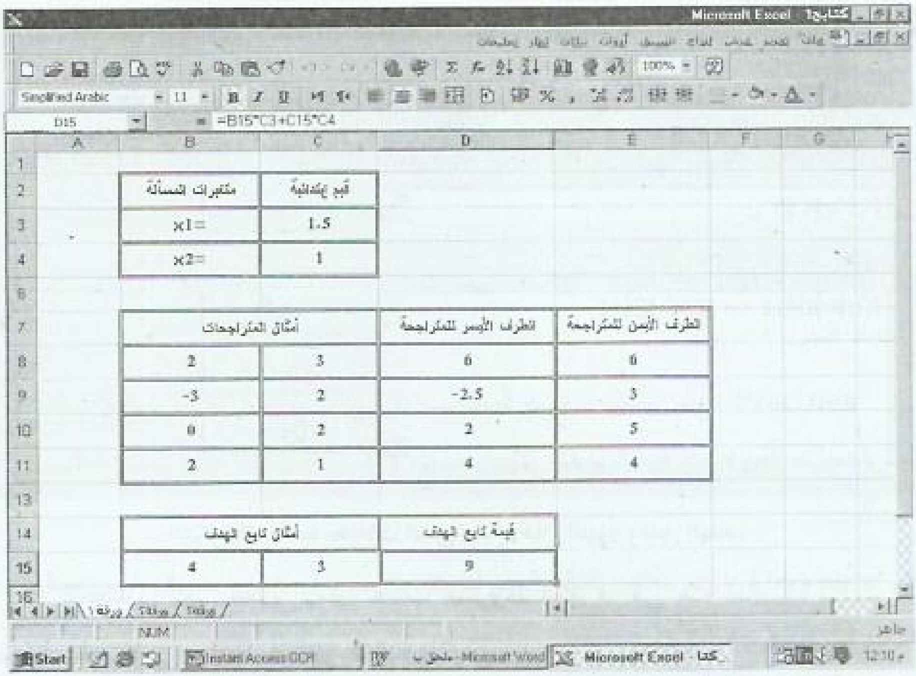
للحصول على الحل الأمثل حسب الشروط المعرفة في هذه النافـذة يكفـي أن نضغط على الزر **Solve** فتظهر النافذة الآتية:



الشكل(7): نافذة خيار حفظ الحل أو العودة إلى القيم الأصلية

إذا أردنا تثبيت قيم الحل الأمثل للمتغيرات x_1, x_2 يجب علينا اختيار **Keep Solver Solution** . أما إذا أردنا إعادة قيم المتحولات إلى قيمها الأساسـية فنختـار **Restore Original Values** .

لإنهاء الحل يكفي الضغط على الزر OK.



D15 =B15*C3+C15*C4

	متغيرات المسألة	قيم ابتدائية
	x1=	1.5
	x2=	1

أمثال المتراجحات		الطرف الأيسر للمتراجحة	الطرف الأيمن للمتراجحة
2	3	6	6
-3	2	-2.5	3
0	2	2	5
2	1	4	4

أمثال تابع الهدف		قيمة تابع الهدف
4	3	9

الشكل(8): نافذة الحل النهائي

نلاحظ أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو :

$$x_1 = 1.5,\ \ x_2 = 1,\ \ \text{Max } Z = 9$$

وهو الحل نفسه الذي حصلنا علية باستخدام الطريقة البيانية والطريقة المبسطة يدوياً.

مثال 2 :

بفرض أننا نريد البحث عن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية الواردة في المثال (2) من الفصل الرابع:

$$\text{Min } \ z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

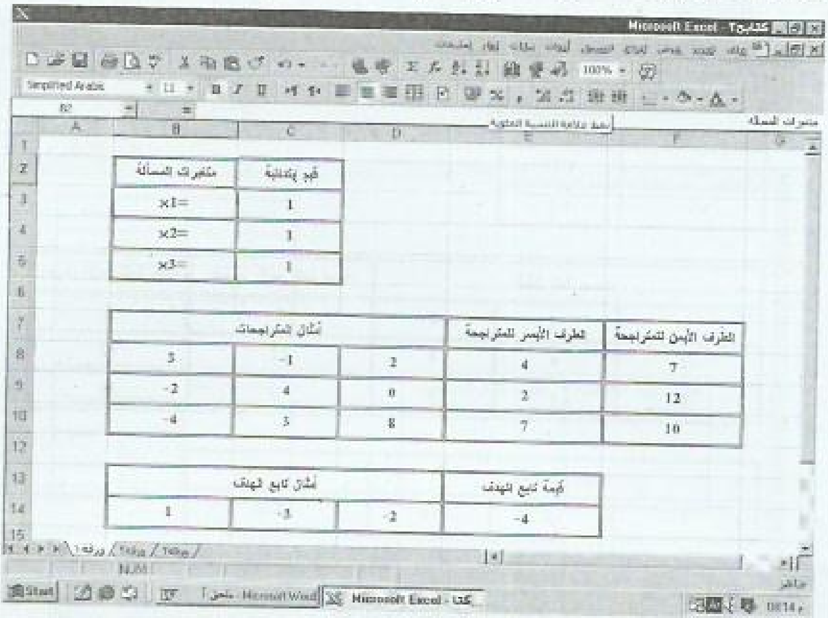
$$-2x_1 + 4x_2 = 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

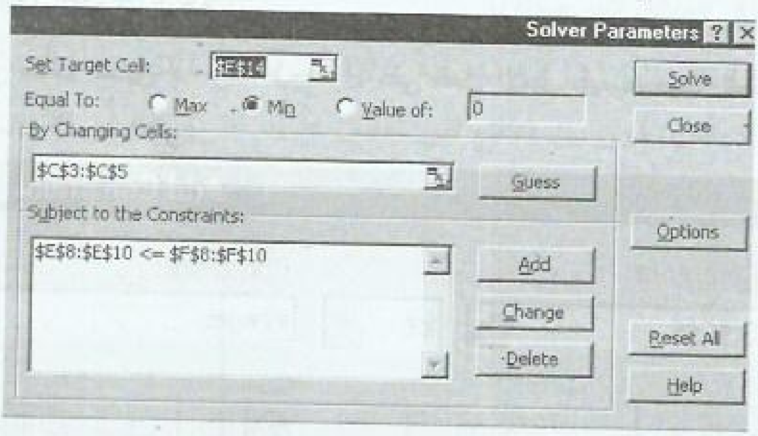
$$(x_1 , x_2 , x_3) \geq 0$$

الحل:

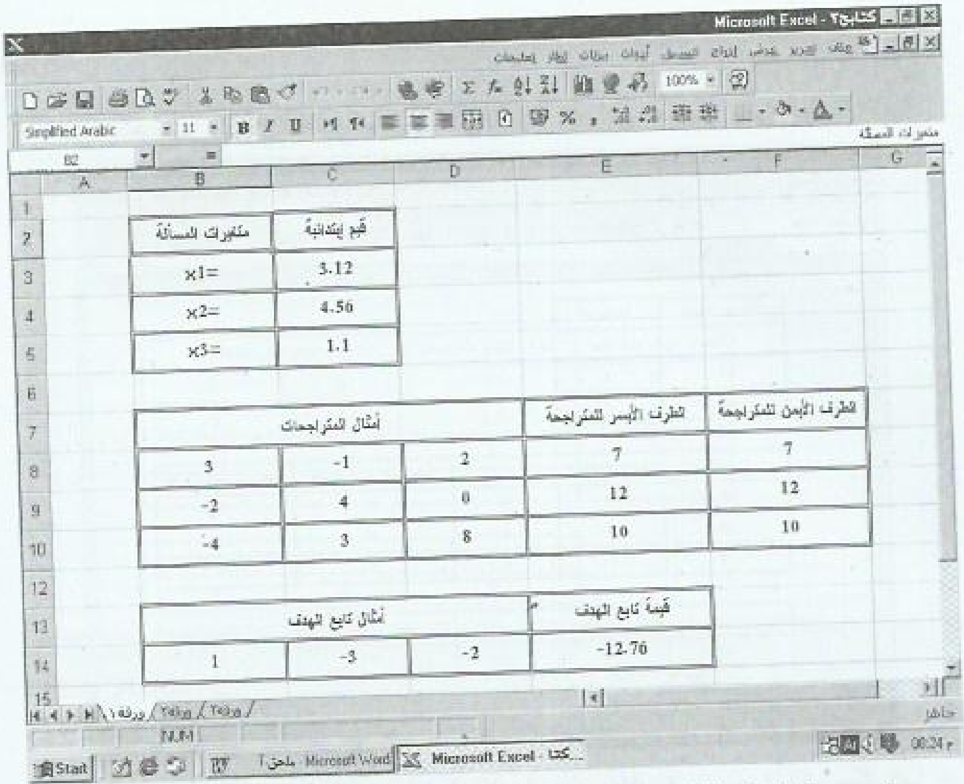
بعد تحضير ورقة العمل كما رأينا في المثال السابق نحصل على النافذة الآتية:



نطلب الأمر **Solver** من قائمة الأدوات **Tools** و نحدد الشروط كما هو مبين في النافذة الآتية:



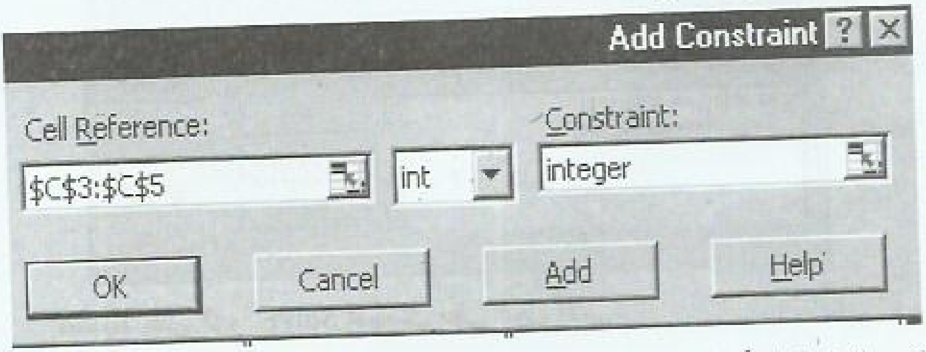
نضغط على الزر **Solve** فنحصل على الحل الآتي:



قارن هذا الحل بالحل الناتج بتطبيق الطريقة المبسطة.

V – 3 الحل بقيم صحيحة

في مثالنا السابق إذا أردنا الحصول على الحل الأمثل بقيم صحيحة للمتغيـرات فيجب إضافة الشرط الآتي:

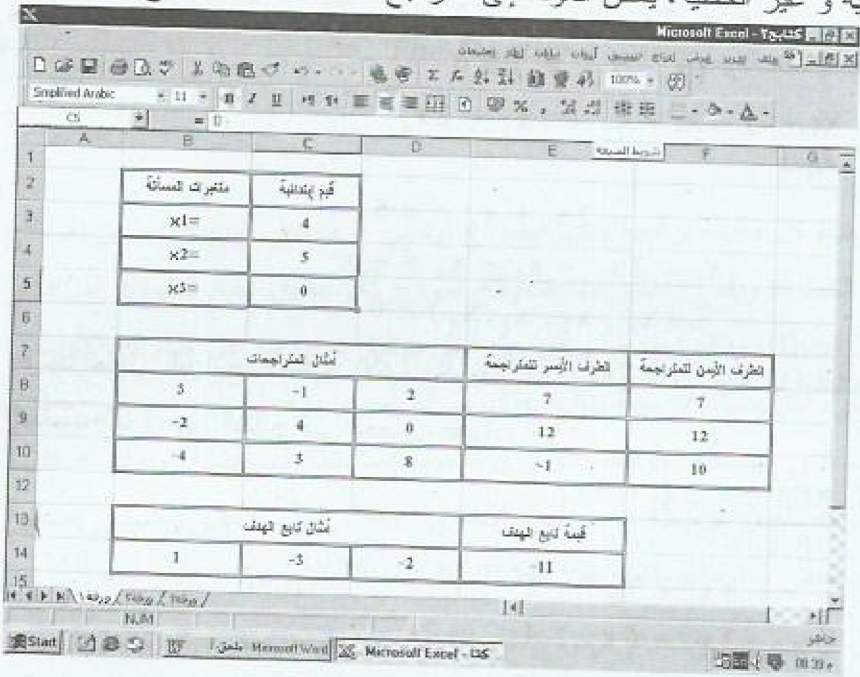


فيكون الحل كما يأتي:

وهو الحل الأمثل بقيم صحيحة:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ \text{Min } z = -11$$

للمزيد من التفاصيل المتعلقة بكيفية استخدام برنامج Excel لحل مسائل البرمجة الخطية و غير الخطية، يمكن العودة إلى المراجع المختلفة لهذا البرنامج.



متغيرات المسألة	قيم إبتدائية
x1=	4
x2=	5
x3=	0

أمثال المتراجحات			الطرف الأيسر للمتراجحة	الطرف الأيمن للمتراجحة
3	-1	2	7	7
-2	4	0	12	12
-4	3	8	-1	10

أمثال تابع الهدف			قيمة تابع الهدف
1	-3	-2	-11

V – 4 مسائل غير محلولة

1 - أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة السمبلكس، ثم أوجدها باستخدام الحاسب. قارن بين النتائج التي تحصل عليها.

a) Max $Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

S.t.

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le -1$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

b) Min $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$$x_1 + x_2 - x_3 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

c) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

S.t.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

d) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

S.t.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -6$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$$

2 - أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة M الكبيرة ثم أوجدها باستخدام الحاسب. قارن بين النتائج التي تحصل عليها.

a) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2$

S.t.

$$4x_1 + x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

b) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

c) $\text{Min } z = 4x_1 + 6x_2$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 \ge 10$$
$$x_1 + 2x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 14$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

الفصل السادس

المسألة المرافقة لمسألة برمجة رياضية خطية

The Duality

VI -1 مقدمة

ترتبط كل مسألة برمجة خطية بنموذج أولـــي (Primal Model) مــن نمـــاذج البرمجة الخطية، ويقترن دائماً بهذا النموذج نموذج آخر يطلق عليه النموذج المرافـــق (Dual Model)، ولكل نموذج مرافق حل أمثل ينطبق تماماً مع حل النموذج الأولـــي. بتعبيرٍ آخر، لكل مسألة برمجة خطية هناك مسألة أخرى مرتبطة بها، نـــسمي إحـــدى هاتين المسألتين بالمسألة الأولية، والأخرى نسميها المـــسألة المرافقـــة. وتمتلـــك كلتـــا المسألتين خصائص مرتبطة بخصائص الأخرى. فمثلاً، الحل الأمثل لإحـــدى هـــاتين المسألتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمسألة الأخرى.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المرافق يتضمن فوائد متعـــددة منهـــا ســـهولة التوصل إلى الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي. كذلك من فوائد النموذج المرافق أنه يمكّننا من اختبار الحل الابتدائي من غيـــر الحاجة إلى إضافة متغيرات اصطناعية فضلاً عن مساعدتها في إيجاد التحليل لما بعـــد الأمثلية (Post Optimality) وتحليل الحساسية.

VI – 2 تعريف تعريف المسألة المرافقة (Dual Form)

نعرّف في هذه الفقرة المسألة المرافقة عندما تكون المسألة الأولية معطاة بإحدى الصيغتين:

1 – الصيغة المعيارية.

2 – الصيغة النموذجية.

وسندرس المسألة المرافقة لكل صيغة بشكل منفصل.

VI – 1-2 المسألة المرافقة عندما تكون المسألة الأولية بالصيغة المعيارية:

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية بصيغتها المعيارية الآتية:

$$\text{Max} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le b_i \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

وقد رأينا سابقاً أنه يمكن كتابة أية مسألة برمجة خطية بالصيغة المعيارية.

إذا افترضنا أن هذه المسألة هي المسألة الأولية، فإن المسألة المرافقة لها تعطى بالشكل:

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, y_i \ge c_j \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

$$y_i \ge 0 \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

حيث $y_1 , y_2 , \dots , y_m$ هي المتغيرات المرافقة.

لقد تم تشكيل المسألة المرافقة من المسألة الأولية (بالصيغة المعيارية)، والعكس بالعكس وفق الخطوات الآتية:

1. يقابل كلّ قيد في إحدى المسألتين متغير في المسألة الأخرى.
2. ثوابت الطرف الأيمن في إحدى المسألتين هي معاملات تابع الهدف في المسألة الأخرى وبالترتيب نفسه.
3. إذا كان الهدف من إحدى المسألتين هو إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف، فإن هدف المسألة المرافقة يكون إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف.

4. في مسألة الحصول على أكبر ربح، تكون جميع القيود بشكل متراجحات (أصغر أو يساوي). وفي مسألة تخفيض التكاليف، تكون جميع القيود بشكل متراجحات (أكبر أو يساوي).

5. المتغيرات في كلتا المسألتين تحقق شرط عدم السلبية.

مثـــال "1":

أوجد المسألة المرافقة لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{array}{rl} x_1 + 9x_2 \le 60 & y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 45 & y_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 & y_3 \\ x_2 \le 30 & y_2 \end{array} \Bigg\} \text{المتغيرات المرافقة}$$

$$(x_1, x_2) \ge 0$$

الحـــل:

ليكن y_1 المتغير المرافق المقابل للقيد الأول، و y_2 المتغير المرافـــق المقابـــل للقيد الثاني، y_3 المتغير المرافق المقابل للقيد الثالث، y_4 المتغير المرافق للقيد الرابع في المسألة الأولية. فتكون المسألة المرافقة كما يأتي:

$$\text{Min } Y_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

$$\text{S.t.}$$

حل بطريقة الجبرية

$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 5$$

$$9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 6$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \ge 0$$

نلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المسألة الأولية هي منقول مـــصفوفة أمثـــال القيود في المسألة المرافقة. ونلاحظ في هذا المثال، أن عدد القيود في المسألة المرافقـــة أقل منها في المسألة الأولية. بما أن الحل الأمثل لإحدى المسألتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمسألة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل المسألة المرافقة في هذه

الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مسألة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات . وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المسائل المرافقة.

VI – 2-2 المسألة المرافقة عندما تكون المسألة الأولية بالصيغة النموذجية:

عندما تكون المسألة الأولية معطاة بالصيغة النموذجية، فإننا نحصل على المسألة المرافقة بتنفيذ الخطوات نفسها التي رأيناها في الفقرة السابقة (عندما كانت المسألة الأولية بالصيغة المعيارية)، مع ملاحظة فرق وحيد، وهو أن المتغير المرافق المقابل لقيد المساواة في المسألة الأولية لا يكون مقيداً (أي لا يفرض عليه شرط عدم السلبية). وبالعكس، إذا كان هناك متغير في المسألة الأولية غير مقيد، فسيقابله قيد بشكل مساواة في المسألة المرافقة.

بشكل عام، إذا كانت المسألة الأولية معطاة بالصيغة النموذجية كما يأتي:

$$\text{Max} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \boxed{=} b_i \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

فإن المسألة المرافقة هي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

$$y_i \ \substack{\leq \\ \geq} \ 0 \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

حيث نعني بالقيد الأخير أن y_i غير مقيدة ويمكن أن تأخذ قيماً موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر. ومن جهة أخرى، إذا كانت المسألة الأولية معطاة بالشكل:

$$\text{Max} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

S.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \underset{\geq}{\leq} 0 \qquad \forall \; j$$

فإن المسألة المرافقة هي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \, y_i$$

S.t.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; y_i = c_j \qquad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

نلاحظ في هذه الحالة، أن المسألة المرافقة تكون بالصيغة النموذجية.

مثـــال "2":

لتكن مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max} \;\; X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$ الصيغة المعيارية

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) \geq 0$$

إن الصيغة النموذجية لهذه المسألة هي:

$$\text{Max} \;\; X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0 \, . \, S_1$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 5 \qquad y_1$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \qquad y_2$$
$$(x_1 \, , \, x_2 , \, x_3 \, , \, S_1) \geq 0$$

المسألة المرافقة تعطى بالشكل:

$$\text{Min } Y_0 = 5y_1 + 2y_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0$$

y_2 غير مقيدة

VI – 3 الحل الأمثل للمسألة المرافقة بحسب الطريقة المبسطة

نبين في هذه الفقرة أنه يمكن الحصول على الحل الأمثل للمسألة المرافقة مباشرة من جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية. سنفترض أن القيود في مسألة البحث عن قيمة صغرى ستكون من الشكل ($\geq$ أو $=$) أكبر أو يساوي أو مساواة.

أما القيود في مسألة البحث عن قيمة عظمى ستكون من الشكل ($\leq$ أو $=$) أصغر أو يساوي أو مساواة.

VI – 3-1 العلاقة بين قيمتي تابعي الهدف في المسألتين الأولية والمرافقة:

لتكن X_0 قيمة تابع الهدف في المسألة الأولية والتي نبحث فيها عن القيمة العظمى. لتكن Y_0 قيمة تابع الهدف في المسألة المرافقة والتي نبحث فيها عن القيمة الصغرى. فمن أجل إيجاد حلين لهاتين المسألتين الأولية والمرافقة، يكون لدينا:

$$X_0 \leq Y_0$$

بالإضافة إلى ذلك، عند نقطة الحل الأمثل لهاتين المسألتين يكون:

$$\text{Max } X_0 = \text{Min } Y_0$$

للبرهان على العلاقة الأولى $X_0 \leq Y_0$:

إنَّ القيود في المسألة الأولية هي من الشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

لنضرب الطرفين بـ $y_i \geq 0$، ولنشكل الجمع على كل i فنجد:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = Y_0 \qquad (1)$$

كما أن القيود في المسألة المرافقة هي من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad ; \quad j=1,2,...,n$$

لنضرب الطرفين بـ $x_j \geq 0$، ولنشكل الجمع على كل j فنجد:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = X_0 \qquad (2)$$

بما أن الطرف الأيسر في العلاقة (1) مساوٍ للطرف الأيسر في العلاقة (2)، نجد أن:

$$X_0 \leq Y_0$$

أما العلاقة الثانية $Max\ X_0 = Min\ Y_0$، فيمكن التحقق منها من خلال حل بعض الأمثلة بالطريقة المبسطة، وملاحظة أن قيمتي تابع الهدف المثاليتين في المسألة الأولية والمسألة المرافقة تكونان متساويتين دائماً.

مثال "3":

لتكن لدينا المسألة الأولية الآتية:

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \qquad y_1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \qquad y_2 \rightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

Min w = $5y_1 + 2y_2$
s.t
$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$2y_1 - y_2 \geq 12$
$y_1 + 3y_2 \geq 4$
$y_1 \geq 0$
y_2 حرة

لنوجد حل هذه المسألة بحسب الطريقة المبسطة.

الحل:

نقوم أولاً بكتابتها وفقاً للصيغة النموذجية بإضافة متغير فروق S_1 إلى القيد الأول، ثم نضيف متغيراً اصطناعياً للقيد الثاني، فتصبح المسألة كما يأتي:

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0 \,.\, S_1 - MR_1$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 = 2$$

$$(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,, S_1\,, R_1) \geq 0$$

لنرتب البيانات في الجدول الآتي، حيث اعتمدنا الحل الصفري حلاً أساسياً أولياً.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad , \quad S_1 = 5 \quad \text{و} \quad R_1 = 2$$

الجدول (1)

Max = Z -MR

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-5	-12	-4	0	+M	0
S_1	0	1	2	1	1	0	5
R_1	0	2	-1	3	0	1	2

نضرب سطر R_1 بـــ $-M$ ونجمعه إلى سطر X_0 لكي نحصل على حل أولي ممكن حسب الطريقة المبسطة.

الجدول (2)

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-2M
S_1	0	1	2	1	1	0	5
R_1	0	2	-1	3	0	1	2

من الجدول (2) نلاحظ أنه يجب إدخال المتغير x_3 للحل وإخراج المتغيـــر R_1، فنحصل على الجدول الآتي:

الجدول (3)

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-7/3	-40/3	0	0	4/3 + M	8/3
S_1	0	1/3	7/3	0	1	-1/3	13/3
x_3	0	2/3	-1/3	1	0	1/3	2/3

من هذا الجدول نلاحظ أنه يجب إدخال المتغير x_2 إلى الحل، وإخراج المتغيـــر S_1، فنجد:

الجدول (4)

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-3/7	0	0	40/7	-4/7 + M	192/7
x_2	0	1/7	1	0	3/7	-1/7	13/7
x_3	0	5/7	0	1	1/7	2/7	9/7

الآن يجب إخراج المتغير x_3 للحل، وإدخال المتغير x_1، وهذا يؤدي إلى:

الجدول (5)

		s_1	s_2	s_3	y_1	y_2	
	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	0	0	3/5	29/5	-2/5 + M	141/5
x_2	0	0	1	-1/5	2/5	-1/5	8/5
x_1	0	1	0	7/5	1/5	2/5	9/5

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للمسألة الأولية.

$$\text{Max } X_0 = 141/5 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 8/5 \quad , \quad x_1 = 9/5$$

إن المسألة المرافقة لهذه المسألة الأولية هي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = 5\,y_1 + 2\,y_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2\,y_2 &\geq 5 \\ 2\,y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3\,y_2 &\geq 4 \\ y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

لنحل المسألة المرافقة بحسب الطريقة المبسطة: بما أن المتغير y_2 غير مقيـــد، فيجب تعويضه كما تعلمنا سابقاً بالشكل الآتي:

$$y_2 = y_2' - y_2'' \qquad ; \quad y_2' \geq 0 \quad , \quad y_2'' \geq 0$$

فتصبح المسألة المرافقة كالآتي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2' - 2y_2''$$

S.t.

$$y_1 + 2y_2' - 2y_2'' \geq 5$$
$$2y_1 - y_2' + y_2'' \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2' - 3y_2'' \geq 4$$
$$(y_1 ,\ y_2' ,\ y_2'') \geq 0$$

لنكتب هذه المسألة بالصيغة النموذجية، كما يأتي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2' - 2y_2'' + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3$$

S.t.

$$y_1 + 2y_2' - 2y_2'' - S_1 = 5$$
$$2y_1 - y_2' + y_2'' - S_2 = 12$$
$$y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - S_3 = 4$$
$$(y_1 ,\ y_2' ,\ y_2'' , S_1 , S_2 , S_3) \geq 0$$

نلاحظ أنه لا يمكننا البدء بالحل الصفري بوصفه حلاً أولياً أساسياً للطريقة المبسطة، لذلك نضيف المتغيرات الاصطناعية، فتصبح المسألة كما يأتي:

$$\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2' - 2y_2'' + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + $$
$$+ MR_1 + MR_2 + MR_3$$

S.t.

$$y_1 + 2y_2' - 2y_2'' - S_1 + R_1 = 5$$
$$2y_1 - y_2' + y_2'' - S_2 + R_2 = 12$$
$$y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - S_3 + R_3 = 4$$
$$(y_1 ,\ y_2' ,\ y_2'' , S_1 , S_2 , S_3 , R_1 , R_2 , R_3) \geq 0$$

من أجل سهولة الكتابة نضع:

$$y_2 = y_2' \qquad \& \qquad y_3 = y_2''$$

ولنرتب البيانات في الجدول الآتي:

الجدول (1)

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	0
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

نضرب كلاً من أسطر R_1 , R_2 , R_3 بـ M ونجمعها إلى سطر التابع الهدف Y_0، فنجد:

الجدول (2)

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	-5+4M	-2+4M	2-4M	-M	-M	-M	0	0	0	21M
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

بإجراء خطوات المسألة المبسطة، وبعد خمسة تكرارات، نحصل على الحل الأمثل للمسألة المرافقة:

الجدول (3)

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	0	0	0	-9/5	-8/5	0	9/5-M	8/5-M	-M	141/5
S_3	0	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
y_3	0	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	1/5	0	2/5
y_1	0	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5

من هذا الجدول نجد الحل الأمثل للمسألة المرافقة وهو:

$$\text{Min } Y_0 = 141/5 \ , \ y_2 = -2/5 \ \Leftarrow \ y_2' = y_2 = 0 \ , \ y_2'' = y_3 = 2/5 \ , \ y_1 = 29/5$$

نلاحظ من هذا المثال، أنه من أجل الحل الأمثل للمسألتين الأولية والمرافقة يكون:

$$\text{Max } X_0 = \text{Min } Y_0 = 141/5$$

$S_1 \longrightarrow y_1$
$R_1 \longrightarrow y_2$

VI – 2-3 العلاقة بين القيم المثلى للمتغيرات في المسألتين الأولية والمرافقة

إن عدنا إلى المثال السابق، ولاحظنا أن المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي للمسألة الأولية هي S_1 و R_1. فإن المتغير المرافق المقابل للقيد الذي يحوي S_1 هو المتغير y_1، والمتغير المرافق المقابل للقيد الذي يحوي R_1 هو المتغير y_2. الآن، لو نظرنا إلى معاملات المتغيرين S_1 و R_1 في سطر تابع الهدف X_0 في جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية لوجدنا:

متغيرات الحل الأساسي المبدئي للمسألة الأولية	S_1	R_1
المعاملات المقابلة في سطر التابع الهدف في جدول الحل الأمثل	29/5	-2/5 + M
المتغيرات المرافقة المقابلة لها	y_1	y_2

لو أهملنا M حالياً، لوجدنا أن القيم 29 / 5 , 5 / 2- تعطي مباشرة الحل الأمثل للمسألة المرافقة أي $y_1 = 29/5$, $y_2 = -2/5$، وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها إن حللنا المسألة المرافقة بشكل مستقل، فهذه النتيجة لا يمكن اعتبارها مصادفة، لأنه لو نظرنا أيضاً إلى المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي للمسألة المرافقة لوجدناها R_1 , R_2 , R_3 ولوجدنا أن المعاملات المقابلة لهذه المتغيرات في سطر التابع الهدف Y_0 في جدول الحل الأمثل هي:

متغيرات الحل الأساسي المبدئي للمسألة الأولية	R_1	R_2	R_3
المعاملات المقابلة في سطر التابع الهدف Y_0 في جدول الحل الأمثل	9/5 - M	8/5 - M	0 - M
المتغيرات المرافقة المقابلة لها في المسألة الأولية	x_1	x_2	x_3

مرة أخرى، لو أهملنا M، لوجدنا أن هذه المعاملات تعطي الحل الأمثل للمسألة الأولية مباشرة $x_1 = 9/5$, $x_2 = 8/5$, $x_3 = 0$. وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها عند حل المسألة الأولية بشكل مستقل. وبشكل مختصر، نقول إن الحل الأمثل

للمسألة الأولية (المرافقة) يعطي مباشرة الحل الأمثل للمسألة المرافقة (الأولية). ويمكن أن نعبر عن ذلك وفقاً للقاعدة الآتية:

1. إذا كانت المتغيرات المرافقة تقابل متغيرات الفروق في الحل المبدئي في المسألة الأولية، فإن القيم المثلى لهذه المتغيرات المرافقة يُحصل عليها مباشرة من معاملات متغيرات الفروق (تلك التي في سطر تابع الهدف) في جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية.
2. إذا كانت المتغيرات المرافقة تقابل متغيرات اصطناعية في الحل المبدئي في المسألة الأولية، فإن القيم المثلى لهذه المتغيرات المرافقة يُحصل عليها مباشرة من معاملات المتغيرات الاصطناعية تلك التي في سطر تابع الهدف من جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية بعد إهمال M.

مثال "4":

لقد أوجدنا الحل الأمثل للمسألة الآتية في الفصل الرابع (مثال2):

$$\text{Max} \quad X_0 = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$Y_1 \leftarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430 \quad \rightarrow S_1$$

$$Y_2 \leftarrow \quad 3x_1 + 2x_3 \le 460 \quad \rightarrow S_2$$

$$Y_3 \leftarrow \quad x_1 + 4x_2 \le 420 \quad \rightarrow S_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

حيث كانت المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي بحسب الطريقة المبسطة هي S_1 , S_2 , S_3 ، وهي متغيرات الفروق في القيود الأول والثاني والثالث على الترتيب. وكان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة كالآتي:

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
X_0	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	-1/4	1	0	½	-1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

$Y_1 = 1$, $Y_2 = 2$, $Y_3 =$

وكما هو واضح في هذا الجدول، فإن الحل الأمثل للمسألة الأولية هو:

$$\text{Max}X_0 = 1350,\ S_3 = 20,\ S_1 = S_2 = 0,\ x_3 = 230,\ x_2 = 100,\ x_1 = 0$$

إن المسألة المرافقة للمسألة الأولية المعطاة في هذا المثال هي:

$$\text{Min}\quad Y_0 = 430\,y_1 + 460\,y_2 + 420\,y_3$$

$$\begin{aligned}
\text{S.t.}\quad & y_1 + 3\,y_2 + y_3 \geq 3 \\
& 2\,y_1 + 4\,y_3 \geq 2 \\
& y_1 + 2\,y_2 \geq 5 \\
& (y_1, y_2, y_3) \geq 0
\end{aligned}$$

يمكننا الحصول على الحل الأمثل لهذه المسألة مباشرة من جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية كما يأتي:

$$\text{Min}\ Y_0 = 1350,\ S_2 = S_3 = 0,\ S_1 = 4,\ y_3 = 0,\ y_2 = 2,\ y_1 = 1$$

يمكن للطالب التأكد من هذا الحل، وذلك بحل المسألة المرافقة بتطبيق الطريقة المبسطة.

VI – 4 مسائل غير محلولة

1 – أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) ثم أوجد البرنامج المرافق لكل منها واستنتج حلّه مباشرة.

صيغة معيارية

a) $\text{Max}\ Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\begin{aligned}
\text{S.t.}\quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 7 \\
& -x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\
& (x_1, x_2, x_3) \geq 0
\end{aligned}$$

$\text{Min}\ Z = 7y_1 - y_2$
s.t
$2y_1 - y_2 \geqslant -2$
$y_1 + y_2 \geqslant 1$
$4y_1 - y_2 \geqslant -3$
$(y_1, y_2) \geqslant 0$

b) $\text{Min}\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned}
\text{S.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\
& (x_1, x_2) \geq 0
\end{aligned}$$

$\text{Max}\ Z = 4y_1 + 5y_2$
s.t
$y_1 + 2y_2 \leq 1$
$y_1 + y_2 \leq 2$
$-y_1 + y_2 \leq 3$
$(y_1, y_2) \geq 0$

c) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3$ Min

S.t.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \quad y_1 \qquad \ge$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad y_2 \qquad \ge$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

d) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

S.t. مراجعة

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -6$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$$

2 - أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة M الكبيرة ثم أوجد البرنامج المرافق لكل منها واستنتج حلّه مباشرة.

a) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \text{Max } Z = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3$

S.t. s.t

$$4x_1 + x_2 \ge 2 \quad y_1 \qquad 4y_1 + 3y_2 + y_3 \le 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \ge 4 \quad y_2 \qquad y_1 + 6y_2 + y_3 \le 3$$
$$x_1 + x_2 \ge 5 \quad y_3 \qquad (y_1, y_2, y_3) \ge 0$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

b) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

c) $\text{Min } z = 4x_1 + 6x_2 \qquad \text{Max} = 10y + 8y_2 + 14y_3$

S.t. s.t

$$2x_1 + 3x_2 \ge 10 \quad y_1 \qquad 2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad y_2 \qquad 3y_1 + 2y_2 + 6y_3 \le 6$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 14 \quad y_3$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

3 - أوجد حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة M الكبيرة، ومن ثم أوجد البرنامج المرافق واستنتج حله من جدول الحل الأمثل .

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.t.

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le 40$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

4 - أوجد البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي الآتي :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

S.t.

$$18x_1 + 16x_2 \ge 0.5$$
$$0.1x_1 + 0.2x_2 \le 4$$
$$x_1 + 30x_2 \le 50$$
$$14x_1 + x_2 \ge 0.1$$
$$x_1 + 0.05x_2 \le 6$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

ثم أوجد حل البرنامج الخطي المرافق الناتج بطريقة السمبلكس .استنتج حل هذا البرنامج المعطى مباشرة من جدول الحل الأمثل للبرنامج المرافق.

5 - لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

S.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le -2$$
$$3x_1 + 2x_3 = 5$$
$$x_2 - x_3 \ge 1$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة التي تراها مناسبة.

2. اكتب البرنامج المرافق لهذه المسألة واستنتج حلّه.

3. حل البرنامج المرافق بالطريقة التي تراها مناسبة ثم قارن هذا الحل مع الحل المُستنتج من الطلب2.

6 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\le 27 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ -4x_1 + 6x_2 &\ge -12 \\ 8x_1 + 12x_2 &= 24 \\ (x_1\ ,\ x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة:

- بالطريقة البيانية .
- بالطريقة المبسطة (السمبلكس).

2. اكتب البرنامج الخطي المرافق لهذه المسألة واستنتج حلّه.

7 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\ge -5 \\ 5x_1 - 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ (x_1\ ,\ x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة:

- بالطريقة البيانية .
- بالطريقة المبسطة (السمبلكس).

2. اكتب البرنامج الخطي المرافق لهذه المسألة واستنتج حلّه من جدول الحل الأمثل الذي حصلت عليه بطريقة السمبلكس.

الفصل السابع

تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

VII – 1 مقدمة

عند إيجاد النموذج الرياضي الممثل لأي مسألة، نلجأ في كثير من الأحيان إلى التقريب، سواء بتقريب الأعداد أو بتحويل المسألة من مسألة برمجة غير خطية إلى مسألة برمجة خطية أو بإهمال بعض المعاملات التي نظن أن يكون تأثيرها في حل المسألة محدوداً. كما أنه في الحياة العملية (في المصانع والمؤسسات) نادراً ما تكون المعطيات معروفة بدقة. تشكل هذه المعطيات معاملات دالة الهدف $(C_j, j=1,2,...,n)$ ومعاملات قيود المسألة a_{ij} بالإضافة إلى الكميات الثابتة التي تشكل الطرف الحر في هذه القيود $(b_i, i=1,2,...,m)$. يعني هذا أن معاملات النموذج الرياضي الذي نعتمده لحل المسألة ليس معروفاً بصورة حتمية ودقيقة، بل يخضع لاعتبارات يصعب في أحيان كثيرة تعيينها.

VII – 2 مفهوم تحليل الحساسية

عالم اليوم هو عالم سريع التغير فكل شيء خاضع للتغيير ولا يوجد متغير واحد ثابت. لذلك لا بد من إيجاد طرق ووسائل يتم بواسطتها تقييم البرامج ومعرفة مدى تأثير هذه التغيرات في الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه من دون إعادة صياغة المسألة مرة أخرى كلما طرأ طارئ أو تغير حال من الأحوال. فمثلاً، إذا أعددنا البرنامج الممثل لمسألة تحديد الخطة الإنتاجية من النفط على أساس سعر البرميل الواحد من النفط في السوق المحلي، فماذا سيحدث للخطة لو تغيرت أسعار النفط؟ هل يتطلب الأمر إعادة تخطيط الإنتاج من جديد وإعادة حل البرنامج الإنتاجي أو أن هناك أساليب أخرى يمكن الرجوع إليها أو الاستعانة بها.

في مثل هذه الحالات يتم اللجوء إلى استخدام ما يسمى بتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية والذي يدرس أثر التغيرات التي تحدث في النموذج الأولي للمشكلة وذلك عن طريق الاعتماد على آخر جدول في حل النموذج الرياضي (على الحل الأمثل) وحساب أثر هذة التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل المسألة مجدداً. يمكن تصنيف التغيرات التي قد تطرأ على النموذج الأولي وفق الآتي:

- تغير في قيم معاملات تابع الهدف.
- تغير في قيم الطرف الأيمن للقيود.
- تغير في معاملات المتغيرات في القيود.
- إضافة متغيرات جديدة.
- إضافة قيد جديد إلى النموذج.

النتائج التي يمكن أن تحدث من التغيرات المذكورة أعلاه:

- أن يبقى الحل الأمثل كما هو دون أي تغيير.
- قد يتغير الحل الأمثل بأكمله.
- قد يبقى الحل الأمثل (قيمة تابع الهدف) كما هو ولكن قد تتغير قيم المتغيرات بعضها أو كلها.

من أجل دراسة المشكلة بصورة تفصيلية يتطلب الأمر دراسة تأثير تلك المعطيات في الحل الأمثل الذي تم الوصول إليه – باستخدام الطريقة المبسطة أو الطريقة البيانية – سواء في استخراج الحل أو اتخاذ القرار المناسب.

VII – 3 دراسة الحساسية عند استخدام الطريقة البيانية

لبيان تحليل الحساسية عند استخدام الطريقة البيانية في إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية ندرس المثال الآتي:

مثـــال "1":

يريد صاحب أرض زراعية دراسة التأثير الاقتصادي عند زراعة أرضه بنوعين من المحاصيل هما القمح والشعير. يعرف صاحب الأرض من خلال تجاربه

السابقة أن الهكتار الواحد من القمح يتطلب كمية من المياه أكثر مما يتطلبه محصول الشعير، وكذلك فإن القمح يحتاج إلى أيد عاملة أكثر مما يتطلب الشعير. لكن إنتاج الهكتار الواحد من الشعير يكون أعلى من إنتاج الهكتار الواحد من القمح علماً أن السعر يتغير من سنة إلى أخرى ولكن السعر الحالي هو 100 دولار للطن الواحد من القمح و50 دولار للطن الواحد من الشعير. تم تجميع المعطيات المتعلقة بهذه المسألة في الجدول الآتي:

المحصول	الأيدي العاملة (عدد العمال)	كمية المياه المطلوبة للهكتار الواحد بآلاف الأمتار المكعبة	الإنتاج طن/هكتار
القمح	2	3	2
الشعير	1	2.5	3
المتوافر	9	18	

المطلوب: اكتب البرنامج الخطي الممثل لهذه المسألة ثمّ ادرس تأثير التغير في الأيدي العاملة، وكمية المياه، والأسعار في السوق المحلية وما تأثيرها في الحل الأمثل؟

الحل:

نفرض أن X_1 هو عدد الهكتارات المزروعة بالقمح وأن X_2 هو عدد الهكتارات المزروعة بالشعير. وبما أن سعر الطن الواحد من القمح هو 100 دولار وأن الهكتار الواحد ينتج 2 طن فإن الأرباح المتوقعة (إجمالي المبيعات) تساوي $200*X_1$.

وبالطريقة نفسها، فإن الأرباح المتوقعة (إجمالي المبيعات) من محصول الشعير تساوي $150*X_2$. أي أن الأرباح الكلية تساوي Z حيث:

$$Z = 200\,X_1 + 150\,X_2$$

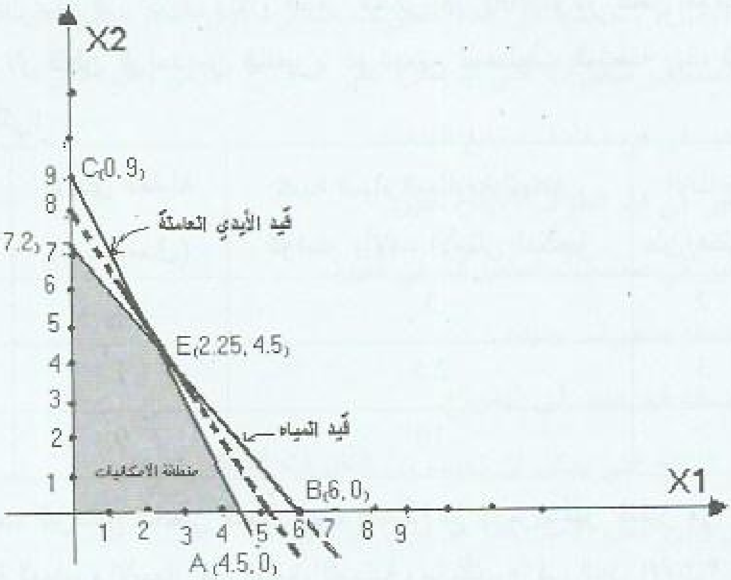
ويهدف صاحب الأرض إلى جعل Z أعلى ما يمكن.

أما القيود فهي:

- قيد الأيدي العاملة: $2X_1 + X_2 \leq 9$
- قيد المياه: $3X_1 + 2.5X_2 \leq 18$

• شروط عدم السلبية: $X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$

بما أن المسألة أعلاه تتكون من متغيرين فقط فإنه يمكن إيجاد حلها الأمثل بالطريقة البيانية، كما في الشكل(1).



الشكل(1): التمثيل البياني للمثال 1

من الشكل نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي E(2.25, 4.5) أي أنه من أجل تحقيق أفضل مردود يجب على المزارع أن يزرع 2.25 هكتاراً من القمح و4.5 هكتار من الشعير وبذلك يصبح مجموع أرباحه (المبيعات الاجمالية) يساوي 1125 دولار. وهذا يعني أن كلاً من X_1 وX_2 هما متغيران أساسيان يؤثران في الحل الأمثل إذا تغيرت قيمهما.

ملاحظة '1':

من أجل دراسة مقدار التغير ولكي يبقى الحل أمثل سنستعين بالخطوط البيانية أولاً. نحن نعلم أن الميل m لمستقيم يعطى بالعلاقة الآتية:

$$aX_1 + bX_2 = c \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{a}{b}.$$

ولذا فإن ميل دالة الهدف تكون كما يأتي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{C_1}{C_2} = -\frac{200}{150}$$

حيث C_1 هو ربح الهكتار الواحد المزروع بالقمح وC_2 ربح الهكتار الواحد المزروع بالشعير. نرمز لتابع الهدف على الشكل بالخط المتقطع المار بنقطة الحل الأمثل.

VII– 3-1 تغيير معاملات تابع الهدف

إذاً افترضنا أن أسعار الطن الواحد من القمح تتغير (تتذبذب) وغير ثابتة فما هو الحد الأدنى وما هو الحد الأعلى لسعر الطن الواحد لكي يبقى البرنامج الإنتاجي مقبولاً ويحقق الأرباح المنشودة. من أجل الإجابة عن هذا السؤال ننظر إلى تابع الهدف (الخط المتقطع) الذي يمكن تدويره يميناً وشمالاً.

إذا ارتفع سعر الطن الواحد من القمح وثبت سعر الشعير فإن المنطق يقول إنه من الأفضل أن نزرع القمح. بعبارة أخرى إذا زادت قيمة C1 فإن الميل $-\frac{C_1}{150}$ سيزداد بالسالب وهذا يؤدي إلى دوران الخط المتقطع باتجاه اليمين (باتجاه عقارب الساعة) حتى ينطبق على قيد الأيدي العاملة. ويعني هذا أن ميل الخط المتقطع يساوي ميل قيد الأيدي العاملة وفي حالة تدوير الخط المتقطع إلى جهة اليمين أكثر من ذلك فإن الحل الأمثل سيتغير. إذاً الحل الأمثل يبقى مادام الخط المتقطع لم يدوَّر بمقدار أكبر من ميل الأيدي العاملة. وبعبارة أخرى:

$$-\frac{C_1}{150} \geq -\frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad C_1 \leq 300$$

بما أن C_1 تشكل ربح الهكتار الواحد من القمح وبما أن الهكتار ينتج 2 طن، فإن الحد الأعلى هو 150 دولاراً. وإذا ارتفع السعر أكثر من 150 فإن الخطة الإنتاجية ستكون زراعة القمح فقط دون الشعير.

أما إذا انخفض سعر الطن الواحد من القمح فهذا سيؤدي إلى دوران الخط المتقطع باتجاه اليسار (بعكس اتجاه عقارب الساعة) حتى ينطبق على قيد المياه، وهذا يعني أن سعر الطن الواحد يجب ألا يكون أقل من 9090 دولار لأن:

$$-\frac{C_1}{150} \le -\frac{3}{2.5} \quad \Rightarrow \quad C_1 \ge \frac{3*150}{2.5} = \frac{450}{2.5} = 180$$

أما إذا ارتفع سعر الطن الواحد من الشعير وثبت سعر القمح فإن المنطق يقول إن زراعة الشعير ستكون أكثر ربحاً. بعبارة أخرى إذا زادت قيمة C_2 فإن الميل $-\frac{200}{C_2}$ سينخفض وهذا يؤدي إلى دوران الخط المتقطع باتجاه اليسار (بعكس اتجاه عقارب الساعة) حتى ينطبق على قيد المياه. وفي حالة تدوير الخط المتقطع إلى جهة اليسار أكثر من ذلك فإن الحل الأمثل سيتغير. إذاً الحل الأمثل يبقى مادام الخط المتقطع لم يدوَّر بمقدار أصغر من ميل قيد المياه. وبعبارة أخرى:

$$-\frac{200}{C_2} \le -\frac{3}{2.5} \quad \Rightarrow \quad C_2 \le \frac{200*2.5}{3} = \frac{500}{3} = 166.67$$

بما أن C_2 تشكل ربح الهكتار الواحد من الشعير وبما أن الهكتار ينتج ٣ طن، فإن الحد الأعلى هو 55.56 دولاراً. وإذا ارتفع السعر أكثر من ذلك فإن الخطة الإنتاجية ستكون زراعة الشعير فقط دون القمح.

أما إذا انخفض سعر الطن الواحد من الشعير فسيؤدي هذا إلى دوران الخط المتقطع باتجاه اليمين (يزداد الميل بالسالب) حتى ينطبق على قيد الأيدي العاملة. وهذا يعني أن سعر الطن الواحد يجب ألا يكون أقل من 33.33 دولار لأن:

$$-\frac{200}{C_2} \ge -\frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad C_2 \ge 100$$

أي أن الحد الأدنى هو 33.33 دولاراً.

VII - 3 – 2 تغير المتوافر (قيم الطرف الأيمن للقيود)

إذا افترضنا توافر 9 عمال فقط، وأردنا معرفة الحد الأدنى والحد الأعلى لعدد العمال بحيث يبقى الحل الأمثل الحالي مقبولاً. بكلام آخر ماذا يحدث إذا ارتفع عدد العمال من 9 إلى a_1 وما مقدار a_1 بحيث يبقى الحل مقبولاً.

بما أن عدد العمال يمثل الكمية الثابتة في قيد الأيدي العاملة فإن ميل هذا القيد سيبقى ثابتاً مهما ازداد عدد العمال أو قلّ. أي أن بالإمكان تحريك قيد الأيدي العاملة

بشكلٍ موازٍ لنفسه مبتعداً عن مبدأ الإحداثيات (نحو الخارج) حتى تنطبق A على B. وهذا هو الحد الأعلى، أي أن أي تحريك إضافي لهذا القيد سيلغي دوره. وبما أن إحداثيات النقطة B هي (6, 0) فإنه يمكن حساب a_1 من المعادلة:

$$6*2+0=a_1 \quad \Rightarrow a_1=12$$

وكما في الشكل وبالطريقة السابقة نفسها يمكن إيجاد الحد الأدنى لعدد العمال وذلك بتحريك القيد الأيدي العاملة بشكلٍ موازٍ لنفسه مقترباً من مبدأ الإحداثيات (نحو الداخل) حتى تنطبق النقطة C على النقطة D وعندها سيكون:

$$2*0+7.2=a_1 \quad \Rightarrow a_1=7.2$$

أي أن الحد الأعلى للعمال هو 12 عاملاً. والحد الأدنى هو 7.2 عمال.

بشكل مشابه، لو افترضنا أن كمية المياه المتوافرة هي 18 ألف متر مكعب للهكتار الواحد فقط. وأردنا معرفة الحد الأدنى والحد الأعلى لكمية المياه بحيث يبقى الحل الأمثل الحالي مقبولاً. بتعبيرٍ آخر ماذا يحدث إذا ارتفعت كمية المياه من 18 إلى a_2 وما مقدار a_2 بحيث يبقى الحل مقبولاً.

بما أن كمية المياه تمثل الكمية الثابتة في قيد المياه فإن ميل هذا القيد سيبقى ثابتاً مهما ازدادت كمية المياه أو قلت. أي أن بالإمكان تحريك قيد المياه نحو الداخل حتى تنطبق B على A . وهذا هو الحد الأدنى، أي أن أي تحريك إضافي لهذا القيد سيغير الحل الأمثل. وبما أن إحداثيات النقطة A هي (4.5, 0) فإنه يمكن حساب a_2 من المعادلة:

$$4.5*3+0=a_2 \quad \Rightarrow a_2=13.5$$

وكما في الشكل وبالطريقة السابقة نفسها يمكن إيجاد الحد الأعلى لكمية المياه وذلك بتحريك قيد المياه نحو الخارج حتى تنطبق النقطة D على النقطة C وعندها سيكون :

$$3*0+2.5*9=a_2 \quad \Rightarrow a_2=22.5$$

أي أن الحد الأعلى لكمية المياه هو 22.5 متر مكعب لكل هكتار. والحد الأدنى هو 13.5 متر مكعب لكل هكتار.

VII - 4 دراسة الحساسية عند استخدام الطريقة المبسطة

لاحظنا – في الفقرة السابقة ومن خلال الطريقة البيانية - كيف يمكن تحليل حساسية الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية للتغييرات التي يمكن أن تحصل على بعض متغيرات تلك المسألة. كما رأينا أنه يمكن تحديد الحدود العليا والدنيا لمتغيرات المسألة دون التأثير في أمثلية الحل الناتج لتلك المسألة.

و لكن السؤال الآن، كيف يمكن إجراء المناقشات السابقة عند حل مسألة برمجة خطية بطريقة أخرى غير الطريقة البيانية.

سنبين في هذه الفقرة كيفية بيان حساسية الحل الأمثل - باستخدام الطريقة المبسطة – لمسألة برمجة خطية. ومن أجل ذلك لنأخذ المثال (1) السابق نفسه والمعطى بالشكل الآتي:

$$\text{Max} \quad Z = 200X_1 + 150X_2$$

أما القيود فهي:

- قيد الأيدي العاملة: $2X_1 + X_2 \leq 9$
- قيد المياه: $3X_1 + 2.5X_2 \leq 18$
- شروط عدم السلبية: $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

VII – 4 – 1 إيجاد الحل بالطريقة المبسطة

لإيجاد الحل بحسب الطريقة المبسطة (السمبلكس)، نضيف مجاهيل الفروق ثم نرتب المعلومات في جدول كالآتي:

الجدول(1)

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-200	-150	0	0	0
S_1	0	**2**	1	1	0	9
S_2	0	3	5/2	0	1	18

ومن هذا الجدول نجد أنه يمكن تحسين الحل الحالي عن طريق تغيير المجاهيل الأساسية (متغيرات القاعدة). لإنجاز ذلك نجد أنه يجب إدخال المتغير X_1 وإخراج المتغير S_1 لنحصل على الجدول(2) الآتي:

الجدول(2)

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	-50	100	0	900
X_1	0	1	1/2	1/2	0	9/2
S_2	0	0	**1**	-3/2	1	9/2

بمتابعة خطوات الحل المعروفة نجد أن المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج هو S_2 ونحصل على الجدول الآتي:

الجدول(3)

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	25	50	1125
X_1	0	1	0	5/4	-1/2	2.25
X_2	0	0	1	-3/2	1	9/2

نلاحظ أن الجدول(3) هو جدول الحل الأمثل وأن هذا الحل الأمثل مطابق للحل الأمثل الذي حصلنا عليه بالطريقة البيانية.

VII – 4 – 2 تغير معاملات تابع الهدف

السؤال الذي نطرحه الآن هو ماذا سيحدث لو تغيرت أسعار محصول القمح وما هي الحدود الدنيا والعليا للأسعار ويبقى الحل الأمثل الحالي مقبولاً. للإجابة عن هذه التساؤلات لا بد من تقييم الموقف في ضوء ارتفاع وانخفاض سعر الطن الواحد من القمح بافتراض أن سعر الطن الواحد من الشعير سيبقى ثابتاً.

إذا افترضنا أن أسعار الطن الواحد من القمح ستتغير بحيث يزداد مردود الهكتار الواحد بمقدار α_1 فإن معامل X_1 في دالة الهدف سيكون $-(200+\alpha_1)$ حيث α_1 قد تكون موجبة، صفراً، أو سالبة. عند تنفيذ خطوات الحل على الجدول الأولي (الحل الأولي المقبول) فإن الجدول الأخير سيحتوي على α_1 وأن معامل S_1 في دالة الهدف في الجدول الأخير (الحل الأمثل) سيكون:

$$25 + \alpha_1 * \frac{5}{4} \quad \cdots (1)$$

أما معامل S_2 في دالة الهدف في الجدول الأخير سيكون:

$$.50 + \alpha_1 * (-\frac{1}{2}) \quad \cdots (2)$$

ومن أجل أن يبقى الحل في الجدول الأخير حلاً أمثل لابد أن يكون (1) أكبر أو يساوي صفراً وكذلك المقدار(2) لأن المسألة هي مسألة تعظيم والحل يبقى أمثل ما دامت معاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي صفراً والعكس صحيح في حالة التصغير.

لذا فإن:

$$25 + \frac{5}{4}\alpha_1 \geq 0$$

وأن:

$$50 - \frac{\alpha_1}{2} \geq 0$$

وبعبارة أخرى:

$$-20 \leq \alpha_1 \leq 100$$

ومن الجدير بالذكر أن الأمر لايتطلب أن نضيف α_1 إلى معاملات X1 من أجل استخراج الحدود الدنيا والعليا، بل الجدول الأخير يوافينا بالتفاصيل المطلوبة. وفي ضوء ما جاء أعلاه يمكن استنتاج القاعدة الآتية لتحديد الحدود العليا والدنيا لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف.

- اختر صف المتغير الأساسي الذي تود معرفة الحدود الدنيا والعليا لمعامله في دالة الهدف. اختر مثلاً صف X_1.
- افرض أن مقدار التغيير سيكون α_1.
- اختر معاملات دالة الهدف الموجبة فقط ثم اجمعها مع المعاملات المقابلة لها في صف المتغير الأساسي الذي تم اختياره في الخطوة الأولى بعد ضرب المعاملات بالمقدار α_1 ثم جعل المقدار الناتج أكبر أو يساوي صفراً.

وبعبارة أخرى، إذا كان X_i المتغير الأساسي الذي تم اختياره والمعامل الموجب في دالة الهدف هو $\overline{C_j}$ حيث $(i=1,2,...,m \quad \& \quad j=1,2,...,n)$ فإن: $\overline{C_j}+\alpha_i*\overline{a_{ij}}\geq 0$، علماً أن $\overline{a_{ij}}, \overline{C_j}$ عبارة عن المعاملات في جدول الحل الأمثل.

ففي مثالنا السابق نختار X_1 في الصف الثاني i=1 وتكون المعاملات الموجبة هي $\overline{C_3}=25$, $\overline{C_4}=50$ ومن ثم يكون لدينا:

$$\overline{C_3}+\alpha_1*\overline{a_{13}}\geq 0 \quad \& \quad \overline{C_4}+\alpha_1*\overline{a_{14}}\geq 0$$

أو:

$$25+\alpha_1*\frac{5}{4}\geq 0 \quad \& \quad 50+\alpha_1*-\frac{1}{2}\geq 0$$

وبهذا تكون α_1 محصورة بين –20 و100.

وبما أن معامل X_1 أو بعبارة أخرى مبيعات الهكتار الواحد من القمح 200 لذا فإن الحدود العليا والدنيا لهذه المبيعات ستكون بين 20-200و 100+200 أي من 180 إلى 300.

وبالطريقة نفسها نستخرج الحدود الدنيا والعليا لبقية معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف. اختر الآن X_2 حيث I=2 فيكون:

$$\overline{C_3}+\alpha_2*\overline{a_{23}}\geq 0$$

و:

$$\overline{C_4}+\alpha_2*\overline{a_{24}}\geq 0$$

وبعد التعويض عن قيم a_{23}, a_{24}, C_3, C_4 من جدول الحل الأمثل نحصل على:

$$\alpha_2 \geq -50$$

و:

$$\alpha_2 \leq 16.67$$

أو أن الحدود الدنيا والعليا لمحصول الشعير (حيث المبيعات الأصلية تساوي 150 لكل هكتار) ستكون بين 100 و166.67.

نلاحظ أن القيم الواردة أعلاه مطابقة للقيم المستخرجة بواسطة الحل البياني.

VII – 4 – 3 تغيرات الثوابت (الكميات المتوافرة)

كما رأينا أنه يمكن استخراج الحدود الدنيا والعليا لمعاملات دالة الهدف، وبالطريقة نفسها يمكن استخراج الحدود الدنيا والعليا للكميات المتوافرة (الكميات الثابتة في البرنامج الخطي). فإذا افترضنا أن عدد العمال في الجدول الأولي هو $9+\alpha_1$ بدلاً من 9 وتمّ تنفيذ العمليات المحورية على الجداول اللاحقة حتى الوصول إلى الحل الأمثل ستلاحظ أن الكميات الثابتة ستكون:

$$2.25+\alpha_1 * \frac{5}{4} \tag{3}$$

و:

$$4.5+\alpha_1 *(-\frac{3}{2}) \tag{4}$$

ومن أجل أن يبقى الحل أمثلاً فإن المقدارين (3) و(4) يجب أن يكونا أكبر أو مساويين صفراً. بتعبير آخر:

$$2.25+\alpha_1 * \frac{5}{4} \geq 0$$

$$4.5+\alpha_1 *(-\frac{3}{2}) \geq 0$$

ومنه نجد أن:

$$-1.8 \leq \alpha_1 \leq 3 .$$

أو أن عدد العمال يجب أن يتراوح بين 3+9 و9-1.8 ويبقى الحل الأمثل. أي أن عدد العمال يكون محصوراً بين 7.2 و12 عاملاً.

ومن أجل الوصول إلى العلاقة الواردة أعلاه باستخدام الحل الأمثل نتبع الخطوات الآتية:

- تحديد القيد المطلوب لدراسة الكميات الثابتة ذات العلاقة. في مثالنا السابق كان قيد العمال (القيد الأول)، نضع k =1.

• اختيار عمود المتغير غير الأساسي (المكمل) الذي أضيف إلى القيد الأصلي، وفي مثالنا السابق كان (S_1)، نضع $j = n + k$.

• يتحدد مقدار التغير α_k بالصيغة الآتية:

$$b_i + \alpha_k * a_{ij} \geq 0$$

لجميع قيم i.

باتباع الخطوات أعلاه، يمكن استخراج الحدود الدنيا والعليا للقيد الثاني (قيد المياه)، وذلك كما يأتي:

$$2.25 + \alpha_2 * -\frac{1}{.2} \geq 0$$

$$4.5 + \alpha_2 * 1 \geq 0$$

ومنه نجد أن:

$$-4.5 \leq \alpha_2 \leq 4.5$$

أو تكون كمية المياه تتراوح بين (18+4.5) و(18-4.5). أي بين 13.5 و 22.5.

VII – 5 إضافة قيد جديد

يُحوّل القيد المضاف الجديد إلى صيغة قياسية ومن ثم يضاف إلى جدول الحل الأمثل للمسألة قبل التعديل. إذا لم يؤثر القيد المضاف في منطقة الإمكانيات نقول إن هذا القيد مبتذل أو عديم الأهمية. وإذا أدى إلى تغيير في منطقة الإمكانيات، فلا بد من معالجة هذا الوضع. وسنناقش هذا الأمر بالتفصيل عند دراسة البرمجة بقيم صحيحة في الفصل الثامن من هذا الكتاب.

VII – 6 إضافة متغير جديد

إن إضافة متغير جديد قد يؤثر في الحل الأمثل وعليه يجب فحص أثر إضافة هذا المتغير على الحل الأمثل للنموذج قبل التغيير. لنتصور أن المتغير الجديد هو موجود أصلاً في تابع الهدف وفي جملة القيود بمعاملات صفرية. وضمن هذا التصور،

فإن تعديل إضافة متغير جديد يكافئ تماماً تعديلين يطرأان في آنٍ واحد على معامل لتابع الهدف وعلى عموده في مصفوفة معاملات القيود.

VII – 7 مسألة محلولة

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي، ثم حدد مجالات تغير القيم بحيث يبقى الحل الأمثل الذي حصلت عليه مقبولاً.

$$\text{Min} \quad z = 10X_1 + 5X_2$$

$$\text{S.T.}$$

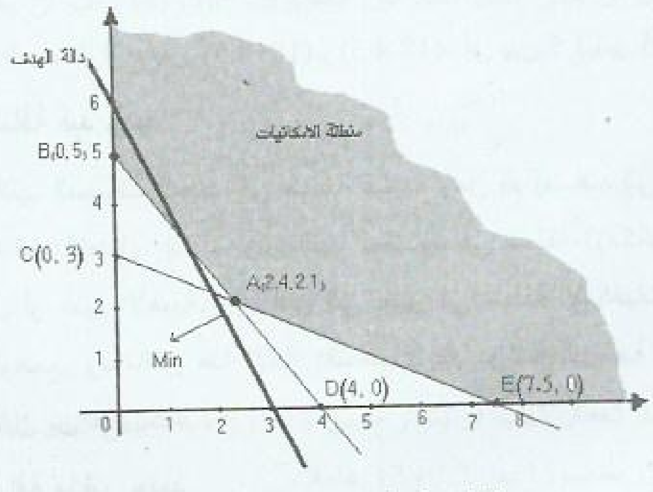
$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$2X_1 + 5X_2 \geq 15$$

$$(X_1, X_2) \geq 0$$

الحل:

باستخدام الطريقة البيانية نجد حل هذا البرنامج الخطي كما يأتي:



الشكل(2): التمثيل البياني للمثال 2

من الرسم البياني نجد أن نقطة الحل الأمثل هي $B(0, 5)$ وأن قيمة تابع الهدف الصغرى هي $Z^*=25$.

الآن نودُّ معرفة التغيرات التي يمكن أن تطرأ على معاملات دالة الهدف بحيث يبقى الحل عند النقطة B.

بفرض أن معامل المتغير X_1 في دالة الهدف هو C_1 وأن معامل المتغير X_2 هو C_2 فيكون ميل دالة الهدف هو $(-\frac{C_1}{C_2} = -\frac{10}{5} = -2)$.

لنبدأ بدراسة التغيرات الممكنة على معامل المتغير X_1، أي التغيرات التي يمكن أن تطرأ على C_1. إذا ارتفعت قيمة C_1 فإن الميل سيزداد بالسالب وأن منحنى دالة الهدف سيعزز من وجود X_1 خارج الحل فيدور ميل دالة الهدف باتجاه عقارب الساعة. لكن إذا حدث العكس وانطبق ميل دالة الهدف على ميل المستقيم الممثل للقيد الأول $5X_1 + 4X_2 = 20$ فإن الحل الأمثل سيقع في النقطة A(2.4,2.1). وإذا كانت كل القيم الأولية ثابتة ما عدا C_1 فإن:

$$-\frac{C_1}{5} = -\frac{5}{4} \Rightarrow C_1 = \frac{25}{4} = 6.25$$

بعبارة أخرى، إذا انخفضت C_1 من 10 إلى 6.25 فإن الحل سيتغير وسيقع على امتداد المستقيم $5X_1 + 4X_2 = 20$. وفي هذه الحالة ستكون نقطة الحل الأمثل هي النقطة A، وإذا استمر الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة حتى ينطبق ميل دالة الهدف على المستقيم الثاني $2X_1 + 5X_2 = 15$ فإن X_2 سيخرج من الحل ويحل محله X_1 وهذا يحصل عندما تكون قيمة C_1 كما يأتي:

$$-\frac{C_1}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow C_1 = \frac{10}{5} = 2$$

أي عندما تنخفض تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج X_1 إلى 2.

أما فيما يخص التغيرات التي يمكن أن تطرأ على معامل المتغير X_2، بالطريقة نفسها نجد أنه كلما انخفض C_2 فإن X_2 سيبقى من ضمن الحل. أما إذا ازداد C_2 فإن ميل دالة الهدف يكون أعلى من ميل المستقيم $5X_1 + 4X_2 = 20$، أي:

$$-\frac{10}{C_2} > -\frac{5}{4} \Rightarrow C_2 < 8$$

وذلك لأن دالة الهدف تدور فقط حول المستقيم $5X_1 + 4X_2 = 20$.

يمكننا أيضاً دراسة التغيرات التي تطرأ على الكميات الثابتة كما يأتي:

في القيد الأول، مطلوب أن تكون b_1 أكبر أو تساوي 20. فما هي الحدود الدنيا والعليا لـ b_1 بحيث يبقى الحل مقبولاً. واضح أنه يمكن لـ b_1 أن تزداد إلى ∞ ، أما الحد الأدنى لها هو إذا انطبقت النقطة B(0, 5) على النقطة C(0, 3). أي إذا تمَّ تحريك القيد بعكس اتجاه عقارب الساعة حتى يصبح قيداً ملغى (فائضاً) وهذا يعني أن:

$$5*0+4*3=b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1=12$$

بتعبيرٍ آخر يبقى الحل الأمثل إذا بقيت قيمة b_1 أكبر من 12.

وبالطريقة نفسها نجد أن الحد الأعلى لـ b_2 هو ∞، أما الحد الأدنى فيحسب حينما تنطبق النقطة E(7.5, 0) على النقطة D(4, 0) ، أي:

$$2X_1+5X_2=b_2$$
$$2*4+0*5=b_2$$
$$8=b_2$$

أي يبقى الحل أمثلاً إذا كان $b_2 \geq 8$.

ومن ثم يبقى الحل الأمثل الذي حصلنا عليه حلاً أمثل إذا كان مجال تغير الكميات الثابتة كما يأتي:

$$12 \leq b_1 \leq \infty$$
$$8 \leq b_2 \leq \infty$$

ونترك للقارئ دراسة حساسية الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي – باستخدام الطريقة المبسطة– للتغيرات التي يمكن أن تحصل على الكميات الثابتة ومعاملات دالة الهدف.

VII – 8 مسائل غير محلولة

1 – أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة)، ثمَّ بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالة الهدف في كل برنامج.

a) Max $Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

S.t.

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le -1$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

b) Min $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$$x_1 + x_2 - x_3 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

c) Max $Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

S.t.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

d) Max $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

S.t.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -6$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$$

2 – أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة M الكبيرة، ثمَّ بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالة الهدف في كل برنامج.

a) Min $z = 2x_1 + 3x_2$

S.t.

$$4x_1 + x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

b) Min $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

c) Min $z = 4x_1 + 6x_2$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 \ge 10$$
$$x_1 + 2x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 14$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

3 - أوجد حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة M الكبيرة ، ومن ثم ادرس حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على الكميات المتوافرة في البرنامج .

Max $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le 40$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

4 - لنفرض أن المعاملات في المسألة السابقة (3) لـــ x_2 تكون:

$(5-\alpha\ ,\ -5+\alpha)$ بدلاً من $(5, -5)$

حيث α ثابت غير سالب.

أوجد قيم α التي لا تؤدي إلى أي تغيير في الحل الأمثل للمسألة (3).

5 - لنفرض أن الطرف الأيمن للقيود في المسألة (3) أصبح: $(30+\alpha\ ,\ 40-\alpha)$، حيث α ثابت غير سالب. ولنفرض أن معاملات تابع الهدف أصبحت

$(5-\alpha \ , 2+\alpha \ , 3+\alpha)$. أوجد في هذه الحالة قيم α التي تحافظ على حل المسألة (3) كحل أساسي ممكن وأمثل.

6 - لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ (x_1 , x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة البيانية .
2. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة السمبلكس مستخدماً طريقة M الكبيرة.
3. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالة الهدف في كل من الطريقتين المذكورتين أعلاه.
4. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على الكميات المتوافرة في كل من الطريقتين المذكورتين أعلاه.

7 - لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{S.t.}$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq -2 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &\geq 1 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بالطريقة التي تراها مناسبة .

2. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالة الهدف.

3. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على الكميات المتوافرة في البرنامج.

8 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\le 27 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ -4x_1 + 6x_2 &\ge -12 \\ 8x_1 + 12x_2 &= 24 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة:
   - بالطريقة البيانية .
   - بالطريقة المبسطة (السمبلكس).

2. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالة الهدف وعلى الكميات المتوفرة في البرنامج في كل من الطريقتين.

9 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\ge -5 \\ 5x_1 - 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب :

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة:

- بالطريقة البيانية .
- بالطريقة المبسطة (السمبلكس).

2. بيّن حساسية الحل الأمثل الناتج للتغيرات التي يمكن أن تحصل على معاملات دالـــة الهدف وعلى الكميات المتوافرة في البرنامج في كل من الطريقتين.

10- أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 2x_1 + x_2 \\
&S.T. \\
&\quad x_1 + 5x_2 \le 10 \\
&\quad x_1 + 3x_2 \le 6 \\
&\quad 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&\quad (x_1, x_2) \ge 0
\end{aligned}
$$

ثم أوجد تأثير المتغيرات الآتية في الحل الأمثل الذي حصلت عليه:

- إذا تغيرت قيم الطرف الأيمن من $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$.
- إذا تغيرت قيم معاملات دالة الهدف من $[2 \quad 1]$ إلى $[5 \quad 2]$.
- إذا تمت إضافة قيد جديد $x_2 \le 5$.

الفصل الثامن

البرمجة بقيم صحيحة

Integer Programming

VIII - 1 مقـدمـة

نصادف في الحياة العملية بعض المسائل التي تعود إلى برامج خطية يشترط في مجاهيلها (أو في بعض هذه المجاهيل) أن تكون ذات قيم صحيحة وغير سالبة، كأن تكون مُمَثِّلة لعدد الآلات التي يجب شراؤها أو لعدد العمال الذين يجب تعيينهم في وظائف معينة.

إن برنامج الأعداد الصحيحة هو برنامج خطي يشترط أن تكون متغيراته أعداداً صحيحة. لذلك فإن التقريب الأول لحل برنامج الأعداد الصحيحة يمكن الحصول عليه بتجاهل هذا الشرط، وحل البرنامج الخطي الناتج بإحدى الطرق التي سبق عرضها. فإذا كان الحل الأمثل للبرنامج الخطي أعداداً صحيحة، يكون هذا الحل نفسه هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي، وإلا – وهذه هي الحالة الغالبة – فإنه يجب تقريب عناصر الحل إلى أقرب أعداد صحيحة ممكنة للحصول على التقريب الثاني. وتُنَفَّذ هذه الطريقة غالباً، وبخاصة إذا كان التقريب الأول يحتوي على أعداد كبيرة، ولكنها قد تكون غير دقيقة إذا كانت الأعداد صغيرة.

لقد طُوِّرَت خوارزميات عديدة لمعالجة مسائل الأعداد الصحيحة، ولكن جميع هذه الخوارزميات لم تصل بعد إلى درجة كبيرة من الكفاءة الحسابية، وخاصة عندما تكون المسألة المدروسة من حجم كبير. يمكن تصنيف خوارزميات الأعداد الصحيحة التي لاقت قبولاً ضمن إحدى المجموعتين الآتيتين:

1 – طرق القطع Cutting Methods

2 – طرق البحث والاستقصاء Search Methods

VIII - 2 طرق القطع (Cutting Methods)

إن طرق القطع التي تعود إلى العالم غومري (Gomery)، تبدأ بحل أمثل مستمر نحصل عليه باستخدام إحدى خوارزميات البرمجة الخطية. ومن ثم، بإضافة قيود ثانوية خاصة تمثل شروطاً ضرورية لتمامية المتغيرات، فإن فراغ الحل يعدل (بقطع أجزاء منه لا تتضمن نقاط أعداد صحيحة) تدريجياً إلى أن نصل إلى النقطة المتطرفة للحل الأمثل المستمر التي تحقق قيود الأعداد الصحيحة.

ندرس أولاً مفهوم قطع فراغ الحل من خلال مسألة برمجة أعداد صحيحة بيانياً.

VIII – 2-1 الحل البياني لمسألة برمجة أعداد صحيحة:

من أجل ذلك ندرس المثال الآتي:

مثـــال "1":

تفكر إدارة مصنع في إضافة معدات إلى أحد خطوط الإنتاج، وخصص لها مكان مساحته 19/3 م^2، وخصص لهذه الإضافة مبلغ من المال قدره 10 آلاف ليرة سورية. ويمكن للمصنع شراء نوعين من المعدات، ثمن مجموعة من المعدات من النوع الأول 1000 ليرة سورية، أما ثمن مجموعة من النوع الثاني فهو 3000 ليرة سورية.

بينت الدراسة أن إضافة مجموعة من المعدات من النوع الأول يضمن رفع إنتاج السلع في الوردية بمقدار سلعتين، وبمقدار 4 سلع إذا أضيفت مجموعة من المعدات من النوع الثاني. ومعلوم أن المجموعة الواحدة من المعدات من النوع الأول تتطلب مساحة 2 م^2 أما من النوع الثاني فتتطلب 1 م^2.

المطلوب:

تحديد عدد الطواقم الإضافية من كل نوع، بحيث يصل ازدياد الإنتاج إلى أكبر قيمة ممكنة.

الحـــل:

لنضع النموذج الرياضي لهذه المسألة:

بفرض أن المصنع يقتني x_1 مجموعة من معدات النوع الأول وx_2 مجموعة من معدات النوع الثاني.

يجب أن تحقق x_2 , x_1 المتراجحات الآتية:

$$2x_1 + x_2 \leq 19/3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 10$$

إذا اقتنى المصنع الكميات المشار إليها من المعدات، فإن زيادة الإنتاج للسلع تكون بالشكل:

$$Z = 2x_1 + 4x_2$$

إن المتحولات x_2 , x_1 يجب أن تأخذ قيماً صحيحة غير سالبة، وذلك لمعناها الاقتصادي، إذ لا تكون هناك فائدة من شراء نصف أو ثلاثة أرباع آلة مثلاً.

بهذا نكون قد حصلنا على البرنامج الخطي كما يأتي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$(2)\ \{(x_1, x_2) \geq 0$$

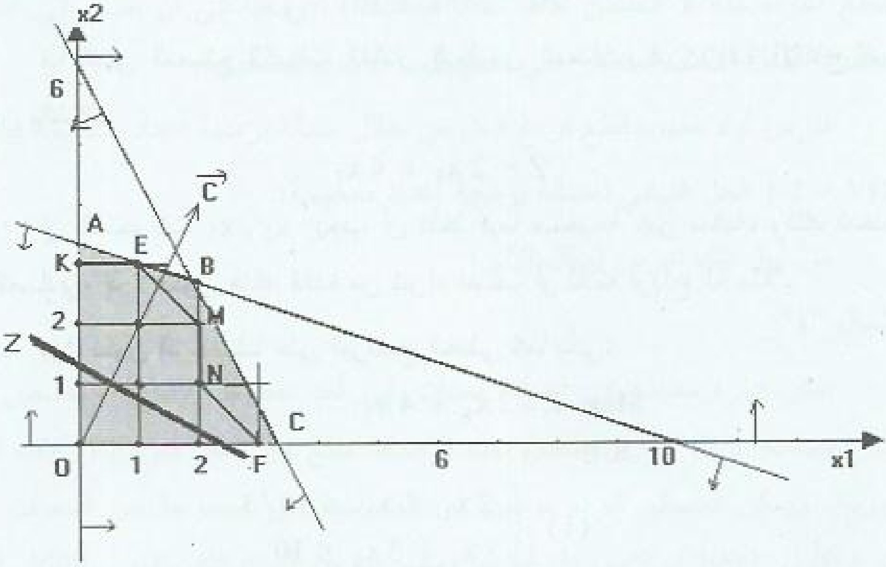
$$(3)\ \{\ x_1\ , x_2\ \text{ذات قيم صحيحة}\ \}$$

وهي مسألة برمجة خطية بقيم صحيحة. بما أن عدد المجاهيل يساوي 2، فإنه يمكن إيجاد حلها باستخدام الطريقة البيانية.

من أجل ذلك، نرسم منطقة الإمكانيات التي تحقق جملة القيود ((1) – (2)) والمحددة بالمنطقة OABC على الرسم في الشكل (1). نرسم تابع الهدف ونحدد جهة تزايده $\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

إن نقطة الحل الأمثل هي B والتي يمكن إيجاد إحداثياتها من الحل المشترك للقيدين الأول والثاني فنجدها $B(9/5 , 41/15)$ وتكون من أجل هذا الحل قيمة التابع الهدف العظمى هي:

$$Z^{*} = \text{Max } Z = 218/15$$



الشكل (1): التمثيل البياني للمثال 1

ولكن نلاحظ أن هذا الحل لا يحقق القيد (3) من قيود المسألة. ومن ثم فهو حل غير مقبول لمسألة برمجة خطية بقيم صحيحة.

نلاحظ أنه في منطقة الإمكانيات توجد نقاط تحقق القيد (3) وهي 12 نقطة مشار إليها في الرسم البياني. لذلك من أجل إيجاد النقطة التي تمثل حل المسألة الأصلية نأخذ بدلاً من المنطقة OABC المنطقة OKEMNF المحتوية على كل النقاط الممكنة ذات الإحداثيات الصحيحة (12 نقطة).

برسم التابع الهدف وجهة تزايده، نجد أن نقطة الحل الأمثل لهذه المسألة هي النقطة E الناتجة من تقاطع أحد القيود مع المستقيم $x_2 = 3$. بالحل المشترك، نجد أن إحداثيات هذه النقطة هي E (1,3)، ويأخذ التابع الهدفي فيها قيمة أعظمية.

إن إحداثيات النقطة E تعرف الحل الأمثل للمسألة، أي يجب على المصنع أن يقتني مجموعة واحدة من معدات النوع الأول، وثلاث مجموعات من معدات النوع الثاني. ويضمن هذا الاقتناء للمصنع زيادة في الإنتاج قدرها 14 سلعة في الوردية الواحدة.

VIII – 2-2 طريقة غومري The Gomery Algorithm:

من أجل إيجاد الحل الأمثل لبرنامج أعداد صحيحة بطريقة غومري، نبدأ أولاً بإيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة السمبلكس (المبسطة) دون الأخذ بعين الاعتبار القيد (كون المجاهيل ذات قيم صحيحة). فإذا حصلنا على حل تكون فيه مجاهيل القاعدة أعداداً صحيحة، نكون قد وصلنا إلى الحل المطلوب، أي أن القيد (المجاهيل ذات قيم صحيحة) يكون محققاً أيضاً. أما إذا كانت قيمة أحدها، وليكن x_{i_0} $(i_0 \in J)$ (حيث J هي مجموعة أدلة القاعدة الأخيرة) عدداً غير سالب ولكنه غير صحيح، فإننا نقوم بإضافة قيد جديد للمسألة مقابل لهذا المجهول، وفق الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى:

من جدول الحل النهائي بالطريقة المبسطة، نختار أحد المتغيرات ذات القيم غير الصحيحة وبشكل اختياري .

الخطوة الثانية:

نعيد كتابة المعاملات الكسرية والثوابت في معادلة القيد الناتجة من الخطوة الأولى، كمجموع الأعداد الصحيحة والكسور الموجبة بين صفر وواحد. ثم نعيد كتابة المعادلة بحيث يصبح الطرف الأيسر يحتوي على حدود ذات معاملات كسرية فقط (وثابت كسري)، بينما الطرف الأيمن يحتوي على حدود بمعاملات أعداد صحيحة (وثوابت صحيحة) .

الخطوة الثالثة:

تتطلب أن يكون الطرف الأيسر من المعادلة المعاد كتابتها غير سلبي. وتكون المتراجحة الناتجة هي القيد الجديد.

بعد إضافة القيد الجديد، نقوم بحل المسألة الجديدة بتطبيق الخوارزميات المعروفة سابقاً ... وهكذا.

ملاحظة "1":

يمكن أن نكتب أي عدد حقيقي r بالشكل:

$$r = [\,r\,] + f(r)$$

حيث $[\,r\,]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي r و $f(r)$ هو الفرق $r - [\,r\,]$ ويسمى بالجزء الكسري للعدد الحقيقي . ومن الواضح أن:

$$0 \le f(r) < 1$$

فمثلاً:

$$\frac{7}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow [\frac{7}{2}] = 3 \;\&\; f(\frac{7}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{7}{2} = -\frac{8}{2} + \frac{1}{2} = -4 + \frac{1}{2} \Rightarrow [-\frac{7}{2}] = -4 \;\&\, f(-\frac{7}{2}) = \frac{1}{2}$$

مثال "2":

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 17$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 10$$

(x_1 , x_2) أعداد صحيحة غير سالبة.

الحــل:

لنتجاهل أولاً شرط الأعداد الصحيحة، ولنطبق الطريقة المبسطة على البرنامج الخطي الناتج . فنحصل على الحل بالشكل الآتي:

نكتب الصيغة النموذجية للبرنامج كما يأتي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 0.S_1 + 0.S_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + S_1 &= 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + S_2 &= 10 \\ (x_1, x_2, S_1, S_2) &\geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

نشكل جدول السمبلكس باعتبار الحل الأساسي الأولي الممكن

$S_2 = 10 \quad , \quad S_1 = 17 \quad , \quad x_1 = x_2 = 0$

الجدول (1)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-2	-1	0	0	0
S_1	0	2	5	1	0	17
S_2	0	**3**	2	0	1	10

ندخل المتغير x_1 ، ونخرج المتغير S_2، فنجد:

الجدول (2)

		x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	1/3	0	2/3	20/3
S_1	0	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	0	1	2/3	0	1/3	10/3

من الجدول (2) نجد الحل الأمثل للمسألة (1) كما يأتي:

$$Z^* = 20/3 \ , \ S_2 = 0 \ , \ S_1 = 31/3 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 10/3$$

ونلاحظ أن x_1 , S_1 ليستا بأعدادٍ صحيحة.

للوصول إلى الحل الأمثل بأعداد صحيحة، نقوم بإضافة قيد إلى المسألة (1) وفق الخطوات التي ذكرناها أعلاه. حيث نختار المتغير غير الصحيح x_1 ، فيكون السطر المقابل له كما في الجدول المبين هو:

$$x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} S_2 = \frac{10}{3}$$

بكتابة كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 1 و 0 نحصل على:

$$x_1 + (0+\frac{2}{3})\ x_2 + (0+\frac{1}{3})\ S_2 = 3 + \frac{1}{3}$$

أو بشكل آخر:

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}S_2 - \frac{1}{3} = 3 - x_1$$

وليكون الطرف الأيسر من هذه المعادلة غير سلبي، نحصل على:

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}S_2 - \frac{1}{3} \geq 0 \Rightarrow 2x_2 + S_2 \geq 1$$

وهو القيد الجديد.

بإعادة كتابة قيود البرنامج الأصلي بعد إضافة القيد الجديد (نكتب قيود البرنامج الأصلي بالصورة المقترحة في الجدول (2)). نوجد البرنامج الجديد الآتي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 0.S_1 + 0.S_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\frac{11}{3}x_2 + S_1 - \frac{2}{3}S_2 = \frac{31}{3}$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}S_2 = \frac{10}{3} \qquad (2)$$

$$2x_2 + S_2 \geq 1$$

$$(x_1, x_2, S_1, S_2) \geq 0$$

x_1, x_2, S_1, S_2 أعداد صحيحة

بإضافة مجهول فرق S_3 للقيد الثالث، ثم إضافة متغير اصطناعي R_3، ونطبق بعد ذلك طريقة المرحلتين باعتبار أن x_1, S_1, R_3 مجاهيل الحل الأولي الممكن، فنجد الحل الأمثل كما في الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	0	1/2	1/6	13/2
S_1	0	0	0	1	-5/2	11/6	17/2
x_1	0	1	0	0	0	1/3	3
x_2	0	0	1	0	1/2	-1/2	1/2

من الجدول (3) نلاحظ أن الحل الأمثل هو :

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 1/2 \quad , \quad S_1 = 17/2 \quad , \quad S_2 = S_3 = 0$$

وهو لايمثل حلاً أمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة، لذلك نعيد الخطوات السابقة.

نختار x_2 لإنتاج القيد الجديد:

$$\frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{2} S_3 - \frac{1}{2} \geq 0 \;\Rightarrow\; S_2 + S_3 \geq 1$$

هذا القيد مع القيود في البرنامج (2) في الصيغة المقترحة في الجدول (3) يعطي برنامج الأعداد الصحيحة الجديد:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned}
S_1 - \frac{5}{2} S_2 + \frac{11}{6} S_3 &= \frac{17}{2} \\
x_1 + \frac{1}{3} S_3 &= 3 \\
x_2 + \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{2} S_3 &= \frac{1}{2} \\
S_2 + S_3 &\geq 1 \\
(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) &\geq 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 أعداد صحيحة

بتجاهل قيد الأعداد الصحيحة، وبتطبيق طريقة المرحلتين على البرنامج (3) باعتبار R_4 متغيراً اصطناعياً وx_1, x_2, S_1, R_4 كمتغيرات الحل الأولي، نحصل على الحل الأمثل للبرنامج (3) من الجدول الآتي:

الجدول (4)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
z	1	0	0	0	1/3	0	1/6	19/3
S_1	0	0	0	1	-13/3	0	11/6	20/3
x_1	0	1	0	0	-1/3	0	1/3	8/3
x_2	0	0	1	0	1	0	-1/2	1
S_3	0	0	0	0	1	1	-1	1

كما نجد من هذا الجدول أن الحل الأمثل للبرنامج (3) هو:

$$x_1 = 8/3 \ , \ x_2 = 1 \ , \ S_1 = 20/3 \ , \ S_2 = 0 \ , \ S_3 = 1 \ , \ S_4 = 0$$

وهو ليس حلاً لبرنامج أعداد صحيحة، لذلك نعيد الخطوات السابقة.

لنختر $x_1 = 8/3$ من أجل إنتاج قيد جديد. وكما في الحالات السابقة ينتج لدينا برنامج له حل بوصفه قيماً صحيحة وفيه:

$$x_1 = 3 \ , \ x_2 = 0 \ , \ Z^* = 6$$

وهذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي.

ملاحظة "2":

قد لا تتقارب طريقة غومري، بمعنى أنه قد لا نحصل على حل أعداد صحيحة بغض النظر عن عدد محاولات التكرار. وبشكل عام، فإنه إذا كان الحل يتقارب، فإنه يتقارب بسرعة. لهذا السبب، فإن الحد الأعلى لمرات تكرار الحل يجب أن يحدد قبل إنشاء الحل، وإذا لم نصل إلى حل أعداد صحيحة خلال هذا العدد من التكرار. فإننا نتخلى عن هذه الطريقة.

VIII - 3 طرق البحث والاستقصاء (_ Search Methods)

تعتمد طرق البحث والاستقصاء على خطة مباشرة لتعداد جميع نقاط الأعداد الصحيحة الممكنة. ويتم تطوير اختبارات ذكية تدرس فقط قسماً صغيراً من الأعداد الصحيحة الممكنة بصورة صريحة، وتعد بشكل تلقائي باقي النقاط بصورة ضمنية.

إن طريقة التفريع والتحديد التي تعزى إلى **لاندودواغ** تعد من أهم هذه الطرق وأكثرها شهرة. وقد ساعدت تعديلات **داكين** لخوارزمية التفريع والتحديد على تبسيط العمليات الحسابية لدرجة كبيرة .

VIII – 3-1 طريقة التفريع: (Branch Algorithm):

إذا احتوى التقريب الأول على متغير غير صحيح مثل x_i فإن $i_1 < x_i < i_2$ حيث تكون i_1, i_2 أعداداً صحيحة غير سالبة. ويتولد برنامج لأعداد صحيحة بتزويد برنامج الأعداد الصحيحة الأصلي بأي من القيدين $x_i \le i_1$ و

$x_i \geq i_2$، وتسمى هذه الطريقة " **التفريع**"، ولها تأثير كبير في تقليص منطقة الإمكانيات بطريقة يمكن بها حذف الحل الحالي للأعداد غير الصحيحة في x_i، ولكنهـا تحافـظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للمسألة الأصلية.

مثـال "3": أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 10x_1 + x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &\qquad 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ &\qquad (x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

الحـل: بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة، وحل هذا البرنامج بالطريقة البيانية أو بالطريقة المبسطة، نجد أن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 11/2 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad Z^* = 55$$

نلاحظ أن x_1 غير صحيح، وهو يحقق $5 < x_1 < 6$، لذلك نقوم بتفريع البرنامج إلى برنامجي أعداد صحيحة جديدين كما يأتي:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 10x_1 + x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &\qquad 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ &\qquad x_1 \leq 5 \\ &\qquad (x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

و

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 10x_1 + x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &\qquad 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ &\qquad x_2 \geq 6 \\ &\qquad (x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

نوجد حل البرنامج (2) بعد تجاهل شرط الأعداد الصحيحة. فإذا كان الحل الأمثل يحتوي أعداداً غير صحيحة، فإن برنامج الأعداد الصحيحة الذي أعطى زيادة للتقريب الأول يصبح أساساً لعملية تفريع تالية. باستخدام الطريقة البيانية لحل البرنامج (2) نجد أن الحل الأمثل له هو:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0.2 \quad , \quad Z^* = 50.2$$

أما البرنامج (3) فليس له حل ممكن، لذلك فإن البرنامج (2) يعد أساساً لعملية تفريع تالية حيث $0 < x_2 < 1$. سنضيف إلى البرنامج (2) أحد القيدين الآتيين $x_2 \geq 1 \; , \; x_2 \leq 0$ ، فنحصل على برنامجين جديدين:

$$\begin{aligned} \text{Max} \;\; & Z = 10x_1 + x_2 \\ \text{S.t.} \;\; & \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \geq 0 \\ & x_1, x_2 \; \text{أعداد صحيحة} \end{aligned} \qquad (4)$$

و

$$\begin{aligned} \text{Max} \;\; & Z = 10x_1 + x_2 \\ \text{S.t.} \;\; & \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 1 \\ & (x_1, x_2) \geq 0 \\ & x_1, x_2 \; \text{أعداد صحيحة} \end{aligned} \qquad (5)$$

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة، نجد أن حل البرنامج (4) هو:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad Z^* = 50$$

بينما حل البرنامج (5) هو:

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad Z^* = 31$$

وبما أن كلاً من هذين الحلين صحيح، فإنه ليس من المطلوب أي تفريع تالٍ.

VIII – 2-3 التحديد: (Bound Algorithm)

بفرض أن المطلوب هو إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف، فإن التفريع يستمر حتى الحصول على حل بأعداد صحيحة، وتصبح قيمة تابع الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأول هو الحد الأسفل للمسألة. وتعد البرامج التي تعطي حلولها (سواء كانت أعداداً صحيحة أم لا) قيماً لتابع الهدف أقل من الحد الأسفل ملغاة.

ففي المثال السابق، كان للبرنامج (4) حل أعداد صحيحة $Z^* = 50$، فيكون هو الحد السفلي للمسألة. وللبرنامج (5) حل $Z^* = 31$ أقل من الحد السفلي 50. لذلك فإن البرنامج (5) يُلغى من الاعتبار (وقد كان سيُلغى أيضاً حتى إذا كان حله أعداداً غير صحيحة).

يستمر التفريع من هذه البرامج التي لها حل أمثل بأعداد غير صحيحة، والتي تعطي قيماً لتابع الهدف أكبر من الحد الأسفل. ويستمر الحد السفلي الحالي بوصفه حداً أسفل لتفريع جديد إذا لم يعطِ هذا التفريع حلاً بأعداد صحيحة ذا قيمة أكبر لتابع الهدف. وإذا أعطت الأعداد الصحيحة الجديدة قيماً لتابع الهدف أكبر من القيمة الحالية للحد السفلي، فإن هذه القيمة لتابع الهدف تصبح حداً سفلياً جديداً. ويلغى البرنامج الذي نتج عنه الحد السفلي القديم وكذلك كل البرامج التي يعطي حلها قيماً لتابع الهدف أصغر من الحد السفلي الجديد. وتستمر عملية التفريع حتى تختفي كل البرامج لها حل أمثل بأعداد غير صحيحة. عند هذه النقطة، فإن حل الحد السفلي الحالي هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي.

ملاحظة "3":

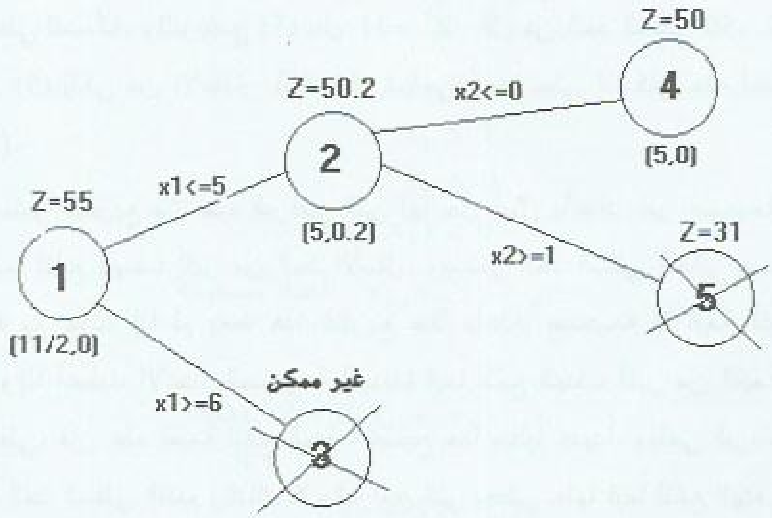
في حالة تصغير التابع الهدف، تظل الطريقة نفسها، ماعدا أن الحد العلوي يستخدم، لذلك فإن قيمة حل الأعداد الصحيحة الأول يصبح حداً أعلى للمسألة وتلغى البرامج التي تؤدي إلى قيم لتابع الهدف z أكبر من الحد الأعلى الحالي.

ملاحظة " 4":

يتم التفريع دائماً من البرامج التي تظهر قريبة من الحل الأمثل. وعندما يوجد عدد من العناصر لتفريع أكثر، نختار التفريع ذا القيمة الأكبر لــ Z إذا كان الهدف إيجاد القيمة العظمى، أو التي لها أصغر قيمة لــ Z إذا كان الهدف إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف.

مثـــال "4":

ارسم الشكل الخطي (الشجرة) التي تعبر عن نتائج المثال المذكور في الفقرة السابقة.



الشكل (2): التمثيل الشجري للمثال 3

من الشكل، نلاحظ أننا وضعنا برنامج الأعداد الصحيحة (1) بدائرة، ومثلناه بالرقم داخل الدائرة. وتوضع باقي البرامج الأخرى المتكونة من التفريعات طبقاً لترتيب تكوينها بدوائر مرقمة على التوالي. يكتب الحل الأمثل لكل برنامج حول الدائرة التي تمثل هذا البرنامج، وتوصل كل دائرة (برنامج) بعد ذلك بخط بالدائرة (البرنامج) الذي كونته من خلال عملية التفريع ويكتب القيد الذي أوجد عملية التفريع فوق الخط. وأخيراً، تشطب الدائرة التي يحذف برنامجها من أي اعتبار تالٍ.

مثـــال "5":

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

الحـــل:

بإهمال شرط الأعداد الصحيحة، نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_1 = 2.25 \quad , \quad x_2 = 1.5 \quad , \quad Z^* = 12.75$$

بما أن x_2 أبعد عن القيمة الصحيحة من x_1 فإننا نستخدمها لتكوين التفريعات الآتية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_2 &\le 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2) \ge 0$

و

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_2 &\ge 2 \end{aligned} \qquad (3)$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2) \ge 0$

إن حل البرنامج (2) بعد إهمال شرط الأعداد الصحيحة هو :

$$x_1 = 2.5 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad Z^* = 11.5$$

ونجد حل البرنامج (3) بعد إهمال شرط الأعداد الصحيحة كالآتي:

$$x_1 = 1.5 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad Z^* = 12.5$$

بما أن للبرنامجين حلاً غير صحيح فإنه يمكن التفريع من أحدهما ونختار البرنامج (3) لأن له قيمة أكبر لتابع الهدف (أقرب إلى المثالية).

وهنا $1 < x_1 < 2$ وتصبح البرامج الجديدة كالآتي:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 6 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ &\quad x_2 \ge 2 \\ &\quad x_1 \le 1 \\ &(x_1, x_2) \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة} \end{aligned} \qquad (4)$$

و

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 6 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ &\quad x_2 \ge 2 \\ &\quad x_1 \ge 2 \\ &(x_1, x_2) \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة} \end{aligned} \qquad (5)$$

لا يوجد حل للبرنامج (5) بينما حل البرنامج (4) بعد تجاهل شرط الأعداد الصحيحة هو :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 7/3 \quad , \quad Z^* = 12.33$$

ويمكن أن يستمر التفريع من أي من البرنامجين (2) أو (4).

نختار البرنامج (4) إذ إن له قيمة أكبر لـــ Z، وحيث $2 < x_2 < 3$ ، لذلك تصبح البرامج الجديدة:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\
&\text{S.t.} \\
&2x_1 + x_2 \le 6 \\
&2x_1 + 3x_2 \le 9 \\
&x_2 \ge 2 \\
&x_1 \le 1 \\
&x_2 \le 2 \\
&(x_1, x_2) \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة}
\end{aligned} \tag{6}$$

و

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \\
&\text{S.t.} \\
&2x_1 + x_2 \le 6 \\
&2x_1 + 3x_2 \le 9 \\
&x_2 \ge 2 \\
&x_1 \le 1 \\
&x_2 \ge 3 \\
&(x_1, x_2) \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة}
\end{aligned} \tag{7}$$

يكون حل البرنامج (6) بعد تجاهل القيود الصحيحة هو :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad Z^* = 11$$

وحيث إنه حل بأعداد صحيحة، $Z = 11$ تصبح الحد الأسفل للمسألة. فـــإن أي حـــل يؤدي بقيمة Z أقل من 11 يجب أن يحذف.

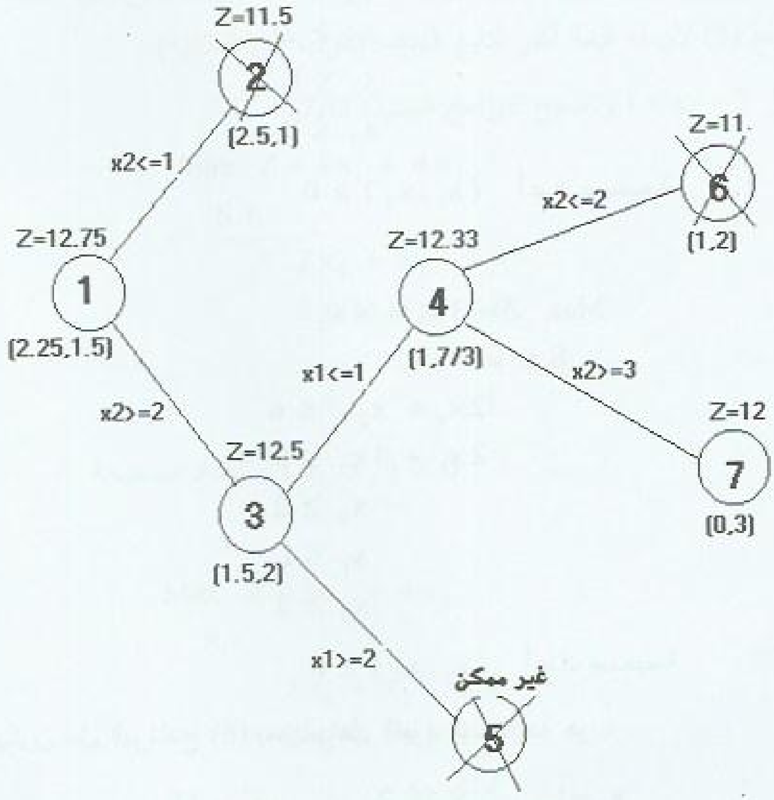
أما حل البرنامج (7) فهو: $Z^* = 12 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 0$

وهذا هو أيضاً حل صحيح، وقيمة Z أكبر من الحد الأسفل السابق، ومن ثم الحد الأسفل الجديد يصبح $Z = 12$.

ويحذف البرنامج الذي نتج عنه الحد الأسفل القديم وهو البرنامج (6) من أي اعتبار تال كما في البرنامج (2). ومن ثم لا تبقى لدينا أي تفريعات أخرى، وهذا التفريع يعطي الحل الأمثل للبرنامج الأصلي:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad Z^* = 12$$

ونستطيع أن نرسم الشجرة التي تعبر عن النتائج السابقة كما يأتي:



الشكل (3): التمثيل الشجري للمثال 5

VIII – 4 مسائل غير محلولة

1 – أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة غومري.

$$\text{Max } Z = x_1 + 9x_2 + x_3$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$$

$(x_1 , x_2) \geq 0$ أعداد صحيحة

2 – أعد السؤال السابق من أجل كلٍ من البرامج الآتية:

a)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 11$$

$(x_1 , x_2 , x_3) \geq 0$ أعداد صحيحة

b)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 5$$

$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \geq 0$ أعداد صحيحة

c)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 10x_2 + x_3$$

S.t.

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25$$

$(x_1 , x_2 , x_3) \geq 0$ أعداد صحيحة

3 – أوجد الحل الأمثل لكل من البرامج الخطية الآتية باستخدام طريقة التفريع والتحديد:

a)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

S.t.

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 11$$

$(x_1 , x_2 , x_3) \geq 0$ أعداد صحيحة

b)

$$Max\ \ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$$

S.t.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 10$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 5$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$

c)

$$Max\ \ Z = 2x_1 + 10x_2 + x_3$$

S.t.

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \le 20$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 25$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2, x_3) \ge 0$

d)

$$Max\ \ Z = 10x_1 + 2x_2 + 11x_3$$

S.t.

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 17$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2, x_3) \ge 0$

4 - أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة التفريع و التحديد:

$$Min\ \ z = x_1 + x_2$$

S.t.

$$2x_1 + 2x_2 \ge 5$$

$$12x_1 + 5x_2 \le 30$$

أعداد صحيحة $(x_1, x_2) \ge 0$

5- أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة غومري :

$$\text{Min } z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$$
$$\text{S.t.}$$
$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$
$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65$$
$$x_1 \leq 7$$
$$x_2 \leq 7$$
$$x_3 \leq 7$$
$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

6 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية :

$$(LP)\begin{cases} \text{Max } Z = 4x_1 - 7x_2 - 21x_3 \\ \text{S.t.} \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \leq -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - 13x_3 \leq -3 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة (LP).
2. اكتب مسألة البرمجة الخطية المرافقة، ثم أوجد حلها.
3. أوجد حل مسألة البرمجة الخطية (LP) بقيم صحيحة.

7 – لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية الآتية :

$$(LP)\begin{cases} \text{Max } Z = x_1 - 3x_2 \\ \text{S.t.} \\ 3x_1 - 5x_2 \leq -3 \\ x_1 - 3x_2 \leq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

المطلوب:

1. اكتب المسألة المرافقة للمسألة (LP).
2. أوجد الحل الأمثل للمسألة (LP).
   - بالطريقة البيانية.
   - بطريقة السمبلكس.
3. استنتج (من الحل مباشرة) حل المسألة المرافقة.
4. أوجد الحل الأمثل للمسألة (LP) بقيم صحيحة.

الفصل التاسع

نظرية الألعاب الاستراتيجية

Strategic Games Theory

IX - 1 مقـدمـة

تدرس نظرية الألعاب مسائل المنافسة بين خصمين تكون مصالحهما متناقضة، أو على الأقل غير متطابقة. يمكن لكل خصم أن يؤثر في مجرى الحوادث، ولكنه لا يستطيع أن يسيطر عليها بصورة كاملة ومستمرة.

إن أبسط نماذج مسائل المنافسة هي الألعاب الرياضية المختلفة وألعاب الشطرنج وورق اللعب وغيرها. وهناك تشابه كبير بين سلوك المشاركين في مثل هذه الألعاب وبين سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين أو سلوك المتنافسين في سوق معين. هذا التشابه أدى إلى تعميق لفظ "لعبة"، حيث يشمل جميع الأوضاع الاجتماعية والاقتصادية والسياسية والعسكرية وغيرها من الأوضاع التي تتضمن تنافس مصالح أو تضاربها.

نقول إننا أمام لعبة استراتيجية، إذا استطعنا وضع مسألة ما على شكل منافسة للربح الأكبر بين خصمين A وB، ربح أحدهما أو خسارته يقدر بكمية عددية a_{ij} يحددها اختيار A للوضع i، واختيار B للوضع j في اللعبة الواحدة. علماً بأن A يستطيع الاختيار بين m من الأوضاع المختلفة وB يستطيع الاختيار بين n من الأوضاع المختلفة في كل لعبة. ويحاول كل خصم جعل ربحه في اللعبة الواحدة أعظمياً.

نعرض فيما يأتي بعض المصطلحات التي تستخدم في نظرية الألعاب:

* **لاعب Player**: يدل على وحدة اتخاذ القرار، ويمكن أن تكون هذه الوحـدة فـرداً عادياً أو مؤسسة أو دولة ... الخ .
* **خطوة Move**: للتعبير عن نقطة يتوجب فيها على اللاعب اتخاذ قرار.
* **اللعبة Game**: هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو ما يستطيع أن يفعله اللاعب.

* **الاستراتيجية Strategy:** هي جملة القواعد التي تحدد اختيار اللاعب في كل خطوة يخطوها في اللعبة. كل استراتيجية من الاستراتيجيات المحددة التي يمكن أن يختارها اللاعب تسمى استراتيجية صرفة (بسيطة) لهذا اللاعب. أما إذا اختار اللاعب توزيعاً احتمالياً يحدد احتمال اختيار كل استراتيجية من الاستراتيجيات البسيطة، فإننا نسمي هذا التوزيع الاحتمالي بالاستراتيجية المختلطة (المركبة).

مثال "1":

لنفرض أن لاعبين B , A يلعبان اللعبة الآتية:

يكتب كل منهما رقماً على ورقة دون أن يراه الآخر، ثم تكشف الورقتان معاً. فإذا كان الرقمان فرديين فإن B يدفع لـ A مبلغ خمس ليرات سورية، وإذا كان الرقمان زوجيين فإن B يدفع إلى A ليرة سورية واحدة. أما إذا كان أحد الرقمين زوجياً والآخر فردياً فإن A هو الذي يدفع لـ B ليرتين سوريتين . نمثل ذلك بالجدول الآتي الذي يمثل ربح اللاعب A:

(B)

(A)		فردي	زوجي
	فردي	5	-2
	زوجي	-2	1

سنصطلح دائماً على اعتبار عناصر هذا الجدول ممثلاً لربح اللاعب A، الذي تمثل نتائجه في العمود الأيسر من الجدول. ونعتبر الأرقام السالبة تدل على ما يدفعه هذا اللاعب لمنافسه، أي اللاعب B.

إذا لعب اللاعب A بشكل دائم أرقاماً زوجية، فإننا نقول أنه يلعب وفق الاستراتيجية الصرفة الأولى. أما إذا تردد في اللعب بين أرقام فردية وأرقام زوجية، فإننا نقول إن هذا اللاعب يلعب وفق استراتيجية مختلطة (مركبة).

المسألة بالنسبة للاعب A هي تعيين النسبة P_1 التي يجب أن يلعب بها أرقاماً فردية والنسبة P_2 التي يجب أن يلعب بها أرقاماً زوجية لكي يكون ربحه الكلي في عدد

كبير N من التكرارات لهذه اللعبة أعظمياً. إن النسبتين P_2 , P_1 اللتين يختارهما هذا اللاعب تدعيان استراتيجية هذا اللاعب.

عندما تتألف اللعبة من شخصين فقط، فإن صيغتها الطبيعية تأخذ شكلاً مستطيلاً. إن أية لعبة مستطيلة ولها عدد محدود من الاستراتيجيات تسمى لعبة مصفوفة.

إذا كان في لعبة ما ربح اللاعب الأول يساوي تماماً خسارة اللاعب الثاني، فيقال عن اللعبة إنها ذات مجموع صفري.

IX - 2 العلاقة بين العوائد المتوقعة للاعبين

لنعتبر لعبة من شخصين وذات مجموع صفري، لنفرض أن اللاعب الأول يتصرف بـــ m استراتيجية والثاني بـــ n استراتيجية. إذا اختار اللاعب الأول الاستراتيجية ($i , i=1,2, ..., m$) والثاني الاستراتيجية ($j , j=1,2, ..., n$) فإن ربح اللاعب الأول (و من ثم خسارة اللاعب الآخر) يساوي a_{ij}. إن المصفوفة $[a_{ij}]_{m\times n}$ تسمى مصفوفة الأرباح أو المدفوعات.

نفترض في الألعاب الاستراتيجية أن كلاً من اللاعبين ذكي جداً ويحاول دائماً أن يوقع بخصمه أكبر خسارة.

هناك ألعاب يستطيع فيها كل لاعب أن يختار استراتيجية بسيطة تضمن له عائداً معيناً، بغض النظر عن سلوك الخصم. وتختلف العوائد المضمونة للاعبين من حيث الإشارة فقط . فإذا فرضنا أنه من الأفضل أن يختار اللاعب الاستراتيجية i_0 والثاني الاستراتيجية j_0 ففي هذه الحالة، يساوي عائد الأول $a_{i_0j_0}$ وعائد الثاني يساوي $-a_{i_0j_0}$.

إذا اختار اللاعب الأول الاستراتيجية i_0 وابتعد الثاني عن الاستراتيجية j_0، فإن ربح الأول يكون حتماً أكبر من $a_{i_0j_0}$، ويرغب عادة اللاعب الثاني في اختيار الاستراتيجية j_0 لمنع الأول من تحقيق ربح أكبر من $a_{i_0j_0}$.

وهكذا نستطيع أن نكتب:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j} \quad ; \; i=1,2,...,m \;\&\; j=1,2,...n \qquad (1)$$

أي أن اختيار اللاعب الأول للاستراتيجية i_0 يضمن له ربحاً يساوي على الأقل $a_{i_0j_0}$، وأن استخدام الثاني للاستراتيجية j_0 يضمن له أن الأول لن يربح أكثر من $a_{i_0j_0}$.

نقول في مثل هذه الألعاب، إن الاستراتيجيات البسيطة تكون مثلى، وإن هذه الاستراتيجيات المثلى i_0 , j_0 تتقاطع في نقطة (i_0 , j_0) تسمى نقطة الاستقرار لمصفوفة المدفوعات، وتسمى القيمة $V = a_{i_0j_0}$ بقيمة اللعبة.

IX - 3 الحل الأمثل للعبة مؤلفة من شخصين وذات مجموع صفري

لإيجاد الحل الأمثل للعبة مؤلفة من شخصين وذات مجموع صفري، نطبق رائز Minimax-Maximin . وينص مبدأ Minimax على أن يقوم اللاعب باختيار الاستراتيجية التي تضمن له من بين أسوأ النتائج الأقل وطأة.

نصل إلى الحل الأمثل، إذا لم يعد مفيداً لأي من اللاعبين تغيير استراتيجيته . في هذه الحالة، نقول إن اللعبة مستقرة أو في حالة توازن .

بما أن مصفوفة اللعبة تمثل أرباح اللاعب A (الذي نعرض استراتيجياته بالأسطر) فإن الرائز Maximin المذكور يدعو اللاعب A لاختيار استراتيجياته التي تعطي أكبر ربح مضمون. إذ إن الربح المضمون هو أصغر ربحٍ مأخوذ على كل استراتيجيات اللاعب B ثم نبحث عن أكبر ربحٍ مضمون فوق كل استراتيجيات اللاعب A. وللسبب نفسه، فإن الرائز Minimax يدعو اللاعب B لاختيار الاستراتيجية التي تعطي أصغر خسارة ممكنة. إذ إن الخسارة الممكنة، هي أكبر خسارة مأخوذة على كل استراتيجيات اللاعب A. ثم نبحث عن أصغر خسارة ممكنة مأخوذة فوق كل استراتيجيات اللاعب B.

في المثال الآتي، نوضح كيفية حساب قيم Minimax , Maximin للعبة ما.

مثـــال "2":

لنعتبر أن لدينا لعبة ممثلة بالمصفوفة الآتية والتي تمثل أرباح اللاعب A.

(B)

		1	2	3	4	**Minimum**
	1	8	2	9	5	2
(A)	2	6	5	7	18	5 **Maximin**
	3	7	3	-4	10	-4
Maximum		8	5	9	18	
			Minimax			

عندما يلعب اللاعب A استراتيجيته الأولى، يمكن أن يربح 8 , 2 , 9 أو 5 ، وذلك حسب ما يلعب اللاعب B. في هذه الحالة، يستطيع أن يضمن اللاعب A الربح 2 = { 5 , 9 , 2 , 8 } Min على الأقل، بغض النظر عن الاستراتيجية التي يلعب بها B.

بشكل مشابه إذا لعب A الاستراتيجية الثانية فهو يضمن على الأقل الربح

$$\text{Min}\{ 6 , 5 , 7 , 18 \} = 5$$

أما إذا لعب A الاستراتيجية الثالثة، فهو يضمن على الأقل الربح :

$$\text{Min} \{ 7 , 3 , -4 , 10 \} = -4$$

إذاً، تعطي أصغر قيمة في كل سطر الربح المضمون لـ A، إذا هو لعب الاستراتيجية الصرفة المقابلة.

الآن، إذا اختار اللاعب A الاستراتيجية الثانية، فإنه يجعل ربحه المضمون أكبر ما يمكن، وهذا الربح معطى بالشكل:

$$\text{Max} \{ 2 , 5, -4 \} = 5$$

باختيار اللاعب A لهذه الاستراتيجية يكون قد طبّق الرائز Maximin للعبة، وتدعى استراتيجية Maximin.

من جهة أخرى، يريد اللاعب B أن يجعل خسارته أصغر ما يمكن. فإذا لعب الاستراتيجية الصرفة الأولى فأكبر خسارة يمكن أن يتعرض لها هي: 8 = {8 ,6 ,7}Max، وذلك حسب ما يلعب اللاعب A.

وبشكل مشابه بالنسبة لبقية الاستراتيجيات. من الطبيعي أن يختار اللاعب B الاستراتيجية التي تصغّر أكبر خسارة يتعرض لها، وهذا ممكن إذا اختار الاستراتيجية الثانية والخسارة المقابلة لها تعطى بالشكل:

$$\text{Min}\{8, 5, 9, 18\} = 5$$

بهذه الحالة، يكون اللاعب B قد طبّق الرائز Minimax للعبة، وتدعى الاستراتيجية التي اختارها استراتيجية Minimax.

من الشروط التي تحكم الرائز Minimax، فإن قيمة Minimax تكون أكبر أو تساوي قيمة Maximin. وفي حالة المساواة، نقول إن اللعبة تمتلك استقراراً، وأن الاستراتيجية المقابلة هي الاستراتيجية المثلى. إن قيمة اللعبة تكون مساوية لقيمة Maximin وقيمة Minimax . إن الأمثلية هنا تعني أنه لم يعد بالإمكان للاعب A اختيار استراتيجية مغايرة، لأنه سوف يحصل على ربح أقل مما حصل عليه. كما أن اللاعب B لم يعد يستطيع اختيار استراتيجية أخرى مغايرة، لأنه سوف يتعرض لخسارة أكبر.

بشكل عام، إن قيمة اللعبة يجب أن تحقق المتراجحة:

قيمةMaximin ≥ قيمة اللعبة ≥ قيمة Minimax

وفي مثالنا السابق:

5 = قيمة Maximin = قيمة اللعبة = قيمة Minimax

وهذا يعني، أن اللعبة تمتلك نقطة استقرار معطاة بالعنصر (2,2) من المـــصفوفة، وأن قيمة اللعبة هي 5.

ملاحظة "1":

نلاحظ مما سبق، أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون للعبة نقطة استقرار هو وجود عنصر في مصفوفة الأرباح يمثل في الوقت نفسه أصغر قيمة في السطر وأكبر قيمة في العمود.

ملاحظة "2":

بعد أن تتحدد شروط اللعبة، إذا أعلن اللاعب الأول قراره في اختيار استراتيجية اللعبة، فإن اللاعب الثاني لا يستطيع أن يستفيد من ذلك، ويخفض ربح اللاعب الأول. وإذا أعلن اللاعب الثاني استراتيجيته المثلى، فإن اللاعب الأول لا يستطيع أن يستفيد من ذلك، ويزيد ربحه.

ملاحظة "3":

قد تكون هناك أكثر من نقطة استقرار كما في المثال الآتي:

(B)

		1	2	3	Minimum
(A)	1	4	3	2	2
	2	3	8	2	2
	3	5	-3	-4	-4
Maximum		5	8	2	

وهنا يجب على B أن يلعب الاستراتيجية الصرفة الثالثة، بينما يستطيع اللاعب A أن يلعب الاستراتيجية الصرفة الأولى أو الاستراتيجية الصرفة الثانية أو أية استراتيجية مختلطة (مركبة) من هاتين الاستراتيجيتين.

IX - 4 الاستراتيجية المختلطة (المركبة) (Mixed Strategy)

رأينا في الفقرة السابقة، أن وجود نقطة استقرار يعطي مباشرة الاستراتيجيات الصرفة للعبة. ولكن، هناك ألعاب لا تمتلك نقطة استقرار، كما في المثال الآتي:

مثـــال "3":

لتكن لدينـــا اللعبـــة المؤلفـــة من شـــخصينA و B وذات المجموع الصفري:

(B)

		1	2	3	4	Minimum	
(A)	1	5	-10	9	0	-10	
	2	6	7	8	1	1	
	3	8	7	15	2	2	Maximin
	4	3	4	-1	4	-1	
Maximum		8	7	15	4		
					Minimax		

إن قيمة Minimax تساوي 4 وهي أكبر من قيمة Maximin والتي تساوي

2. لذلك لا تمتلك اللعبة نقطة استقرار، والاستراتيجيات الصرفة ليست استراتيجيات مثلى. وهذا صحيح لأنه يمكن لكل لاعب أن يحسن أرباحه باختيار استراتيجية مختلفة. في هذه الحالة نقول إن اللعبة غير مستقرة.

إن عدم نجاح الرائز Minimax-Maximin في إيجاد استراتيجيات صرفة تعطي حلاً مثالياً للعبة يقود إلى فكرة استخدام استراتيجيات مختلطة. حيث يقوم كل لاعب بلعب جميع استراتيجياته الملائمة، بدلاً من أن يختار استراتيجية صرفة واحدة.

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ الاحتمالات التي يختار فيها اللاعب A استراتيجياته الصرفة.

ولتكن $y_1, y_2, \ldots, y_n$ الاحتمالات التي يختار فيها اللاعب B استراتيجياته الصرفة.

إذاً:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \quad , \; y_j \geq 0 \; , \; x_i \geq 0 \quad \forall i \,\&\, j$$

وهكذا، إذا كان a_{ij} يمثل العنصر (i,j) من مصفوفة الأرباح للعبة، فإن y_i , x_i تظهر كما في المصفوفة الآتية:

(B)

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \end{array} \\ (\mathbf{A}) & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_m \end{array} & \boxed{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{array}} \end{array}$$

إن حل مسألة الاستراتيجيات المختلطة يرتكز أيضاً على الرائز Minimax-Maximin المذكور سابقاً.

يقوم اللاعب A باختيار x_i حيث:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad , \quad x_i \geq 0$$

والتي تعطي:

$$\underset{X_i}{\text{Max}} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i \ , \ .... \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right) \right\}$$

أما اللاعب B فيختار y_j حيث:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad , \quad y_j \geq 0$$

والتي تعطي:

$$\underset{y_j}{\text{Min}} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \ , \ .... \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \right) \right\}$$

وكما في الاستراتيجيات الصرفة، فإن العلاقة:

قيمة Minimax $\geq$ قيمة Maximin

تكون محققة.

وعندما نختار y_j , x_i المقابلة للحل الأمثل، فإن المساواة تكون محققة، والقيم الناتجة تصبح مساوية لقيمة اللعبة المثلى.

يمكن الحصول على هذه النتيجة من نظرية Minimax، والتي نذكرها هنا دون برهان:

إذا كان y_j^* , x_i^* تمثلان الحل الأمثل لكلا اللاعبين، فإن القيمة المثلى للعبة تكون:

$$V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_i^* \ y_j^*$$

هناك عدة طرائق لحل الألعاب المؤلفة من شخصين وذات المجموع الصفري من أجل القيم المثلى x_i , y_j.

سندرس في هذا الفصل طريقتين فقط، الطريقة البيانية، وطريقة البرمجة الخطية.

IX - 5 الطريقة البيانية لحل لعبة ذات سطرين أو عمودين

يمكن تطبيق الحل البياني فقط على الألعاب التي يملك فيها أحد اللاعبين على الأقل استراتيجيتين فقط.

لتكن لدينا اللعبة الاستراتيجية الآتية:

(B)

(A)

	y_1	y_2	y_3	Min
x_1	2	4	5	2 MaxMin
x_2	3	-2	1	-2
Max	3	4	5	

حيث رمزنا بالرموز x_2 , x_1 للأوضاع التي يمكن أن يختار منها اللاعب A ، وبالرموز y_3 , y_2 , y_1 للأوضاع التي يمكن أن يختار منها اللاعب B . واضح أن هذه اللعبة لا تمتلك نقطة استقرار.

MinMax

سنقوم بتمثيل قيم x_2 , x_1 (أي نسبة المرات التي يختار منها اللاعب A الوضع x_1 والوضع x_2 على الترتيب) على قطعة مستقيمة OS. حيث نمثل الاستراتيجية الصرفة الأولى $(x_1 = 1 \; , \; x_2 = 0)$ بالنقطة O. وسوف نمثل الاستراتيجية الصرفة الثانيــة $(x_1 = 0 \; , \; x_2 = 1)$ بالنقطة S.

إن كل نقطة من هذه القطعة المستقيمة تمثل قيمة معينة للنسبة x_1 وقيمة معينة للنسبة x_2 في الوقت نفسه لأن $x_1 + x_2 = 1$. فمثلاً، النقطة C منتصف هذه القطعة المستقيمة تمثل القيم $x_1 = x_2 = 1/2$. والنقطة D التي تقسم هذه القطعة المستقيمة بالنسبة $\frac{OD}{OS} = \frac{2}{3}$ تمثل القيم:

$$x_1 = 1/3 \quad , \quad x_2 = 2/3$$

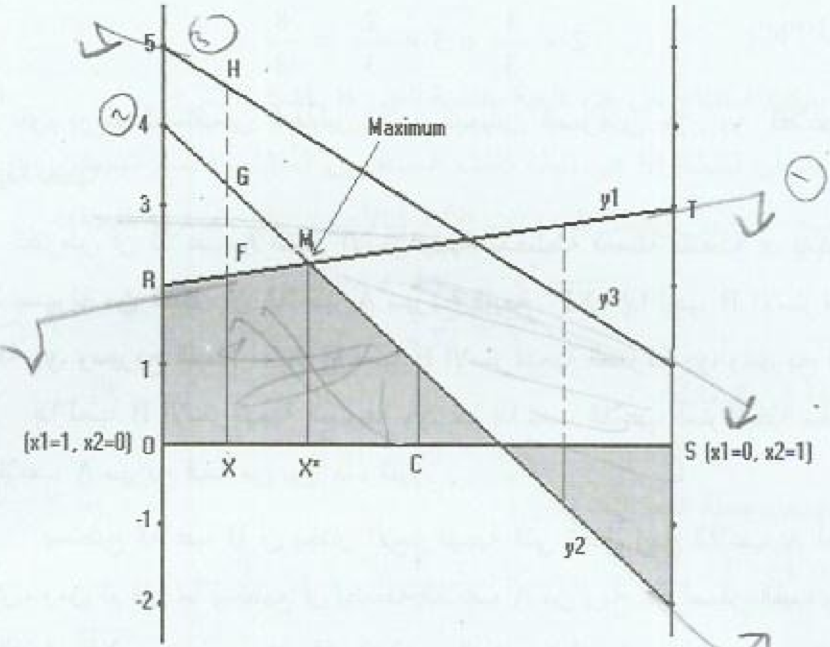
يمكننا الآن أن نمثل معدلات ربح اللاعب A المقابلة لكل استراتيجية من الاستراتيجيات الصرفة للاعب B بمخطط بياني كما في الشكل الآتي:

$\sum x_i = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$ $\quad \sum y_i = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \geq V \\ 4x_1 + 2x_2 \geq V \\ 5x_1 + x_2 \geq V \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + 3 \geq V \\ 6x_1 - 2 \geq V \\ 4x_1 + 1 \geq V \end{array}$$

$2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq V$

$3y_1 - 2y_2 + y_3 \leq V$



الشكل (1): التمثيل البياني للحل الأمثل للعبة استراتيجية

إذا اختار اللاعب B الاستراتيجية الصرفة y_1، فإنه يمكننا تمثيل ربح اللاعب A كما يأتي:

عندما يختار اللاعب A الاستراتيجية الصرفة x_1 (أي $x_1 = 1 , x_2 = 0$) والتي تمثلها النقطة O، فإنها تقابل ربحاً قدره (+2). نمثل هذا الربح على المحور الشاقولي المار من O فنحصل على النقطة R . أما عند النقطة S التي تمثل ($x_1 = 0 , x_2 = 1$) فإنها تقابل ربحاً قدره (+3)، ونمثل هذا الربح على المحور الشاقولي المار بالنقطة S فنحصل على النقطة T. ومن ثم، فإن ربح اللاعب A المقابل للاستراتيجية الصرفة y_1 للاعب B يمثل بالمستقيم الواصل بين النقطتين R و T، لأن:

$$u = 2\,x_1 + 3\,x_2 = 2 + x_2$$

وهي علاقة خطية.

فإذا لعب A مثلاً الاستراتيجية المختلطة.

$$x_1 = 1 / 3 \qquad \& \qquad x_2 = 2 / 3$$

فإن معدل ربحه المقابل للاستراتيجية الصرفة y_1 للاعب B سيكون:

$$2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

نقوم برسم المستقيمين المقابلين للاستراتيجيتين الصرفتين y_2 , y_3 للاعب B بالطريقة نفسها.

لنفترض أن اللاعب A اختار الاستراتيجية المختلطة الممثلة بالنقطة x. يمكن أن نلاحظ بسهولة من الشكل أن اللاعب A سيربح القيمة $\overline{XF}$ إذا لعب B الاستراتيجية الصرفة y_1. وسيربح القيمة $\overline{XG}$ إذا لعب B الاستراتيجية الصرفة y_2، وسيربح القيمة $\overline{XH}$ إذا لعب B الاستراتيجية الصرفة y_3. أما إذا لعب اللاعب استراتيجية مختلطة فإن اللاعب A سيربح قيمة من بين هذه القيم.

يستطيع اللاعب B أن يختار الاستراتيجية التي تجعل ربح اللاعب A أصغر ما يمكن، ومن ثم فإن ما يستطيع أن يضمنه اللاعب A من ربح هو أصغر القيم، والتي تقابل القيمة $\overline{XF}$. ونسـمي هذه القيمة بالربح المضمون لـ A.

إذا مسحت النقطة x القطعة المستقيمة OS وأوجدنا الربح المضمون في كل نقطة من نقاط هذه القطعة، وجدنا أن المنطقة المقابلة للربح المضمون هي المنطقة المظللة. وواضح من الشكل أن أكبر ربح مضمون هو $\overline{X^*M}$ المقابل للنقطة X^* التي تعطي حل هذه اللعبة بالنسبة للاعب A، وتكون $u^* = \overline{X^*M}$ هي قيمة اللعبة.

بما أن النقطة M هي نقطة تقاطع المسـتقيمين المقابلين للاستراتيجيتين y_1 , y_2، فإن على اللاعب B أن يلعب لعبة مختلطة من هاتين الاستراتيجيتين، وإلا فإنه سيتعرض لخسارة أكبر. وتكون X^* مقابلة لحل المعادلات:

$$2x_1 + 3x_2 = u^*$$
$$4x_1 - 2x_2 = u^*$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

بحل هذه الجملة من المعادلات نجد أن:

$$x_1 = \frac{5}{7} \quad , \quad x_2 = \frac{2}{7} \quad , \quad u^* = \frac{16}{7}$$

وهو الحل بالنسبة للاعب A وقيمة هذه اللعبة.

ملاحظة "4":

يمكننا استنتاج حل هذه اللعبة بالنسبة للعب B بالشكل الآتي:

بما أن النقطة M^* هي نقطة تقاطع المستقيمين المقابلين للاستراتيجيتين y_1 , y_2، فإننا نضع $y_3 = 0$ ونشكل المعادلات الآتية (بالاعتماد على مصفوفة اللعبة):

$$2y_1 + 4y_2 = v^*$$
$$3y_1 + 2y_2 = v^*$$

بالإضافة إلى المعادلة:

$$\boxed{y_1 + y_2 = 1}$$

وبحل جملة المعادلات يكون:

$$y_1 = \frac{6}{7} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{7} \quad , \quad v^* = u^* = \frac{16}{7}$$

ملاحظة "5":

باستخدام الطريقة نفسها، يمكننا حل اللعبة التي تحتوي على عمودين فقط كما سنرى في المثال الآتي:

مثـــال "4":

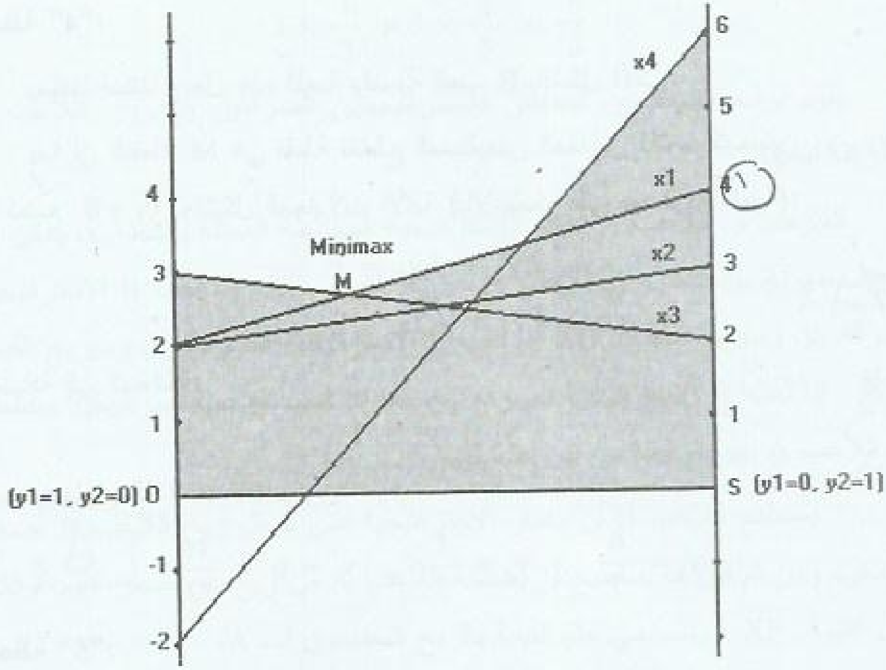
لتكن لدينا اللعبة الاستراتيجية الآتية والممثلة بالمصفوفة الآتية:

(B)

(A)	y_1	y_2	Min
x_1	2	4	2
x_2	2	3	2
x_3	3	2	2
X_4	-2	6	-2
max	3	6	

واضح أن هذه اللعبة غير مستقرة.

نمثل في الشكل الآتي خسارة اللاعب B، ومن ثم نظلل المنطقة التي يضمن فيها اللاعب B ألا تتجاوزها خسارته مهما لعب منافسه.



الشكل (2): التمثيل البياني للحل الأمثل للعبة الاستراتيجية في المثال 4

نجد أن الحل الأمثل يكون ممثلاً بالنقطة M التي تقابل تقاطع الخطوط x_1 مع x_3. ومن ثم فإن:

$$x_4 = x_2 = 0$$

ويكون لدينابالنسبة للاعب A:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= u^* \\ 4x_1 + 2x_3 &= u^* \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad , \quad u^* = \frac{8}{3}$$

أما بالنسبة للاعب B يكون:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 &= v^* \\ 3y_1 + 2y_2 &= v^* \end{aligned}$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$y_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad v^* = \frac{8}{3}$$

IX - 6 حل لعبة استراتيجية بواسطة البرمجة الخطية :

ترتبط نظرية الألعاب مع البرمجة الخطية بعلاقة قوية، حيث يمكن التعبير عن أية لعبة مؤلفة من شخصين وذات مجموع صفري ببرنامج خطي. وبالعكس، فكل برنامج خطي يمكن أن يعرض كلعبة استراتيجية.

ندرس في هذه الفقرة كيفية إيجاد حل لعبة استراتيجية ذات m سطر و n عمود بواسطة البرمجة الخطية. وهي مفيدة بشكل خاص للألعاب الاستراتيجية ذات المصفوفات الكبيرة.

لقد رأينا في الفقرة ما قبل السابقة، أن الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب A تعطي:

$$\underset{X_i}{\text{Max}} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i \ , \ \dots \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right) \right\}$$

وتخضع للقيود:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad \& \quad x_i \geq 0 \quad ; \ i = 1, 2, \dots, m$$

يمكن وضع هذه المسألة بصيغة برمجة خطية كما يأتي:

$$\vartheta = \text{Min} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i \ , \ \dots \ , \ \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right)$$

فتصبح المسألة بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \quad z = \vartheta \\
& \text{S.t.} \\
& \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \vartheta \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
& \qquad x_i \geq 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

في هذه الحالة ϑ تمثل قيمة اللعبة.

يمكن تبسيط البرنامج الخطي السابق بتقسيم قيوده البالغة $(n + 1)$ قيد على ϑ وهذه القسمة صحيحة طالما $\vartheta > 0$. أما إذا كانت $\vartheta < 0$ فإن اتجاه المتراجحات سوف ينعكس، وفي حالة $\vartheta = 0$ فإن القسمة غير مشروعة. ولكن هذا لا يمثل مشكلة خاصة، بما أنه يمكن إضافة ثابت موجب K على جميع عناصر المصفوفة، مما يضمن لنا أن قيمة اللعبة من أجل المصفوفة المعدلة أكبر من الصفر. بعد أن نصل إلى الحل الأمثل، نحصل على القيمة الصحيحة (الحقيقية) بطرح المقدار K.

بشكل عام، لنفترض أن $\vartheta > 0$ ولنقسم قيود البرنامج الخطي على ϑ فنجد:

$$a_{11}\frac{x_1}{\vartheta} + a_{21}\frac{x_2}{\vartheta} + \dots + a_{m1}\frac{x_m}{\vartheta} \geq 1$$

$$a_{12}\frac{x_1}{\vartheta} + a_{22}\frac{x_2}{\vartheta} + \dots + a_{m2}\frac{x_m}{\vartheta} \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\frac{x_1}{\vartheta} + a_{2n}\frac{x_2}{\vartheta} + \dots + a_{mn}\frac{x_m}{\vartheta} \geq 1$$

$$\frac{x_1}{\vartheta} + \frac{x_2}{\vartheta} + \dots + \frac{x_m}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}$$

لنفرض $X_i = \frac{x_i}{\vartheta}$ من أجل $i = 1, 2, \dots, m$. وبما أن:

$$\text{Max } \vartheta = \text{Min}\frac{1}{\vartheta} = \text{Min}\{X_1 + X_2 + \dots + X_m\}$$

فإن المسألة تصبح بالشكل الآتي:

$$\text{Min } X_0 = X_1 + X_2 + \dots + X_m \quad ; \quad X_0 = \frac{1}{\vartheta}$$

S.t.

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \dots + a_{m1}X_m \geq 1$$
$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{m2}X_m \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \dots + a_{mn}X_m \geq 1$$
$$X_1, X_2, \dots, X_m \geq 0$$

أما بالنسبة للاعب B، فإن المسألة تكون معطاة بالشكل:

$$\underset{y_j}{\text{Min}} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, y_j \;,\; \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, y_j \;,\; \ldots ,\; \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, y_j \right) \right\}$$

S.t.

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \quad \& \quad y_j \geq 0 \quad ; \; j=1,2,\ldots,m$$

وكما في حالة اللاعب A، يمكن عرض مسالة اللاعب B على شكل برنامج خطي كما يأتي:

$$\text{Max}\; Y_0 = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

S.t.

$$\begin{aligned}
a_{11}\, Y_1 + a_{12}\, Y_2 + \ldots + a_{1n}\, Y_n &\leq 1 \\
a_{21}\, Y_1 + a_{22}\, Y_2 + \ldots + a_{2n}\, Y_n &\leq 1 \\
&\vdots \\
a_{m1}\, Y_1 + a_{m2}\, Y_2 + \ldots + a_{mn}\, Y_n &\leq 1 \\
(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) &\geq 0
\end{aligned}$$

حيث:

$$Y_0 = \frac{1}{\vartheta} \quad \& \quad Y_j = \frac{y_j}{\vartheta} \quad ; \; j=1,2,\ldots,n$$

نلاحظ أن البرنامج الخطي الممثل لمسألة اللاعب B هو البرنامج المرافق لذلك البرنامج الممثل لمسألة اللاعب A . لذلك، فإن حل اللعبة من أجل أحد اللاعبين يعطي، وبشكل آلي، حل اللعبة للاعب الآخر. كما نلاحظ أنه يمكن حل البرنامج الخطي الممثل لمسألة اللاعب B بتطبيق الطريقة المبسطة.

مثـــال " 5 ":

لتكن لدينا اللعبة الاستراتيجية الممثلة بالمصفوفة الآتية:

(B)

		y_1	y_2	y_3	
(A)	x_1	3	-1	-3	-3
	x_2	-3	3	-1	-3
	x_3	-4	-3	3	-4
		3	3	3	

بما أن الــ Maximin هي (3-)، فإنه من الممكن أن تكون قيمة اللعبة سالبة أو صفراً. لذلك نضيف الثابت الموجب K لجميع عناصر المصفوفة. إن قيمة K يجب أن تكون مساوية على الأقل لقيمة Maximin مضروبة بإشارة سالبة، أي أن $K \geq 3$.

لنأخذ K = 5، فتصبح مصفوفة اللعبة كما في الشكل الآتي:

اذا اعطي K=4 هل تتغير النتيجة

(B)

(A)		y_1	y_2	y_3
	x_1	8	4	2
	x_2	2	8	4
	x_3	1	2	8

ومنه نجد أن البرنامج الخطي المقابل لمسألة اللاعب B هو:

$$\text{Max } Y_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$\begin{aligned} \text{S.t.} \quad & 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\ & 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1 \\ & Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1 \\ & (Y_1 , Y_2 , Y_3) \geq 0 \end{aligned}$$

لحل هذا البرنامج بحسب الطريقة المبسطة نكتبه بالشكل النموذجي وذلك بإضافة متغيرات الفروق، فنجد:

$$\text{Max } Y_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$\begin{aligned} \text{S.t.} \quad & 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 + S_1 = 1 \\ & 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 + S_2 = 1 \\ & Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 + S_3 = 1 \\ & (Y_1 , Y_2 , Y_3 , S_1 , S_2 , S_3) \geq 0 \end{aligned}$$

نبدأ بالحل الصفري، أي:

$$S_1 = S_2 = S_3 = 1 \quad \text{و} \quad Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$$

نشكل الجدول الموافق:

الجدول (1)

	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.S.	
Y0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	
S_1	0	8	4	2	1	0	0	1	-8
S_2	0	2	8	4	0	1	0	1	-2
S_3	0	1	2	8	0	0	1	1	-1

وبحسب الطريقة المبسطة، نوجد عمود الارتكاز وسطر الارتكاز وعنصر الارتكاز، فندخل Y_1 ونخرج S_1:

الجدول (2)

	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Y_0	1	0	-1/2	-3/4	1/8	0	0	1/8
Y_1	0	1	1/2	1/4	1/8	0	0	1/8
S_2	0	0	7	7/2	-1/4	1	0	3/4
S_3	0	0	3/2	**31/4**	-1/8	0	1	7/8

ندخل المتغير Y_3 ونخرج المتغير S_3 فنجد الجدول الآتي:

الجدول (3)

	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Y_0	1	0	-22/62	0	7/62	0	3/31	13/62
Y_1	0	1	28/62	0	8/62	0	-2/62	6/62
S_2	0	0	196/31	0	-6/31	1	-14/31	11/31
Y_3	0	0	6/31	1	-1/62	0	4/31	7/62

ندخل المتغير Y_2 ونخرج المتغير S_2 فنجد:

الجدول (4)

	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Y_0	1	0	0	0	20/196	11/196	14/196	45/196
Y_1	0	1	0	0	1/7	-1/14	0	14/196
Y_2	0	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
Y_3	0	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	20/196

نلاحظ أن الجدول (4) يعطي الحل الأمثل الآتي:

$$Y_0 = 45/196 \quad , \quad Y_1 = 14/196 \quad , \quad Y_2 = 11/196$$
$$Y_3 = 20/196 \quad , \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0$$

ويكون لدينا من أجل المسألة الأصلية:

$$\vartheta^* = \frac{1}{Y_0} - k = \frac{196}{45} - 5 = -\frac{29}{45}$$

$$y_1^* = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{\frac{14}{196}}{\frac{45}{196}} = \frac{14}{45}$$

$$y_2^* = \frac{Y_2}{Y_0} = \frac{\frac{11}{196}}{\frac{45}{196}} = \frac{11}{45}$$

$$y_3^* = \frac{Y_3}{Y_0} = \frac{\frac{20}{196}}{\frac{45}{196}} = \frac{20}{45}$$

يمكن الحصول على الاستراتيجية المثلى للاعب A من خلال حل المسألة المرافقة للمسألة أعلاه، ويكون معطى بالشكل:

$$X_0 = Y_0 = 45/196 \quad , \quad X_1 = 20/196 \quad , \quad X_2 = 11/196 \quad , \quad X_3 = 14/196$$
$$\Rightarrow$$
$$x_1^* = \frac{X_1}{X_0} = \frac{20}{45} \quad , \quad x_2^* = \frac{X_2}{X_0} = \frac{11}{45}$$
$$x_3^* = \frac{X_3}{X_0} = \frac{14}{45}$$

يمكن للقارئ كتابة البرنامج الخطي الممثل لمسألة اللاعب A وحله بطريقة السمبلكس، والتأكد من صحة الجواب الذي حصلنا عليه.

ملاحظة "6":

لقد ذكرنا في الفقرة السابقة، أنه يمكن إضافة ثابت K إلى عناصر مصفوفة اللعبة دون أن تتغير استراتيجيتا الحل الأمثل لأي من اللاعبين. وكل ما يتغير هو قيمة اللعبة التي تزداد بالقيمة K.

للبرهان على ذلك، لنفترض أن البرنامج الخطي المقابل لمسألة اللاعب A هو:

$$\text{Max} \quad z = u$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \geq u \qquad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

بعد إضافة الثابت K إلى عناصر مصفوفة اللعبة، تصبح هذه المسألة بالشكل:

$$\text{Max} \quad z = u'$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\, a_{ij} + K \,)\, x_i \geq u' \quad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

وتعود إلى سابقتها بوضع:

$$u' = u + K$$

وبالطريقة نفسها، نبرهن أن مسألة B لا يتغير فيها إلا تابع الهدف v الذي يصبح بعد الإضافة:

$$v' = v + K$$

ومن ثم، لا تتغير سوى قيمة اللعبة، التي تصبح:

$$u^* + K = v^* + K$$

ملاحظة "7":

نقول عن لعبة استراتيجية إنها عادلة، إذا كانت قيمة اللعبة مساوية للصفر، أي إذا كان:

$$u^* = v^* = 0$$

وذلك لأن اللعبة في هذه الحالة تحقق تكافؤ الفرص بالنسبة للاعبين. إذا لم تكن اللعبة عادلة، نقول إنها لصالح A إذا كانت قيمتها موجبة، وإنها لصالح B إذا كانت قيمتها سالبة.

ملاحظة "8":

في لعبة استراتيجية جدولها المصفوفة $M=[m_{ij}]$. إذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر وليكن $M_{k\bullet}$ مساوية أو أصغر من العناصر المقابلة لها في سطر آخر وليكن $M_{i\bullet}$، أي إذا كان:

$$M_{k\bullet} \leq M_{i\bullet}$$

فمن الواضح، أن اللاعب الأول A لن يختار الاستراتيجية x_k المقابلة للسطر $M_{k\bullet}$ بأي حال من الأحوال، لأن الوضع x_i المقابل للسطر $M_{i\bullet}$ يكون دائماً أفضل من الوضع x_k مهما كانت استراتيجيات المنافس B. أي يكون في هذه الحالة $x_k = 0$ ويمكننا حذف السطر $M_{k\bullet}$ من جدول اللعبة.

وبالطريقة نفسها، نجد أنه إذا كانت جميع عناصر أحد الأعمدة وليكن $M_{\bullet r}$ مساوية أو أصغر من العناصر المقابلة لها في عمود آخر وليكن $M_{\bullet s}$، أي إذا كان:

$$M_{\bullet r} \leq M_{\bullet s}$$

فيمكن حذف العمود $M_{\bullet s}$ من جدول اللعبة، لأن اللاعب B لن يختار في أي حال من الأحوال الوضع المقابل لهذا السطر، ويكون $y_s = 0$.

مثـال "6": السيطرة

لتكن لدينا لعبة استراتيجية مصفوفتها معطاة كما يأتي:

(B)

(A)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	1	-2	2	1	2	-2
x_2	1	-1	2	0	-1	-3
x_3	3	2	-1	3	3	1
x_4	3	0	-2	0	5	1

بمقارنة العمودين الخامس والسادس، والعمودين الأول والسادس، نجد أننا نستطيع حذف العمودين الأول والخامس، ونصل إلى الجدول الآتي:

	y_2	y_3	y_4	y_6
x_1	-2	2	1	-2
x_2	-1	2	0	-3
x_3	2	-1	3	1
x_4	0	-2	0	1

بمقارنة السطرين الثالث والرابع، نجد أننا نستطيع حذف السطر الرابع. ثم بمقارنة العمودين الثاني والسادس، والعمودين الرابع والسادس نجد أننا نستطيع حذف العمودين الثاني والرابع. وكذلك بمقارنة السطرين الأول والثاني، نجد أننا نستطيع حذف السطر الثاني، ويبقى جدول اللعبة على الشكل البسيط:

	y_3	y_6
x_1	2	-2
x_3	-1	1

$2x-(1-x) = -2x+(1-x)$

$\Rightarrow 3x-1 = -3x+1$

وبالحل نجد أن:

$6x = 2$

$x = \frac{1}{3}$

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad , \quad (x_2 = x_4 = 0)$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_6 = \frac{1}{2} \quad , \quad (y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0)$$

$\Rightarrow R(A) =$

$$u^* = v^* = 0$$

يمكن للقارئ حل هذا المثال قبل حذف الأسطر والأعمدة المشار إليها ثم مقارنة الحل الناتج مع ما حصلنا عليه.

IX – 7 مسائل غير محلولة

1. أوجد حلول الألعاب الاستراتيجية الآتية، وبيّن في كل لعبة عدالة اللعبة أو كونها لصالح أحد اللاعبين، وحدد طريقة اللعب الأفضل لكل من اللاعبين:

a)

(B)

			Min
(A)	0	2	0
	1	-1	-1
Max	1	2	

لا توجد نقطة استقرار

$R(A) = 0x + 1 - x = 2x - (1-x)$

اللاعب A يلعب استراتيجيات ١ و ٢

$\Rightarrow -x+1 = 3x-1$

$\Rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{17}{7} + \frac{28}{7} = V$

b)

$\frac{30}{7} - \frac{14}{7} = V = \frac{16}{7}$

(B)

(A)

1	2	4
4	2	1

c)

(B)

(A)

2	4	5
3	-2	1

$x_1 = \frac{5}{7}$ $x_2 = \frac{2}{7}$

$y_1 = \frac{6}{7}$ $y_2 = \frac{1}{7}$

$V = \frac{16}{7}$

$2y_1 + 4y_2 \le V$ $2x_1 + 3x_2 \ge V$ $x_1 + x_2 = 1$

$3y_1 - 2y_2 \le V$ $4x_1 - 2x_2 \ge V$ $y_1 + y_2 = 1$

d)

$-x_1 + 3 \ge V$

$6x_1 - 7 \ge V$

$-7x_1 + 5 = 0$

$x_1 = \boxed{\frac{5}{7}} \to V = -\frac{5}{7} + 3 = \frac{21 - 5}{7} = \boxed{\frac{16}{7}}$

(B)

(A)

-2	2
~~-1~~	~~-2~~
0	1

$-2y_1 + 4 \le V$

$5y_1 - 2 \le V$

$-7y_1 + 6 = 0$

$y_1 = \frac{6}{7}$ $y_2 = \frac{1}{7}$

$V = \frac{30}{7} - \frac{14}{7} = \boxed{\frac{16}{7}}$

e)

(B)

(A)

5	-1	-2
4	0	1
3	0	2

2. أوجد حل اللعبتين الاستراتيجيتين الآتيتين، مبيناً قيمة اللعبة، ومناقشاً عدالتها، ومبيناً أفضل طريقة لعب لكل من اللاعبين A و B في كل لعبة.

(B)

(A)

~~3~~	~~0~~	~~4~~	~~7~~
2	6	10	1
4	1	2	8
~~-1~~	~~5~~	~~0~~	~~0~~

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_4 \\ \hline x_1 & 2 & 6 & 1 \\ x_2 & 4 & 1 & 8 \end{array}$$

(B)

(A)

5	~~-1~~	~~-2~~
4	0	1
3	0	2

3 – برهن من غير حل أن اللعبة الاستراتيجية المعطاة بالجدول الآتي:

(B)

(A)				Min
	-6	-5	3	-6
	3	2	1	1
Max	3	2	3	

هي لعبة غير عادلة، ثم أوجد حلها.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	2	1	2	2
x_2	1	2	-1	3

4 - لدينا اللعبة الاستراتيجية المعطاة بالجدول الآتي:

(B)

(A)					Min
	2	1	2	2	1
	1	2	-1	3	-1
	2	-3	-1	-4	-4
Max	2	2	2	2	

	y_1	y_2	y_3
x_1	2	1	2
x_2	1	2	-1

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 2 & -1 \end{array}$$

1" – برهن – من غير حل – أن هذه اللعبة غير عادلة. Min Max ≠ Max Min

2" – بيّن أنه يمكن حذف سطر وعمودين من جدول هذه اللعبة.

3" – أوجد حل هذه اللعبة.

$y_1 + 2y_2 \leq V \rightarrow \begin{cases} -y_1 + 2 \leq V \\ 3y_1 - 1 \leq V \end{cases}$

$2y_1 - y_2 \leq V$

$x_1 + 2x_2 \geq V$

$2x_1 - x_2 \geq V$

$x_1 + x_2 = 1$

$y_1 + y_2 = 1$

$-y_1 + 2 = 3y_1 - 1$

$3 = 4y_1$

$y_1 = \frac{3}{4}$

$y_2 = \frac{1}{4}$

$V = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

	y_2	y_3	y_4
x_1	1	2	2
x_2	2	-1	3
x_3	-3	-1	-4

x_1	1	2	2
x_2	2	-1	3

$R(A) = ?$

$x + 2 - 2x = 2x - 1 + x$

$-x + 2 = 3x - 1$

$4x = +3$

$x = +\frac{3}{4}$

$R(A) = 3(\frac{3}{4}) - 1$

$=$

$$\begin{array}{c|cc} & y & 1-y \\ x & 1 & 2 \\ 1-x & 2 & -1 \end{array}$$

$y + 2 - 2y = 2y - 1 + y$

$-y + 2 = 3y - 1$

$-4y = -3$

$y = \frac{3}{4}$

y

$R(B) = 3(\frac{3}{4}) - 1$

$= \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

الفصل العاشر

مسألة النقل

Transportation Problem

X - 1 مقدمة

تعد مشكلة النقل حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، وتهدف إلى تحديد عدد الوحدات المنقولة من أي سلعة من مصادر التجهيز إلى مناطق الاستهلاك بحيث تكون كلفة النقل الكلية أقل ما يمكن. تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع أو ناقلات النفط تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

إن لكل مركز تصدير سعة خاصة به، ولا يستطيع تزويد كميات من المادة أكثر من الطاقة المحددة له. كما أن لكل مركز استيراد حاجة محددة يطلبها، وإنه لا يستطيع استهلاك كميات إضافية. إن نقل أي مادة من مركز تصدير إلى مركز استهلاك يرافقه تكاليف، والحل الأمثل يحدد الحد الأدنى لتكلفة نقل المواد في حدود المتاح والمطلوب.

وضع العالم **هيتشكوك Hitchcok** الصيغة الأولى لطريقة النقل في سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم **كوبمانز Koopmans** بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم **دانتزج** سنة 1953.

X - 2 تعريف مسألة النقل

يمكن أن تعرض مسألة النقل على الشكل النموذجي الآتي، بالرغم من أن تطبيقاتها أوسع بكثير كما سنرى: هناك كميات $a_i\ (i=1,2,\ldots,m)$ من مادة معينة (بترول – قمح – قطن ...) متوافرة في مراكز تصدير $O_i\ (i=1,2,\ldots,m)$، يراد نقلها بأقل كلفة ممكنة إلى مراكز استيراد $D_j\ (j=1,2,\ldots,n)$، حيث يطلب المركز D_j الكمية b_j من هذه المادة.

ونعرف أن كلفة نقل الواحدة (طن – كغ – متر مكعب ...) من المصدر O_i إلى المورد D_j هي C_{ij}.

سنفرض الآن أن:

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b \qquad (1)$$

أي أن كمية ما هو مطلوب تساوي تماماً كمية ما هو متوافر. في هذه الحالة، نقول إن مسألة النقل متوازنة (متزنة)، ويمكن تمثيلها في الجدول الآتي:

الكميات المتوافرة	D_1 D_2 ... D_j ... D_n	مراكز الاستيراد / مراكز التصدير
a_1	:	O_1
a_2	:	O_2
:	:	:
:	:	:
a_i	.... C_{ij}	O_i
:	:	:
:	:	:
a_m	:	O_m
a / b	b_1 b_2 ... b_j ... b_n	الكميات المطلوبة

المطلوب في مسألة النقل هو تعيين الكميات x_{ij} التي سنرسلها من المصادر O_i إلى الموارد D_j بحيث تكون كلفة النقل أصغرية.

إن الكميات المنقولة هي كميات غير سالبة (أي $x_{ij} \geq 0$) وتحقق الشروط الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \; i=1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

وهي m مساواة تعبر عن كون ما يخرج من كل مصدر O_i هو تماماً الكمية a_i المتوافرة فيه. ويكون أيضاً:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \; j=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

وهي n مساواة تعبر عن كون ما يصل إلى المورد D_j هو تماماً الكمية b_j المطلوب فيه. إن العدد الكلي لهذه الشروط هنا هو $m + n$ ، ولكن المساواة:

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

والتي تعبر عن (1) نستنتجها من الشروط (2) و(3). إن هذه المساواة تجعل الشروط الخطية المستقلة فقط $m + n - 1$. كما أن تكلفة نقل الكميات x_{ij} تعطى بالعلاقة:

$$z = \sum_i \sum_j C_{ij} \; x_{ij} \qquad (4)$$

وهي تابع خطي يجب أن نجعله أصغرياً. ومن ثم فإننا نجد أنفسنا أمام برنامج خطي من الشكل:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad z = \sum_i \sum_j C_{ij} \, x_{ij} \\
&\text{S.t.} \\
&\qquad \sum_j x_{ij} = a_i \qquad ; \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (5) \\
&\qquad \sum_i x_{ij} = b_j \qquad ; \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\
&\qquad x_{ij} \geq 0 \qquad ; \qquad \forall\, i, j
\end{aligned}$$

ويمكن حل هذا البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس. إلاّ أن الطريقة الخاصة بالنقل هي أسهل في حل ومعالجة مشكلات النقل.

ملاحظة "1": يوجد تمرين محلول عليه من مسألة 224.

افترضنا فيما سبق أن الكمية المتوافرة في مراكز التصدير O_i تساوي الكمية المطلوبة في مراكز الاستيراد D_j، أي:

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b.$$

ويمكننا دائماً جعل الشرط محققاً دون فقدان عمومية مسألة النقل، وبالفعل إذا كان $\boxed{a > b}$ فلا يمكن تصريف كل ما هو متوافر في مراكز التصدير O_i. نفترض

عندئذ أن هناك مركز استيراد وهمياً D_0 يمثل مستودعات مراكز التصدير O_i التي ستحتفظ بالفائض الذي يساوي $b_0 = a - b$ والذي نعده طلباً لمركز الاستيراد الوهمي D_0، ونحصل من جديد على المساواة (1) بجمع b_j $(j=0,1, \dots ,n)$. ويمكن أن نفترض عندئذ أن $\boxed{C_{i0} = 0}$ من أجل $i=1,2, \dots ,m$.

وإذا وجدنا لـــ x_{i0} قيمة موجبة في الحل النهائي، فهذا يعني أن مركز التصدير O_i سيرسل كل ما هو متوافر لديه ماعدا الكمية x_{i0} التي يحتفظ بها.

وبطريقة مشابهة، إذا كان $\boxed{a < b}$ فلا يمكن تأمين كل ما هو مطلوب في مراكز الاستيراد D_j، نفترض عندئذ مركز تصدير إضافياً وهمياً O_0 سعته $a_0 = b - a$ يعوض هذا النقص. ونعتبر C_{0j} من أجل $j = 1, 2, \dots, n$.

وإذا وجدنا لـــ x_{0j} قيمة موجبة في الحل النهائي، فهذا يعني أن مركز الاستيراد D_j سينقص من طلب الكمية x_{0j} التي لا يمكن تأمينها.

ملاحظة "2":

لكتابة البرنامج الخطي المرافـــق للبرنامج الخطي الممثل لمســـألة النقـــل (5)، سنعد المجاهيل α_i المقابلة للمجموعة الأولى (2) من القيود، والمجاهيل β_j المقابلة للمجموعة الثانية (3) من القيود. فيكون البرنامج الخطي المرافق هو الآتي:

$$\text{Max} \quad z = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j \beta_j$$

$$\text{S.t.}$$

$$\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij}$$

من الواضح أننا لانفترض شرط عدم السلبية على الكميات α_i , β_j، لأنها تقابل مساويات.

وفي الحل النهائي للبرنامجين يجب أن يكون:

المجموعة الأولى $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$ إذا كانت x_{ij} من مجاهيل القاعدة.

المجموعة الثانية $\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij}$ إذا كانت x_{ij} من مجاهيل خارج القاعدة.

X - 3 الطريقة الخاصة لحل مسألة النقل

يمكن تلخيص إيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل بالخطوات الآتية:

1- إعطاء حل أساسي (مبدئي) ممكن للمسألة:

يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح. كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي $m + n - 1$. ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق، نذكر منها: طريقة الركن الشمالي الغربي - North West Corner Method – طريقة الكلفة الأقل Least Cost Method – طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method). وبحساب تكاليف الحل المبدئي، يمكن الانتقال إلى الخطوة الثانية.

2- اختبار مثالية الحل:

لاختبار مثالية الحل، يتم اختبار الخلايا الفارغة التي لم تستخدم في الحل لمعرفة مدى إمكانية استخدامها وأثر ذلك في تخفيض التكاليف. ولاختبار مثالية الحل، يمكن استخدام عدة طرائق، منها طريقة الحجر المتحرك Stepping Stone Method وطريقة التوزيع المعدلة The Modified Distribution Method .

3- الانتقال إلى حل أفضل :

ويتم باختيار الخلية الفارغة التي يمكن أن توفر أكثر من غيرها فيما لو استخدمت في الحل، وبهذا نكون قد حصلنا على حل أساسي جديد، ونعود إلى الخطوة الثانية، وهكذا حتى نحصل على الحل الأمثل.

X- 3 – 1 إيجاد حل مبدئي ممكن لمسألة النقل:

لتسهيل طريقة إيجاد الحل المبدئي الممكن لمسألة النقل، يفضل تمثيلها بجدول كالآتي:

مراكز التصدير \ مراكز استيراد	D_1	D_2	....	D_j	...	D_n	الكميات المتوافرة
O_1	C_{11}	C_{12}	....	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
O_2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2j}	...	C_{2n}	a_2
:	:			:		:	:
:	:			:		:	:
O_i	C_{i1}		....	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
:	:			:		:	:
:	:			:		:	:
O_m	C_{m1}			C_{mj}		C_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	....	b_j	...	b_n	a b

نلاحظ أننا وضعنا التكلفة C_{ij} في الزاوية العليا اليسرى من المربع المقابل لها.

ومن أجل شرح طريقة إيجاد حل مبدئي ممكن لمسألة النقل، ندرس الطرائق الآتية:

أ – طريقة الركن الشمالي الغربي (طريقة الدرج):

North -West Corner Method

لشرح هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي:

مثـــال "1":

يراد إيجاد الحل المبدئي لمسألة نقل كميات معلومة من أربعة مراكز تصـــدير (m = 4) إلى ستة مراكز استيراد (n = 6) بكلفة موضحة في الجدول الآتي:

مراكز استيراد / مراكز تصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	الكميات المتوافرة
O_1	2 30	1 20	2	3	2	5	50
O_2	3	2 30	2 10	4	3	4	40
O_3	3	5	4 10	2 40	4 10	1	60
O_4	4	2	2	1	2 20	2 11	31
الكميات المطلوبة	30	50	20	40	30	11	181 181

نبدأ الحل في هذه الطريقة لإيجاد حل أولي ممكن للبرنامج المذكور في المثال أعلاه كما يأتي:

نبدأ من المربع الشمالي الغربي (العلوي الأيسر)، ونمرر فيه أكبر كمية ممكنة (في مثالنا $x_{11} = 30$). ثم نحاول الانتقال نحو اليمين، فنمرر فيه أكبر كميـــة ممكنة (في مثالنا $x_{12} = 20$).

ثم نحاول الانتقال نحو اليمين، فإذا لم نستطع (وهي الحالة في مثالنا) نهبط إلى المربع الأسفل، فنمرر فيه أكبر كمية ممكنة (في مثالنا $x_{22} = 30$).

ثم نحاول الانتقال نحو اليمين، وهكذا، فنحصل على ما يشبه الدرج الذي يهبط من اليسار إلى اليمين، لذلك تسمى هذه الطريقة بطريقة الدرج .

نلاحظ أن عدد المربعات التي نشغلها مساوٍ $(m + n - 1)$، وهي تسعة في مثالنا.

إن كلفة الحل المبتدئي الممكن الذي بدأنا به هي:

$$z_1 = 30\times2+20\times1+30\times2+10\times2+10\times4+40\times2+$$
$$+10\times4+20\times2+11\times2 = 382$$

وهذا الحل يعني إرسال 30 واحدة من O_1 إلى D_1 و 20 واحدة من O_1 إلى D_2 و 30 واحدة من O_2 إلى D_2 ...الخ

ب – طريقة الكلفة الأقل: Least Cost Method

تعد هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي، لأنها تأخذ بعين الاعتبار المربعات ذات الكلفة الأقل، وهذا هو هدفنا دائماً في حل مشكلات النقل. ولكي نحصل على الحل المبدئي بهذه الطريقة، نتبع الخطوات الآتية:

- نبدأ بتزويد المربع ذي التكلفة الأقل في المسألة ككل، ونزود هذا المربع بالطلبية التي يحتاج من المخزون المقابل لهذا المربع.
- نتابع ملء المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز الاستيراد من المصادر المتوافرة.

مثـــال " 2 ": بفرض أن لدينا مسألة نقل ممثلة بالجدول الآتي:

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة
O_1	2	3	7	11 150	150
O_2	0 100	12	5	6 25	125
O_3	14	1 20	3 55	9	75
O_4	10	2	5 25	8 25	50
	100	20	80	200	400 400

وهي تعبر عن نقل كميات من أربعة مراكز تصدير إلى أربعة مراكز استيراد، أي: $n = 4$, $m = 4$. باستخدام طريقة الكلفة الأقل نجد الحل المبدئي الموضح في الجدول الآتي:

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة
O_1	2	3	7	11 **150**	150
O_2	0 **100**	12	5	6 **25**	125
O_3	14	1 **20**	3 **55**	9	75
O_4	10	2	5 **25**	8 **25**	50
	100	20	80	200	400 / 400

نلاحظ أن عدد المربعات المشغولة في هذا الحل المبدئي مساوية لـ $m + n - 1 = 7$. وأن تكلفة هذا الحل المبدئي هي:

$$z_1 = 100 \times 0 + 20 \times 1 + 55 \times 3 + 25 \times 5 +$$
$$+ 150 \times 11 + 25 \times 6 + 25 \times 8 = 2310$$

ملاحظة "3":

نلاحظ أنه كان لدينا الخيار بين مربعين في العمود الثالث تكلفة النقل في كل منهما مساوية 5 ونحتاج إلى تمرير الكمية 25 نفسها. ولقد اخترنا في هذا المثال المربع (4,3)، فحصلنا على الحل. بينما لو اخترنا المربع (2,3) لأصبح عدد المربعات المشغولة مساوية 6 فقط. ومن ثم نحتاج إلى إضافة مربع آخر نمرر فيه الكمية صفر، وفي الوقت نفسه تكون تكلفة النقل $z_1 = 2360$، أي أكبر من الكلفة التي حصلنا عليها. لذلك، كان اختيارنا للمربع (4,3) موفقاً، وأعطى حلاً أفضلاً.

ج – طريقة فوجل التقريبية: (Vogel's Approximation Method)

هذه الطريقة أفضل من سابقتيها، وكثيراً ما تؤدي إلى الحل الأمثل أو قريباً منه. وللوصول إلى الحل المبدئي بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

- يحسب الفرق بين أقل تكلفتين (غير متساويتين) في كل سطر وكل عمود. وهنا لا يصح أن يكون الفرق صفراً (إذا توافق في أي عمود أو سطر تكلفتان متساويتان لا يؤخذ الفرق بينهما).

- نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر.
- نختار المربع الأقل في السطر أو العمود المختار، ونعمل على تلبية طلبية مركز الاستيراد الذي يقع فيه هذا المربع من المصدر الذي يقابله.
- نشطب السطر أو العمود الذي فرغ أو تمت تلبية طلبيته.
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف، ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي جميع طلبيات مراكز التوزيع من المصادر المتاحة.

مثال "3":

لنأخذ المثال السابق حيث $m = 4$, $n = 4$ ولنر كيفية إيجاد الحل المبدئي وفق طريقة فوجل التقريبية.

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة	فرق الأسطر
O_1	2	3 20	7 5	11 125	150	1 4 4 4
O_2	0 100	12	5	6 25	125	5 1 1 1
O_3	14	1	3 75	9	75	2 2 6 -
O_4	10	2	5	8 50	50	3 3 3 3
الكميات المطلوبة	100	20	80	200	400 400	
فرق الأعمدة	2 - - -	1 1 - -	2 2 2 2	2 2 2 2		

نلاحظ أن عدد المربعات المشغولة مساوٍ إلى $m + n - 1 = 7$. وتكون كلفة النقل وفق الحل المبدئي الذي حصلنا عليه بطريقة فوجل هي:

$$z_1 = 20\times3 + 5\times7 + 125\times11 + 100\times0 + 25\times6 + 75\times3 + 50\times8 = 2245$$

وهي أقل من التكلفة التي حصلنا عليها في طريقة التكلفة الأقل.

ملاحظة " 4":

إذا فرغ السطر وتمت تلبية العمود في الوقت نفسه، فإننا نشطب أحدهما فقط، ونعتبر الآخر (فيه صفراً إذا كان سطراً أو يلزمه صفر إذا كان عموداً)، كما أنه لا نستخدم أي سطر (أو عمود) فيه صفر (أو يلزمه صفر) عند حساب فرق الأسطر (أو الأعمدة) في الخطوة الآتية.

والآن، بعد إيجاد الحل المبدئي، ننتقل إلى الخطوة الثانية، وهي السؤال: هل هذا الحل هو حل أمثل أو لا ؟ إذا كان حلاً أمثلياً نتوقف، وإلا نبحث عن حل أفضل كما سنرى في الفقرة الآتية:

X- 3 – 2- البحث عن الحل الأمثل لمسائل النقل:

بعد أن درسنا كيفية إيجاد الحل المبدئي، سنرى كيفية البحث عن الحل الأمثل لمسائل النقل من خلال الطرائق الآتية :

١. طريقة الحجر المتنقل (المسار المتعرج) Stepping Stone Method

٢. الطريقة المعدلة (طريقة التوزيع المعدلة) Modified Distribution Method

X- 3 – 2- أ – طريقة الحجر المتنقل (المسار المتعرج)

Stepping Stone Method

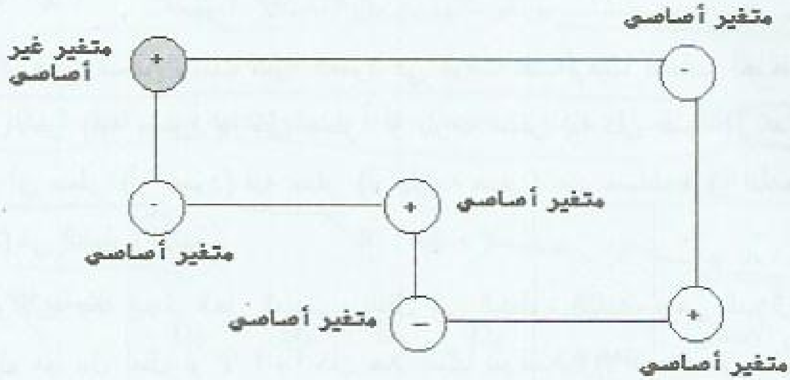
للوصول إلى الحل الأمثل بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

- نجد الحل المبدئي بإحدى الطرائق الثلاث السابقة الذكر، وغالباً ما يكون بطريقة فوجل. ثم نحسب التكلفة الإجمالية لمشكلة النقل وفق هذا الحل المبدئي.
- نحدد المتغيرات الأساسية من المتحولات غير الأساسية من جدول الحل المبدئي.

xRy

مناقشة مثال اذا كان ... فإن

- نحدد التكلفة غير المباشرة من خلال إيجاد المسارات المغلقة. إذ إن كل مسار مغلق تكون بدايته ونهايته متغير غير أساسي، ويتكون من خطوط أفقية وعمودية أركانها متغيرات أساسية. إذا تصادف وجود متغيرين أساسيين في طريق المسار، فإننا نعرج عن المتغير الأساسي غير الركني. وبشكل عام، يأخذ المسار المغلق الشكل الآتي:



الشكل (1): كيفية اختيار مسار مغلق

- نحسب التكلفة غير المباشرة لكل متغير غير أساسي، وذلك بإعطاء تكلفة المتغير غير الأساسي إشارة موجبة، وتكلفة المتغيرات الأساسية نعطيها إشارات متناوبة سالبة ثم موجبة وهكذا ... نفرض أننا ندخل هذا المتغير غير الأساسي مع مجموعة المتغيرات الأساسية، ولنعطه قيمة الواحد. إذا كانت التكلفة غير المباشرة لكل من المتغيرات الأساسية موجبة أو صفر، فإن هذا يعني أن الحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل ونتوقف. أما إذا كانت إحدى التكلفات غير المباشرة على الأقل سالبة، فإننا لا بد أن نطور الحل باختيار أحد المتغيرات غير الأساسية ليصبح أساسياً، وخروج أحد المتغيرات الأساسية.

ملاحظة "5":

لتحديد المتغير الأساسي الداخل، نأخذ المتغير غير الأساسي الذي حقق أكثر سلبية في التكلفة غير المباشرة. ولكي نجعل تحسن الحل أفضل ما يمكن، فإننا نحاول أن نمرر فيه أكبر كمية ممكنة.

مثـــال "4": الجدول الآتي يمثل تكلفة نقل بضائع من المصادر O_i حيــث $i=\overline{1,4}$ إلى مراكز التوزيع D_j حيث $j=\overline{1,3}$. أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحجــر المتنقل (المسار المتعرج).

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	2	4	0	150
O_2	3	1	5	200
O_3	6	2	4	325
O_4	1	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 / 700

الحــل:

نوجد الحل المبدئي باستخدام طريقة التكلفة الأقل. لذلك نرتب المسألة في جدول كالآتي:

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	2	4	0 / 150	150
O_2	3	1 / 200	5	200
O_3	6 / 155	2 / 120	4 / 50	325
O_4	1 / 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 / 700

نلاحظ أن عدد المربعات المشغولة مساو لــ $m+n-1=6$. والتكلفة الإجمالية للنقل وفق هذا الحل المبدئي هي:

$$z_1 = 0\times150 + 1\times200 + 6\times155 + 2\times120 + 4\times50 + 1\times25 = 1595$$

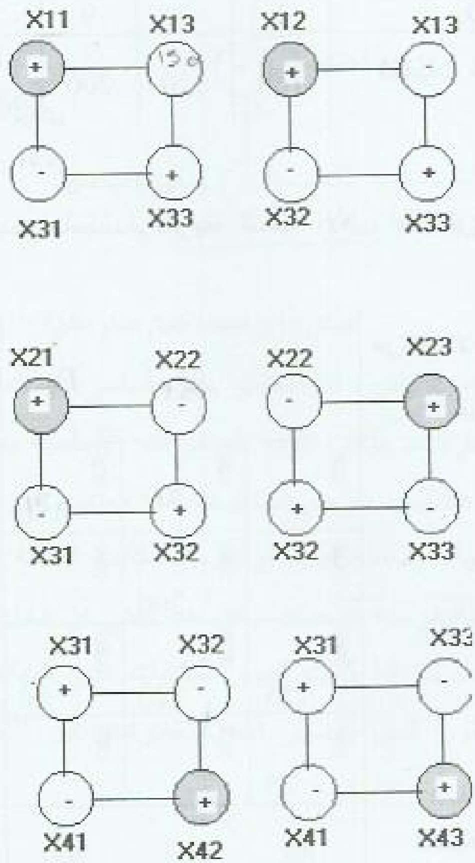
والآن، لنر فيما إذا كان هذا الحل أمثل أو لا ؟ من أجل ذلك نحدد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية. واضح أن المتغيرات الأساسية هي:

$$x_{41}\ ,\ x_{33}\ ,\ x_{32}\ ,\ x_{31}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{13}$$

المتغيرات غير الأساسية هي:

$$x_{43}\ ,\ x_{42}\ ,\ x_{23}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{12}\ ,\ x_{11}$$

لدينا ستة متغيرات غير أساسية، لذلك نكوّن ستة مسارات مغلقة، وهي:



$\alpha_1 = 0 \rightarrow$

$\leq C_{11}$

$\alpha_1 + B_2 \leq C_{12}$

الشكل (2): المسارات المغلقة الممكنة بعد ايجاد الحل المبدئي

ولنحسب التكلفة غير المباشرة، فنجد:

من أجل المتغير غير الأساسي x_{11} يكون: $x_{11} :\ 2 - 0 + 4 - 6 = 0$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{12} يكون: $x_{12} : 4 - 0 + 4 - 2 = 6$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{21} يكون: $x_{21} : 3 - 1 + 2 - 6 = -2$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{23} يكون: $x_{23} : 5 - 1 + 2 - 4 = 2$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{42} يكون: $x_{42} : 7 - 2 + 6 - 1 = 10$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{43} يكون: $x_{43} : 9 - 4 + 6 - 1 = 10$

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة المقابلة للمتغير غير الأساسي x_{21} هي مقدار سالب، وهو وحيد. لذلك ندخل هذا المتغير، ويصبح من المتغيرات الأساسية، ونخرج بدلاً منه x_{31}.

نلاحظ أنه يمكننا أن نمرر الكمية $x_{21} = 155$ x_{31} , $x_{32} = 275$, $x_{22} = 45$, $= 0$. ويصبح الجدول الجديد كالآتي:

موارد / مصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	2	4	0 150	150
O_2	3 155	1 45	5	200
O_3	6	2 275	4 50	325
O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 700

نلاحظ أن كلفة النقل وفق هذا الحل هي :

$$z_2 = 0\times150 + 3\times155 + 1\times45 + 2\times275 + 4\times50 + 1\times25 = 1285 < z_1$$

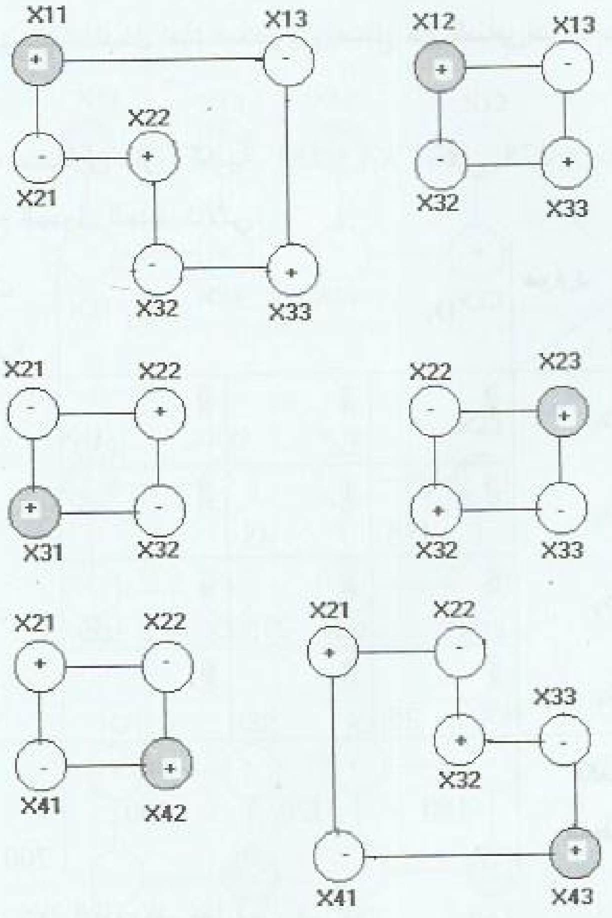
أي أن هذا الحل أفضل من سابقه.

نعود الآن فنطرح السؤال من جديد، هل الحل الذي حصلنا عليه في الخطوة السابقة هو حل أمثل ؟. من أجل الإجابة عن ذلك، نحدد المتغيرات الأساسية وغير الأساسية فنجد:

المتغيرات الأساسية هي: x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{32} , x_{33} , x_{41}

المتغيرات غير الأساسية هي: x_{11} , x_{12} , x_{23} , x_{31} , x_{42} , x_{43}

ولنشكل المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية الستة:



الشكل (3): المسارات المغلقة الممكنة بعد ايجاد الحل المحسن في الخطوة الأولى

ولنحسب التكلفة غير المباشرة:

من أجل المتغير غير الأساسي x_{11} يكون: $x_{11} : 2 - 0 + 4 - 2 + 1 - 3 = 2$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{12} يكون: $x_{12}: 4 - 0 + 4 - 2 = 6$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{23} يكون: $x_{23}: 5 - 4 + 2 - 1 = 2$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{31} يكون: $x_{31}: 6 - 2 + 1 - 3 = 2$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{42} يكون: $x_{42}: 7 - 1 + 3 - 1 = 8$

من أجل المتغير غير الأساسي x_{43} يكون: $x_{43}: 9 - 4 + 2 - 1 + 3 - 1 = 8$

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة من أجل كل متغير غير أساسي هي موجبة. ومن ثم، فإنه لا يمكن أن ندخل أي متغير غير أساسي للقاعدة الأساسية. والحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل. وتكلفة النقل الأصغرية هي التي حصلنا عليها سابقاً $z_2 = 1285$.

X- 3 – 2– ب – طريقة التوزيع المعدلة (أو طريقة المضاريب):

Modified Distribution Method

تعد هذه الطريقة طريقة أخرى من طرق إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل، وهي مشابهة أيضاً للطريقة السابقة (طريقة الحجر المتنقل). الفرق الرئيسي بينهما هو كيفية التعامل مع المتغير غير الأساسي في كل خطوة من خطوات الحل. كما أن هذه الطريقة في الحل تعتمد بشكل أساسي على نظرية الترافق.

ولإيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

- نجد الحل المبدئي بإحدى الطرائق المذكورة سابقاً.
- نحدد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية للحل.
- نقرن بكل سطر i مضروب نسميه u_i، وبكل عمود j مضروب نسميه ϑ_j، فيكون : من أجل كل متغير أساسي x_{ij} لدينا:

$$u_i + \vartheta_j = C_{ij} \qquad (*)$$

حيث C_{ij} التكلفة من O_i إلى D_j.

بما أن عدد المتغيرات الأساسية يكون $m + n - 1$ فإننا نحصل على $m + n - 1$ معادلة من الشكل السابق (*). وبحل هذه المعادلات يجب أن نوجد قيم u_i , ϑ_j والتي

عددها m + n. لذلك لا بـد لنا من أن نعطي أحد هذه المضاريب قيمة اختيارية ثم نحل هذه المعادلات وفق هذه القيمة.

بعد إيجاد القيم ϑ_j , u_i، فإنه من أجل كل متغير غير أساسي x_{ij} نحسب الكميات $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$. وبشكل مشابه لطريقة الحجر المتحرك. أما إذا كانت إحدى هذه الكميات سالبة، فإنه يجب علينا إدخال متغير غير أساسي إلى مجموعة المتغيرات الأساسية وإخراج بدلاً منه متغير أساسي. ويتم اختيار المتغير الأساسي الداخل بالطريقة السابقة نفسها.

مثـــال "5":

لنأخذ المثال السابق، حيث وجدنا الحل المبدئي وفق طريقة التكلفة الأقل كما هو مبين في الجدول الآتي:

مراكز استيراد / مراكزتصدير	ϑ_1 D_1	ϑ_2 D_2	ϑ_3 D_3	الكميات المتوافرة
u_1 O_1	2	4	0 150	150
u_2 O_2	3	1 200	5	200
u_3 O_3	6 155	2 120	4 50	325
u_4 O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 / 700

وتكلفة النقل هي: $z_1 = 1595$

المتغيرات الأساسية هي: x_{41} , x_{33} , x_{32} , x_{31} , x_{22} , x_{13}

المتغيرات غير الأساسية هي: x_{43} , x_{42} , x_{23} , x_{21} , x_{12} , x_{11}

المضاريب هي u_i حيث $i = \overline{1,4}$ و ϑ_j حيث $j = \overline{1,3}$.

من أجل متغيرات القاعدة يكون لدينا:

من أجل x_{13} ← $u_1 + \vartheta_3 = 0$

من أجل x_{22} ← $u_2 + \vartheta_2 = 1$

من أجل x_{31} ← $u_3 + \vartheta_1 = 6$

من أجل x_{32} ← $u_3 + \vartheta_2 = 2$

من أجل x_{33} ← $u_3 + \vartheta_3 = 4$

من أجل x_{41} ← $u_4 + \vartheta_1 = 1$

وهي ست معادلات، فيها سبعة مجاهيل. لحلها نفرض $u_1 = 0$ ، فنجد البقية بحل هذه المعادلات كالآتي:

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 3 \quad , \quad u_3 = 4 \quad , \quad u_4 = -1$$
$$\vartheta_1 = 2 \quad , \quad \vartheta_2 = -2 \quad , \quad \vartheta_3 = 0$$

من أجل المتغيرات غير الأساسية يكون لدينا :

من أجل x_{11} يكون: $\overline{C_{11}} = C_{11} - u_1 - \vartheta_1 = 2 - 0 - 2 = 0$

من أجل x_{12} يكون: $\overline{C_{12}} = C_{12} - u_1 - \vartheta_2 = 4 - 0 + 2 = 6$

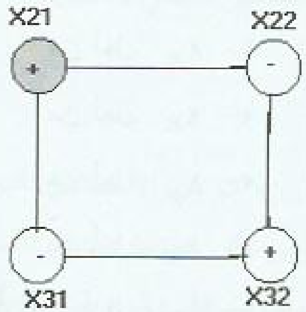
من أجل x_{21} يكون: $\overline{C_{21}} = C_{21} - u_2 - \vartheta_1 = 3 - 3 - 2 = -2$

من أجل x_{23} يكون: $\overline{C_{23}} = C_{23} - u_2 - \vartheta_3 = 5 - 3 - 0 = 2$

من أجل x_{42} يكون: $\overline{C_{42}} = C_{42} - u_4 - \vartheta_2 = 7 + 1 + 2 = 10$

من أجل x_{43} يكون: $\overline{C_{43}} = C_{43} - u_4 - \vartheta_3 = 9 + 1 - 0 = 10$

نلاحظ أن الكمية $\overline{C_{21}} = -2$ هي مقدار سالب، ومن ثم فإن الحل المبدئي الذي حصلنا عليه ليس حلاً أمثل، ولا بد لنا من تطوير هذا الحل. ومن أجل ذلك نشكل المسار المغلق للمتغير غير الأساسي x_{21} فنجده من الشكل:



الشكل (4): المسار المغلق الممكن للمتغير غير الأساسي x_{21}

ندخل المتغير x_{21} إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وذلك بأن نعطيه القيمة x_{21} = 155 ، ونخرج المتغير x_{31} ، فيصبح متغيراً غير أساسي. ومن ثم يصبح : x_{22} = 45 , x_{32} = 275 فنحصل على الجدول الآتي:

مراكز استيراد / مراكز تصدير	ϑ_1 D_1	ϑ_2 D_2	ϑ_3 D_3	الكميات المتوافرة
u_1 O_1	2	4	0 / 150	150
u_2 O_2	3 / 155	1 / 45	5	200
u_3 O_3	6	2 / 275	4 / 50	325
u_4 O_4	1 / 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 / 700

فتكون تكلفة النقل الجديدة هي: $z_2 = 1285 < z_1$

أي أن هذا الحل أفضل من سابقه، ولكن هل هو الحل الأمثل ؟

من أجل متغيرات القاعدة يكون لدينا :

من أجل $x_{13} \leftarrow u_1 + \vartheta_3 = 0$

من أجل $x_{21} \leftarrow u_2 + \vartheta_1 = 3$

من أجل $x_{22} \leftarrow u_2 + \vartheta_2 = 1$

من أجل $x_{32} \leftarrow u_3 + \vartheta_2 = 2$

من أجل $x_{33} \leftarrow u_3 + \vartheta_3 = 4$

من أجل $x_{41} \leftarrow u_4 + \vartheta_1 = 1$

نفرض $u_1 = 0$، ونحل جملة المعادلات، فنجد:

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 3 \quad , \quad u_3 = 4 \quad , \quad u_4 = 1$$
$$\vartheta_1 = 0 \quad , \quad \vartheta_2 = -2 \quad , \quad \vartheta_3 = 0$$

من أجل المتغيرات غير الأساسية يكون:

من أجل x_{11} يكون: $\overline{C_{11}} = C_{11} - u_1 - \vartheta_1 = 2 - 0 - 0 = 2$

من أجل x_{12} يكون: $\overline{C_{12}} = C_{12} - u_1 - \vartheta_2 = 4 - 0 + 2 = 6$

من أجل x_{23} يكون: $\overline{C_{23}} = C_{23} - u_2 - \vartheta_3 = 5 - 3 - 0 = 2$

من أجل x_{31} يكون: $\overline{C_{31}} = C_{31} - u_3 - \vartheta_1 = 6 - 4 - 0 = 2$

من أجل x_{42} يكون: $\overline{C_{42}} = C_{42} - u_4 - \vartheta_2 = 7 - 1 + 2 = 8$

من أجل x_{43} يكون: $\overline{C_{43}} = C_{43} - u_4 - \vartheta_3 = 9 - 1 - 0 = 8$

نلاحظ أن جميع الكميات $\overline{C_{ij}}$ هي كميات موجبة، ومن ثم فإن الحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل، والكلفة الأصغرية للنقل هي:

$$z_2 = 1285$$

ملاحظة " 6":

عند وجود أكثر من قيمة واحدة سالبة من بين الكميات $\overline{C_{ij}}$ فإنه ينصح بما يأتي:

1. إما نختار الأكثر سلبية .
2. أو نشكل المسار المغلق لكل منهما، ونلاحظ القيمة θ التي يمكن تمريرها في المربع الموافق لهذه الكمية السالبة $\overline{C_{ij}}$ ، ثم ندخل المتغير الذي يحقق $\overline{C_{ij}} * \theta$ أكبر ما يمكن إلى مجموعة متغيرات القاعدة.

ملاحظة "7":

نلاحظ في الطريقة المعدلة أن المضاريب u_i , ϑ_j ما هي إلا مجاهيل البرنامج المرافق للبرنامج الخطي الممثل لمسألة النقل. ومن ثم فعندما تتحقق الشروط $\overline{C_{ij}} \geq 0$ ، فهذا يعني تحقق الشروط الخطية وشروط الترافق وشروط عدم السلبية للبرنامج الأولي الممثل لمسألة النقل وشروط البرنامج المرافق. كما نلاحظ أن

المتغيرات ϑ_j , u_i للبرنامج المرافق غير خاضعة لشرط عدم السلبية، لأنها تقابل مساويات في قيود مسألة النقل (البرنامج الأولي).

ملاحظة "8":

افترضنا فيما سبق أننا نعرف الكميات C_{ij}، أي كلفة نقل الواحدة من كل مركز تصدير O_i إلى كل مركز استيراد D_j. يمكننا بسهولة معالجة الحالة التي لا يوجد فيها أي طريق يصل مركز التصدير O_{i_0} إلى مركز الاستيراد D_{j_0}، وذلك بوضع $C_{i_0j_0} = k$، حيث k عدد كبير جداً. وعندئذ لن تمر في الحل النهائي أية كمية من هذا الطريق، إذ تكون هناك طرق أخرى ذات كلفة أقل من كلفة هذا الطريق.

ملاحظة "9": ?

إذا وضعنا مسألة النقل في جدول فيه $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ، نجد أن طرح (أو إضافة) العدد نفسه من أحد أعمدة المصفوفة $[C_{ij}]$ التي تمثل كلفة النقل للواحدة، فإن هذا الطرح (أو الإضافة) لن يؤثر في الحل النهائي للمسألة. بالفعل، إن هذا الطرح (أو الإضافة) لا يغير القيود الخطيـة للمسألـة ولكنـه يغير قيمة تابـع الهدف فقط بطرح (أو إضافة) كمية ثابتة. فمثلاً، إذا أضفنا إلى جميع عناصر السطر i_0 الذي سعته a_{i_0} الكمية λ فإن تابع الهدف يصبح:

$$z' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (C_{i_0j} + \lambda) x_{i_0j} =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} + \lambda x_{i_0j} = z + \lambda a_i$$

إذاً، تتغير كلفة النقل، إذ تزيد بالكمية الثابتة λa_{i_0}، ولا يتغير فيما عدا ذلك حل مسألة النقل. وبالطريقة نفسها نبرهن أن إضافة العدد الثابت λ إلى جميع عناصر العمود j_0 الذي سعته b_{j_0} تؤدي إلى زيادة كلفة النقل بالكمية الثابت λb_{j_0}.

ملاحظة " 10":

إذا لم يكن عدد المربعات المشغولة مساوياً لـــ m + n - 1 ، فإنه يجب وضع أصفار في بعض المربعات حتى نحافظ على العدد m + n - 1 للمربعات المشغولة.

X - 4 مسائل محلولة

١. لنفرض أن مادة متوافرة في مدينة A بكمية كافية، يراد نقل ما يمكن منها وبأقـــل كلفة إلى المدينة B التي تطلب (110) طن، وإلى المدينة C التي تطلب (40) طناً. ولنفرض أن هناك وسائل نقل هي الطائرات والسيارات والقطارات، التي تعطـــي سعاتها وأجرة نقل الطن الواحد فيها بالجدول الآتي:

	B	C	سعة وسائل النقل (المتوافر)
طائرات	12	10	20
سيارات	9	5	90
قطارات	6	3	50
المطلوب	110	40	160 150

الحـــل:

نلاحظ هنا أن الكمية المطلوبة هي 150 ولا تساوي الكمية المتوافرة 160 لذلك لا نستطيع تطبيق الطريقة الخاصة مباشرة، وإنما يجب إضافة مركز استيراد (وهمي) يطلب الكمية الإضافية $a - b = 10$ التي يمكن نقلها من المدينة A. وتصبح مسألة النقل بالشكل الآتي :

	B	C	مركز وهمي	المتوافر
طائرات	12	10	0	20
سيارات	9	5	0	90
قطارات	6	3	0	50
المطلوب	110	40	10	160 160

والآن، لنبدأ بتطبيق الطريقة الخاصة لحل هذه المسألة. ولنبدأ بتحديد حل مبدئي وفق طريقة الركن الشمالي الغربي فنجد الجدول:

	D_1 B	D_2 C	D_3 مركز وهمي	الكميات المتوافرة
O_1 طائرات	12 20	10	0	20
O_2 سيارات	9 90	5 0	0	90
O_3 قطارات	6	3 40	0 10	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160 160

أمثل

نلاحظ أن عدد المربعات المشغولة $5 = m + n - 1$، كما أننا اضطررنا إلى وضع صفر في المربع (2,2) من أجل تحقيق انتقال سليم والمحافظة على الشرط $m+n-1$ إن تكلفة النقل وفق هذا الحل المبدئي هي:

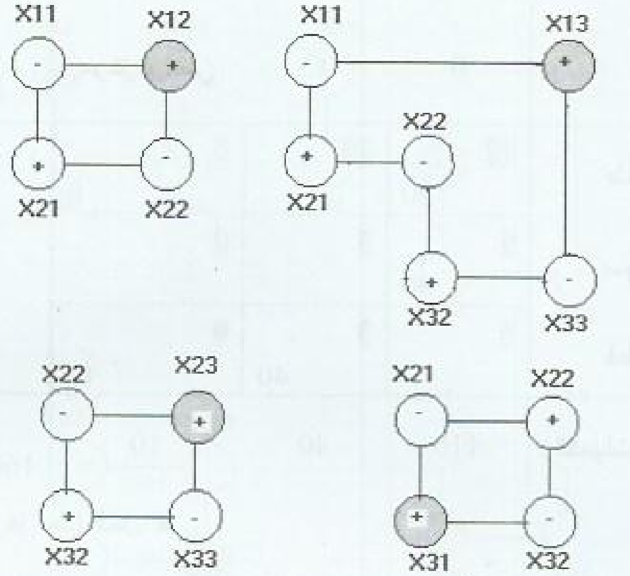
$$z_1 = 20\times12 + 90\times9 + 0\times5 + 40\times3 + 10\times0 = 1170$$

ولنر هل هذا الحل هو حل أمثل أم لا ؟. من أجل ذلك نطبق طريقة الحجر المتنقل (المسار المتعرج).

نلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي: x_{33} , x_{32} , x_{22} , x_{21} , x_{11}

والمتغيرات غير الأساسية هي: x_{31} , x_{23} , x_{13} , x_{12}.

نشكل المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية كالشكل(5):



الشكل (5)

لنحسب التكلفة غير المباشرة من أجل كل من المتغيرات غير الأساسية:

من أجل x_{12} يكون: $10 - 5 + 9 - 12 = 2$

من أجل x_{13} يكون: $0 - 0 + 3 - 5 + 9 - 12 = -5$

من أجل x_{23} يكون: $0 - 0 + 3 - 5 = -2$

من أجل x_{31} يكون: $6 - 3 + 5 - 9 = -1$

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة سالبة من أجل المتغيرات غير الأساسية:

x_{31} , x_{23} , x_{13}

كما نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة الأكثر سلبية من أجل المتغير x_{13} ، لذلك ندخله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، ومن المسار المغلق نلاحظ أن الكمية التي نستطيع تمريرها في هذا المربع هي الصفر. نخرج بدلاً منه المتغير الأساسي x_{22} فيصبح غير أساسي، فنحصل على الجدول الآتي:

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوافرة
طائرات	12 / 20	10	0 / 0	20
سيارات	9 / 90	5	0	90
قطارات	6	3 / 40	0 / 10	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160 / 160

إن تكلفة النقل وفق هذا الحل هي:

$$z_2 = 20\times12 + 0\times0 + 90\times9 + 40\times3 + 10\times0 = 1170 = z_1$$

أي أن هذا الحل لم يحسّن أي شيء، ولكن غيّر في المتغيرات الأساسية حيث أصبحت:

$$x_{33}\ ,\ x_{32}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{13}\ ,\ x_{11}$$

أما المتغيرات غير الأساسية فهي:

$$x_{31}\ ,\ x_{23}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{12}$$

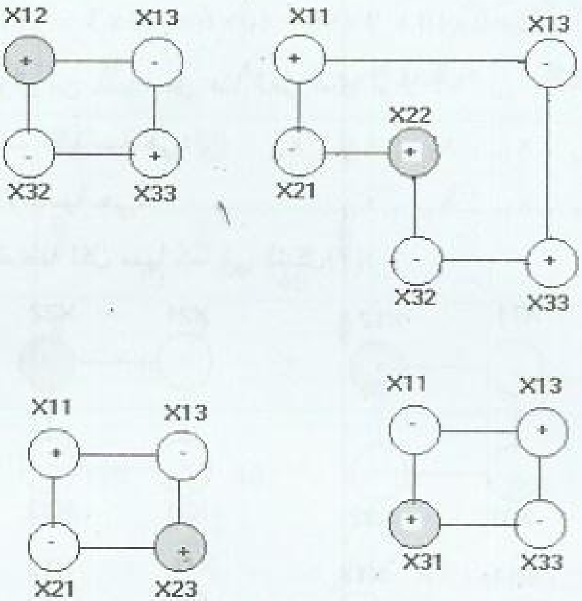
ولنشكل المسارات المغلقة لكل منها كما في الشكل(6)، وتكون التكلفة غير المباشرة من أجل كل متغير غير أساسي هي :

من أجل x_{12} يكون: $10 - 0 + 0 - 3 = 7$

من أجل x_{22} يكون: $5 - 3 + 0 - 0 + 12 - 9 = 5$

من أجل x_{23} يكون: $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

من أجل x_{31} يكون: $6 - 0 + 0 - 12 = \boxed{-6} < 0$



الشكل (6)

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة سالبة من أجل المتغير غير الأساسي x_{31}. لذلك ندخله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، كما نلاحـــظ أننا نستطيع أن نمرر قيمة الكمية 10 فيصبح $x_{31} = 10$ ونخرج المتغير الأساسي x_{33} فيصبح غير أساسي. ومنه نحصل على الجدول الآتي:

جدول التكلفة الأمثل

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوافرة
طائرات	12 10	10	0 10	20
سيارات	9 90	5	0	90
قطارات	6 10	3 40	0	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160 160

وتكلفة النقل فيه هي:

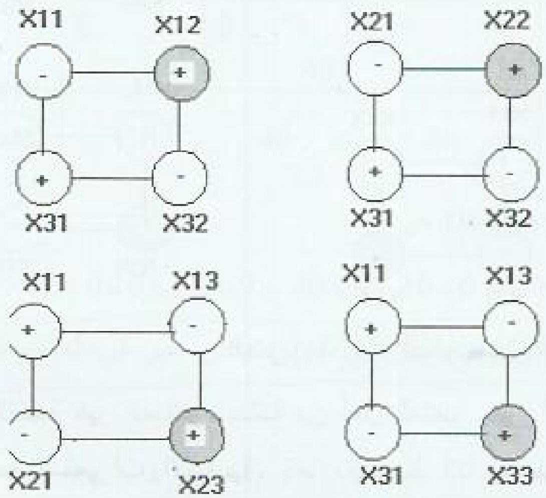
$$z_3 = 10\times12 + 0\times10 + 9\times90 + 10\times6 + 40\times3 = 1110 < z_2$$

والآن، نطرح السؤال من جديد، هل هذا الحل أمثل أم لا ؟

نلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي: x_{32} , x_{31} , x_{21} , x_{13} , x_{11}

والمتغيرات غير الأساسية هي: x_{33} , x_{23} , x_{22} , x_{12}

نشكل المسارات المغلقة لكل منها كما في الشكل(7):



الشكل (7)

وتكون التكلفة غير المباشرة من أجل المتغيرات غير الأساسية هي:

من أجل x_{12} يكون: $10 - 12 + 6 - 3 = 1$

من أجل x_{22} يكون: $5 - 9 + 6 - 3 = -1$

من أجل x_{23} يكون: $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

من أجل x_{33} يكون: $0 - 0 + 12 - 6 = 6$

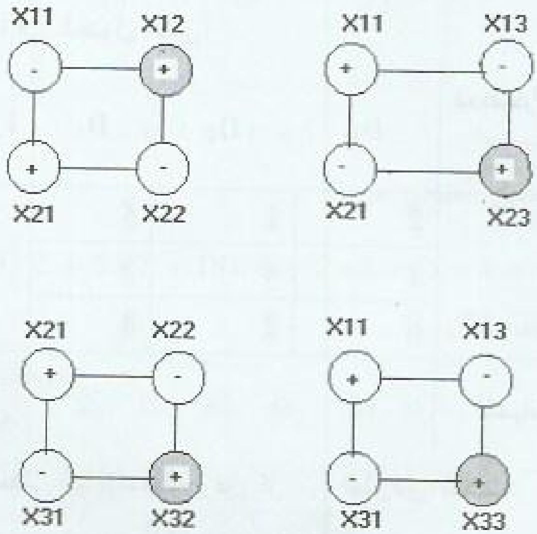
نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة سالبة من أجل x_{22}، فندخله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية. ونلاحظ أننا نستطيع أن نمرر الكمية $x_{22} = 40$، ونخرج بدلاً منه المتغير x_{32} ليصبح غير أساسي، فنحصل على الحل الممثل بالجدول الآتي:

جدول فوجل التقريبية

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوافرة
طائرات	12 (10)	10	0 (10)	20
سيارات	9 (50)	5 (40)	0	90
قطارات	6 (50)	3	0	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160 / 160

وتكون كلفة النقل وفقاً لهذا الحل كالآتي:

$$z_4 = 10\times 12 + 10\times 0 + 50\times 9 + 40\times 5 + 50\times 6 = 1070 < z_3$$



الشكل (8)

ونعود لنطرح السؤال فيما إذا كان هذا الحل أمثل؟.

نلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي:

$$x_{31}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{13}\ ,\ x_{11}$$

والمتغيرات غير الأساسية هي: x_{33} , x_{32} , x_{23} , x_{12} .

نشكل المسارات المغلقة لكل منها وفق الشكل(8).

وتكون التكلفة غير المباشرة من أجل المتغيرات غير الأساسية هي:

من أجل x_{12} يكون: $10 - 12 + 9 - 5 = 2$

من أجل x_{23} يكون: $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

من أجل x_{32} يكون: $3 - 5 + 9 - 6 = 1$

من أجل x_{33} يكون: $0 - 0 + 12 - 6 = 6$

أي أن جميع القيم موجبة، ومن ثم فالحل الذي حصلنا عليه هـو حــل أمثــل، والتكلفة الأصغرية هي 1070.

2 يراد نقل كميات من القمح المتوافر من الصوامع $\{O_3, O_2, O_1\}$ إلى المطــاحن $\{D_3, D_2, D_1\}$ فإذا كانت تكلفة نقل الطن الواحد من القمح والكميات المطلوبــة والمتوافرة معطاة في الجدول الآتي:

المطاحن / الصوامع	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	1	5	10
O_2	7	4	3	25
O_3	6	2	4	20
				55
الكميات المطلوبة	15	18	22	55

أوجد الحل المبدئي لهذه المسألة وفق كل من الطرائق الثلاث:

آ – الركن الشمالي الغربي،

ب – التكلفة الأقل،

ج – طريقة فوجل.

ثم أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة والذي يعطي أفضل تنظيم لمسألة النقل، بحيث تكون الكلفة أصغرية وفق طريقة المضاريب (طريقة التوزيع المعدلة).

الحل:

نلاحظ أن المسألة في حالة توازن، لذلك نبدأ مباشرة بتطبيق الطريقة الخاصة لحل مسألة النقل.

إيجاد الحل المبدئي:

آ – طريقة الركن الشمالي الغربي:

الصوامع \ المطاحن	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	10
O_2	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{4}$ 18	$\boxed{3}$ 2	25
O_3	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 20	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	

عدد المتغيرات الأساسية: $m + n - 1 = 5$

وتكلفة النقل وفق الحل المبدئي هي:

$$z = 10\times 2 + 5\times 7 + 18\times 4 + 2\times 3 + 20\times 4 = 213$$

ب – طريقة التكلفة الأقل:

الصوامع \ المطاحن	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{5}$	10
O_2	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 22	25
O_3	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{2}$ 8	$\boxed{4}$	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	55 / 55

تكلفة النقل وفق هذه الطريقة هي:

$$z = 10\times1 + 3\times7 + 22\times3 + 12\times6 + 8\times2 = 185$$

نلاحظ أن التكلفة في هذه الطريقة أقل من تلك في طريقة الركن الشمالي الغربي.

ج- طريقة فوجل التقريبية:

المطاحن / الصوامع	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة	فرق الأسطر
O_1	2 — 10	1	5	10	1 -
O_2	7 — 3	4	3 — 22	25	1 1 4
O_3	6 — 2	2 — 18	4	20	2 2 2
الكميات المطلوبة	15	18	22	55 / 55	
فرق الأعمدة	4 1 1	1 2 -	1 1 1		

تكلفة النقل وفق هذه الطريقة هي:

$$z = 10\times2 + 3\times7 + 2\times6 + 18\times2 + 22\times3 = 155$$

التكلفة هنا أقل من التكلفة التي حصلنا عليها في الطريقتين السابقتين.

البحث عن الحل الأمثل:

نأخذ الحل الأمثل الآتي الذي حصلنا عليه وفقاً لطريقة التكلفة الأقل.

المطاحن / الصوامع	v_1 D_1	v_2 D_2	v_3 D_3	الكميات المتوافرة
u_1 O_1	2	1 — 10	5	10
u_2 O_2	7 — 3	4	3 — 22	25
u_3 O_3	6 — 12	2 — 8	4	20
المطلوب	15	18	22	55 / 55

نقرن بكل سطر المضروب u_i ، وبكل عمود ϑ_j ، ونشكل المعادلات:

$$u_i + \vartheta_j = C_{ij}$$

من المربعات المشغولة (المتغيرات الأساسية).

بالنسبة للمتغيرات الأساسية (متغيرات القاعدة) يكون لدينا:

من أجل x_{12} يكون: $u_1 + \vartheta_2 = 1$

من أجل x_{21} يكون: $u_2 + \vartheta_1 = 7$

من أجل x_{23} يكون: $u_2 + \vartheta_3 = 3$

من أجل x_{31} يكون: $u_3 + \vartheta_1 = 6$

من أجل x_{32} يكون: $u_3 + \vartheta_2 = 2$

وبإعطاء u_1 القيمة صفر، وبحل المعادلات نجد:

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = 2 \ , \ u_3 = 1 \ , \ \vartheta_1 = 5 \ , \ \vartheta_2 = 1 \ , \ \vartheta_3 = 1$$

أما بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية يكون لدينا:

من أجل x_{11} يكون: $\overline{C_{11}} = C_{11} - u_1 - \vartheta_1 = 2-0-2 = -3$

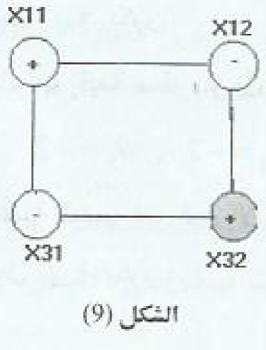
من أجل x_{13} يكون: $\overline{C_{13}} = C_{13} - u_1 - \vartheta_3 = 5-0-1 = 4$

من أجل x_{22} يكون: $\overline{C_{22}} = C_{22} - u_2 - \vartheta_2 = 4-2-1 = 1$

من أجل x_{33} يكون: $\overline{C_{33}} = C_{33} - u_3 - \vartheta_3 = 4-1-1 = 2$

أي أنه $\overline{C_{11}}$ فقط سالبة.

ومن ثم، فإن الحل الذي حصلنا عليه وفق طريقة التكلفة الأقل ليس حلاً أمثل ولا بد لنا من تطوير هذا الحل. ومن أجل ذلك، ندخل المتغير غير الأساسي x_{11} إلى مجموعة المتغيرات الأساسية. ولمعرفة الكمية التي يجب أن نمررها للمتحول x_{11} نشكل المسار المغلق لهذا المتغير فنجده من الشكل:



الشكل (9)

نلاحظ أننا نستطيع أن نضع $x_{11} = 10$ ونطرح 10 من كل من x_{31} و x_{12} ونضيف 10 إلى x_{31} فيصبح الحل كالآتي:

الصوامع \ المطاحن	D_1 (υ_1)	D_2 (υ_2)	D_3 (υ_3)	الكميات المتوافرة
u_1 O_1	2 / 10	1	5	10
u_2 O_2	7 / 3	4	3 / 22	25
u_3 O_3	6 / 2	2 / 18	4	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	55 / 55

وتكون تكلفة النقل وفقاً لهذا الحل كالآتي:

$$z = 10\times2 + 3\times7 + 2\times6 + 22\times3 + 2\times6 + 18\times2 = 155$$

والمتغيرات الأساسية هي: x_{32} , x_{31} , x_{23} , x_{21} , x_{11}

والمتغيرات غير الأساسية هي: x_{33} , x_{22} , x_{13} , x_{12}

نقرن u_i و ϑ_j بكل سطر وعمود، ونشكل المعادلات:

بالنسبة للمتغيرات الأساسية يكون: $u_i + \vartheta_j = C_{ij}$

من أجل x_{11} يكون: $u_1 + \vartheta_2 = 2$

من أجل x_{21} يكون: $u_2 + \vartheta_1 = 7$

من أجل x_{23} يكون: $u_2 + \vartheta_3 = 3$

من أجل x_{31} يكون: $u_3 + \vartheta_1 = 6$

من أجل x_{32} يكون: $u_3 + \vartheta_2 = 2$

بإعطاء u_1 قيمة صفر، وحل المعادلات نجد:

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = 5 \ , \ u_3 = 4 \ , \ \vartheta_1 = 2 \ , \ \vartheta_2 = -2 \ , \ \vartheta_3 = -2$$

أما بانسبة للمتغيرات غير الأساسية يكون $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$:

من أجل x_{12} يكون: $\overline{C_{12}} = 1 - 0 + 2 = 3$

من أجل x_{13} يكون: $\overline{C_{13}} = 5-0+2 = 7$

من أجل x_{22} يكون: $\overline{C_{22}} = 4-5+2 = 1$

من أجل x_{33} يكون: $\overline{C_{33}} = 4-4+2 = 2$

نلاحظ أن جميع القيم $\overline{C_{ij}}$ موجبة، ومن ثم فإن الحل الناتج هو حل أمثل، وتكلفة النقل الأصغرية هي : $z = 155$.

X– 5 حل مسألة النقل في حالة إيجاد أكبر ربح (طريقة فوجل التقريبية)

قد يطلب أحياناً إيجاد أكبر ربح ناتج عن عملية النقل. في هذه الحالة تكون القيم المعطاة في المصفوفة هي مقدار الربح الناتج عن عملية النقل بين كل مصدر وكل مركز استيراد. يمكن حل المسألة في هذه الحالة باستخدام طريقة فوجل التقريبية (حالة إيجاد أكبر ربح) وفقاً للخطوات الآتية :

1. التأكد من توازن المصفوفة بين قيمتي المطلوب والمتاح من المواد المنقولة. إذا لم تكن المسألة متوازنة، نضيف سطراً (أو عموداً) يمثل مصنعاً أو مستودعاً وهمياً يضم الفرق المذكور. وتكون أرباح النقل المتحققة من استخدام خلايا هذا السطر أو العمود في النقل مساوية للصفر.
2. يحسب الفرق بين أكبر تكلفتين غير متساويتين في كل سطر وكل عمود.
3. نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر.
4. نختار المربع ذا الربح الأكبر في السطر أو العمود المختار، ونعمل على تلبية طلبية مركز الاستيراد الذي يقع فيه هذا المربع من المصدر الذي يقابله.
5. نشطب السطر أو العمود الذي فرغ أو تمت تلبية طلبيته.
6. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والأسطر، ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي جميع طلبيات مراكز التوزيع من المصادر المتاحة.

ملاحظة "11":

يراعى الترتيب في اعتماد السطر أو العمود للتوزيع بحيث ينظر أولاً إلى الأسطر ثم الأعمدة. وتختار أكبر قيمة فيهما، فإذا تساوت قيمتان في الأسطر، تؤخذ

القيمة الأولى، وكذلك في الأعمدة. وإذا تساوت قيمتان في الأعمدة والأسطر، تؤخذ القيمة الموجودة في الأسطر أولاً، وهكذا.

ملاحظة "12":

لاختبار مثالية الحل الناتج، نتبع الطرق السابقة كما يأتي:

(متغيرات غير أساسية)

- في طريقة الحجر المتنقل: نختبر الخلايا الفارغة، فإذا كانت التكلفة غير المباشرة لجميع المتغيرات غير الأساسية سالبة أو صفراً، فإن هذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل. أما إذا كانت إحدى القيم موجبة، فإنه يمكن إدخال المتغير المقابل لأكبر قيمة موجبة إلى مجموعة المتغيرات الأساسية.
- في طريقة التوزيع المعدلة: نختبر الخلايا الفارغة، فإذا كانت جميع القيم $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$ سالبة أو صفراً، فإننا نكون قد وصلنا للحل الأمثل. وإذا كانت هناك قيمة موجبة، فإننا ندخل المتغير غير الأساسي المقابل لهذه القيمة إلى مجموعة المتغيرات الأساسية.

مثال "6":

الجدول الآتي يمثل المطلوب والمتاح من المواد في شركة الإنشاءات، وكذلك مقدار الربح الذي يمكن أن يتحقق نتيجة عملية النقل. والمطلوب الوصول إلى التوزيع الأمثل الذي يحقق أعلى ربح ممكن في حدود المطلوب والمتاح من المواد.

إلى / من	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة
O_1	9	6	3	2	22
O_2	8	5	1	4	11
O_3	3	2	7	8	73
الكميات المطلوبة	30	60	15	17	106 a 122 b

خطأ مطبعي

الحـــل:

نلاحظ أن المسألة ليست في حالة توازن لذلك نضيف سطراً (مركز تصدير وهمي) يعطي المقدار: $122 - 106 = 16$.

ويكون ربح النقل من هذا المصدر إلى كل مراكز الاستيراد صفراً. ومن ثم، تصبح المسألة ممثلة بالجدول الآتي:

إلى / من	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة	فرق الأسطر
O_1	9 / 22	6	3	2	22	3 3 3
O_2	8 / 8	5 / 3	1	4	11	3 3 3 3
O_3	3	2 / 41	7 / 15	8 / 17	73	1 5 1 1
مركز وهمي O_4	0	0 / 16	0	0	16	0 0 0 0
الكميات المطلوبة	30	60	15	17	122 / 122	
فرق الأعمدة	1 1 1 5	1 1 1 3	4	4 4		

نوجد الحل المبدئي وفق طريقة فوجل التقريبية كما هو موضح أعلاه. ويكون الربح في هذا الحل هو:

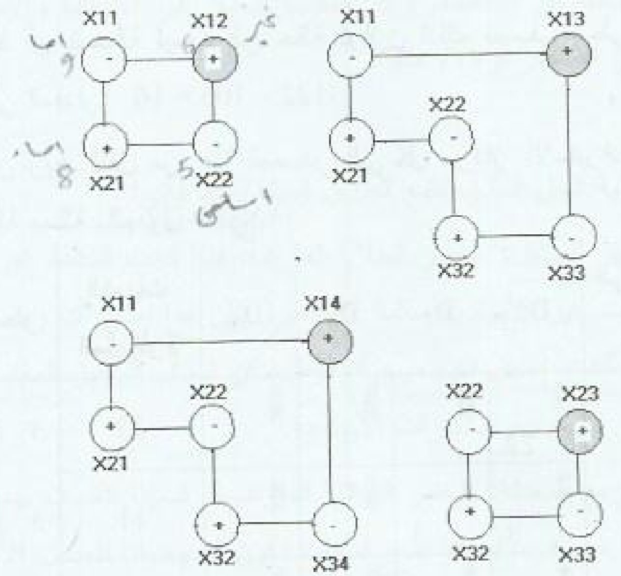
$$z = 22\times 9 + 8\times 8 + 3\times 5 + 41\times 2 + 15\times 7 + 17\times 8 + 16\times 0 = \boxed{600}$$

والمتغيرات الأساسية هي: x_{11} ، x_{21} ، x_{22} ، x_{32} ، x_{33} ، x_{34} ، x_{42}

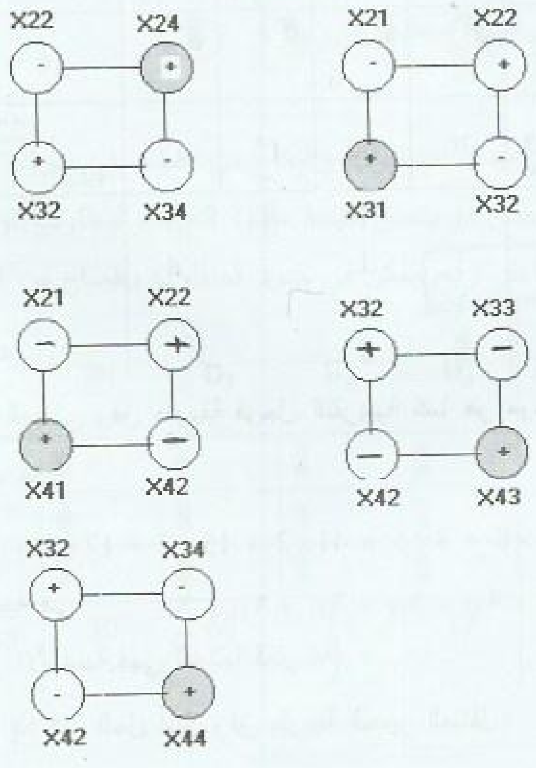
أما المتغيرات غير الأساسية فهي (الخلايا الفارغة)

لنختبر فيما إذا كان الحل أمثل وفق طريقة الحجر المتنقل:

لنشكل المسارات المغلقة لكل من المتغيرات غير الأساسية وفق الشكل (10):



الشكل (10)



تابع الشكل (10)

ولنحسب التكلفة غير المباشرة لكل من المتغيرات غير الأساسية بحسب المسارات المغلقة المذكورة.

من أجل x_{12} يكون: $6 - 5 + 8 - 9 = 0$

من أجل x_{13} يكون: $3 - 7 + 2 - 5 + 8 - 9 = -8$

من أجل x_{14} يكون: $2 - 8 + 2 - 5 + 8 - 9 = -10$

من أجل x_{23} يكون: $1 - 7 + 2 - 5 = -9$

من أجل x_{24} يكون: $4 - 8 + 2 - 5 = -7$

من أجل x_{31} يكون: $3 - 2 + 5 - 8 = -2$

من أجل x_{41} يكون: $0 - 0 + 5 - 8 = -3$

من أجل x_{43} يكون: $0 - 7 + 2 - 0 = -5$

من أجل x_{44} يكون: $0 - 8 + 2 - 0 = -6$

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة من أجل كل المتغيرات غير الأساسية هي مقدار سالب أو صفر.

لذلك فإن الحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل، والربح الأعظمي هو:

$$z = 600$$

X – 6 مسائل غير محلولة

1- الجدول الآتي يمثل تكلفة نقل البضائع من المصادر $(O_i\ ,\ i=1,2,3,4)$ إلى مراكز التوزيع $(D_j\ ,\ j=1,2,3)$

مراكز التوزيع / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة
O_1	2	4	0_{150}	0	150
O_2	3	1_{200}	5	0	200
O_3	6_{150}	2_{120}	4_{50}	0_{5}	325
O_4	1	7	9	0_{25}	25
الكميات المطلوبة	150	320	200	30	670 / 700

$m = 4$
$n = 4 \rightarrow m + n - 1 = 7$

والمطلوب: نظم طريقة النقل، بحيث تكون التكلفة أصغرية، مستخدماً طريقة الكلفـة الأقـل لإيجاد الحل المبدئي.

١ - 2- يراد نقل كميات من الأقطان من ثلاث محالج $\{O_1, O_2, O_3\}$ تتوافر فيها الكميات{15 , 25 , 5} طـن علـى الترتيـب، إلـى أربعـة معامـل نـسيج $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ تطلب الكميات {5 , 15 , 15 , 10} طن. فـإذا كانـت تكلفة نقل الطن الواحد من القطن من كل محلجة إلى كل معمل موضحة بالجدول الآتي:

تجهيز / استيراد	D_1	D_2	D_3	D_4	متوافر
O_1	12	2 5	15	11	5
O_2	14	9 10	4 15	20	25
O_3	2 10	16	11	18 5	15
المطلوبة	10	15	15	5	45

المطلوب:

1) أوجد حلاً مبدئياً لهذه المسألة وفق كلٍ من الطرائق الآتية:

m = 3 n = 4

m + n − 1 = 3 + 4 − 1 = 6

- طريقة الركن الشمالي الغربي.
- طريقة التكلفة الأقل.
- طريقة فوجل.
- قارن بين هذه الحلول، ماذا تستنتج؟.

2) بالاعتماد على الحل المبدئي الذي حصلت عليه وفقاً لطريقة الركن الشمالي الغربي نظم عملية النقل بحيث تكون كلفة النقل أصغرية.

3- يـراد نقـل (75) طناً من القمـح إلى كل مركز من مراكز طحن الحبوب الثلاثة C , B , A. حيث يمكن استخدام القطار الذي يتسـع لنقل (135) طناً، والسيارات التي تتسع إلى (105) طن. إذا علمنا أن أجرة نقل الطن الواحد.

	A	B	C		
بالقطار	10	5	6	0	135
بالسيارات	12	8	7	0	105
مطلوبة	75	75	75	15	240 / 225

4- من القمح إلى كل مركز من مراكز الطحن هي كما في الجدول الآتي:

المطلوب: تنظيم عملية النقل، بحيث تكون كلفة النقل أصغرية.

5- الجدول الآتي يمثل مصفوفة التكلفة لمسألة النقل الآتية:

مراكز توزيع / مصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوافرة
O_1	4	11	0	2	100
O_2	9	6	1	3	190
O_3	5	7	2	10	200
الكميات المطلوبة	125	75	100	200	

المطلوب:

1) أوجد الحل المبدئي لمسألة النقل أعلاه بثلاث طرق.

2) أوجد الحل الأمثل لمسألة النقل بطريقتين.

6- الجدول الآتي يبين المتوافر والمطلوب من المواد وتكاليف النقل أو الربح الناتج عن عملية النقل.

مراكز التوزيع / المصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	5	3	2	15
O_2	6	1	4	18
O_3	2	8	3	22
الكميات المطلوبة	16	24	15	

المطلـــوب: الوصول إلى التنظيم الأفضل لهذه المسألة، معتبراً أن القيم ضمن المصفوفة تمثل:

1) تكاليف النقل بين المصانـــع وصالات العرض، ومن ثم المطلوب في هذه الحالـــة تخفيض النفقات، والوصول إلى الحل الأمثل الذي يوزع المتوافر بأقل التكاليف.

$Z = 3\times 6 + 2\times 9 + 1\times 18 + 2\times 16 + 3\times 6$
$= 18 + 18 + 18 + 32 + 18$

$Z = 104$

P.235

2) الربح الناتج عن عملية النقل بين المصانع وصالات العرض، ومن ثم فالمطلوب في هذه الحالة هو إيجاد أكبر ربح، والوصول إلى الحل الأمثل الذي يوزع المتاح بأكبر ربح ممكن. P.236

7- أعد الطلبات نفسها في المثال السابق من أجل هذا المثال الموضح في الجدول الآتي:

مراكز التوزيع / المصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوافرة
O_1	18	11	9	70
O_3	8	12	15	75
O_2	13	15	19	95
O_4	14	15	8	40
الكميات المطلوبة	62	58	145	280

265

ثم أثبت صحة النتائج التي توصلت إليها، وذلك باستخدام طريقة التوزيع المعدلة في كل من حالتي تخفيض التكاليف وإيجاد أكبر ربح.

متوافرة

مطلوبة

الفصل الحادي عشر

مسألة التعيين (التخصيص)

Assignment Problem

XI - 1 مقـدمــة

تعرف مشكلة التخصيص بأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أفضل العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. تعد نماذج التخصيص حالة خاصة من نماذج البرمجة الخطية التي تهدف إلى اختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى الوصول إلى الحد الأدنى من التكاليف أو الحصول على أقصى العوائد. تظهر مشكلات التخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة . فقد يتطلب الأمر تعيين مجموعة من الأفراد بمجموعة من الأعمال، أو أن تخصص مجموعة من الأعمال لمجموعة من الآلات.

المشكلة الأساسية التي تبحثها مسألة التخصيص هي: أي من الأفراد يخصص لأي من الأعمال، بحيث تكون فيه التكاليف أدنى ما يمكن، أو أن يكون مستوى الأداء أفضل ما يمكن.

تتميز مسألة التخصيص بتحقق شرطين أساسيين: **الأول**، أن يخصص لكل عمل واحد فرد واحد. وهذا يتطلب أن يكون جميع الأفراد قادرين على أداء جميع الأعمال، ولكن في مستويات مختلفة من الكفاءة. والشرط **الثاني**، أن يتحقق نتيجة التخصص أعلى مستوى من الأداء سواء أكان الهدف زيادة الأرباح أم تخفيض التكاليف إلى الحد الأدنى.

يمكن أن ينظر إلى مسألة التخصيص على أنها حالة خاصة من مسألة النقل. حيث يمكن أن نمثل مجموعة الأعمال بمراكز الاستيراد، ومجموعة الأفراد بمراكز التصدير، على أن يتوافر في كل مركز تصدير فرد واحد فقط، وعلى أن يطلب كل

مركز استيراد عاملاً واحداً فقط. يمكن أن نفرض كلفة "نقل" تعيين الفرد i في العمل j بالقيمة C_{ij}.

إذاً، مسألة التخصيص هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية، حيث يمكن صياغته كما يلي:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} \; x_{ij}$$

S.t.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j = 1, 2, ..., m$$

$$(x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad 1)$$

قبل أن نبحث في حل البرنامج الخطي الممثل لمسألة التخصيص، فإنه من الضروري التأكد من أن المسألة متوازنة . أي أن عدد الوظائف (الأعمال) مساوٍ لعدد الأفراد $m = n$.

إذا لم تكن كذلك فإننا نضيف أفراداً وهميين (إذا كان $n < m$) أو أعمالاً وهمية (إذا كان $m < n$).

XI - 2 طرق حل مسألة التعيين (التخصيص)

هناك عدة طرائق لإيجاد الحل الأمثل لمسألة التخصيص، حيث تتفاوت كل طريقة عن الأخرى بعدد الخطوات المطلوبة للوصول للخل الأمثل. من هذه الطرائق:

1- طريقة العد الكامل (أو طريقة الحصر): Solution by Enumeration Method

في هذه الطريقة، نبحث عن جميع التبديلات لتوزيع m عمل مثلاً على n فرد. ثم نحسب التكلفة الأصغر أو الربح الأعظم لكل تبديل، ونختار التبديل الأفضل.

نذكر بأنه يمكن إيجاد التبديلات باستخدام مبدأ العد. فإذا كان لدينا m وظيفة، فإن عدد التبديلات $m!$. عيب هذه الطريقة أنها طويلة وشاقة عندما يكون عدد الوظائف m كبيراً.

2- **طريقة السمبلكس:** وهي أن نكتب البرنامج الخطي المقابل لمسألة التعيين، ثم نبحث عن الحل الأمثل لهذا البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس المعروفة.

3- **طريقة النقل:** وهي أن نعتبر مسألة التخصيص مسألة نقل، ونحلها بطرق حل مسألة النقل المعروفة، سواء في حالة تخفيض التكاليف أم إيجاد أكبر ربح.

4- **الطريقة الهنغارية (طريقة فلود Flood).**

XI - 3 الطريقة الهنغارية

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

- نختار أصغر عنصر في كل سطر ونطرحه من باقي عناصر السطر نفسه.
- نختار أصغر عنصر في كل عمود ونطرحه من باقي عناصر العمود نفسه.
- نغطي الأسطر أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية أو رأسية.
- إذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الأسطر أو الأعمدة، فإننا لا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل بعد، وعليه، فإننا نختار أصغر رقم من الأرقام التي لم تغطَّ بخطوط، ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة، ونضيف هذا الرقم إلى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي.
- نكرر ما ورد في الخطوة الثالثة حتى نحصل على الحل الأمثل (وذلك عندما يكون عدد الخطوط الأفقية والرأسية مساوياً لعدد الأسطر والأعمدة)، ثم نوجد الحل الأمثل كما يأتي:
  - نبدأ بتخصص الصفر الذي يقع في كل سطر، وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر.
  - نبدأ بتخصيص الصفر في كل عمود، ونشطب باقي الأصفار التي تقع في السطر الذي يقع فيه الصفر المخصص.

مثال "1":

لدينا ثلاث آلات C,B,A وثلاثة أوامر 3,2,1. والجدول الآتي يبين الوقت الزمني لتنفيذ الآلات للأمر المعين.

الأوامر / الآلات	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	21

والمطلوب إيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاثة من قبل الآلات الثلاث بأقل وقت ممكن .

الحـــل:

وفقاً لطريقة العد الكامل: تكون شجرة العد حسب الشكل (1)، فنجد:

التخصيص الأول: $A\rightarrow 1 \;,\; B\rightarrow 2 \;,\; C\rightarrow 3$ وتكلفته هي:

$$10+4+21=35$$

التخصيص الثاني: $A\rightarrow 1 \;,\; B\rightarrow 3 \;,\; C\rightarrow 2$ وتكلفته هي:

$$10+13+9=32$$

التخصيص الثالث: $1\rightarrow B \;,\; 2\rightarrow C \;,\; 3\rightarrow A$ وتكلفته هي:

$$10+9+9=28$$

التخصيص الرابع: $1\rightarrow B \;,\; 2\rightarrow A \;,\; 3\rightarrow C$ وتكلفته هي:

$$10+22+21=53$$

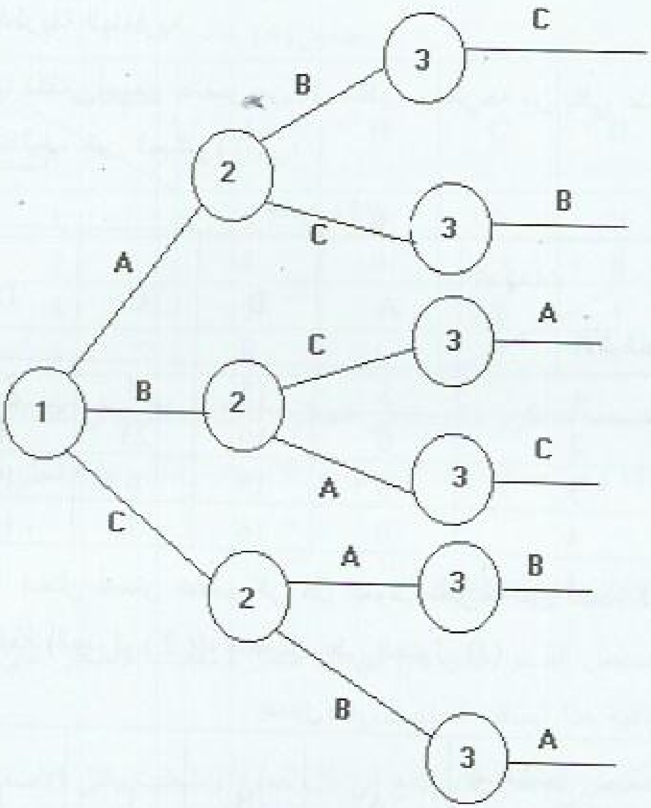
التخصيص الخامس: $1\rightarrow C \;,\; 2\rightarrow A \;,\; 3\rightarrow B$ وتكلفته هي:

$$6+22+13=41$$

التخصيص السادس: $1\rightarrow C \;,\; 2\rightarrow B \;,\; 3\rightarrow A$ وتكلفته هي:

$$6+4+9=19$$

فيكون الحل الأمثل لهذه البدائل هو أن يخصص: $1\rightarrow C \;,\; 2\rightarrow B \;,\; 3\rightarrow A$



الشكل (1)

مثـــال "2":

الجدول الآتي يمثل التكلفة الزمنية لأربعة أشـــخاص ســـينفذون أربـــع مهمات. والمطلوب إيجاد التخصيص الأمثل، بحيث يقل التكلفة الإجمالية لتنفيـــذ هذه المهام.

جدول (1)

المهمات / الأشخاص	A	B	C	D
1	15	25	10	35
2	17	27	40	21
3	12	28	9	19
4	10	26	17	23

الحــل: وفقاً للطريقة الهنغارية.

الخطوة الأولى: نختار أصغر عنصر من كل سطر، ونطرحه من باقي عناصر السطر، فينتج جدول التكاليف غير المباشرة الآتي:

جدول (2)

المهمات / الأشخاص	A	B	C	D
1	5	15	0	25
2	0	10	23	4
3	3	19	0	10
4	0	16	7	13

الخطوة الثانية: نختار أصغر عنصر في كل عمود ونطرحه من أعمدة الجدول الناتج من الخطوة السابقة (الجدول (2))، فنحصل على الجدول (3).

جدول (3)

المهمات / الأشخاص	A	B	C	D
1	5	5	0	21
2	0	0	23	0
3	3	9	0	6
4	0	6	7	9

الخطوة الثالثة: نغطي الأسطر أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطــوط أفقية ورأسية كما هو مبين في الجدول (3).

الخطوة الرابعة: نلاحظ أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الأسطر، لــذلك الحل الموجود في الجدول (3) ليس حلاً أمثل.

لذلك نقوم بتطوير الحل: نختار أصغر رقم من الأرقام غير المغطاة بخطوط ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة، ثم نضيفه إلى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي. وفي مثالنا فإن الرقم هو 5. ونحصل على الجدول رقم (4).

جدول (4)

الأشخاص \ المهمات	A	B	C	D
1	5	0	0	26
2	5	0	28	0
3	3	4	0	1
4	0	1	7	4

الخطوة الخامسة: نكرر ما ورد في الخطوة الثالثة. نلاحظ أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية = 4، وهو مساوٍ لعدد الأسطر أو الأعمدة. ولذلك، فإن الحل الناتج هو حل أمثل.

الآن، لنبدأ باستنتاج الحل:

- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل سطر وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر المخصص .
- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل عمود ونشطب باقي الأصفار التي تقع في السطر الذي يقع فيه الصفر، وهكذا كما هو واضح في الجدول (4). ويكون التخصيص الأمثل كما يأتي:

الشخص 1 نخصص له المهمة B بتكلفة 25 دقيقة.

الشخص 2 نخصص له المهمة D بتكلفة 21 دقيقة:

الشخص 3 نخصص له المهمة C بتكلفة 9 دقيقة.

الشخص 4 نخصص له المهمة A بتكلفة 10 دقيقة.

ويكون إجمالي التكلفة = 65 دقيقة.

XI – 4 مسائل غير محلولة

1- يراد تعيين موظف واحد للترجمة، وموظفين اثنين للآلة الكاتبة، وموظف واحد في دائرة العلاقات العامة . تقدم للمسابقة الوحيدة التي أجريت خمسة أشخاص

A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5. تم إجراء امتحان لهم في الترجمة والآلة الكاتبة والثقافة العامة، فكانت علاماتهم كما يأتي:

	الترجمة	الآلة الكاتبة	الثقافة العامة
A_1	9	10	9
A_2	7	6	5
A_3	7	8	5
A_4	9	8	8
A_5	5	7	1

ويفترض أن مردود كل منهم في كل وظيفة يتناسب والعلامة التي نالها في المادة المقابلة لهذه الوظيفة (الثقافة العامة هي المادة المقابلة للعلاقات العامة).

المطلوب:

إيجاد أفضل تعيين لأربعة من المتسابقين، بحيث يكون المردود الكلي أعظمياً.

2- ترغب إحدى شركات الوجبات السريعة في بناء أربعة مخازن في مدينة ما. وقد تعاملت الشركة في الماضي مع ست شركات إنشاءات مختلفة، ولما كانت راضية عنهم جميعاً، فقد دعتهم إلى تقديم عروض لكل عملية. وكانت العروض النهائية (بالألف دولار) كما في الجدول الآتي:

جدول (4)

	شركات الإنشاءات					
	1	2	3	4	5	6
المخزن 1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
المخزن 2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
المخزن 3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
المخزن 4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

ولما كانت شركة الوجبات السريعة ترغب في إنهاء هذه المخازن بأسرع وقت ممكن، فإنها ستعطي لكل شركة عملية واحدة على الأكثر.

ما هو التخصيص الذي ينتج عنه أقل تكلفة كلية لشركة الوجبات السريعة؟

الفصل الثاني عشر

الصيغة العامة لمسألة برمجة غير خطية

XII – 1 مقدمة

تعتبر البرمجة الرياضية فناً وعلماً على السواء. يتمثل الفن في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة في نموذج رياضي محدد تحديداً جيداً بالنسبة لموقف أو نظام معين، أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذا النموذج. والنظام المدروس قد يكون موجوداً فعلاً، ويهدف في هذه الحالة بناء وحل النموذج إلى تحديد سلوك أمثل للنظام لتحسين أدائه. كما قد يكون مجرد فكرة تنتظر التنفيذ، وتتجه غاية النموذج في مثل هذا الوضع نحو تمييز البنية الأفضل للنظام في المستقبل.

XII – 2 صياغة النماذج الرياضية

نبحث في مسائل الأمثلية عن تعظيم أو تصغير كمية معينة تسمى "الهدف" الذي يعتمد على عدد محدد من متغيرات القرار، وقد تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض، أو متعلقة ببعضها من خلال أحد أو مجموعة قيود. والنموذج الرياضي هو مسألة أمثلية يعطى فيها الهدف والقيود في صورة توابع رياضية وعلاقات تأخذ الصيغة الآتية:

$$\text{Optimize}\, Z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad \text{(تابع الهدف)}$$

ضمن القيود التالية:

$$\left.\begin{array}{l} g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{l} d_1 \\ \ldots \\ d_m \end{array}\right. \qquad \text{القيود الفنية} \qquad (1)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \qquad \text{"قيود عدم السلبية"}$$

وهكذا فإن النموذج الرياضي يتألف من عناصر أساسية ثلاث هي:

1) متغيرات القرار وهي مركبات الشعاع $x \in R^n$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ وهذه المركبات هي مجاهيل المسألة.

2) تابع الهدف: ويعتبر مقياساً لكفاءة أو فعالية نظام ما ويتضمن متغيرات قرار معينة ويخضع لشروط محدودة. وهكذا فهو المؤشر الوحيد لبلوغ الحل الأمثل.

3) القيود أو الشروط: إن أي نموذج رياضي يتضمن مجموعة شروط فنية تقيد متغيرات القرار بقيم ممكنة (أو مسموح بها). وإلى جانب القيود الفنية، فإن القيود $x_i \geq 0$ تسمى قيود عدم السلبية التي تعني أن متغيرات القرار تساوي فقط الصفر أو قيمة موجبة، وهذا شرط أساسي وطبيعي في معظم نظم الحياة الواقعية.

تعاريف:

- نسمي مجموعة الأشعة $x \in R^n$ والتي تحقق جميع القيود بالحلول الممكنة، أما الشعاع الذي يحقق جميع القيود ويبلغ التابع فيه قيمته المثلى ندعوه "الحل الأمثل".
- نسمي المنطقة التي تحوي الحلول الممكنة بمنطقة الإمكانيات.

نواجه في الحياة العملية أشكالاً مختلفة من النماذج الرياضية، ونميز على وجه الخصوص ما يأتي:

- النماذج الخطية Linear models: يكون النموذج (1) خطياً إذا $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ وكل من $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ حيث $(i = 1, 2, ..., m)$ خطياً في حد ذاته.
- النماذج غير الخطية Nonlinear models: إن أي نموذج رياضي يكون غير خطي إذا كان تابع الهدف غير خطي وسواء أكان مقيداً أم غير مقيد بقيود.
- النماذج التربيعية Quadratic models: تعتبر النماذج الربيعية من النماذج الرياضية التي تكون فيها جميع القيود خطية، ولكن تابع الهدف يأخذ الصيغة التربيعية.
- النماذج الديناميكية Dynamic models: النماذج الديناميكة هي نماذج رياضية تأخذ عادة الصيغة التالية:

$$\text{Optimise } Z = f_1(x_2) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$$

ضمن الشروط الآتية:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le d$ جميع المتغيرات أعداد صحيحة غير سالبة.

ويلاحظ أن $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ هي توابع معروفة في متغير واحد، و d عدد صحيح معروف غير سلبي.

عولجت مسائل البرمجة غير الخطية باستخدام طرق تقليدية قدمها رياضيو القرن السابع والثامن عشر (لاغرانج – نيوتن – ...). ومازال الكثير من هذه الطرق يجذب الباحثين في عصرنا الحالي. أما القفزة العظمى في هذا المجال كانت عام 1951 عندما توصل كين – تيوكر إلى إضافة شروط جديدة على أسلوب طريقة مضاريب لاغرانج مما أدى إلى السيطرة على معظم مشاكل البرمجة غير الخطية.

XII –3 الصيغة العامة للبرمجة الرياضية غير الخطية

بتعريف $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ ، تكون الصيغة العامة للنماذج غير الخطية هي:

$$\text{Max (or Min) } z = f(x)$$

علما بأن:

$$g_i(x)(\le, =, \ge) d_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

حيث f تابع غير خطي، وكل أو بعض القيود g_i تكون خطية. ويمكن استخدام كل أو بعض التحويلات الأولية على المصفوفات وبعض المفاهيم في التحليل المحدب لتحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية الآتية:

$$\text{Max } z = f(x)$$

علما بأن:

$$g_i(x) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$-x \le 0$$

لسوء الحظ، إن أساليب حل مسائل البرمجة غير الخطية هي دائماً أعقد بكثير من أساليب حل مسائل البرمجة الخطية وتتطلب غالباً فرض قيود إضافية. ولهذا السبب، فإن الأساليب الحسابية المكتشفة تعالج فقط مجموعة جزئية من مسائل البرمجة غير الخطية.

XII – 4 الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة غير الخطية

سوف نوضح الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة غير الخطية من خلال الأمثلة التي نعرضها فيما يأتي:

مثال (1): لتكن لدينا مسألة البرمجة الآتية:

$$\text{Min} \quad f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

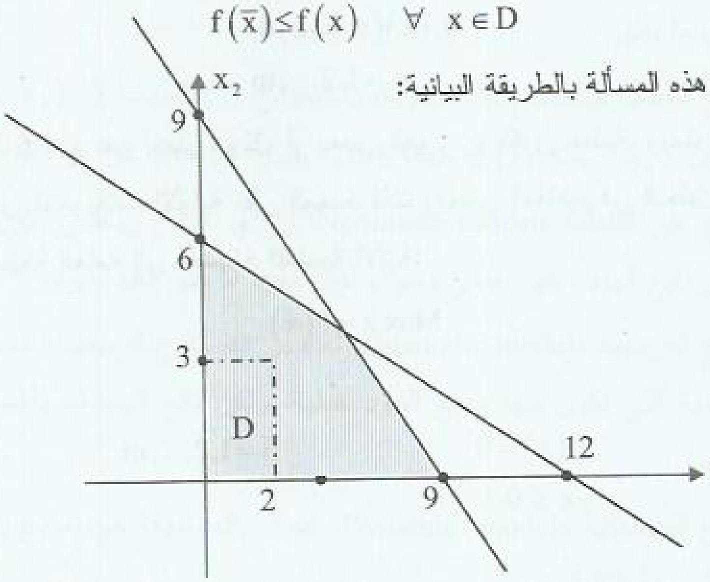
<u>s.t</u>

$$x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل: نلاحظ أن تابع الهدف غير خطي. فالمسألة المعطاة تمثل إذاً مسألة برمجة غير خطية. ولنوجد الآن الحل الأمثل $\overline{x} = (x_1, x_2)$ بحيث يتحقق:

$$f(\overline{x}) \le f(x) \quad \forall \quad x \in D$$

لحل هذه المسألة بالطريقة البيانية:



- نرسم منطقة الإمكانيات D والتي تتشكل من تقاطع القيود.
- نرسم تابع الهدف وهو عبارة عن دائرة مركزها $A(2,3)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{f}$

من الشكل واضح أن $\text{Min } f = 0$ حيث إن أصغر قيمة يبلغها تابع الهدف هـــي في المركز $A(2,3)$.

أما إذا كان المطلوب هو إيجاد $\text{Max } f$ فسيكون ذلك في النقطة $B(9,0)$ وبالتالي فإن:

$$f^{*} = \text{Max}\, f = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$$

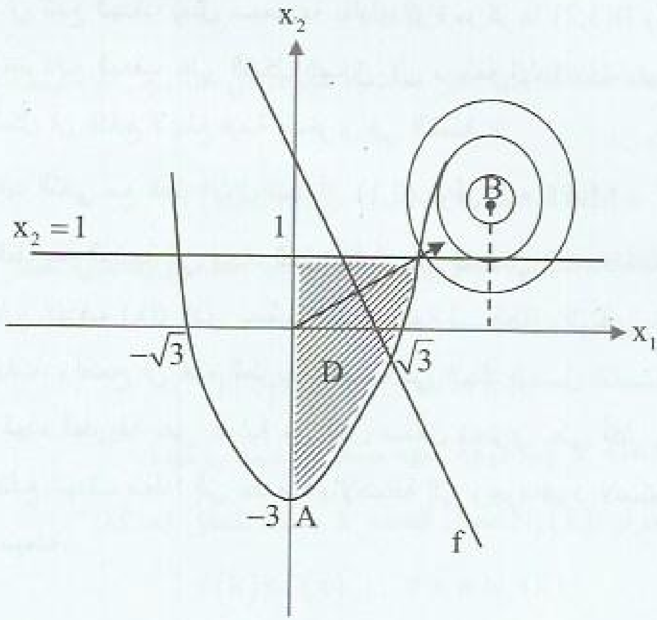
مثال (2): لتكن لدينا مسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min}\, f(x) = x_1 + \frac{1}{2} x_2$$

<u>s.t.</u>

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 - 3 &\le 0 \\ x_2 - 1 &\le 0 \\ -x_1 &\le 0 \end{aligned}$$

أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة.



الحل:

نلاحظ أن القيد الأول $g_1(x)=x_1^2-x_2-3$ يمثل معادلة قطع مكافئ، نأخذ نقطة من داخل القطع ولتكن $(0,0)$ نعوض في القيد فنجد أن المتراجحة محققة في جميع النقاط الواقعة داخل القطع، نرسم منطقة الإمكانيات D ولنوجد الحل الأمثل $\overline{x}$ بحيث يتحقق:

$$f(\overline{x}) \le f(x) \quad ; \quad \forall \quad x \in D$$

نلاحظ أن تابع الهدف $f(x)$ يبلغ قيمة مثلى (صغرى) عند النقطة A والتي إحداثياتها $A(0,-3)$ وبالتالي فإن:

$$f^* = \operatorname{Min} f(x) = -\frac{3}{2}$$

مثال(3):

لتكن لدينا مسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\operatorname{Min}\ f(x) = \left[(x_1-3)^2 + (x_2-2)^2\right]$$

أوجد حل هذه المسألة علماً أنها تخضع لقيود المثال السابق نفسه.

الحل: نلاحظ أن تابع الهدف يمثل مجموعة نقاط دائرة مركزها $B(3,2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{f}$. لنرسم تابع الهدف على الشكل السابق لأن منطقة الإمكانيات بقيت نفسها. نلاحظ من الشكل أن التابع f يبلغ قيمة صغرى في النقطة c.

بحل القيد الثاني مع القيد الأول نجد أن $c(2,1)$ وأن $f^* = \operatorname{Min} f = 2$.

ملاحظة: إن الطريقة المتبعة في إيجاد الحل الأمثل في المسائل السابقة تعتمد على تحديد مسار تابع الهدف $f(x)$ الذي يعطينا أصغر قيمة لـ $f(x)$ والذي يتقاطع مع منطقة الإمكانيات. واضح أن هذه الطريقة البيانية في إيجاد الحل تناسب المسائل البسيطة فقط. فهذه الطريقة غير عملية من أجل مسائل تحتوي على أكثر من مجهولين أو يكون فيها تابع الهدف معقداً إلى حد ما، بالإضافة إلى وجود قيود لانستطيع التعبير عنها بأشكال بسيطة.

XII – 5 المسائل غير الخاضعة لقيود

نعني بحل مسائل البرمجة غير الخطية وغير الخاضعة لقيود، البحث عن القيمة الصغرى العامة (أو العظمى) لتابع حقيقي f يتبع n متحول حقيقي $x_1, x_2, ..., x_n$. كما أن كل من هذه المتحولات يمكن له أن يأخذ قيمه من $-\infty$ إلى $+\infty$، أي أنه لايوجد أي قيد على الشعاع $x \in R^n$.

نادراً ما تصادفنا، في الحياة العملية، مسائل من دون قيود ولكن على الرغم من ذلك فإننا سنعالج هذا النوع من المسائل لأن الشروط المثلى لحل المسائل الخاضعة لقيود ما هي إلاّ امتداد منطقي لشروط حل المسائل غير المقيدة. إضافة إلى ذلك، فإن إحدى الطرائق المتبعة في حل المسائل المقيدة هي أن نقوم بحل متوالية من المسائل غير المقيدة.

XII – 5 – 1 تعريف مسألة البرمجة غير الخطية وغير الخاضعة لقيود

ليكن لدينا التابع $f: R^n \to R$ والذي يعرف بالشكل $f(x) = f(x_1, x_2, x_n)$ وذلك من أجل أي إشعاع $x \in R^n$. وليكن المطلوب هو:

$$\begin{gathered} \text{Min } f(x) \\ x \in R^n \end{gathered}$$

نقول عن هذه المسألة إنها غير خاضعة لقيود. أي أننا يجب أن نبحث عن نقطة $\overline{x} \in R^n$ بحيث يكون:

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad ; \quad \forall \ x \in R^n \qquad (1)$$

نقول عن النقطة $\overline{x}$ التي تحقق العلاقة (1) إنها نقطة نهاية حدية صغرى عامة. إذا كانت النقطة $\overline{x}$ تحقق العلاقة:

$$f(\overline{x}) < f(x) \ ; \ \forall \ x \in R^n$$

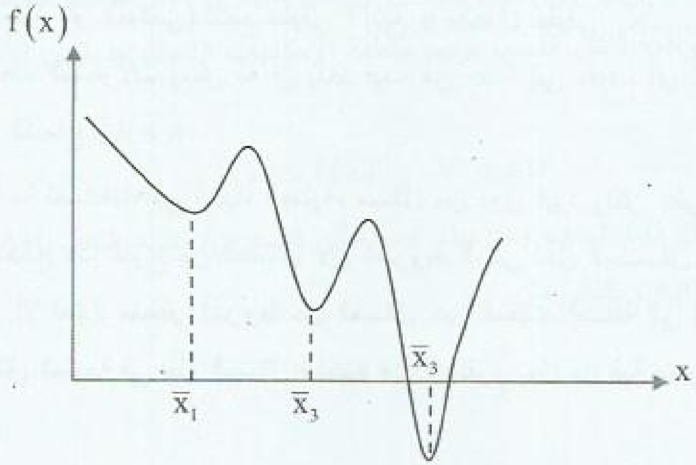
نقول عن النقطة $\overline{x}$ إنها نهاية حدية صغرى عامة ووحيدة.

تعريف: إذا وجد جوار $N_\varepsilon(\overline{x})$ حول النقطة $\overline{x}$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \ ; \ \forall \ x \in N_\varepsilon(\overline{x})$$

في الجوار فقط. فإننا نقول عن $\overline{x}$ إنها نهاية حدية صغرى موضعية.

مثال: نلاحظ في الشكل أن: $f(\overline{x}_1) \le f(x) \; ; \; \forall\, x \in N_\varepsilon(\overline{x})$



إذاً $\overline{x}_1$ نهاية حدية صغرى موضعية. كما نلاحظ أن:

$$f(\overline{x}_3) \le f(x); \; \forall x \in R^n$$

إذاً $\overline{x}_3$ هي نهاية صغرى عامة.

XII – 5 – 2 الشروط اللازمة والكافية لوجود النهايات الصغرى العامة والموضعية

نفترض هنا أن التابع f(x) مستمر وأن مشتقاته الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ والثانية $\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}$ مستمرة أيضاً من أجل أي نقطة $x \in R^n$. عندئذ يكون لدينا:

نظرية: إذا كانت النقطة $\overline{x}$ نهاية حدية صغرى (عامة أو موضعية) للتابع f، فإن:

(a $\nabla f(\overline{x}) = 0$

(b مصفوفة هيسيان للتابع f:

$$\nabla^2 f(\overline{x}) = \left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x})\right]$$

هي مصفوفة موجبة شبه تامة.

البرهان: الفرض: النقطة $\overline{x}$ هي نهاية حدية صغرى موضعية لــ f.

الطلب: تحقق الشرطين.

بما أن التابع f قابل للاشتقاق مرتين ومستمر فإن منشور تايلور لهذا التابع بجوار النقطة $\bar{x}$ يعطى بالشكل:

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f^{T}(\bar{x})(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^{T}\nabla^{2}f(\bar{x})(x-\bar{x})+$$
$$\|x-\bar{x}\|^{2}.\beta(x-\bar{x})$$

حيث $\beta(x-\bar{x})\to 0$ عندما $x\to\bar{x}$.

للبرهان على تحقق الشرط الأول نتبع طريقة نقض الفرض:

إذا كان $\nabla f(\bar{x})\neq 0$ فإننا باختيار $x=\bar{x}-\theta\nabla f(\bar{x})$ سيكون لدينا من أجل $\theta>0$ مقدار صغير بقدر كافٍ:

$$f(x)<f(\bar{x})$$

وهذا تناقض مع الفرض ($\bar{x}$ نهاية حدية صغرى). إذاً الشرط a) هو شرطاً لازماً.

يمكننا أن نكتب الآن:

$$f(x)=f(\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})\nabla^{2}f(\bar{x})(x-\bar{x})+\|x-\bar{x}\|^{2}.\beta(x-\bar{x})$$

حيث $\beta(x-\bar{x})\to 0$ عندما $x\to\bar{x}$.

إذا لم تكن المصفوفة $\nabla^{2}f(\bar{x})$ موجبة شبه تامة، فإن هذا يعني وجود شعاع $0\neq d\in R^{n}$ بحيث يكون $d^{T}\nabla^{2}f(\bar{x}).d<0$. عندئذ باختيار $x=\bar{x}+\theta d$ حيث $\theta>0$ مقدار صغير بقدر كافٍ سيكون لدينا $f(x)<f(\bar{x})$ وهذا تناقض أيضاً مع الفرض أن $\bar{x}$ نهاية حدية صغرى إذاً الشرط b) محقق أيضاً كشرط لازم.

تعريف: نقول عن النقطة x^{*} التي تحقق الشرط a) من النظرية السابقة (أي $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{*})=0\right)$ وذلك من أجل i = 1,2,..,n أنها نقطة ساكنة (Stationnaire). (حرجة).

نظرية: مع فرضيات النظرية السابقة نفسها، نقول عن النقطة $\overline{x}$ إنها نقطة نهاية حدية صغرى موضعية للتابع f فوق R^n إذا كان:

a) $\nabla f(\overline{x})=0$

b) مصفوفة هيسيان $\nabla^2 f(\overline{x})$ هي مصفوفة موجبة تامة.

البرهان: الفرض: الشرطان محققان عند النقطة $\overline{x}$.

الطلب: $\overline{x}$ نقطة نهاية حدية صغرى موضعية.

إن منشور تايلور للتابع f بجوار $\overline{x}$ يكتب بالشكل:

$$f(x)=f(\overline{x})+\frac{1}{2}(x-\overline{x})^T\nabla^2 f(\overline{x})(x-\overline{x})+\|x-\overline{x}\|^2.\beta(x\text{-}\overline{x})$$

حيث $\beta(x-\overline{x})\to 0$ عندما $x\to\overline{x}$.

من أجل أي شعاع نقل $d\in R^n$ (مثلاً $\|d\|=1$) يكون لدينا:

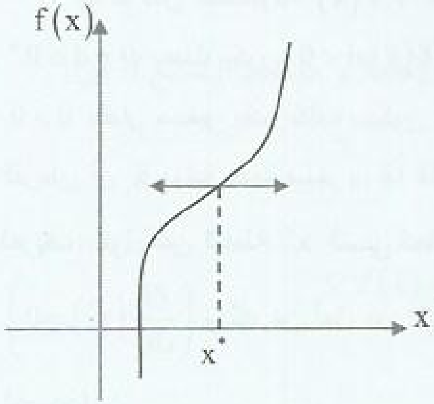
$$f(\overline{x}+\theta d)=f(\overline{x})+\frac{\theta^2}{2}d^T.\nabla^2 f(\overline{x}).d+\theta^2.\beta(\theta)$$

حيث $\beta(\theta)\to 0$ عندما $\theta\to 0$.

من الشرط الثاني يكون لدينا $d^T.\nabla^2 f(\overline{x}).d>0$ وبالتالي من أجل θ مقدار صغير بقدر كافٍ. يكون لدينا $f(\overline{x}+\theta d)>f(\overline{x})$ وبالتالي فإن $\overline{x}$ هي نهاية حدية صغرى موضعية.

ملاحظة: نلاحظ من هذه النظرية أن الشرط الثاني يكافئ الفرضية أن f تابع محدب في جوار $\overline{x}$.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن تكون النقطة الساكنة نقطة نهاية حدية صغرى موضعية الشكل يوضح نقطة x^* ساكنة ولكنها ليست نهاية موضعية.



كما نلاحظ من هذا الشكل أن الشروط الكافية لوجود نقطة نهاية حدية صغرى موضعية غير محققة. لأن التابع f يقبل نقطة انعطاف x^* وبالتالي فإن مصفوفة هيسيان ليست موجبة تامة. وإنما تكون موجبة شبه تامة. $\left(\frac{\partial 2f}{\partial x^2}(x^*)=0\right)$.

مثال: أوجد القيم القصوى للتابع:

$$f(x)=\left(x^2-1\right)^3 \qquad \forall x\in R$$

ثم حدد طبيعتها.

الحل: نقصد بالقيم القصوى القيم الصغرى أو القيم العظمى. ولإيجاد هذه القيم نعتمد على العلاقة:

$$\nabla f(x)=0$$

وبالتالي:

$$6\left(x^2-1\right)^2.x=0\Rightarrow$$

إما $x=0$

أو $x=1$

$x=-1$

ولتحديد طبيعة هذه النقاط نوجد مصفوفة هيسيان في هذه النقاط:

$$H(x)=\frac{\partial 2f}{\partial x^2}=6\left(x^2-1\right)^2+24x^2\left(x^2-1\right)$$

نلاحظ أنه عندما $x=0$ فإن $H(0)=6>0$ ، أي H موجبة تامة وبالتالي فإن النقطة $\overline{x}=0$ هي نهاية حدية صغرى للتابع f.

عندما $x=\pm 1$ فإن $H(x=\pm 1)=0$، أي أن H موجبة شبه تامة. وبالتالي لانستطيع تحديد نوع النقطة.

XII – 5 – 3 حالة التوابع المحدبة

عندما يكون التابع f محدباً ومعرفاً على R^n ، فإننا نستطيع الحصول على شروط لازمة وكافية لكي تكون نقطة ما، نقطة نهاية حدية صغرى عامة. ويمكن أن نلخصها بالنظرية الآتية:

نظرية: إذا كان f تابعاً محدباً وقابلاً للاشتقاق وبشكل مستمر، فـإن الـشرط الـلازم والكافي لكي تكون النقطة $\bar{x}$ هي نقطة نهاية حدية صغرى عامة للتابع f فوق R^n هو أن يكون $\nabla f(\bar{x})=0$.

XII – 5 – 4 الشروط اللازمة والكافية لوجود النهايات العظمى العامة والموضعية

بشكل مشابه تماماً لدراسة النهايات الصغرى العامة والموضعية: ممكن أ، نعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود نهايات عظمى. ونلخصها بالنظريات الآتية:

نظرية: إذا كان التابع f(x) مستمراً ومشتقاته الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ والثانيـة $\frac{\partial 2f}{\partial x_i.\partial x_j}$ مستمرة أيضاً من أجل أي نقطة $X\in R$. عندئذ يكون لدينا:

إذا كانت النقطة $\bar{x}$ نهاية حدية عظمى (عامة أو موضعية) للتابع f. فإن:

a) $\nabla f(\bar{x})=0$

b) مصفوفة هيسيان $\nabla^2 f(\bar{x})=\left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{x})\right]$ هي مصفوفة سالبة شبه تامة.

نظرية: مع فرضيات النظرية السابقة نفسها. نقول عن النقطة $\bar{x}$ إنهـا نهايـة حديـة عظمى موضعية للتابع f فوق R^n إذا كان:

a) $\nabla f(\bar{x})=0$

b) مصفوفة هيسيان $\nabla^2 f(\bar{x})$ هي مصفوفة سالبة تامة.

نتيجة: بفرض أن $\nabla f(\bar{x})=0$،

1- إذا كانت $H(\bar{x})$ موجبة تامة، هذا يعني أن $\bar{x}$ نهاية حدية صغرى موضعية.

2- إذا كانت $H(\bar{x})$ سالبة تامة، هذا يعني أن $\bar{x}$ نهاية حدية عظمى موضعية.

3- إذا كانت $H(\bar{x})$ موجبة شبه تامة (أو سالبة شبه تامة) في هذه الحالة قد تكـون $\bar{x}$ قيمة قصوى وقد لاتكون (وهنا نستخدم علاقات خاصة بالنهاية).

4- إذا كانت $H(\bar{x})$ ليست سالبة تامة وليست موجبة تامـة عندئـذ $\bar{x}$ ليـست قيمـة صغرى وليست قيمة عظمى.

مثال: أوجد النقاط القصوى للتابع:

$$f(x)=x_1^4+x_2^4 \qquad ; \qquad \forall\ x\in R^2$$

ثم أوجد طبيعة هذه النقاط.

الحل: $\nabla f(x)=0 \Leftarrow (4x_1^3,4x_2^3)=(0,0) \Leftarrow$ لدينا نقطة قصوى واحدة هي $\bar{x}=(0,0)$.

$$H=\begin{bmatrix}12x_1^2 & 0\\ 0 & 12x_1^2\end{bmatrix} \Rightarrow |H-\lambda I|=(12x_1^2-\lambda)(12x_2^2-\lambda)=0$$

وبالتالي فإن:

$$\lambda_1=12x_1^2\geq 0$$
$$\lambda_2=12x_2^2\geq 0$$

أي أن مصفوفة هيسيان موجبة شبه تامة. وبالتالي فإن النقطة $\bar{x}=(0,0)$ يمكن أن تكون نهاية حدية صغرى أو لاتكون.

XII – 5 – 5 بعض الطرائق العددية لإيجاد القيم المثلى لتوابع قابلة للاشتقاق

نفترض هنا أن التابع f مستمر وأن مشتقاته الأولى مستمرة أيضاً. لاحظنا في الفقرات السابقة أن الشرط $(\nabla f(\bar{x})=0)$ هو شرط لازم لكي تكون النقطة $\bar{x}$ نقطة نهاية حدية.

ترتكز معظم طرائق إيجاد القيم المثلى لمسائل البرمجة غير الخطية وغير الخاضعة لقيود في الفضاء R^n على البحث عن نقطة ساكنة x^*، أي النقطة التي يكون فيها $(\nabla f(x^*)=0)$.

وهذا يكافئ تماماً مسألة حل جملة معادلات غير خطية من الشكل:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0 \quad \forall\ \ i=1,2,...,n$$

تعريف: بفرض $f:R^n\rightarrow R$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عند النقطة $\bar{x}$.

إذا وجد شعاع d بحيث إن $\nabla^T f(\bar{x}).d<0$ عندئذ توجد قيمة $\delta>0$ بحيث إن:

$$f(\overline{x}+\lambda d)<f(\overline{x}) \quad ; \quad \lambda \in (0,\delta)$$

نقول عن الشعاع d أنه شعاع اتجاه تنازلي للتابع f عند النقطة $\overline{x}$.

تتميز الطرائق العددية بأنها ذات سلوك مشترك، حيث يتوجب علينا في كل طريقة إعطاء خوارزمية تكرارية تولد متتالية من النقاط $x^o,x^1,...,x^k$ تتقارب من نقطة حل أمثل موضعي لـ f. في كل خطوة k، نعرف النقطة x^{k+1} بالشكل $x^{k+1}=x^k+\lambda_k.d_k$، حيث d_k هو شعاع اتجاه الانتقال والذي يمكن أن يكون:

- إما شعاع التدرج لـ f في النقطة x^k، أي: $d_k=-\nabla f(x^k)$.
- أو شعاع يعطى بالعلاقة تحتوي على شعاع التدرج $\nabla f(x^k)$.
- أو شعاع نختاره بشكل كيفي على أن يكون شعاع اتجاه تنازلي. أي:

$$\nabla^T f(x^k).d_k<0$$

XII – 5 – 6 طرائق التدرج ذو الخطوة المحددة مسبقاً

تتلخص هذه الطرائق بأن نبدأ من نقطة x^o ثم نحسب شعاع التدرج $\nabla f(x^o)$ في النقطة x^o. بما أن شعاع التدرج $\nabla f(x^o)$ يعطي اتجاه أكبر تزايد للتابع f. ننتقل بمقدار λ_o بالاتجاه المعاكس لشعاع التدرج، ثم نعرف النقطة:

$$x^1=x^o-\lambda_o\frac{\nabla f(x^o)}{\left\|\nabla f(x^o)\right\|}$$

ثم نقوم بتكرار العملية السابقة معتبرين أن x^1 هي نقطة البداية. وهكذا نحصل على متتالية من النقاط $x^o,x^1,...,x^k$ والتي تعطى بالعلاقة العامة:

$$x^{k+1}=x^k-\lambda_k\frac{\nabla f(x^k)}{\left\|\nabla f(x^k)\right\|} \qquad \forall\ k\ \&\ \lambda_k>0$$

من مجموعة طرائق التدرج، نرى أنه من الأنسب أن ندرس تلك ذات الخطوة المحددة مسبقاً، أي تلك التي نختار فيها قيم λ_k وبشكل مسبق.

لقد قام بولياك (Polyak 1966) بدراسة تقارب هذه الخوارزمية التكرارية ووجد أن متتالية النقاط x^k تقترب من النقطة $\overline{x}$ (نقطة الحل الأمثل). إذا كانت:

$$\begin{cases} \lambda_k \to 0 \quad (k \to \infty) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty \end{cases}$$

(كأن نختار مثلاً $\lambda_k = \frac{1}{k}$).

إن الميزة الأساسية لطرائق التدرج ذي الخطوة المحددة مسبقاً هو أنها يمكن تعميمها على حالة التوابع غير القابلة للاشتقاق في كل R. أما سيئتها هي أنها خوارزميتها تتقارب بشكل بطيء جداً.

XII – 5 – 7 طريقة الميل الأكبر Curry 1944-Cauchy 1847

في هذه الطريقة نختار λ_k بحيث تجعل التابع:

$$g(\lambda) = f\left(x^k - \lambda \nabla f\left(x^k\right)\right)$$

أصغر ما يمكن فوق المجموعة $\lambda \geq 0$. وبالتالي فإننا نستطيع تلخيص هذه الطريقة بالخوارزمية التالية:

1- نختار نقطة بداية x^o، ونضع $k = 0$.

2- في التكرار k نضع: $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$

ثم نبحث عن λ_k والتي تحقق:

$$f\left(x^k + \lambda_k d_k\right) = \underset{\lambda \geq 0}{\mathrm{Main}} \left\{ f\left(x^k + \lambda d_k\right) \right\}$$

3- نضع، $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$

4- نضع اختبار توقف إذا تحقق تكون الخوارزمية قد انتهت ويتوقف التكرار، وإلاّ نضع $k = k+1$ ونعود إلى الخطوة (2).

ملاحظة: يمكن أ، يكون اختبار التوقف بعدة أشكال، منها:

-1 $\left| f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) \right| < \eta$ حيث $0 < \eta$ معطى

-2 $\underset{i}{\mathrm{Min}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon$ حيث $0 < \varepsilon$ معطى.

3- $\|\nabla f\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)<\varepsilon$ حيث $0<\varepsilon$ معطى.

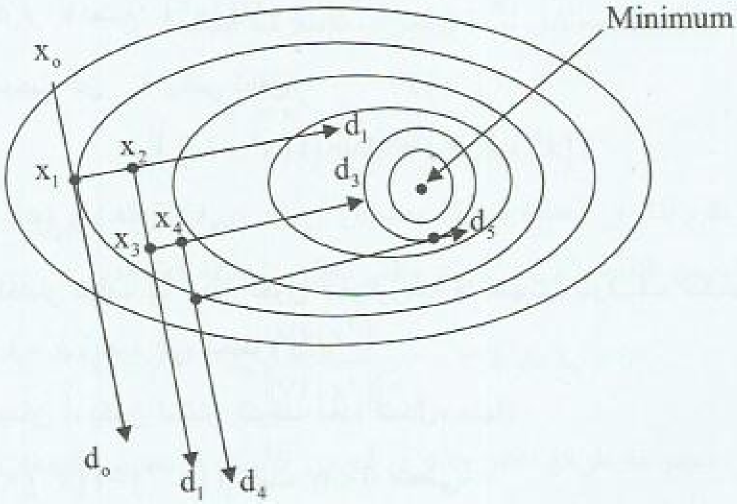
نظرية: إذا كان التابع f قابلاً للاشتقاق وبشكل مستمر وحيث $f(x)\to+\infty$ عندما $\|x\|\to+\infty$، عندئذ: من أجل أي نقطة بداية x^o، فإن خوارزمية طريقة الميل الأكبر تتقارب من نقطة ساكنة لـ f.

ملاحظة: نذكر هنا أن هذا التقارب لايعني أبداً أننا نحصل على نقطة نهاية صغرى عامة لـ f. إذا كان التابع f قابلاً للاشتقاق وبشكل مستمر، فإن كل ما نستطيع قوله هو أننا نحصل على نقطة ساكنة $\bar{x}$ لـ f.

إذا كان f قابلاً للاشتقاق مرتين وبشكل مستمر وكانت المصفوفة $\nabla^2 f(\bar{x})$ موجبة تامة، فإن $\bar{x}$ هي نقطة نهاية حدية صغرى موضعية لـ f.

إذا كان f محدباً وقابلاً للاشتقاق في هذه الحالة الخاصة فقط نستطيع الحصول على نهاية حدية صغرى عامة.

ملاحظة: إن السيئة الرئيسية لطريقة الميل الأكبر هي أنه يمكن أن يكون تقارب الخوارزمية بطيئاً من أجل بعض أنواع التوابع.



في الحقيقة بما أن λ_k تجعل التابع:

$$g(\lambda)=f\left(x^k+\lambda d_k\right)$$

أصغر ما يمكن، فإنه يجب أن يكون لدينا:

$$\frac{dg}{d\lambda}(\lambda_k)=d_k^T.\nabla f\left(x^k+\lambda_k.d_k\right)=d_k^T.\nabla f\left(x^{k+1}\right)=0$$

ومنه نستنتج أن:

$$d_k^T.d_{k+1}=0$$

وهذا يعني أن شعاعي الانتقال المتتاليين d_k و d_{k+1} يكونان متعامدين كما في الشكل أعلاه.

XII – 5 – 8 طريقة نيوتن

نفترض أن التابع f قابل للاشتقاق مرتين وبشكل مستمر.

إن فكرة طريقة نيوتن تتلخص بأن نستبدل التابع f في جوار نقطة ما x^k بتقريب تربيعي له، أي نضع:

$$f(x)=q(x)=f\left(x^k\right)+\nabla^T f\left(x^k\right)\left(x-x^k\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^k\right)\nabla^2 f\left(x^k\right)\left(x-x^k\right)$$

ثم نأخذ كنقطة x^{k+1} القيمة الصغرى لـ $q(x)$ إذا وجدت.

لايمكن أن تكون هذه القيمة الصغرى موجودة إلاّ إذا كانت المصفوفة $\nabla^2 f\left(x^k\right)$ موجبة تامة، وهذا يعني أن التابع $q(x)$ محدب وأن النهاية الصغرى x^{k+1} هي نهاية وحيدة ومعطاة بالعلاقة:

$$\nabla q\left(x^{k+1}\right)=0$$

وهذا يكافئ جملة المعادلات الآتية:

$$\nabla f\left(x^k\right)=-\nabla^2 f\left(x^k\right).\left(x^{k+1}-x^k\right)$$

ومنه تكون لدينا الصيغة التكرارية الآتية:

$$x^{k+1}=x^k-\left[\nabla^2 f\left(x^k\right)\right]^{-1}.\nabla f\left(x^k\right)$$

وهذه الصيغة ما هي إلاّ طريقة نيوتن المطبقة من أجل حل جملة معادلات غير خطية من الشكل $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0$ وذلك من أجل $i=1,2,...n$.

ملاحظة: هناك خاصة مهمة جداً لهذه الطريقة، وهي أنها عندما نطبقها على تابع تربيعي محدب فإنها تتقارب إلى نقطة الحل الأمثل بتكرار واحد فقط. غير أنه عندما نطبقها على توابع عامة (ليست محدبة)، فإننا نجد صعوبات ناتجة عن كون هذه الطريقة لاتتقارب من نقطة الحل الأمثل $\bar{x}$ إذا بدأنا من نقطة بداية x^o بعيدة عن $\bar{x}$.

XII – 5 – 9 طريقة نيوتن – رافسون

تعالج هذه الطريقة حالة البحث عن قيمة عظمى لتابع $f(x)$.

لنأخذ نقطة x^o كنقطة ابتدائية والتي تبدأ منها الخوارزمية. ولنعرف $\nabla f(x^k)$ كتدرج للتابع f عند النقطة x^k. تتكون فكرة هذه الطريقة بأن نحدد المسار الخاص p والذي يكون عبره $\frac{df}{dp}$ يبلغ قيمته العظمى في النقطة المعطاة. وهذا الشيء ممكن إذا اخترنا النقاط x^k و x^{k+1} كما يلي:

$$x^{k+1}=x^k+r^k\nabla f(x^k)$$

حيث r^k ثابت يدعى حجم الخطوة، ويحدد بحيث تنتج x^{k+1} من أكبر (تحسن) في التابع f. أي: إذا عرفنا تابع $h(x)$ بحيث:

$$h(r)=f\left(x^k+r\nabla f(x^k)\right)$$

فإن r^k تكون القيمة لـ r والتي تجعل $h(x)$ أكبر ما يمكن.

هذه الخوارزمية تنتهي عندما تكون قيمتين متواليتين x^k و x^{k+1} تقريباً متساويتين. أي:

$$r^k.\nabla f(x^k)\simeq 0$$

وبفرض أن $r^k\neq 0$ ، فإن الشرط السابق يكافئ تماماً الشرط اللازم $\nabla f(x^k)=0$.

مثال: لنعتبر مسألة إيجاد القيمة العظمى للتابع:

$$f(x)=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$$

الحل: نلاحظ أن التابع f(x) هو تابع تربيعي ويبلـغ قيمتـه العظمـى عنـد النقطـة $\bar{x}=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

لتطبيق طريقة نيوتن – رافسون، لنأخذ نقطة $x^o=(1,1)$، ولنحسب $\nabla f(x)$.

$$\nabla f(x)=(4-4x_1-2x_2,6-2x_1-4x_2)$$

التكرار الأول:

$$\nabla f(x^o)=(-2,0)$$

$$x^1=(1,1)+r(-2,0)=(1-2r,1)$$

$$\Rightarrow h(r)=f(1-2r,1)=-2(1-2r)^2+2(1-2r)+4$$

وبالتالي فإن قيمة r التي تعطي أكبر قيمة لـــ h(r) هي: $r^1=\frac{1}{4}$. إذاً:

$$x^1=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

التكرار الثاني:

$$\nabla f(x^1)=(0,1)$$

$$x^2=\left(\frac{1}{2},1\right)+r(0,1)=\left(\frac{1}{2},1+r\right)$$

$$h(r)=-2(1+r)^2+5(1+r)+\frac{3}{2}$$

ومنه نجد $r^2=\frac{1}{4}$، أي:

$$x^2=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$$

التكرار الثالث:

$$\nabla f\left(x^2\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

$$x^3=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)+r\left(-\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1-r}{2},\frac{5}{4}\right)$$

$$h(r)=-\frac{1}{2}(1-r)^2+\frac{3}{4}(1-r)+\frac{35}{8}$$

ومنه نجد $r^3=\frac{1}{4}$، أي:

$$x^3=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{4}\right)$$

التكرار الرابع:

$$\nabla f\left(x^3\right)=\left(0,\frac{1}{4}\right)$$

$$x^4=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{4}\right)+r\left(0,\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{8},\frac{5+r}{4}\right)$$

$$h(r)=-\frac{1}{8}(5+r)^2+\left(\frac{21}{16}\right)(5+r)+\frac{39}{32}$$

ومنه نجد $r^4=\frac{1}{4}$، أي:

$$x^4=\left(\frac{3}{8},\frac{21}{16}\right)$$

التكرار الخامس:

$$\nabla f\left(x^4\right)=\left(-\frac{1}{8},0\right)\ \&\ x^5=\left(\frac{3}{8},\frac{21}{16}\right)+r\left(-\frac{1}{8},0\right)=$$

$$=\left(\frac{3-r}{8},\frac{21}{16}\right)$$

$$h(r)=-\frac{1}{32}(3-r)^2+\frac{11}{64}(3-r)+\frac{567}{128}$$

ومنه نجد $r^5=\frac{1}{4}$، أي:

$$x^5 = \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{16}\right)$$

التكرار السادس:

$$\nabla f\left(x^5\right) = \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

بما أن $\nabla f\left(x^5\right) = 0$ فإنه يمكن إنهاء الخوارزمية عند هذه النقطة، ويكون الحل التقريبـــي هـــو $x^5 = (0.3437, 1.3125)$. لاحـــظ أن الحـــل الـــدقيق هـــو $x^* = (0.3333, 1.3333)$.

XII – 6 مسائل محلولة

1 – أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\, f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \\
&\underline{\text{S.t.}} \\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\quad x_1 - x_2 \le 1 \\
&\quad 2x_1 + x_2 \ge 6 \\
&\quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \ge -4 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل: نرسم منطقة الإمكانيات D.

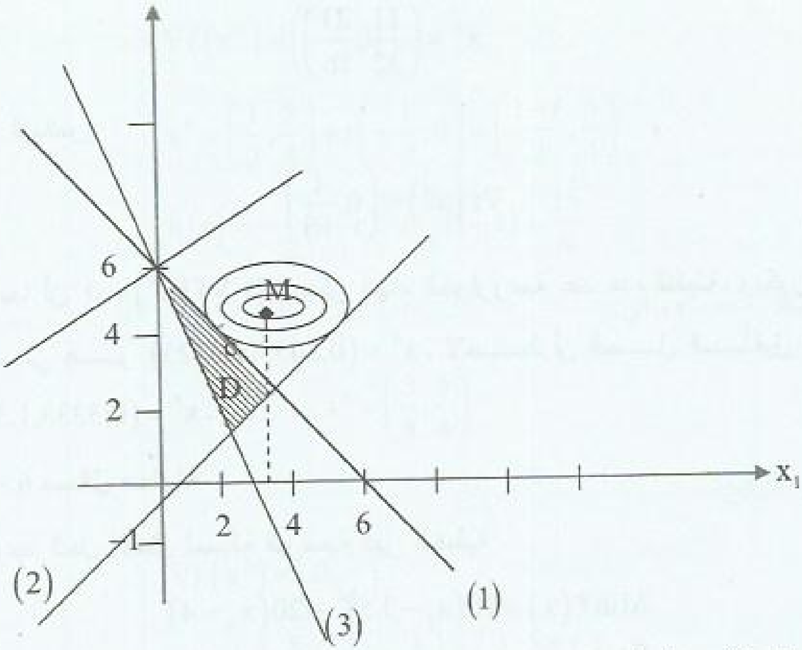
نرسم تابع الهدف والذي يمثل معادلة قطع ناقص.

$$\frac{(x_1 - 3.5)^2}{f/10} + \frac{(x_2 - 4)^2}{f/20} = 1$$

وهو قطع ناقص محوره المحرقي يوازي المحور ox_1 ومركـــزه هـــو النقطـــة $M(3.5, 4)$.

إن نقطة الحل الأمثل هي النقطة c الناتجة من تماس القطع مع المستقيم (1).

لإيجاد إحداثيات هذه النقطة نتبع الطريقة الآتية:



نلاحظ أن ميل المستقيم (1) هو 1- = y ولنوجد ميل مماس القطـع فـي هـذه النقطة، لذلك نشتق بالنسبة لــ x_1 (معادلة القطع):

$$20(x_1-3.5)+40(x_2-4)x'_2=0$$

$$x'_2=-\frac{x_1-3.5}{2(x_2-4)}=-1 \Rightarrow 2(x_2-4)=x_1-3.5 \quad (*)$$

بحل معادلة المستقيم (1) مع المعادلة (*) حلاً مشتركاً نجد:

$$x_1=2.5 \qquad \& \qquad x_2=3.5$$

نعوض فنجد أصغر قيمة لــ f هي:

$$f^*=\text{Min}\, f=15$$

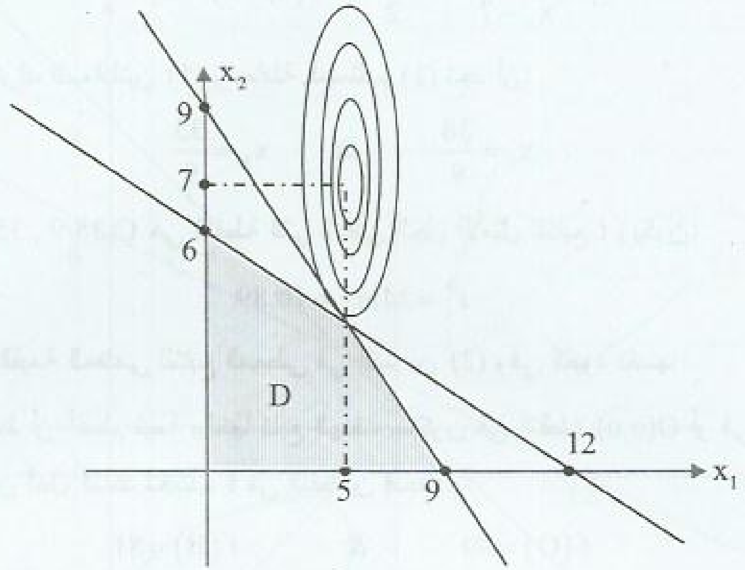
2 – أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x)=2(x_1-5)^2+(x_2-7)^2$$

<u>s.t.</u>

$$x_1+2x_2-12\le 0 \quad (1)$$
$$x_1+x_2-9\le 0 \quad (2)$$
$$-x_1\le 0$$
$$-x_2\le 0$$

الحل: نرسم منطقة الإمكانيات D.



نلاحظ أن تابع الهدف يمثل معادلة قطع ناقص كما يأتي:

$$\frac{(x_1-5)^2}{f/2}+\frac{(x_2-7)^2}{f}=1$$

حيث $b=\sqrt{f}$ و $a=\sqrt{\frac{f}{2}}$.

محور القطع يوازي المحور ox_2 ومركزه يقع في النقطة M(5,7).

نلاحظ أن Min f تقابل قطع ناقص يمس منطقة الإمكانيات في النقطة c وهـذه النقطة تقع على المستقيم (1) وهي تعطي الحل الأمثل. لإيجاد إحداثيات هذه النقطة نتبع الطريقة الآتية:

نلاحظ أن ميل المستقيم هو $y=-\frac{1}{2}$، ولإيجاد ميل مماس القطع في هذه النقطة نشتق معادلة القطع بالنسبة لــ x_1 فنجد:

$$4(x_1-5)+2(x_2-7)x_2'=0 \Rightarrow x_2'=\frac{-2(x_1-5)}{x_2-7}$$

وبما أن ميل المماس في هذه النقطة هو نفسه ميل المستقيم (1) نجد أن:

$$-\frac{2(x_1-5)}{x_2-7}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 4(x_1-5)=x_2-7 \qquad (*)$$

بالحل المشترك للمعادلتين (*) ومعادلة المستقيم (1) نجد أن:

$$x_1=\frac{38}{9} \qquad \& \qquad x_2=\frac{35}{9}$$

أي أن $C(38/9\ ,\ 35/9)$ هي النقطة التي تعطي الحل الأمثل للتابع f ويكون:

$$f^*=\text{Min}\, f=10.89$$

3 – أوجد القيمة العظمى للتابع المعطى في التمرين (2) وفي القيود نفسها:

الحل: نلاحظ أن أعظم قيمة يبلغها تابع الهدف ستكون في النقطة O(o,o) أو في النقطة B(9,0). من أجل التأكد نحسب f في النقطتين فنجد:

$$f(O)=99 \qquad \& \qquad f(B)=81$$

وبالتالي $\text{Max } f = 99$ ويكون في النقطة O(0,0).

4 – أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x)=(x_1-7)(x_2-1)$$

<u>s.t.</u>

$$\begin{aligned} &x_1+2x_2-12\le 0\\ &x_1+x_2-9\le 0\\ &-x_1\le 0\\ &-x_2\le 0 \end{aligned}$$

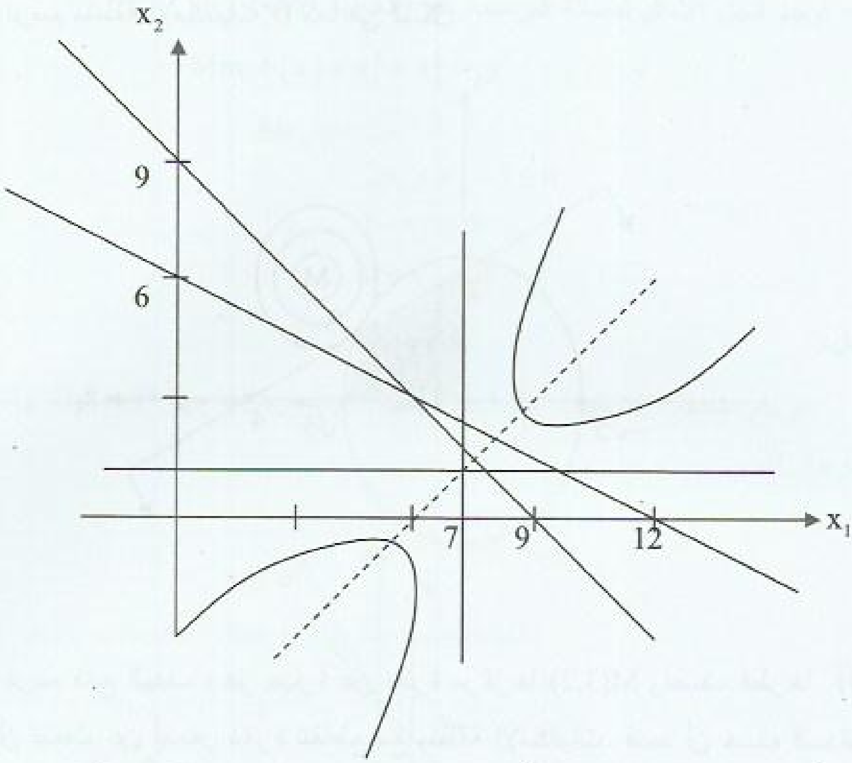
الحل: نرسم منطقة الإمكانيات D.

نلاحظ أن تابع الهدف يمثل معادلة قطع زائد له مستقيمان متقاربان:

$$x_1=7 \qquad \& \qquad x_2=1$$

إن معادلة قطع زائد منسوباً إلى مقاربيه ويقع في الربعين الأول والثالث هي:

$$x_1.x_2=\frac{d^2}{4}$$



أما معادلة قطع زائد منسوباً إلى مقاربيه ويقع في الربعين الثاني والرابع هي:

$$x_1 - x_2 = -\frac{d^2}{4}$$

عندما تكون الجملة نظامية يكون القطع الزائد متساوي الساقين، أي $a = b$ (لأن المقاربان متعامدان) ويكون $a = b = \frac{d}{\sqrt{2}}$ لأن $a^2 + b^2 = d^2$.

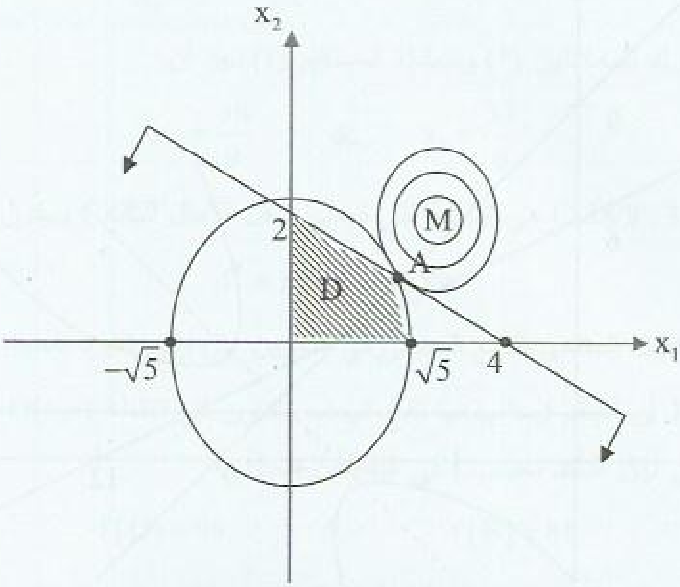
5 - أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية بيانياً:

$$\text{Min } f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

s.t.

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

الحل: نرسم منطقة الإمكانيات D كما في الشكل.



نرسم تابع الهدف وهو عبارة عن دائرة مركزها $M(3,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{f}$. يجب أن نبحث عن أصغر دائرة تتقاطع مع منطقة الإمكانيات. فنجد أن هذه الدائرة تخرج من منطقة الإمكانيات من النقطة A والتي تمثل الحل الأمثل. ولحساب إحداثياتها نوجد نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5 \qquad \& \qquad x_1 + 2x_2 = 4$$

وبالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد:

من (2) نجد $x_1 = 4 - 2x_2$ نعوض في (1) فنجد:

$$(4-2x_2)^2 + x_2^2 = 5 \Rightarrow 5x_2^2 - 16x_2 + 11 = 0$$

$$\Delta = 36 \Rightarrow x_2 = 2.2$$ مرفوض

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

ومنه فإن الحل $A(2,1)$.

نعوض في تابع الهدف فنجد:

$$f^* = f(A) = (2-3)^2 + (1-2)^2 = 2$$

6 – أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

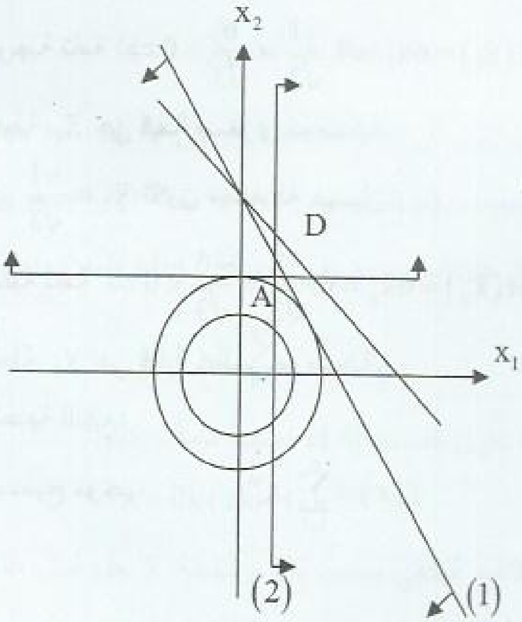
$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 - 5 \le 0$$
$$1 - x_1 \le 0$$
$$2 - x_2 \le 0$$

الحل:

نرسم منطقة الإمكانيات D. تابع الهدف دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{f}$.



نقطة الحل الأمثل هي A تقاطع المستقيمين $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ وبالتالي A(1,2)

نعوض في تابع الهدف فنجد:

$$f^* = \text{Min}\, f(x) = 5$$

7 – ادرس القيم الحدية القصوى للتابع:

$$f(x) = x^3 - x \qquad ; \qquad x \in R$$

الحل:

$$\nabla f(x)=3x^2-1$$

$$\nabla f(x)=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذاً لدينا نقطتين يشكلان قيم قصوى $\bar{x}_1=\frac{+1}{\sqrt{3}},\bar{x}_2=\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

ولتحديد طبيعتها نوجد مصفوفة هيسيان.

$$H(x)=6x$$

- من أجل $\bar{x}_1=\frac{+1}{\sqrt{3}}$ تكون مصفوفة هيسيان:

$H(\bar{x}_1)=6\bar{x}_1=6.\frac{+1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}>0\Rightarrow$ موجبة تامة $H(\bar{x}_1)$

وبالتالي النقطة $\bar{x}_1$ هي قيمة صغرى موضعية.

أما من أجل $\bar{x}_2=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ تكون مصفوفة هيسيان:

$H(\bar{x}_2)=6\bar{x}_2=6.\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-6}{\sqrt{3}}<0\Rightarrow$ سالبة تامة $H(\bar{x}_1)$

وبالتالي النقطة $\bar{x}_2$ هي قيمة عظمى موضعية.

8 – ادرس القيم الحدية للتابع:

$f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^m$; عدد صحيح موجب $\underset{m\neq 1}{m}$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=mx_i^{m-1}$$

$$\nabla f(x)=\left(mx_1^{m-1},mx_2^{m-2},...,mx_n^{m-1}\right)$$

$$\nabla f(x)=0\Rightarrow x_i=0\ ;\ \forall\ i=1,2,...,n$$

$$\Rightarrow \bar{x}=(0,0,...,0)$$

$$H(x)=\left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i\partial x_j}\right]=\begin{cases}0 & \text{if} \quad i\neq j\\ m(m-1)x_i^{m-2} & \text{if} \quad i=j\end{cases}$$

أي:

$$H(x)=\begin{bmatrix} m(m-1)x_1^{m-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m(m-1)x_2^{m-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m(m-1)x_n^{m-2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه من أجل $\bar{x}=0$ تكون $H(\bar{x})=0$

أي أن $H(\bar{x})$ يمكن أن تكون موجبة شبه تامة أو سالبة شبه تامة.

أي أننا لانستطيع الحكم على $\bar{x}=0$ فيما إذا كانت نقطة نهاية صغرى موضعية أم عظمى موضعية. لنأخذ f عند النقطة $\bar{x}$ فنجد $f(o)=o$ ولنرى هل:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geq f(o)=o$$

حتى يكون ذلك يجب أن يكون m عدد زوجي أو $m=2k$ حيث $k=1,2,\dots$.

عندئذ يكون $f(x)>f(o)$ وتكون $\bar{x}=0$ نقطة نهاية صغرى موضعية.

أي نقول إن $\bar{x}$ حل أمثل موضعي للمسألة Min f ضمن منطقة الإمكانيات

$$S=\left\{x:\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geq 0\right\}$$

في هذه الحالة تكون المصفوفة H موجبة تامة ويكون:

$$\lambda=2k(2k-1)x^{2k-2}>0$$

وبالتالي فإن التابع الهدفي محدب كلياً والنقطة $\bar{x}$ حل أمثل عام ووحيد.

9 – أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x)=\frac{1}{3}x_1^3-6x_1x_2+x_1x_2+x_2^2+200 \;\; ; \;\; x\in R^2$$

الحل:

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^T$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=x_1^2-6x_2\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=-6x_1+2x_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla f(x)=\left(x_1^2-6x_2,-6x_1+2x_2\right)^T$$

$$\nabla f(x)=0\Rightarrow x_1^2-6x_2=0 \quad \& \quad -6x_1+2x_2=0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$\bar{x}_1=(0,0) \qquad \& \qquad \bar{x}_2=(18,54)$$

لنوجد مصفوفة هيسيان:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_1^2}=2x_1 \qquad \& \qquad \frac{\partial 2f}{\partial x_1\partial x_2}=-6$$

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_2\partial x_1}=-6 \qquad \& \qquad \frac{\partial 2f}{\partial x_2^2}=2$$

$$\Rightarrow H(x)=\begin{bmatrix}2x_1 & -6\\ -6 & 2\end{bmatrix}$$

- من أجل $\bar{x}_1=(0,0)$ تكون مصفوفة هيسيان:

$$H(\bar{x}_1)=\begin{bmatrix}0 & -6\\ -6 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |H-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & -6\\ -6 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -\lambda(2-\lambda)-36=0\Rightarrow \lambda^2-2\lambda-36=0$$

والقيم الخاصة هي $0<\lambda_1=1+\sqrt{37}$ & $0>\lambda_2=1-\sqrt{37}$

وبالتالي فإن النقطة $\bar{x}_1(0,0)$ ليست نهاية صغرى وليست نهاية عظمى موضعية.

- من أجل النقطة $\bar{x}_2=(18,54)$ تكون مصفوفة هيسيان:

$$H=\begin{bmatrix}36 & -6\\ -6 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |H-\lambda I|=\begin{vmatrix}36-\lambda & -6\\ -6 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-38\lambda+36=0\Rightarrow \lambda_1>0 \ \& \ \lambda_2>0$$

أي أن مصفوفة هيسيان H موجبة تامة في النقطة $\bar{x}_2$.

وبالتالي النقطة $\bar{x}_2 = (18,54)$ هي نقطة نهاية صغرى (حل أمثل). وقيمة التابع الصغرى هي:

$$f^* = \text{Min } f(\bar{x}_2) = 772$$

10 - أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x) = (x_1 - x_2)^2 + \sin^2 x_1$$

الحل:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) + 2\sin x_1 \cos x_1 = 2(x_1 - x_2) + \sin 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2)$$

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) + \sin 2x_1 = 0 \qquad (1)$$

$$-2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (2)$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن:

$$\sin 2x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1 = \pi k \;\; ; \;\; k = 0, \mp 1, \mp 2, ...$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} k} \;\; ; \;\; k = 0, \mp 1, \mp 2, ...$$

&

$$\boxed{x_2 = x_1}$$

عندما $k = 0 \Leftarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftarrow \bar{x}_1 = (0,0)$

عندما $k = \mp 1 \Leftarrow x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \bar{x}_2 = \left(\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2}\right)$

عندما $k = \mp 2 \Leftarrow x_1 = x_2 = \mp\pi \Leftarrow \bar{x}_3 = (\mp\pi, \mp\pi)$

لنوجد مصفوفة هيسيان:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_1^2} = 2 + 2\cos 2x_1 \qquad \frac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$$

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 \qquad \frac{\partial 2f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 2(1+\cos 2x_1) & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

من أجل النقطة $\overline{x}_1 = (0,0)$ نجد أن:

$$H(\overline{x}_1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} |H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 2) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

ومنـــــه

$$0 < \lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$$
$$0 < \lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$$

إذاً المصفوفة H موجبة تامة عند النقطة $\overline{x}_1(0,0)$ أي $\overline{x}_1$ هي حل أمثل.

- من أجل النقطة $\overline{x}_2\left(\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2}\right)$ نجد أن:

$$H(\overline{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \;;\; |H - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda - 2) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

أي

$$0 < \lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$$
$$0 > \lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$$

وبالتالي المصفوفة H ليست موجبة تامة، وليست سالبة تامة عند النقطة $\overline{x}_2$ أي أن النقطة $\overline{x}_2\left(\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2}\right)$ ليست حلاً.

- من أجل النقطة $\overline{x}_3 = (\mp\pi, \mp\pi)$ نجد أن:

$$H(\bar{x}_3)=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix} \quad \& \quad |H-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+4=0$$

ومنه:

$$0<\lambda_1=3+\sqrt{5}$$
$$0<\lambda_2=3-\sqrt{5}$$

إذاً المصفوفة H موجبة تامة وبالتالي النقطة $\bar{x}_3(\mp\pi,\mp\pi)$ هي حلاً أمثلاً.

11 - أوجد القيم القصوى لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$f(x)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \quad ; \quad \forall x\in R^3$$

ثم حدد طبيعتها.

الحل: لإيجاد القيم القصوى، نوجد حلول المعادلات $\nabla f(x)=0$.

$$\nabla f(x)=(1-2x_1,x_3-2x_2,2+x_2-2x_3)^T=(0,0,0)^T$$

بحل هذه المعادلات نجد: $\bar{x}=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

ولتحديد طبيعتها نوجد مصفوفة هيسيان في النقطة $\bar{x}$.

$$H=\left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

ثم نوجد القيم الخاصة لهذه المصفوفة فنجد:

$$|H-\lambda I|=(\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+6)=0$$

إما $\lambda+1=0 \Leftarrow \lambda_1=-1$

أو $\lambda^2+5\lambda+6=0 \Leftarrow \lambda_2=-2 \;\&\; \lambda_3=-3$

وبالتالي فإن مصفوفة هيسيان سالبة تامة. والنقطة $\bar{x}$ هي نهاية عظمى.

12 - أوجد القيم القصوى لمسألة البرمجة غير الخطية التالية:

$$f(x)=8x_1x_2+3x_2^2 \quad ; \quad \forall x\in R^2$$

ثم حدد طبيعتها.

الحل: لإيجاد القيم القصوى نوجد حلول المعادلات $\nabla f(x)=0$

$$\nabla f(x)=(8x_2,8x_1+6x_2)^T=(0,0)^T$$

بحل هذه المعادلات نجد $\overline{x}=(0,0)$

ولتحديد طبيعة هذه النقطة نوجد مصفوفة هيسيان في هذه النقطة:

$$H=\left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

وقيمها الخاصة هي $0<\lambda_1=3+\sqrt{93}$ & $\lambda_2=3-\sqrt{93}<0$ وبالتالي فــإن $\overline{x}(0,0)$ ليست نهاية صغرى وليست نهاية عظمى.

XII – 7 – مسائل غير محلولة

أوجد الحل الأمثل لكل من مسائل البرمجة غير الخطية الآتية بيانياً:

1) $$\text{Max } f(x)=(x_1-6)^2+(x_2-1)^2$$

$$\text{Min } f(x)=(x_1-6)^2+(x_2-1)^2$$

<u>s.t.</u>

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 4$$
$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36$$
$$x_1+x_2-8\le 0$$
$$x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0$$

2) $$\text{Max } f(x)=x_1+3x_2$$

<u>s.t.</u>

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 9$$
$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36$$
$$x_1+x_2-8\le 0$$
$$x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0$$

3) $$\text{Min } f(x)=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2$$

s.t.

$$x_2+|x_1-4|\le 3$$
$$2\le x_1\le 6$$
$$x_2\ge -2$$

4) $$\text{Min } f(x)=-x_1$$

s.t.

$$-x_1^2+x_2\ge -4$$
$$x_1^2+x_2\le 4$$
$$x_1+x_2\ge -1$$

5) $$\text{Min } f(x)=(x_1-11)^2+2(x_2-9)^2$$

s.t.

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 9$$
$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36$$
$$x_1+x_2-8\ge 0$$
$$x_1\ge 0\ ,\ \ x_2\ge 0$$

6) $$\text{Min } f(x)=\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+(x_2-5)^2$$

s.t.

$$-x_1+x_2\le 2$$
$$2x_1+3x_2\le 11$$
$$x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0$$

7)

$$\text{Min } f(x)=(x_1-6)^2+(x_2-1)^2$$

s.t.

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 4$$
$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36$$
$$x_1+x_2-8\le 0$$
$$x_1\ge 0\ ,\ \ x_2\ge 0$$

الفصل الثالث عشر

البرمجة غير الخطية الخاضعة لقيود

XIII – 1 مقدمة

بفرض أننا نرغب في تحديد القيم المثلى لتابع غير خطي $f(x)$ يخضع لجملة قيود. هذه القيود تأخذ إما صيغة مساويات أو صيغة متراجحات. عالجت هذا النوع من المسائل عدة طرائق نذكر منها طريقة جاكوب وطريقة مضاريب لاغرانج. ولعل الطريقة الأخيرة نالت اهتماماً أوفر وأظهرت فعالية وأدخلت عليها تطويرات مناسبة بحيث تمكنت من مواجهة معظم المواقف بكفاءة عالية.

XIII – 2 مسائل البرمجة غير الخطية والخاضعة لقيود مساويات

لتكن لدينا المسألة التالية:

$$z = f(x)$$

خاضع للقيود:

$$g_i(x) = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$
$$x \in R^n$$

حيث إن التوابع $f(x), g_i(x) \; (i = 1,2,\dots,m)$ هي توابع مستمرة يمكن حساب مشتقاتها الجزئية من الدرجة الأولى والثانية.

XIII – 2 – 1 طريقة لاغرانج

إن طريقة لاغرانج تقتضي أن نشكل تابعاً من النوع:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

حيث نسمي $L(x,\lambda)$ تابع لاغرانج، وتشير المعاملات λ إلى مضاريب لاغرانج.

هذه المضاريب تقيس معدلات التغير في القيمة المثلى لـ f نتيجة إدخال تعديلات صغيرة على g. إن المعادلات:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

تحدد الشروط اللازمة لكي تكون x_o نقطة قصوى (عظمى أو صغرى) للتابع f(x). وهذا يعني أن إيجاد القيمة المثلى للتابع f(x) ضمن القيود g(x) = 0 يكافئ إيجاد القيمة المثلى لتابع لاغرانج $L(x,\lambda)$. سوف نذكر الشروط الكافية لطريقة لاغرانج بدون برهان:

لنعرف المصفوفة التالية:

$$H^B=\left[\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array}\right]$$

حيث إن:

$$P=\begin{bmatrix}\nabla g_1(x)\\ \vdots \\ \nabla g_m(x)\end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{و} \quad Q=\left[\frac{\partial 2L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$$ لجميع قيم i و j

حيث تسمى المصفوفة H^B مصفوفة هيسيان المحددة Bordered Hessian Matrix إذا كانت (x_o,λ_o) هي نقطة استقرار لتابع لاغرانج. وإذا كانت H^B محسوبة في (x_o,λ_o) فإن x_o تكون:

أ) نقطة عظمى إذا بدأنا بالمعين الجزئي الرئيسي من المرتبة (2m+1) وكانت قيم المعينات الجزئية الرئيسة (n-m) للمصفوفة H^B ذات إشارة متناوبة بدءاً بالإشارة $(-1)^{m+1}$.

ب) نقطة صغرى إذا بدأنا بالمعين الجزئي الرئيسي من المرتبة (2m+1) وكانت إشارات قيم المعينات الجزئية الرئيسية (n-m) للمصفوفة H^B هي $(-1)^m$.

ملاحظة: المعينات الجزئية الرئيسية للمصفوفة H^B يبلغ عددها (n-m) ومرتبتها هي: $(2m+1),(2m+2),...,(m+n)$ على الترتيب. ونحصل على المعينة الجزئية

الأولى بحذف الأسطر والأعمدة الأخيرة من المصفوفة H^B التي تزيد عن العدد $(2m+1)$، وهكذا بالنسبة لباقي المعينات الجزئية الرئيسية للمصفوفة المذكورة.

مثال: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية التالية:

حل

$$\operatorname{Min} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

s.t.

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$g_2(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

$L = f - \lambda g$

الحل: إن تابع لاغرانج يأخذ الصيغة:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

وإن الشروط اللازمة هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

إن حل هذه المعادلات هو:

$$x_o = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{37}{46}, \frac{16}{46}, \frac{13}{46}\right)$$

$$\lambda_o = (\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{2}{23}, \frac{7}{23}\right)$$

وللبرهان على أن x_o هي نقطة صغرى، لنعتبر مصفوفة هيسيان المحددة:

$$H^B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$2m \times 1$

$(n+m) \times (n+m)$

وبما أن $n = 3$ و $m = 2$ فإن $n - m = 1$ ، وعليه، فإننا يجب أن نفحص معين H^B فقط الذي يجب أن تكون إشارته $(+) = (-1)^2$ في النقطة الصغرى. وبما أن $0 < \det H^B = 460$ ، فإن x_o تكون نقطة صغرى.

XIII – 2 – 2 الشروط اللازمة والكافية لتحديد النقاط القصوى

إن الشروط المذكورة أعلاه تكون كافية لتحديد نقطة قصوى، ولكنها ليست ضرورية. بتعبير آخر: إن أية نقطة استقرار يمكن أن تكون نقطة قصوى دون أن تحقق الشروط المذكورة. ولهذا السبب طورت شروط أخرى تكون في آن واحد لازمة وكافية لتحديد النقاط القصوى. لنعرف الآن المصفوفة الآتية:

$$\Delta = \left[\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P^T & Q - I\mu \end{array}\right]$$

في نقطة الاستقرار (x_o, λ_o) ، حيث Q, P سبق لنا تعريفهما، وأن μ هو معامل مجهول. إذا حسبنا المعين $|\Delta|$ فإن كل جذر μ_i من الجذور الحقيقية $(n-m)$ لكثيرة الحدود:

$$|\Delta| = 0$$

يجب أن يكون:

1- سالباً إذا كانت x_o نقطة عظمى.

2- موجباً إذا كانت x_o نقطة صغرى.

مثال: لنأخذ المسألة التالية:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

<u>s.t.</u>

$$g_1(x) = 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$$

الحل: ① إن تابع لاغرانج يأخذ الصيغة:

$= f(x) - \lambda g(x)$

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda\left(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14\right)$$

② وعليه فإن الشروط اللازمة هي: $\frac{\partial l}{\partial x} = 0$ & $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(1-\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_3 = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14\right) = 0$$

③ إن الشرط الثاني يعني إما $\lambda = 1$ أو $x_2 = 0$

فإذا كانت $\lambda = 1$، فإن الشرط الأخير يعطـــي بعـــد الإبـــدال إمـــا $x_2 = 2$ أو $x_2 = -2$ ومنه نحصل على الحالتين التاليتين:

$$(x_o, \lambda_o)_1 = (2, 2, 1, 1)$$

$$(x_o, \lambda_o)_2 = (2, -2, 1, 1)$$

وإذا كان $x_2 = 0$، فإن الشرط الأخير يعطي بعد الإبدال الحل الثالث التالي:

$$(x_o, \lambda_o)_3 = (2.8, 0, 1.4, 1.4)$$

④ وتكون مصفوفة هيسيان المحددة كما يلي:

$$H^B = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]_{(n+m)\times(n+m)}$$

بما أن $m = 1$ و $n = 3$ ، فإن قيم المعينات الجزئيـــة $(n - m = 2)$ الرئيـــسية تكون ذات إشارة $(-) = (-1)^1 = (-1)^m$ لكي تصبح x_o نقطة صغرى.

وعليه لدينا بالنسبة للحل $(x_o, \lambda_o)_1$:

(2, 2, 1, 1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0 \;,\; \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

وأما بالنسبة للحل $(x_o, \lambda_o)_2$ فيكون:

(2, -2, 1, 1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0 \;,\; \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

وأخيراً بالنسبة للحل $(x_o, \lambda_o)_3$ يكون:

(2.8, 0, 1, 1.4)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0 \;,\; \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{vmatrix} = 12.8 > 0$$

وهذا يوضح أن $(x_o)_1, (x_o)_2$ هي نقاط صغرى.

ويلاحظ أن عدم تحقيق النقطة $(x_o)_3$ للشروط الكافية سواء كنقطة صغرى أو كنقطة عظمى لايعني بالضرورة أنها ليست قصوى، لأن الشروط المذكورة، وإن كانت كافية، فإنها ربما لاتتحقق بالنسبة لكل نقطة قصوى. وفي مثل هذه الحالة، فإنه من الضروري أن نستخدم شروط الكفاية الأخرى. ولكي نصور شروط الكفاية الثابتة التي تستخدم جذور كثيرة الحدود. لنعتبر المصفوفة الآتية:

$$\Delta = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ \hline 4 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda-\mu & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-\mu \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -\mu & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix}$$

ومن أجل $(x_o, \lambda_o)_1 = (2,2,1,1)$ نرى أن:

$+ (-18\mu^2) + 68\mu - 64 = 0$

$-9\mu^2 + 34\mu - 32$

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0$$

$-4(4)[(2-\mu)(-\mu)] + 4(-)(2-\mu)(8-4\mu) = -4\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & -\mu & 0 \\ 2 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2-\mu & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix}$

$+ 2(-)(2-\mu)(+2\mu)$

$= -16(-2\mu + \mu^2) - 4(16 - 8\mu - 8\mu + 4\mu^2) \quad - 2\begin{vmatrix} 4 & 2-\mu & 0 \\ 4 & 0 & -\mu \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$-4(2\mu - \mu^2) = +32\mu - 16\mu^2 - 64 + 32\mu - 32\mu - 16\mu^2 - 8\mu + 4\mu^2$

وهذا يعطي $\mu = +2$ أو $\mu = +8/9$. أي x_o نهاية صغرى.

ومن أجل $(x_o, \lambda_o)_2 = (2, -2, 1, 1)$ نجد أن:

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0$$

وهذا يعني أن μ تأخذ نفس القيمتين السابقتين. وأخيراً من أجل: $(x_o, \lambda_o)_3 = (2.8, 0, 1.4, 1.4)$

$$|\Delta| = 5\mu^2 - 6\mu - 8 = 0$$

وهذا يعطي $\mu = +2$ أو $\mu = -0.8$ ، وبالتالي فإن $(x_o)_3 = (2.8, 0, 1.4)$ هي نقطة غير قصوى.

XIII – 3 مسائل البرمجة غير الخطية والخاضعة لقيود متراجحات

لتكن لدينا مسألة برمجة غير خطية من الشكل التالي:

$$\text{Max } z = f(x)$$

وخاضع لقيود على شكل متراجحات:

$$g_i(x) \le 0 \quad ; \quad i = 1, 2,$$
$$x \ge 0$$

لاحظنا أنه توجد علاقة طردية بين حجم المسألة المدروسة وحجم العمليات الحسابية اللازمة لتحديد النقطة القصوى (العظمى أو الصغرى) لهذه المسألة. لذلك فإن أسلوب لاغرانج المذكور سابقاً يعتبر طريقة غير عملية لحل مثل هذه المسائل.

XIII – 3 – 1 طريقة لاغرانج الموسعة

إن فكرة طريقة لاغرانج الموسعة يمكن تلخيصها بالخطوات التالية:

خطوة (1): حل المسألة دون قيود، أي:

$$\text{Max } z = f(x)$$

إذا كانت القيمة المثلى الناتجة تحقق جميع القيود، فإن هذا الحل يكون حلاً أمثل للمسألة المفيدة. وتستنتج من ذلك أن قيود المسألة تكون غير ضرورية.

وإذا لم تحقق القيمة المثلى الناتجة جميع القيود، ضع $k = 1$ وانتقل إلى الخطوة (2).

خطوة (2): اختر مجموعة من k قيد واجعل هذه القيود مساويات (حولها إلى مساويات) وابحث عن الحل الأمثل لـ $f(x)$ الذي يخضع لـ k قيد بشكل مساويات وذلك باستخدام طريقة لاغرانج المذكورة سابقاً.

إذا كان الحل الناتج يحقق جميع قيود المسألة، فإن هذا الحل يعين نقطة مثلى موضعية. وإذا لم يحقق الحل الناتج جميع القيود، فاحذف هذا الحل لأنه غير ممكن.

كرر هذه الخطوة بالنسبة لجميع مجموعات القيود الممكنة التي يتألف كل منها من k قيد مساواة. وسجل جميع النقاط المثلى الموضعية التي تحصل عليها. ثم انتقل إلى الخطوة (3).

خطوة (3): ضع $k = k + 1$ وارجع إلى الخطوة (2).

وهكذا كرر العملية إلى أن تصل إلى $K = m$. قارن بين النقاط المثلى الموضعية وقرر النقطة المثلى العامة (المطلقة).

ملاحظة: إذا لم تصادف في الحلول الناتجة نقطة مثلى موضعية، قرر أنه لايوجد للمسألة حل ممكن.

ملاحظة: غالباً سنعتبر شرط عدم السلبية $x \geq 0$ محتوى ضمن قيود المسألة.

مثال: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Max } z = f(x) = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2$$

$$\underline{\text{s.t.}}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \, , \, x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد القيمة المثلى لـ $f(x)$ دون قيود، نوجد حلول المعادلات التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4(2x_1 - 5) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4(2x_2 - 1) = 0$$

وهذا يعطي $\bar{x}(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$. وهي نقطة نهاية عظمى للمسألة بدون قيود.

بما أن هذا الحل لايحقق القيد الأول في المسألة، لذلك نلجأ إلى تطبيق الخطوة (2) و (3) في خوارزمية الحل. إن تطبيق هاتين الخطوتين يتطلب حل سبع مسائل باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج. ويمكن تلخيص هذه المسائل وحلولها كما يلي:

مسألة (1): لنعتبر أولاً $k = 1$ ونأخذ القيد $\boxed{x_1 = 0}$ فيكون تابع لاغرانج كالتالي:

$$L_1(x, \lambda) = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2 - \lambda x_1$$

أي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -4(2x_1 - 5) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -4(2x_2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -x_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ نقطة حل عظمى للتابع $\bar{x}_1(x_1, x_2) = (0, 1/2)$

وهي نقطة عظمى موضعية لأنها تحقق جميع القيود.

مسألة (2): نعتبر $k = 1$ ونأخذ القيد $\boxed{x_2 = 0}$ فيكون تابع لاغرانج كالتالي:

$$L_2(x, \lambda) = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2 - \lambda x_2$$

وحل هذه المسألة هو النقطة $\bar{x}_2\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ والتي تعتبر نقطة غير ممكنة لأنها لاتحقق جميع القيود. (لاتحقق القيد الأول).

مسألة (3): $k = 1$ ونأخذ القيد $\boxed{x_1 + 2x_2 - 2 = 0}$ فيكون تابع لاغرانج كالتالي:

$$L_3(x, \lambda) = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2 - \lambda(x_1 + 2x_2 - 2)$$

وحل هذه المسألة هو $\overline{x}_3=(x_1,x_2,\lambda)=\left(\frac{22}{10},\frac{-1}{10},\frac{12}{5}\right)$ ولكن النقطة $\left(\frac{22}{10},\frac{-1}{10}\right)$ لاتحقق القيد الثالث $(x_2\geq 0)$ وبالتالي فهي ليست حل ممكن للمسألة المقيدة.

مسألة (4): لنعتبر $K=2$ ونأخذ القيدين $x_1=0$ و $x_1+2x_2-2=0$ فيكون تابع لاغرانج:

$$L(x,\lambda)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2-\lambda_1(x_1+2x_2-2)-\lambda_2x_1$$

وحلها هو:

$$\overline{x}_4=(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,1,-2,22)$$

والنقطة $(0,1)$ هي نقطة تحقق جميع القيود فهي نقطة عظمى موضعية.

مسألة (5): $k=2$ ونأخذ القيدين $x_2=0$ و $x_1+2x_2-2=0$:

$$L(x,\lambda)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2-\lambda_1(x_1+2x_2-2)-\lambda_2x_2$$

وحلها هو:

$$\overline{x}_5=(x_1,x_2,\lambda_1,x_2)=(2,0,4,-4)$$

والنقطة $(2,0)$ تحقق جميع القيود فهي نقطة عظمى موضعية.

مسألة (6): $k=2$ ونأخذ القيدين $x_1=0$ و $x_2=0$ فيكون تابع لاغرانج:

$$L(x,\lambda)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2$$

وحل هذه المسألة هو:

$$\overline{x}_6=(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,-20,-4)$$

والنقطة $(0,0)$ تحقق جميع القيود فهي نقطة ممكنة وهي نقطة عظمى موضعية.

مسألة (7): لنعتبر $k=3$ ونأخذ جميع القيود. فيكون تابع لاغرانج كالتالي:

$$L(x,\lambda)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2-\lambda_3(x_1+2x_2-2)$$

ولحل هذه المسألة والتي تعطي القيمة المثلى المقيدة تماماً نوجد الحل المشترك للمعادلات الآتية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4(2x_1 - 5) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(2x_2 - 1) - 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -x_1 = 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -x_2 = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -(x_1 + 2x_2 - 2) = 0$$

نلاحظ أنه لايوجد حل لجملة المعادلات السابقة لتناقض المعادلات الخطية الثلاثة الأخيرة.

إذا حصرنا جميع النقاط الممكنة (النقاط العظمى الموضعية) وقارنّا فيما بينها، فإننا نحصل على النتائج التالية:

مسألة (1) أعطت النقطة $\overline{x}_1\left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftarrow f(x) = -25$

مسألة (4) أعطت النقطة $\overline{x}_4(0,1) \Leftarrow f(x) = -26$

مسألة (5) أعطت النقطة $\overline{x}_5(2,0) \Leftarrow f(x) = -2$

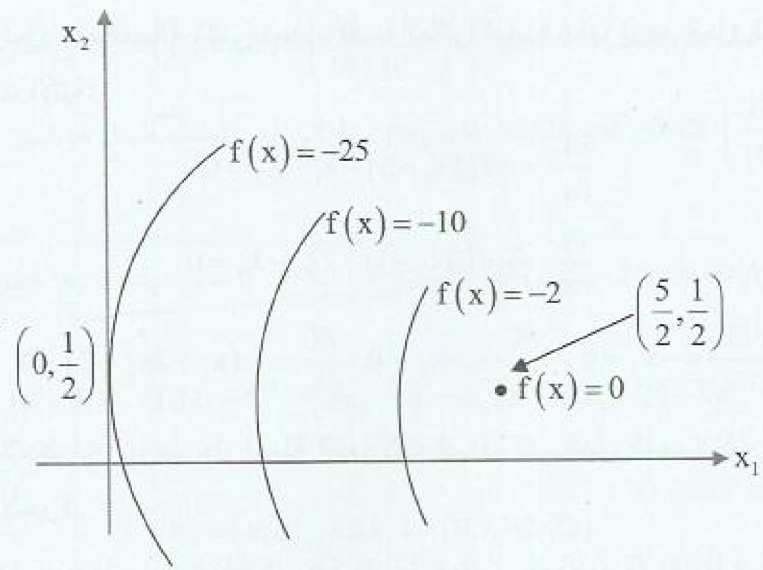
مسألة (6) أعطت النقطة $\overline{x}_6(0,0) \Leftarrow f(x) = -26$

وعليه فإن أفضل نقطة ممكنة هي النقطة $\overline{x}_5(2,0)$. والقيمة العظمى للتابع هي $f^* = -2$.

إن طريقة لاغرانج لاتضمن الحصول على قيمة مثلى مطلقة للمسألة. ومع ذلك فإن أفضل نقطة ممكنة يمكن اعتبارها كنقطة مثلى مطلقة (عامة). وكما سبق أن ذكرنا، إن هذه الطريقة تعتبر قاصرة في مواجهتها للمسائل ذات الحجم الكبير.

لحسن الحظ، إن الشروط التي أضافها كيون – تيوكر Kuhn-Tucker إلى طريقة لاغرانج أعطاها أهمية كبرى في مواجهة المسائل غير الخطية المقيدة.

ملاحظة: التمثيل البياني التالي يساعد على فهم تطبيق أسلوب لاغرانج الموسع.



XIII – 3 – 2 شروط كين – تيوكر

سنعطي في هذه الفقرة شروطاً لازمة لتحديد نقطة استقرار لمسألة برمجة غير خطية وخاضعة لقيود متراجحات. حيث ترتكز دراسة هذه الشروط على طريقة لاغرانج.

هذه الشروط اللازمة تصبح شروطاً كافية تحت بعض التحديدات التي نذكرها فيما بعد.

لنعتبر المسألة التالية:

$$\text{Max } Z = f(x)$$

ضمن القيود التالية: $g(x) \leq 0$

إن متراجحات القيود يمكن أن تحول مساويات بإضافة متغيرات فروق مناسبة تحقق شروط عدم السلبية. لتكن $S_i^2 \geq 0$ ترمز إلى متغير الفروق الذي يضاف إلى الطرف الأيسر للقيد ذي الترتيب (i) ، أي $g_i(x) \leq 0$. ولنعرف:

$S(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ شعاع عامود

$$S^2\left(S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2\right)$$

حيث (m) هو عدد القيود التي تأخذ صيغة متراجحات. إن تابع لاغرانج يمكن تشكيله في هذه الحالة كما يأتي:

$$L(x,S,\lambda)=f(x)-\lambda\left[g(x)\right]+S^2$$

ملاحظة: إذا أخذنا بالاعتبار القيود:

$$g(x)\leq 0$$

فإن أحد الشروط اللازمة لتحديد القيمة المثلى هو أن يكون λ غير سالب إذا كانت المسألة هي مسألة بحث عن القيمة العظمى أو غير موجب إذا كانت المسألة هي مسألة بحث عن القيمة الصغرى.

البرهان: بما أن λ تقيس معدل تغير f بالنسبة لـ g، أي أن:

$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial g}$$

في حالة مسألة البحث عن القيمة العظمى، عندما يزداد الطرف الأيمن للقيد $g\leq 0$ فوق الصفر فإن فراغ الحل يصبح أقل تقييداً، وبالتالي فإن f لايمكن أن ينقص. وهذا يعني أن $\lambda\geq 0$.

وبشكل مشابه، في حالة مسألة البحث عن القيمة الصغرى، عندما يزداد المورد فإن f لايمكن أن يزداد، الأمر الذي يعني أن $\lambda\leq 0$. وإذا كانت القيود تأخذ صيغة مساويات $g(x)=0$، فإن λ يصبح غير محدد الإشارة.

إن القيود المذكورة حول λ تشكل جزءاً من شروط كيون – تيوكر اللازمة. وأما الشروط الأخرى اللازمة فيمكن تحديدها كما يأتي:

لنأخذ المشتق الأول لـ L بالنسبة لـ λ, S_i, x:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i}=-2\lambda_i S_i=0\ ;\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-\left[g(x)+S^2\right]=0$$

إن المجموعة الثانية من المعادلات تكشف النتيجة الآتية:

1- إذا كان λ_i أكبر من الصفر فإن $S_i^2 = 0$. وهذا يعني أن المورد المناظر يكون نادراً. وبالتالي يكون مستنفذاً بكامله (القيد يأخذ صيغة مساواة).

2- إذا كان $S_i^2 > 0$ فإن $\lambda_i = 0$. وهذا يعني أن المورد (i) لايكون نادراً، وبالتالي لايؤثر في قيمة f، أي $\left(\lambda_i = \dfrac{\partial f}{\partial g} = 0\right)$.

ونستنتج من المجموعة الثانية والثالثة من نظام المعادلات أعلاه أن:

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

وهذا الشرط يكرر بصورة واضحة نفس البرهان السابق لأنه إذا كان $\lambda_i = 0$ فإن $g_i(x) \le 0$ أو $S_i^2 \ge 0$. وبأسلوب مشابه، إذا كان $g_i(x) \le 0$ فهذا يعني أن $S_i^2 \ge 0$ ومن ثم $\lambda_i = 0$.

وبناءً على ما سبق، فإن شروط كيون – تيوكر اللازمة لكي تشكل x و λ نقطة استقرار لمسألة البحث عن قيمة عظمى يمكن تلخيصها كما يأتي:

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda \ge 0 \\ &\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0 \\ &\lambda_i g_i(x) = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &g(x) \le 0 \end{aligned}}$$

ملاحظة: تنطبق هذه الشروط أيضاً على حالة التصغير باستثناء أن λ يجب أن تكون غير موجبة، أي $\lambda \le 0$. كما تنطبق هذه الشروط على تعظيم أو تصغير تابع هدف يخضع لقيود تأخذ صيغة مساويات مع ملاحظة أن λ تكون في هذه الحالة غير محددة الإشارة.

نتيجة: إن الشروط اللازمة السابقة تكون أيضاً كافية إذا كان التابع f(x) مقعراً وكان الفراغ الممكن $g_i(x)(i = 1,2,\ldots,m)$ محدباً. وضمن هذه الشروط، بما أن $\lambda \ge 0$ و $g(x)$ محدباً فإن $-\lambda g(x)$ يكون مقعراً. وبموجب الشروط اللازمة، فإن $\lambda S^2 = 0$.

وعليه فإن تابع لاغرانج $L(x,S,\lambda)$ يكون مقعراً، وأن نقطة الاستقرار يجب أن تكون نقطة عظمى عامة (كلية).

نتيجة: في حالة تصغير تابع الهدف، يمكن أن نبرهن بأسلوب مشابه على أن الشروط اللازمة تكون أيضاً كافية إذا كان كل من $f(x)$ و $g_i(x)$ محدباً لجميع قيم i .

مثال: لنعتبر مسألة التصغير التالية:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5 &\leq 0 \\ x_1 + x_3 - 2 &\leq 0 \\ 1 - x_1 &\leq 0 \\ 2 - x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

(2, 1, 0)
(1, 0, 1)
(-1, 0, 0)
(0, -1, 0)
(0, 0, -1)

الحل: بما أن المسألة هي من نوع التصغير، فإن الشعاع λ يجب أن يحقق الشرط اللازم $\lambda \leq 0$. وعليه فإن شروط كيون – تيوكر اللازمة تكون كما يأتي:

$\lambda \geq 0$
$\lambda_i g_i = 0$

1 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \leq 0$

3 $\lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \lambda_3 g_3 = \lambda_4 g_4 = \lambda_5 g_5 = 0$

4 $g(x) \leq 0$

$$② \; (2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

ويمكن نشر هذه القيود كما يلي:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 &\leq 0 \\ 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2x_3-\lambda_2+\lambda_5 &&=0\\
&\lambda_1(2x_1+x_2-5) &&=0\\
&\lambda_2(x_1+x_3-2) &&=0\\
&\lambda_3(1-x_1) &&=0\\
&\lambda_4(2-x_2) &&=0\\
&\lambda_5 x_3 &&=0\\
&2x_1+x_2-5 &&\le 0\\
&x_1+x_3-2 &&\le 0\\
&1-x_1 &&\le 0\\
&2-x_2 &&\le 0\\
&-x_3 &&\le 0
\end{aligned}
$$

إن حل جملة هذه المعادلات هو كما يلي:

$$x_1=1\ ,\ x_2=2\ ,\ x_3=0$$
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0\ ,\ \lambda_3=-2\ ,\ \lambda_4=-4$$

وبما أن التوابع $f(x)$ و $g(x)$ هي محدبة فإن $L(x,S,\lambda)$ يكون محدباً، وبالتالي فإن الشروط اللازمة السابقة تكون أيضاً كافية، وإن نقطة الاستقرار (1,2,0) هي نقطة صغرى عامة (مطلقة، كلية).

XIII – 4 البرمجة التربيعية

لنعرف نموذج البرمجة التربيعية كما يأتي:

$$\text{Max (or Min)}\, f(x)\, cx+x^T Qx$$

ضمن القيود التالية:

$$Ax\le D$$
$$x\ge 0$$

حيث إن:

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T,\ C(c_1,c_2,c_n),D=(d_1,d_2,\dots,d_m)^T$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\dots a_{1n}\\ \vdots\\ a_{m1}\dots a_{mn}\end{bmatrix}\quad ,\quad Q=\begin{bmatrix} q_{11}\dots q_{1n}\\ \vdots\\ q_{m1}\dots q_{mn}\end{bmatrix}$$

إن التابع:

$$X^TQX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j x_i$$

هو تعبير تربيعي. وإن المصفوفة Q يمكن أن نفترض بأنها تكون دائماً متناظرة لأن أي عنصر من كل زوج من المعاملات $q_{ij}, q_{ji} (i \neq j)$ يمكن أن يستبدل بـ $(q_{ij} + a_{ji})/2$ دون أن يؤدي ذلك إلى تعديل قيمة X^TQX. ولتوضيح ذلك، نرى أن التعبير الرياضي:

$$X^TQX = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

هو نفس التعبير الرياضي:

$$X^TQX = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن المصفوفة Q في الحالة الثانية تكون متناظرة.

ويقال إن التعبير الرياضي المذكور يكون:

1) موجب تام Positive-definite إذا كان $X^TQX > 0$ من أجل أي $X \neq 0$

2) موجب شبه تام Positive – semidefinite إذا كان $X^TQX \geq 0$ من أجل أي X.
وفي هذه الحالة يوجد شعاع $X \neq 0$ بحيث يكون $X^TQX = 0$.

3) سالب تام Negative-definite إذا كان $(-X^TQX)$ موجب تام.

4) سالب شبه تام Negative-semi definite إذا كان $(-X^TQX)$ موجب شبه تام.

5) غير محدد Indefinite إذا كان من غير الحالات المذكورة.

ويمكن البرهان على أن الشروط اللازمة والكافية لتحقق الحالات المذكورة أعلاه تكون:

1) X^TQX يكون موجباً تاماً (أو شبه تام) إذا كانت قيم المعينات الجزئية الرئيسية موجبة (أو غير سالبة).

2) X^TQX يكون سالباً تاماً إذا كانت قيمة المعين الجزئي الرئيسي ذي الترتيب k للمصفوفة Q من إشارة $(-1)^k$ حيث $k = 1,2,...,n$ وفي هذه الحالة يقال عن المصفوفة Q إنها سالبة تامة.

3) X^TQX يكون سالباً شبه تام إذا كانت قيمة المعين الجزئي الرئيسي ذي الترتيب k للمصفوفة Q إما صفراً أو من إشارة $(-1)^k$ حيث $k = 1,2,...,n$.

ملاحظة: إن المعين الجزئي الرئيسي ذي الترتيب k للمصفوفة $Q_{n\times n}$ يعرف كما يلي:

$$\begin{vmatrix} q_{11}\cdots q_{1k} \\ \vdots \\ q_{k1}\cdots q_{kk} \end{vmatrix} \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

ويستنتج مما سبق أنه إذا كانت المسألة المدروسة من نوع التعظيم، فإن المصفوفة Q يفترض أن تكون سالبة محددة، وإذا كانت من نوع التصغير فإن Q يفترض بأن تكون موجبة محددة. وهذا يعني أن تابع الهدف محدب تماماً في X لحالة التصغير ومقعر تماماً في X لحالة التعظيم.

وأما بالنسبة للقيود فيفترض بأن تكون خطية وهذا يضمن أن يكون فراغ الحل محدباً في كلا الحالتين التعظيم والتصغير.

XIII – 5 خوارزمية وولف لحل مسائل البرمجة التربيعية

هذه الخوارزمية تطبق مباشرة شروط كيون – تيوكر اللازمة. وإذا كان التابع f(x) محدباً تماماً (أو مقعراً) وكان فراغ الحل يشكل مجموعة محدبة، فإن هذه الشروط تكون أيضاً كافية لتحديد قيمة مثلى كلية.

سنناقش هنا خوارزمية وولف لحل مسألة برمجة تربيعية في حالة تعظيم تابع الهدف.

وبديهي أن مسألة التصغير لاتثير أية مشكلة حيث إن $\text{Max } f(x) = \text{Min}(-f(x))$

إن الصيغة العامة للمسألة المدروسة تكون كما يلي:

$$\text{Max } f(x) = CX + X^T QX$$

ضمن القيود التالية:

$$G(x) = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \le 0$$

لنفرض أيضاً أن:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^T$$
$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)^T$$

تشير إلى مضاريب لاغرانج التي تقابل مجموعتي القيود:

$$AX - D \le 0 \quad , \quad -X \le 0$$

على التوالي. وبتطبيق شروط كيون – تيوكر نحصل مباشرة على:

$$\lambda \ge 0 \quad , \quad \mu \ge 0$$
$$\nabla f(x) - (\lambda^T, \mu^T) \nabla G(x) = 0$$
$$\lambda_i \left(d_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0 \quad , \ i = 1, 2, ..., m$$
$$\mu_j x_j = 0 \qquad ; \qquad j = 1, 2, ..., n$$
$$AX \le D$$
$$-X \le 0$$

إذا لاحظنا أن:

$$\nabla f(x) = C + 2X^T Q$$
$$\nabla G(x) = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$$

وإذا كان $S = D - AX \ge 0$ ترمز إلى متغيرات فروق القيود، فـإن الـشروط السابقة تختزل إلى الشكل التالي:

$$-2X^T Q + \lambda^T A - \mu^T = C$$
$$AX + S = D$$

$\lambda_i S_i = \mu_j X_j = 0$ لجميع قيم i و j

ويمكن كتابة منقول المجموعة الأولى من القيود بالشكل التالي:

$$-2QX + A^T\lambda - \mu = C^T$$

نظراً لأن المصفوفة Q متناظرة وبالتالي $Q = Q^T$.

وإذا استخدمنا المصفوفات لجميع القيود السابقة فيمكن أن تكتب:

$$\left[\frac{-2Q}{A}\left|\frac{A^T}{O}\right|\frac{-I}{O}\left|\frac{O}{I}\right.\right]\begin{bmatrix} X \\ \lambda \\ \mu \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T \\ D \end{bmatrix}$$

$\lambda_i S_i = \mu_j . X_j = 0$ لجميع قيم j, i.

$$\lambda, \mu, X, S \geq 0$$

وباستثناء الشروط $\lambda_i S_i = \mu_j X_j = 0$، فإن المعادلات الباقية هي توابع خطية في S, μ, λ, X.

وهكذا فإن المسألة أصبحت تكافئ حل مجموعة من المعادلات الخطية مع ضرورة تحقق الشروط الإضافية $\lambda_i S_i = \mu_j X_j = 0$.

ونظراً لأن التابع $f(x)$ يكون مقعراً تماماً وفراغ الحل يكون محدباً. فإن الحل الممكن الذي يحقق جميع الشروط السابقة يجب أن يعطي مباشرة الحل الأمثل. وضمن الشروط المفروضة على $f(x)$ وعلى فراغ الحل (أي $f(x)$ مقعراً تماماً وفراغ الحل محدباً) فإن الحل لمجموعة المعادلات المذكورة، إن وجد، يجب أن يكون وحيداً.

ملاحظة: إن حل جملة المعادلات المذكورة نحصل عليه باستخدام المرحلة الأولى من خوارزمية الحل على مرحلتين: القيد الوحيد الذي يجب إضافته هنا هو أن الشرط $\lambda_i S_i = \mu_j X_j = 0$ يجب أن تتحقق دائماً. وهذا يعني أنه إذا دخلت λ_i حل الأساس بقيمة موجبة فإن S_i لايمكن أن يكون متغير أساس بمستوى موجب بل يجب أن يأخذ قيمة صفرية. وبأسلوب مشابه، فإن X_i, μ_i لايأخذان قيمة موجبة في آن واحد.

١ **مثال:** أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة التربيعية الآتية:

$$\text{Max } f(x) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

M_1, M_2 متغيرين

ضمن القيود:

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1\ ,\ x_2\ \geq 0$$

الحل: إن هذه المسألة يمكن كتابتها بصيغة مصفوفات كما يأتي:

$$\operatorname{Max} f(x) = (4,6)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (x_1, x_2)\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$-2x_1 - x_2$

$-x_1 - 2x_2$

$-2x_1^2 - x_2x_1$

$-x_1x_2 - 2x_2^2$

ضمن الشروط التالية:

$$(1,2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq 2$$

$$x_1, x_2\ \geq\ 0$$

$-2x_1^2 - x_2x_1$

$-x_1^2 - 2x_2x_1$

ومن ثم فإن شروط كيون – تيوكر تأخذ الصيغة الآتية:

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 S_1 = \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = 0$$

$$\lambda, \mu, X, S \geq 0$$

نضيف المتغيرين المصطنعين R_2, R_1 إلى المعادلتين الأولى والثانية لأنهما (أي المعادلتين) لايتضمنان متغيراً يصلح لأن يكون متغيراً أساساً (قاعدة). أما المعادلة الثالثة تتضمن المتغير S_1 الذي يمكن اعتباره متغيراً أساساً. ولكي نبدأ الحل نشكل تابع الهدف الآتي:

$$\operatorname{Min} R = R_1 + R_2$$

ثم نضع المعلومات السابقة بصيغة جدول مع ملاحظة ضرورة تحقق الشرط:

$$\lambda_i S_i = \mu_j X_j = 0 \text{ بصورة دائمة}$$

أساس	R	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	الحل
R	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	0	4	2	1	-1	0	1	0	0	4
R_2	0	2	4	2	0	-1	0	1	0	6
S_1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	2

ولكي يكون هذا الجدول صالحاً لإعطاء حل الأساس الابتدائي، فيجب أن تكون جميع معاملات متغيرات الأساس في معادلة الهدف صفرية، وعليه نستطيع بسهولة الحصول على جدول حل الأساس الابتدائي الآتي:

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	الحل
R	1	6	6	3	-1	-1	0	0	0	10
R_1	0	4	2	1	-1	0	1	0	0	4
R_2	0	2	4	2	0	-1	0	1	0	6
S_1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	2

ونظراً لضرورة تحقق الشرط $\boxed{\mu_1 x_1 = 0}$ ولأن $\mu_1 = 0$ في حل الأساس الابتدائي فيمكن أن نعتبر x_1 كمتغير داخل، ويكون المتغير الخارج هو R_1. وعليه نحصل على جدول التكرار التطوير الأول:

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	الحل
R	1	0	3	3/2	1/2	-1	-3/2	0	0	4
x_1	0	1	½	1/4	-1/4	0	1/4	0	0	1
R_2	0	0	3	3/2	1/2	-1	-1/2	1	0	4
S_1	0	0	3/2	-1/4	1/4	0	-1/4	0	1	1

وبأسلوب مشابه، فإن ضرورة تحقق الشرط $\boxed{\mu_2 x_2 = 0}$ ووجود $\mu_2 = 0$ في جدول التطوير الأول يسمح لنا باعتبار x_2 كمتغير داخل. ويكون بالتالي S_1 متغير خارج. فنحصل على جدول تكرار التطوير الثاني:

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	الحل
R	1	0	0	2	0	-1	-1	0	-2	0
x_1	0	1	0	1/3	-1/3	0	1/3	0	-1/3	2/3
R_2	0	0	0	2	0	-1	0	1	-2	2
x_2	0	0	1	-1/6	1/6	0	-1/6	0	2/3	2/3

وبما أن $S_1 = 0$ فإن λ_1 هو متغير داخل ومن ثم R_2 هو متغير خارج.

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	الحل
R	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/6	1/3	-1/6	0	1/3
λ_1	0	0	0	1	0	-1/2	0	1/2	-1	1
x_2	0	0	1	0	1/6	-1/12	-1/6	1/12	1/2	5/6

وهو الحل الأمثل (حصلنا عليه عندما أصبحت جميع قيم المتغيرات المصطنعة أصفاراً). بالإبدال في معادلة الهدف نجد:

$$f^* = 4.16 \quad , \quad x_2^* = \frac{5}{6} \quad , \quad x_1^* = \frac{1}{3}$$

XIII – 6 مسائل محلولة

1- أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

الحل: إن تابع لاغرانج يأخذ الشكل:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \lambda_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10) -$$
$$\lambda_2(x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 6x_4 - 15)$$

وإن الشروط اللازمة هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = 2x_4 - 5\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15) = 0$$

إن حل هذه المعادلات هو:

$$x_1 = \frac{-5}{74},\ x_2 = \frac{-5}{37},\ x_3 = \frac{155}{74},\ x_4 = \frac{30}{37},\ \lambda_1 = \frac{-90}{37},\ \lambda_2 = \frac{85}{37}$$

$$x_1 = -0.0676,\ x_2 = -0.1351,\ x_3 = 2.0946,\ x_4 = 0.8108,$$

$$\lambda_1 = -2.4324,\ \lambda_2 = 2.2973$$

وللبرهان على أن $X_o\left(\frac{-5}{74}, \frac{-5}{37}, \frac{155}{74}, \frac{30}{37}\right)$ هي نقطة نهاية حدية صغرى، لنوجد مصفوفة هيسيان المحددة H^B.

$$H^B = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

m=2
n=4
n-m=4-2=2
2m+1=5

بما أن $n = 4$ و $m = 2$ فإنه يجب حساب $n - m = 2$ معين جزئي رئيسي من المراتب $2m+1=5$ و $2m+2=6$. حيث يجب أن تكون إشارة كل منهم هي $(-1)^m = (+)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 40 > 0\ ,\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 316 > 0$$

ومنه نستنتج أن النقطة x_o هي نقطة مثلى (صغرى) للتـــابع المعطـــى ضـــمن القيود المفروضة.

2 - أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية التالية:

$$\text{Min } f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

s.t.

$$x_1^2 + x_2 - 3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

الحل: إن تابع لاغرانج يأخذ الصيغة التالية:

$$L(X,\lambda) = x_1 + x_2 + x_3 - \lambda_1\left(x_1^2 + x_2 - 3\right) - \lambda_2\left(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7\right)$$

والشروط اللازمة هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$$

$\lambda_2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - 2\lambda_1 x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{-2\lambda_1} = +\frac{1}{4\lambda_1}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 1 - 2\lambda_2 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\left(x_1^2 + x_2 - 3\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -\left(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7\right) = 0$$

وبالحل المشترك لهذه المعادلات نجد أن نقطة الاستقرار هي:

$$X_o\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}, \frac{-3}{8}\right) \ , \ \lambda = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ولتحديد طبيعة هذه النقطة، نوجد مصفوفة هيسيان المحددة:

$$H^B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 2x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 2x_1 & 1 & -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{بعد التعويض}}$$

$$
\left[\begin{array}{cc|ccc}
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
\hline
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

نعوض $x_1 = -\frac{1}{2}$ و $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ في H^B.

نلاحظ أن $n-m=1$، إذاً يلزم حساب معين جزئي رئيسي واحد من المرتبة $2m+1=5$.

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0. & 0 & 0
\end{vmatrix} = +4 > 0
$$

$$
-2\begin{vmatrix}
0 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

وبالتالي فإن النقطة $X_o\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}, \frac{-3}{8}\right)$ هي نقطة نهاية صغرى.

$$(-2)(-)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(+2)(+)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2(2)=4>0$$

3 - أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية التالية:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$$

s.t.

$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0$$

الحل: إن تابع لاغرانج يأخذ الشكل الآتي:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - \lambda_1\left(x_1 + x_2^2 + x_3 - 5\right) - $$
$$-\lambda_2\left(x_1 + 5x_2 + x_3 - 7\right)$$

إن الشروط اللازمة هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$(4-2\lambda_1)x_2 - 5\lambda_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2\lambda_1 x_2 - 5\lambda_2 = 0$$

$\lambda_1 = 2$ ، $x_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 20x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\left(x_1 + x_2^2 + x_3 - 5\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -\left(x_1 + 5x_2 + x_3 - 7\right) = 0$$

بالحل المشترك لهذه المعادلات نجد:

$$x_1 = \frac{-110-50\sqrt{17}}{22},\ x_2 = \frac{55+11\sqrt{17}}{22},\ x_3 = \frac{-11-5\sqrt{17}}{22},\ \lambda_1 = \frac{60}{\sqrt{17}} + \frac{272}{11}$$

$$x_1 = -14.3807,\ x_2 = 4.5616,\ x_3 = -1.4371,$$
$$\lambda_1 = 39.279,\quad \lambda_2 = -68.0308$$

$$x_1 = \frac{-110+50\sqrt{17}}{22},\ x_2 = \frac{55-11\sqrt{17}}{22},\ x_3 = \frac{-11+5\sqrt{17}}{22},\ \lambda_1 = \frac{-60}{\sqrt{17}} - \frac{272}{11}$$

$$x_1 = 4.3707,\ x_2 = +0.4384,\ x_3 = 0.4371,$$
$$\lambda_1 = -39.2799,\ \lambda_2 = 56.7627$$

إذاً توجد لدينا نقطتي استقرار. ولتحديد طبيعتهما نوجد مصفوفة هيسيان المحددة:

$$H^B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2x_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 5 & 0 & 4-2\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

نعوض النقطة الثانية في مصفوفة هيسيان فنجد:

$$H^B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.8768 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0.8768 & 5 & 0 & 82.5598 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن $n = 3$ و $m = 2$. إذاً يلزمنا حساب $n-m=1$ معين جزئي رئيسي من المرتبة $2m+1$ وبالتالي يلزم حساب معين المصفوفة H^B.

$$\left|H^B\right| = 374.0172 > 0$$

نعوض النقطة الأولى في مصفوفة هيسيان فنجد:

$$H^B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9.1232 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 9.1232 & 5 & 0 & -74.5588 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

ويجب حساب معين جزئي رئيسي من المرتبة $2m+1$ فقط.

$$\left|H^B\right| = 374.0172 > 0$$

وبالتالي فإن النقطة:

$$X_o(-14.3707\ ,\ 4.5616\ ,\ -1.4371)$$

هي نهاية صغرى.

4 – اكتب شروط كيون – تيوكر الضرورية لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Min } f(x) = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$$ $\lambda \leq 0$

s.t. $\nabla f - \nabla g_i = 0$

λ_1 ← $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \leq 10$ $\lambda_i g_i = 0$

λ_2 ← $x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$ $g(x) \geq 0$

الحل: نضرب القيد الثاني بإشارة (-) لكي نوحد اتجاه المتراجحات.

وشروط كيون تيوكر هي التالية:

$$\lambda_1 \le 0 \ , \ \lambda_2 \le 0$$
$$\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$$
$$\lambda_i g_i(x) = 0 \qquad ; \quad i = 1,2$$
$$g_i(x) \le 0$$

حيث:

$$\nabla f(x) = \left(4x_1^3 + 5x_2x_3, 2x_2 + 5x_1x_3, 5x_1x_3\right)$$
$$\nabla g_1(x) = \left(2x_1, -2x_2, 2x_3\right)$$
$$\nabla g_2(x) = \left(-3x_1^2, -2x_2, -8x_3\right)$$

فتصبح الشروط اللازمة لكيون تيوكر كالتالي:

$$\lambda_1 \le 0 \ , \ \lambda_2 \le 0$$
$\nabla f_1 - \lambda_1 \nabla g_1 = 0$ $$4x_1^3 + 5x_2x_3 - 2\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 x_1^2 = 0$$
$\nabla f - \lambda_2 \nabla g_2 =$ $$2x_2 + 5x_1x_3 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0$$
$$5x_1x_3 - 2\lambda_1 x_3 + 8\lambda_2 x_3 = 0$$
$$\lambda_1\left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10\right) = 0$$
$$\lambda_2\left(-x_1^3 - x_2^2 - 4x_3^2 + 20\right) = 0$$
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10 \le 0$$
$$-x_1^3 - x_2^2 - 4x_3^2 + 20 \le 0$$

5 – اكتب شروط كيون – تيوكر الضرورية لمسألة البرمجة غير الخطية الآتية:

$$\text{Max } f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_1x_2^2$$ $\lambda_i \geq 0$

s.t. $\nabla f_i - \lambda_i g_i = 0$

$\le$

$\ge$

$$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$$
$(-) \leftarrow$ $$5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \ge 2$$
$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0$$

الحـــل: لكي نحول المتراجحات إلى الشكل المدروس يمكن أن نقوم بأحـــد الإجـــراءين التاليين:

أ – نحول القيد الأول (المساواة) إلى متراجحتين، ثم نضرب المتراجحات (≥) بإشارة (–) لكي تصبح (≤).

ب – نترك القيد الأول (المساواة) على أن لايكون هناك قيد على إشارة λ_1 ونـــضرب بقية القيود بإشارة ناقص لتصبح (≤).

بتطبيق الإجراء الأول نجد:

$$\underline{\text{Max}}\ f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2^2$$

$\underline{\text{s.t.}}$

① $\lambda \geq 0$

② $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$

③ $\lambda_i g_i = 0$

④ $g(x) \leq 0$

$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 \leq 0$$
$$-x_1 - x_2^2 - x_3 + 5 \leq 0$$
$$-5x_1^2 + x_2^2 + x_3 + 2 \leq 0$$
$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$
$$-x_3 \leq 0$$

ويكون تابع لاغرانج في هذه الحالة من الشكل:

وتكون شروط كيون – تيوكر الضرورية هي التالية:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \geqq 0 \longrightarrow \text{Max}$$
$$3x_1^2 + x_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2 + 10\lambda_3 x_1 + \lambda_4 = 0 \qquad \nabla f - \lambda \nabla g = 0$$
$$2x_2 + 2x_1 x_2 - 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - 2\lambda_3 x_2 + \lambda_5 = 0 \qquad \lambda_i g_i = 0$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_6 = 0 \qquad g_i \leq 0$$
$$\lambda_1 \left(x_1 + x_2^2 + x_3 - 5\right) = 0$$
$$\lambda_2 \left(-x_1 - x_2^2 - x_3^2 + 5\right) = 5$$
$$\lambda_3 \left(-5x_1^2 + x_2^2 + x_3 + 2\right) = 0$$
$$-\lambda_4 x_1 = 0$$
$$-\lambda_5 x_2 = 0$$
$$-\lambda_6 x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 \le 0$$
$$-x_1 - x_2^2 - x_3 + 5 \le 0$$
$$-5x_1^2 + x_2^2 + x_3 + 2 \le 0$$
$$-x_1 \le 0$$
$$-x_2 \le 0$$
$$-x_3 \le 0$$

أما إذا طبقنا الإجراء الثاني فتكون شروط كيون – تيوكر هي الآتية:

$\lambda_1 < 0$ غير مقيدة ، $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \ge 0$

$$3x_1^2 + x_2^2 - \lambda_1 + 10\lambda_2 x_1 + \lambda_3 = 0$$
$$2x_2 + 2x_1x_2 - 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 + \lambda_4 = 0$$
$$-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0$$
$$\lambda_1\left(x_1 + x_2^2 + x_3 - 5\right) = 0$$
$$\lambda_2\left(-5x_1^2 + x_2^2 - x_3 + 2\right) = 5$$
$$-\lambda_3 x_1 = 0$$
$$-\lambda_4 x_2 = 0$$
$$-\lambda_5 x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 \le 0$$
$$-5x_1^2 + x_2^2 + x_3 + 2 \le 0$$
$$-x_1, -x_2, -x_3 \le 0$$

6 – أعطيت لك المسألة الآتية:

$$\text{Max } f = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$-4x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_2 - 3x_2^2$

برهن على أن f(x) يكون مقعراً تماماً، ومن ثم حل المسألة باستخدام خوارزمية البرمجة التربيعية.

الحل: يمكن كتابة مسألة البرمجة هذه بشكل مصفوفاتي كما يأتي:

$$\text{Max } f(x)=\underset{c}{[6\quad 3]}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[x_1\quad x_2]\underset{Q}{\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&-3\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

s.t.

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

أو:

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}1\\4\\0\\0\end{bmatrix}$$

للبرهان على أن التابع $f(x)$ مقعراً يكفي أن نبرهن على أن المصفوفة Q سالبة تامة.

$$Q=\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\Rightarrow|Q-\lambda I|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&-2\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\lambda^2+5\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-5\mp\sqrt{17}}{2}<0$$

إذاً المصفوفة Q سالبة تامة وبالتالي التابع $f(x)$ مقعراً.

لحل هذه المسألة بتطبيق خوارزمية البرمجة التربيعية. نكتب أولاً الشروط اللازمة والتي هي كافية أيضاً لأننا برهنا على أن $f(x)$ مقعراً.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} -2Q & A^{T} & -I & 0 \\ \hline A & 0 & 0 & I \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\lambda_1 S_1 = \lambda_2 S_2 = \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \qquad (3)$$

بالتعويض نجد:

ويتيكوا إذا نضرب بـ R

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} +4 & +4 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +4 & +6 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المعادلتين الأولى والثانية لاتتضمنان متغيراً يصلح لأن يكون متغير قاعدة، ولذلك نضيف إليهما متغيرين مصطنعين هما R_2, R_1 على التوالي. وأما المعادلتين الثالثة والرابعة تتضمنان المتغيرين S_2, S_1 يمكن اعتبارهما متغيرا قاعدة. ولكي نبدأ الحل نشكل تابع الهدف.

$$\text{Min } R = R_1 + R_2$$

ثم نضع المعلومات السابقة بصيغة جدول مع ملاحظة ضرورة تحقق بقية الشروط (2) و (3).

الجدول المحول

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	S_2	الحل
R	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
R_1	0	4	4	1	2	-1	0	1	0	0	0	6
R_2	0	4	6	1	3	0	-1	0	1	0	0	3
S_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S_2	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1	4

نجعل أمثال متغيرات القاعدة أصفاراً في سطر التابع الهدفي:

قاعدة	R	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	S_2	الحل
R	1	8	10	2	5	-1	-1	0	0	0	0	9
R_1	0	4	4	1	2	-1	0	1	0	0	0	6
R_2	0	4	6	1	3	0	-1	0	1	0	0	3
S_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S_2	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1	4

الآن باستطاعتنا الانتقال إلى الجدول المختزل:

قاعدة	x_1	$\downarrow x_2$	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	الحل
R	8	10	2	5	-1	-1	9
R_1	4	4	1	2	-1	0	6
R_2	4	(6)	1	3	0	-1	3
S_1	1	1	0	0	0	0	1
S_2	2	3	0	0	0	0	4

نتابع الحل على هذا الجدول بإدخال x_2 إلى مجاهيل القاعـدة وإخـراج R_2 فيصبح الجدول كما يأتي:

قاعدة	$\downarrow x_1$	R_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	الحل
R	8/6	-10/6	2/6	0	-1	4/6	4
R_1	8/6	-4/6	2/6	0	-1	4/6	4
x_2	4/6	1/6	1/6	3/6	0	-1/6	3/6
S_1	2/6	-1/6	-1/6	-3/6	0	1/6	3/6
S_2	0	-3/6	-3/6	-9/6	0	+3/6	15/6

ندخل x_1 إلى مجاهيل القاعدة ونخرج x_2 فنحصل على الجدول الجديد الآتي:

قاعدة	x_1	R_2	λ_1	λ_2	μ_1	$\downarrow\mu_2$	الحل
R	-8/4	-8/4	0	-1	-1	1	3
R_1	-8/4	-1	0	-1	-1	1	3
x_1	6/4	1/4	1/4	3/4	0	-1/4	¾
S_1	-2/4	-1/4	-1/4	-3/4	0	1/4	¼
S_2	0	-3/6	-3/6	-9/6	0	+3/4	15/16

نقوم بإدخال μ_2 إلى القاعدة وإخراج S_1 فنحصل على الجدول الآتي:

قاعدة	x_1	R_2	$\downarrow\lambda_1$	λ_2	μ_1	S_1	الحل
R	0	-1	1	2	-1	-4	2
R_1	0	0	1	2	-1	-4	2
x_1	1	0	0	0	0	1	1
μ_2	-2	-1	-1	-3	0	4	1
S_2	+1	0	0	0	0	-2	2

نقوم بإدخال λ_1 إلى القاعدة وإخراج R_1 فنحصل على الجدول الآتي:

قاعدة	x_2	R_2	R_1	λ_2	μ_1	S_1	الحل
R	0	-1	-1	0	0	0	0
λ_2	0	0	1	2	-1	-4	2
x_1	1	0	0	0	0	1	1
μ_2	-2	-1	1	-1	-1	0	3
S_2	+1	0	0	0	0	-2	2

نلاحظ أنه لم يبق في القاعدة مجاهيل مساعدة. كما أن سطر تابع الهدف لم يعد يحتوي على قيم موجبة. لذلك فإن الجدول الأخير يعطي الحل الأمثل:

$$f^* = \text{Max}\, f(x_1, x_2) = 4 \quad \& \quad x_2 = 0 \ , \ x_1 = 1$$

نلاحظ أن الشروط عدم السلبية على جميع المتحولات λ, X, μ, S والشروط:

$$\lambda_i S_i = \mu_j x_j = 0$$

جميعها محققة.

(x_1, x_2, x_3)

7 – أعطيت لك المسألة الآتية:

$$\text{Min } f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to C$$

C: $\begin{bmatrix} +1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

s.t.

$$\times(-1)\quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

D $= \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

برهن أن $f(x)$ محدب تماماً ومن ثم حل المسألة باستخدام خوارزمية البرمجة التربيعية.

الحل: يمكن كتابة مسألة البرمجة هذه بشكل مصفوفاتي كما يأتي:

$$\text{Min } f(x) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث ضربنا القيد الأول بـــ (1-) لكي يتوحد اتجاه المتراجحات.

للبرهان على أن $f(x)$ محدباً يكفي البرهان على أن المصفوفة Q موجبة تامة.

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{2},\ \ \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$$

وبالتالي فإن المصفوفة Q موجبة تامة وهذا يقضي إلى أن التـابع f(x) محـدباً تماماً.

لحل هذه المسألة وفق خوارزمية وولف نحولها إلى مسـألة Max وذلـك بـأن نضرب تابع الهدف بـ (-1) فتأخذ الشكل التالي:

$$\operatorname{Max} g(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\underline{\text{s.t.}}$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \le -1$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

في هذه المسألة يكون:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

الشروط اللازمة لحل هذه المسألة هي:

$$(1)\qquad \left[\begin{array}{c|c|c|c} -2Q & A^T & -I & O \\ \hline A & O & O & I \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \\ D \end{bmatrix}$$

$$(2)\qquad \lambda_1 S_1 = \lambda_2 S_2 = \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \mu_3 x_3 = 0$$

$$(3)\qquad (\mu_i, \lambda_j, S_i, x_j) \ge 0 \quad \forall\ i, j$$

بعد تعويض قيم كل من D,C,A,Q المعطاة أعلاه نجد أن الـشرط (1) يكتـب بالشكل الآتي:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|cc} 4&2&2&-1&3&-1&0&0&0&0\\ 2&4&0&-1&2&0&-1&0&0&0\\ 2&0&4&-1&1&0&0&-1&0&0\\ -1&-1&-1&0&0&0&0&0&1&0\\ 3&2&1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\lambda_1\\\lambda_2\\\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\S_1\\S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\5\\-1\\6\end{bmatrix}$$

نضرب السطرين الأول والرابع بـــ (1-) فنجد:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\mu_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|cc} -4&-2&-2&1&-3&1&0&0&0&0\\ 2&4&0&-1&2&0&-1&0&0&0\\ 2&0&4&-1&1&0&0&-1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&-1&0\\ 3&2&1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\lambda_1\\\lambda_2\\\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\S_1\\S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\\1\\6\end{bmatrix}\end{array}$$

لنطبق طريقة السمبلكس لحل هذه المسألة ولكي نبدأ بحل أولي ممكن. نلاحظ أنه المعادلة الأولى تقبل μ_1 كمجهول قاعدة والمعادلة الخامسة تقبل S_2 كمجهول قاعـــدة. أما المعادلات الثانية والثالثة والرابعة تحتـــاج لمتغيـــرات اصـــطناعية R_1, R_2, R_3. وحسب طريقة المرحلتين نجد المسألة الجديدة التالية:

$$\text{Min } R = R_1 + R_2 + R_3$$

وخاضعة لقيود المسألة الأصلية نفسها. نرتب المعطيات في جدول السمبلكس الآتي:

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	μ_3	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	RHS
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
μ_1	-4	-2	-2	1	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	1
R_1	2	4	0	-1	2	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
R_2	2	0	4	-1	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	5
R_3	1	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1
S_2	3	2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6

نجمع كلاً من صف R_1 و R_2 و R_3 إلى صف تابع الهدف ثم نشكل الجـــدول المختزل فنجد ما يأتي:

	x_1	x_2	$\downarrow x_3$	λ_1	λ_2	μ_2	μ_3	S_1	الحل
R	5	5	5	-2	3	-1	-1	-1	9
μ_1	-4	-2	-2	1	-3	0	0	0	1
R_1	2	4	0	-1	2	-1	0	0	3
R_2	2	0	4	-1	1	0	-1	0	5
$\leftarrow R_3$	1	1	(1)	0	0	0	0	-1	1
S_2	3	2	1	0	0	0	0	0	6

ندخل المتغير x_3 للحل الجديد ونخرج R_3 فنجد:

	x_1	x_2	R_3	λ_1	λ_2	μ_2	μ_3	$\downarrow S_1$	الحل
R	0	0	-5	-2	3	-1	-1	4	4
μ_1	-2	0	2	1	-3	0	0	-2	3
R_1	2	4	0	-1	2	-1	0	0	3
$\leftarrow R_2$	-2	-4	-4	-1	1	0	-1	(4)	1
x_3	1	1	1	0	0	0	0	-1	1
S_2	2	1	-1	0	0	0	0	1	5

كيف نختاره

ندخل المتغير S_1 ونخرج المتغير R_2 فنجد:

	x_1	$\downarrow x_2$	R_3	λ_1	λ_2	μ_2	μ_3	R_2	الحل
R	8/4	16/4	-4/4	-4/4	8/4	-4/4	0	-4/4	12/4
μ_1	-12/4	-8/4	0	2/4	-10/4	0	-2/4	2/4	14/4
$\leftarrow R_1$	8/4	(16/4)	0	-4/4	8/4	-4/4	0	0	12/4
S_1	-2/4	-4/4	-4/4	-1/4	1/4	0	-1/4	1/4	¼
x_3	2/4	0	0	-1/4	1/4	0	-1/4	1/4	9/4
S_2	10/4	8/4	0	1/4	-1/4	0	1/4	-1/4	19/4

ندخل المتغير x_2 ونخرج المتغير R_1 فنجد:

	x_1	R_1	R_3	λ_1	λ_2	μ_2	μ_3	R_2	الحل
R	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	0
μ_1		1/2							5
x_2	1/2	1/4	0	-1/4	1/2	-1/4	0	0	¾
S_1		1/4							1
x_3		0							5/4
S_2		-1/2							13/4

نلاحظ أن هذا الجدول يعطي الحل الأمثل للمرحلة الأولى، وهو الحــل الأمثـل للمسألة الأصلية:

$$x'=\left(0,\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)\ ,\quad \lambda'=(0,0),\ \mu'=(5,0,0)$$

$$S'=\left(1,\frac{13}{4}\right)\qquad g^{*}(x)=\frac{17}{4}$$

ولإيجاد القيمة الصغرى للتابع $f(x)$ نحسب العلاقة:

$$\text{Min } f(x)=-\text{Max}\left(-f(x)\right)$$

نجد أن:

$$f^{*}(X)=-\frac{17}{4}$$

XIII – 7 مسائل غير محلولة

1 – أوجد الحل الأمثل لكل من المسائل الآتية وفق الطريقة الملائمة:

$$1)\ \text{Min } f(x)=x_1^2+x_2^2$$

$\underline{\text{s.t.}}\quad x_1^2+x_2^2-5\le 0$	$\underline{\text{s.t.}}$
$-x_1\le 0$	$x_1+x_2-1=0$
$-x_2\le 0$	
$x_1+2x_2=4$	

2) $\text{Min } f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

$$
\begin{array}{ll|l}
\underline{\text{s.t.}} & x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0 & \underline{\text{s.t.}}\ \ x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0 \\
 & -x_1 \le 0 & \quad\ \ x_1 + x_2 \le 0 \\
 & -x_2 \le 0 & \quad\ \ -x_1 \le 0 \\
 & x_1 + 2x_2 = 4 & \quad\ \ -x_2 \le 0
\end{array}
$$

3) $\text{Min } f(x) = -x_1$

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{s.t.} & x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0 & \text{s.t.}\ \ x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\
 & -x_2 \le 0 & \quad\ \ -x_2 \le 0
\end{array}
$$

4) $\text{Min } f(x) = (x_1 - 1)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{s.t.} & 3x_1^2 - x_2 - 3 \le 0 & \text{s.t.} \\
 & -x_2 \le 0 & (x_1 + x_2 - 1)^3 \le 0 \\
 & -x_1 \le 0 & -x_1, -x_2 \le 0
\end{array}
$$

5)

$\text{Min } f(x) = x_2$

s.t.

$$-x_1^9 + x_2^3 \ge 0$$

$$x_1^9 + x_2^3 \ge 0$$

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \ge 0$$

2 - أوجد الحل الأمثل لكل من المسائل الآتية بطريقة لاغرانج:

1) $\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

<u>s.t.</u>

$$x_1^2 + 4x_2 + 2x_3 - 14 = 0$$

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

<u>s.t.</u>

$$x_1 + x_2 = 1$$

3) $\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

s.t.

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

3 – اكتب شروط كيون – تيوكر لكل من المسائل الآتية:

1) $\text{Min } f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

s.t.

$$x_1^2 + x_2^2 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0$$

4 – اكتب شروط كيون – تيوكر لكل من المسائل الآتية:

1) $\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2$

s.t.

$$2x_1 + x_2 - 5 \le 0$$
$$1 - x_1 \le 0$$
$$2 - x_2 \le 0$$

2) $\text{Min } f(x) = (x_1 - 11)^2 + 2(x_2 - 9)^2$

s.t.

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \ge 9$$
$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 36$$
$$x_1 + x_2 \ge 8$$
$$x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0$$

3) $\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2$

s.t.

$$x_1^2 + x_2 \le 4$$
$$-x_1^2 + x_2 \ge -4$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 + x_2 \ge -1$$

4) $f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 1)^2$

s.t.

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \geq 4 \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36 \end{array}\right|$$

$$x_1 + x_2 - 8 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \, , \; x_2 \geq 0$$

الفصل الرابع عشر

البرمجة الديناميكية

XIV – 1 صياغة البرمجة الديناميكية

البرمجة الديناميكية هي تقنية حسابية استخدمت لإيجاد الحل الأمثل لأنواع معينة من مسائل القرار المتتابع Sequential decision problems. بلمان Bellman هو الذي طوّر هذه التقنية الحسابية الفعّالة عام 1950 واقترح تسميتها "البرمجة الديناميكية" فما هي أركان هذه التقنية؟ لنعتبر مسألة البرمجة اللاخطية الآتية:

$$\text{Max } f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$$

$\underline{\text{s.t.}}$ (1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le d \;\; ; \;\; a_i > 0 \;\; , i = 1, 2, \ldots, n$$

$x_i \; ; i = 1, 2, \ldots, n$ أعداد صحيحة غير سالبة.

حيث تابع الهدف f(x) هو تابع قابل للفصل. ويخضع لقيد واحد، ومتغيرات القرار فيه أعداد صحيحة غير سالبة.

ملاحظة: إذا فرضنا أن a_i و d هي أيضاً أعداد صحيحة، فإن ذلك لايضيف قيوداً جديدة إلى المسألة، لأنه يمكن تحقيق هذا الشرط بتعديل واحدات القياس المستخدمة. فمثلاً، إذا كانت d و a_i تعبر عن حجم معين فيمكن استخدام السنتيمتر المكعب بدلاً من القدم المكعب.

لنرمز بـ f^* إلى القيمة العظمى العامة لـ f(x) في (1). إذن:

$$f^* = \underset{x_1,\ldots,x_n}{\text{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \right\} \qquad (2)$$

ويشترط في تحديد القيمة العظمى أن تكون x_i أعداد صحيحة غير سالبة، وتحقق:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq d \qquad (3)$$

لنأخذ بالطريقة الحسابية الآتية:

نختار قيمة معينة لـ x_n ونجعلها ثابتة، ومن ثم نعظم $f(x)$ بالنسبة لباقي المتغيرات أي $x_1,...,x_{n-1}$. إن قيم $x_1,...,x_{n-1}$ التي تعظم $f(x)$ ضمن الشروط المذكورة تعتمد بالطبع على القيمة المعينة لـ x_n. إذا كررنا العمل نفسه من أجل جميع القيم الممكنة لـ x_n، فإن f^* ستكون أكبر كل قيم $f(x)$ الناتجة في عمليات التعظيم المختلفة. وبهذا الأسلوب، نكتشف مجموعة من x_j التي تعظم $f(x)$.

لنوضح الخطوات السابقة بأسلوب رياضي. نختار أولاً قيمة معينة لـ x_n، ومن ثم نحسب:

$$\underset{x_1,...,x_{n-1}}{\text{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \right\} = f_n(x_n) + \underset{x_1,...,x_{n-1}}{\text{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right\} \qquad (4)$$

إن الحد $f_n(x_n)$ ظهر منفرداً لأنه مستقل عن $x_1,...,x_{n-1}$. وفي كل مرة نختار قيمة معينة لـ x_n، فإنه يشترط أن تكون $x_1,...,x_{n-1}$ أعداداً صحيحة وغير سالبة وتحقق:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq d - a_n x_n \qquad (5)$$

والآن، إن الصيغة:

$$\underset{x_1,...,x_{n-1}}{\text{Max}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$$

من أجل أعداد صحيحة غير سالبة تحقق (5) سوف تعتمد على x_n، أو بتحديد أدق، سوف تعتمد على $d - a_n x_n$. ولهذا السبب ، يمكن أن نكتب:

$$\Omega_{n-1}(d - a_n x_n) = \underset{x_1,...,x_{n-1}}{\text{Max}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \qquad (6)$$

حيث عملية التعظيم تجري من أجل أعداد صحيحة غير سالبة $x_1,...,x_{n-1}$ تحقق (5).

وإذا تمكنا من حساب $\Omega_{n-1}\left(d-a_n x_n\right)$ لكل قيمة ممكنـــة لـــ x_n، نـستطيع حساب القيمة العظمى لــ $f(x)$، أي f^*، كما يلي:

$$f^* = \operatorname*{Max}_{x_n}\left[f_n\left(x_n\right)+\Omega_{n-1}\left(d-a_n x_n\right)\right] \tag{7}$$

علماً بأن x_n تأخذ القيم $0,1,2,\ldots,\left[d/a_n\right]$ وحيث $\left[d/a_n\right]$ هـو أكبـر عـدد صحيح يساوي أو أقل من d/a_n. ولحساب القيمة العظمى في (7)، يمكننـا أن نقـدر ببساطة.

$$\Omega_n\left(x_n\right)=f_n\left(x_n\right)+\Omega_{n-1}\left(d-a_n x_n\right) \tag{8}$$

من أجل كل قيمة ممكنة لــ x_n وأن نختار أكبر قيمة لــ Ω_n. ونستطيع في آن واحد أن نحدد x_n^* القيمة المثلى لــ x_n.

إن هذه المسألة لحساب f^* تختصر، عند تحديد قيمة التـابع $\Omega_{n-1}\left(d-a_n x_n\right)$، إلى مسألة تعظيم بالنسبة لمتغير واحد.

لندرس أسلوب حساب $\Omega_{n-1}\left(d-a_n x_n\right)$. إن هذا التابع يعـرف بالعلاقـة (6) حيث يجري التعظيم بالنسبة لأعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة (5).

ليكن θ عدداً صحيحاً مختاراً بأسلوب كيفي، وليكن:

$$\Omega_{n-1}(\theta)=\max_{x_1,\ldots,x_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} f_i\left(x_i\right) \tag{9}$$

حيث يتم التعظيم بالنسبة لأعداد صحيحة غير سالبة تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq \theta \tag{10}$$

وباستخدام أسلوب التحليل السابق، يمكننا أن نكتب:

$$\Omega_{n-1}(\theta)=\max_{x_{n-1}}\left[f_{n-1}\left(x_{n-1}\right)+\Omega_{n-2}\left(\theta-a_{n-1}x_{n-1}\right)\right] \tag{11}$$

حيث إن:

$$\Omega_{n-2}\left(\theta-a_{n-1}x_{n-1}\right)=\max_{x_1,\ldots,x_{n-2}}\sum_{i=1}^{n-2} f_i\left(x_i\right) \tag{12}$$

ويجري التعظيم من أجل أعداد صحيحة غير سالبة هي $x_1,\ldots,x_{n-2}$ وتحقق:

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i \le \theta - a_{n-1} x_{n-1} \qquad (13)$$

يلاحظ في العلاقة (11) أن x_{n-1} تأخذ القيم $[\theta / a_{n-1}] ,..., 0,1$. وعليه، إذا عرفنا التابع $\Omega_{n-2}(\theta - a_{n-1}x_{n-1})$، نستطيع تقدير $\Omega_{n-1}(\theta)$ بإجراء التعظيم بالنسبة لمتغير واحد هو x_{n-1} نكرر الأسلوب المستخدم أعلاه إلى أن نصل إلى حساب $\Omega_2(\theta)$. ويتبع ذلك مرحلة الحساب الأخيرة التي تختصر إلى:

$$\Omega_1(\theta) = \max_{x_1} f_1(x_1) \qquad (14)$$

شرحنا حتى الآن الأسلوب العددي لحساب f^* ولكن لم نوضح كيف يتم تحديد المجموعة المثلى لـ x_i عند إجراء الحسابات. إن الأسلوب العملي لتحقيق ذلك هو أن نبدأ بحساب:

$$\Omega_1(\theta) = \max_{0 \le x_1 \le \frac{\theta}{a_1}} f_1(x_1) \qquad (15)$$

ومن ثم ننتقل إلى حساب العلاقة التابعية بأسلوب تصاعدي:

$$\Omega_k(\theta) = \max_{x_k} \left[f_k(x_k) + \Omega_{k-1}(\theta - a_k x_k) \right];\ k = 2,...,n \qquad (16)$$

XIV – 2 مسائل القرارات المتتابعة Sequential decision problems

مسألة القرارات المتتابعة أو مسألة القرارات المتعددة المراحل Multistage decision problem هي مسألة تتألف من ثلاثة عناصر رئيسية هي:

المرحلة Stage والبدائل Alternatives (أو متغيرات القرار) وأخيراً حالة النظام State في كل مرحلة.

المرحلة هي جزء من المسألة يجب أن يتخذ بشأنها قرار. وعليه، فالمسألة يمكن تقسيمها إلى عدد من المراحل المتتالية التي تكتمل باتخاذ قرارات، واحد لكل مرحلة في المسألة. وهذه المراحل المتتالية يمكن تصويرها بيانياً كما هو موضح في الشكل التالي:

$$\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \text{-----}\rightarrow \boxed{k} \text{-----}\rightarrow \boxed{n}$$

إن تحديد البدائل لكل مرحلة يعتبر جزءاً مكملاً لتعريف المرحلة. وبدائل استكمال المراحل هي قرارات. وأي تسلسل من القرارات يسمى "سياسة" ويكون عادة

لكل مرحلة تابع عائد (أو تكلفة) يقيس دخل (أو تكلفة) البديل في المرحلة. وتعتبر حالة النظام بمثابة حلقة تربط المراحل المتتابعة بحيث عندما يوجد الحل الأمثل لكل مرحلة على انفراد، فإن القرار الناتج يكون ممكناً للمسألة ككل. أضف إلى ذلك، أنها تسمح باتخاذ القرارات المثلى للمراحل الباقية من دون الحاجة إلى مراجعة أثر القرارات المستقبلية على القرارات المتخذة سابقاً، وعدد محدد من الحالات مرتبط بكل مرحلة.

شرحنا في الفقرة السابقة أسلوباً لحل مسألة القرارات المتتابعة باستخدام العلاقات التابعية (15)-(16) التي يطلق عليها اسم المعادلات التتابعية أو التراجعية "Recursive equations". ولاحظنا أن هذا النوع من الحساب يسير وفق الترتيب التالي:

$$\Omega_1 \to \Omega_2 \to .... \to \Omega_n$$

ولهذا السبب، يعرف هذا الأسلوب بالأسلوب الحسابي الأمامي Forward computational procedure.

إن المعادلة التتابعية يمكن أن تُصاغ بأسلوب مختلف بحيث نحصل على الحل الأمثل للمسألة بحسابات متسلسلة كما يلي:

$$\Omega_n \to \Omega_{n-1} \to ... \to \Omega_1$$

وفي هذه الحالة، تعرف طريقة الحساب باسم الأسلوب الحسابي الخلفي: Backward computational procedure.

إن السؤال المطروح هو متى يستخدم أسلوب الحل الأمامي أو الخلفي؟

إن الإجابة على هذا السؤال تعتمد بالدرجة الأولى على وصف حالات النظام. وبالطبع إن الأسلوبين يعطيان حلولاً واحدة.

مثال: لدى شخص كمية تساوي X من مورد اقتصادي، وهذا المورد يمكن استغلاله بأساليب مختلفة تسمى أنشطة. وتحقق عملية الاستغلال دخلاً يعتمد حجمه على كمية الموارد المستخدمة وعلى النشاط المستخدم. إن الفرضيات الأساسية لمثل هذه المسألة هي:

• إن دخول الأنشطة المختلفة يمكن قياسها بوحدة قياس مشتركة.

• إن دخل كل نشاط يكون مستقلاً عن كميات الموارد المخصصة للأنشطة الأخرى

• إن الدخل الإجمالي يساوي مجموع الدخول الجزئية.

لنرمز بـ k إلى النشاط k $(k=1,2,\ldots,n)$ وبـ x_k إلى كمية الموارد المخصصة للنشاط k. وأخيراً بـ $f_k(x_k)$ إلى دخل النشاط k.

إن مسألة التخصيص المذكورة تأخذ الصيغة التالية:

$$\text{Max } f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leq X \quad \& \quad x_k \geq 0$$

إن مراحل هذه المسألة هي الأنشطة المخصصة. إذا اعتبرنا حالات النظام في المرحلة k تمثل كمية الموارد المخصصة للمرحلة k وللمراحل $(k-1)$ السابقة لها، فإننا نستخدم أسلوب الحل الأمامي، أي:

$$M_1(S)=\max_{0\leq x_1\leq S} f_1(x_1) \quad ; \; S=0,1,\ldots,X$$

$$M_k(S)=\max_{0\leq x_k\leq S}\left[f_k(x_k)+M_{k-1}(S-x_k)\right]; \; k=2,\ldots,n$$

وإذا اعتبرنا حالات النظام في المرحلة k وللمراحل (k-1) السابقة لها، فإننا نستخدم أسلوب الحل الأمامي، أي:

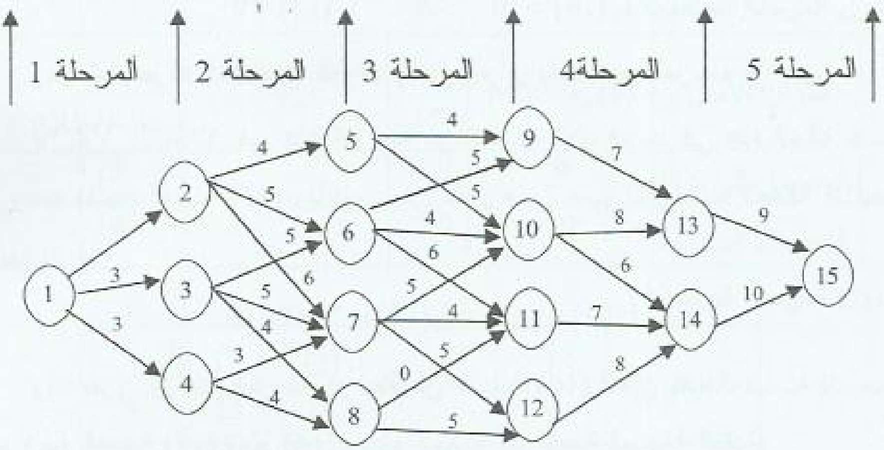
$$M_n(S)=\max_{0\leq x_n\leq S} f_n(x_n) \quad ; \; S=0,1,\ldots,x$$

$$M_k(S)=\max_{0\leq x_k\leq S}\left[f_k(x_k)+M_{k+1}(S-x_k)\right] ; \; k=n-1,n-2,\ldots,1$$

XIV – 3 تطبيقات البرمجة الديناميكية

XIV – 3 – 1مسائل السفر بين مدينتين

شخص يرغب في القيام برحلة من المدينة رقم (1) إلى المدينة رقم (15). هاتان المدينتان لايصل بينهما خط سفر مباشر، والخيارات (أو البدائل) الممكنة لتنفيذ هذه المرحلة موضحة في الشكل:



يلاحظ أن كل سهم على الشكل يمثل طريق سفر بين مدينتين، وإن كل رقم يقع فوق السهم يقيس أجور السفر. كما يلاحظ أن هذه الرحلة تتم على خمس مراحل، ويقترن مع كل مرحلة اتخاذ قرار. وعليه، يجب أن يقرر المسافر في المرحلة الأولى هل سيتجه إلى المدينة (2)، أم (3)، أم (4). وإذا وصل مثلاً إلى المدينة رقم (2)، فيجب أن يقرر في هذه المرحلة الثانية هل يتجه إلى المدينة رقم (5) أم إلى رقم (6) أم رقم (7). وهلم جرا.

ويوجد لدى المسافر في المرحلة الأخيرة خيار وحيد للوصول إلى المدينة رقم (15) سواء انطلق من المدينة (13) أو (14). وتبلغ أجور السفر في هذه المرحلة (9) ل.س إذا تم الانطلاق من المدينة (13) و (10) ل.س إذا تم الانطلاق من المدينة (14).

لنقوم الآن بترجمة الرحلة المذكورة رياضياً مستخدمين العلاقة التتابعية الخلفية.

إذا رمزنا $f_n(S)$ إلى تكلفة السياسة المثلى فيما إذا تم الانطلاق من المدينة (S) في المرحلة n ولغاية الوصول إلى المدينة الأخيرة (15)، وإذا رمزنا بـ C_{sj} إلى أجور السفر بين المدينتين S و j في أية مرحلة كانت فإن العلاقة التتابعية الخلفية لهذه المسألة تأخذ الصيغة الآتية:

$$f_n(S) = \text{Min}\left\{C_{sj} + f_{n+1}(j)\right\}$$

ويتم حل المسألة على الوجه التالي. يبدأ الحل اعتباراً من المرحلة الأخيرة حيث يكون لدينا:

$$f_5(14)=10 \quad \& \quad f_5(13)=9$$

ومن ثم يتحرك الحل نحو الوراء (البداية)، أي يتجه نحو المرحلة $n = 4$.

إذا تقرر الانطلاق في هذه المرحلة من المدينة (9)، فيوجد في هذه الحالة خط سفر وحيد باتجاه المدينة (13) وبأجور سفر مقدارها $C_{9,13} = 7$ وتكتب العلاقة التتابعية كما يلي:

$$f_4(9)=C_{9,13}+f_5(13)=7+9=16$$

وإذا تقرر أن تبدأ المرحلة الرابعة من المدينة (10) ، فإن هذه المدينة تتصل مباشرة مع المدينة (13) ومع (14) وتأخذ العلاقة التراجعية الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} f_4(10) &= \text{Min}\left\{C_{10,13}+f_5(13)\ ,\ C_{10,14}+f_5(14)\right\} \\ &= \text{Min}\{8+9,\ 6+10\} = \text{Min}\{17,16\} = 16 \end{aligned}$$

وعليه، إذا بدأت المرحلة الرابعة من المدينة (10) فيجب أن يكون خط السفر باتجاه المدينة (14).

بتعبير آخر، يفضل دائماً الاتجاه من المدينة (10) إلى المدينة (14) بصرف النظر عن أسلوب الوصول إلى المدينة (10).

إن هذه النتيجة لاتقضي أن المسافر يجب أن ينطلق في جميع الحالات من المدينة (10) إلى المدينة (14) خلال سفره، ولكنها تعني أنه إذا كانت السياسة المثلى تتطلب الوصول إلى المدينة (10)، فيجب أن يتم الانطلاق من هذه المدينة باتجاه المدينة (14) بهدف الوصول إلى المدينة الأخيرة (15). وهذا هو جوهر الأمثلية الذي نادى به العالم بلمان.

يمكن تبسيط أسلوب المعالجة لكل مرحلة من مراحل المسألة باستخدام جدول يوضح الخيارات المختلفة، وكذلك القرار الأمثل الخاص بهذه المرحلة آخذين (S) تشير إلى مدينة الانطلاق و (j) إلى مدينة الوصول، وأخيراً n إلى ترتيب المرحلة. ونعرض فيما يأتي الجداول الخمسة الخاصة بمراحل المسألة المدروسة.

جدول المرحلة الخامسة:

القرار الأمثل	$Min = f_5(s)$	C_{sj} 15	مدينة الوصول j مدينة الانطلاق s
الوصول إلى 15	9	9	13
الوصول إلى 15	10	10	14

جدول المرحلة الرابعة:

القرار الأمثل	$Min = f_4(s)$	$C_{sj} + f_5(j)$ 14	13	j / s
الوصول إلى 13	16	-	16	9
الوصول إلى 14	16	16	17	10
الوصول إلى 14	17	17	-	11
الوصول إلى 14	18	18	-	12

جدول المرحلة الثالثة:

القرار الأمثل	$Min = f_3(s)$	$C_{sj} + f_4(j)$ 12	11	10	9	j / s
الوصول إلى 9	20	-	-	21	20	5
الوصول إلى 10	20	-	23	20	21	6
الوصول إلى 10 من 11	21	23	21	21	-	7
الوصول إلى 11	17	23	17	-	-	8

جدول المرحلة الثانية:

القرار الأمثل	$Min = f_2(s)$	$C_{sj} + f_3(j)$ 8	7	6	5	j / s
الوصول إلى 5	24	-	27	25	24	2
الوصول إلى 8	21	21	26	25	-	3
الوصول إلى 8	21	21	24	-	-	4

جدول المرحلة الأولى:

s \ j	$C_{sj}+f_2(j)$ 2	3	4	$Min=f_1(s)$	القرار الأمثل
1	26	24	24	24	الوصول إلى 3 أو 4

ويحدد الحل الأمثل من الجدول الأخير فالسابق له وهكذا ... ويمكـن تلخـيص ذلك كما هو مبين في الجدول التالي:

مدينة الوصول	مدينة الانطلاق	ترتيب الرحلة
3	1	1
8	3	2
11	8	3
14	11	4
15	14	5

وعليه فإن السياسة المثلى (المسار الأمثل) لهذه الرحلة تكون كما يلي:

$$1 \to 3 \to 8 \to 11 \to 14 \to 15$$

وأن أجور السفر الدنيا لهذه الرحلة هي:

$$3+4+0+7+10=24$$

أما الخيار الثاني فهو يحدد بالجدول الآتي:

مدينة الوصول	مدينة الانطلاق	ترتيب الرحلة
4	1	1
8	4	2
11	8	3
14	11	4
15	14	5

وعليه فإن السياسة المثلى لهذه الرحلة تكون:

$$1 \to 4 \to 8 \to 11 \to 14 \to 15$$

وأن أجور السفر الدنيا لهذه الرحلة هي:

$$3+4+0+7+10=24$$

XIV – 3 – 2 مسألة الموثوقية (Reliability (ou fiabilite

لندرس مسألة تصميم جهاز إلكتروني يتألف من ثلاثة أقسام. إن هذه الأقسام تكون مرتبة بأسلوب تسلسلي بحيث إن تعطل قسم من هذه الأقسام يؤدي حتماً إلى توقف الجهاز بكامله عن العمل. إن الموثوقية بالجهاز تعرف على أنها احتمال أن يعمل الجهاز عند تشغيله (أو احتمال عدم توقف الجهاز عن العمل). وبما أن أقسام الجهاز تشبه السلسلة، فإن هذا الاحتمال يساوي جداء احتمالات عمل كل قسم أو مرحلة في هذا الجهاز. إذا كانت الموثوقية بالجهاز صغيرة جداً، فيمكن إصلاح الوضع بإضافة وحدات موازية وعاكس للتيار إلى كل قسم في الجهاز. وهكذا فإن العاكس يجعل وحدة جديدة تعمل فوراً عندما تتوقف وحدة قديمة عن العمل في أية مرحلة. وباستخدام هذا الأسلوب، فإن الموثوقية الخاصة بمرحلة ما تعتمد على عدد الوحدات الموازية التي تضاف إلى القسم وعلى نوعية العاكس المستخدم.

لنفرض أن كل قسم من أقسام الجهاز يمكن أن يضاف إليه (1 أو 2 أو 3) وحدات موازية وأن رأس المال المخصص لتحسين الموثوقية في الجهاز يساوي (10).

إن البيانات الخاصة بالموثوقية $R_{i,mi}$ وبالتكلفة $C_{i,mi}$ للقسم $I(i=1,2,3)$ ولعدد معين m_i من الوحدات الموازية $(m_i = 1,2,3)$ تكون في الجدول الآتي:

m_i	$i=1$		$i=2$		$i=3$	
	R	C	R	C	R	C
1	0.5	2	0.7	3	0.6	1
2	0.7	4	0.8	5	0.8	2
3	0.9	5	0.9	6	0.9	3

وتهدف هذه المسألة إلى تحديد $m_i(i=1,2,3)$ التي تعطي الموثوقية الكلية العظمى بالنظام دون تجاوز رأس المال المخصص.

إن هذه المسألة تكتب بالصيغة:

$$\text{Max } R = \prod_{i=1}^{3} R_{i,m_i}$$

يخضع إلى:

$$\sum_{i=1}^{3} C_{i,m_i} \leq 10$$

لنبحث الآن عن العلاقة التتابعية الأمامية التي تمثل هذه المسألة.

لنفرض أن $f_i(x_i)$ تشير إلى موثوقية الأقسام (المراحل) 1 ولغاية 3، مع العلم أن x_i هو رأس المال المخصص لـ (i) قسم $(0 \leq x_i \leq 10)$. وعليه فإن حالات النظام تعطى بـ x_i وتكون بالتالي العلاقة التتابعية كما يلي:

$$f_1(x_1) = \underset{0 \leq C_{1,m_1} \leq x_1}{\underset{m_1}{\text{Max}}} \left\{R_{i,m_1}\right\}$$

$$f_i(x_i) = \underset{0 \leq C_{1,m_1} \leq x_1}{\underset{m_1}{\text{Max}}} .\left\{R_{i,m_i} f_{i-1}\left(x_i - C_{i,m_i}\right)\right\}$$

من أجل $i = 2,3 : i$

وبما أن كل قسم يجب أن يضاف إليه وحدة موازية على الأقل، فإن x_3, x_2, x_1 يجب أن تحقق:

$$c_{11} \leq x_1 \leq 10 - c_{21} - c_{31}$$
$$c_{11} + c_{21} \leq x_2 \leq 10 - c_{31}$$
$$c_{11} + c_{21} + c_{31} \leq x_3 \leq 10$$

أو أن:

$$2 \leq x_1 \leq 6 \quad , \quad 5 \leq x \leq 9 \quad , \quad 6 \leq x_3 \leq 10$$

وتأخذ جداول المراحل الثلاث الصيغ التالية:

جدول المرحلة الأولى:

x_1	R_{1,m_1}			القرار الأمثل	
	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$m_1 = 3$	$\text{Max} = f_1(x_1)$	m_1^*
	$R = 0.5 \ \ C = 2$	$R = 0.7 \ \ C = 4$	$R = 0.9 \ \ C = 5$		
2	0.5	-	-	0.5	1
3	0.5	-	-	0.5	1
4	0.5	0.7	-	0.7	2
5	0.5	0.7	0.9	0.9	3
6	0.5	0.7	0.9	0.9	3

جدول المرحلة الثانية:

x_2	$R_{2,m2}.f_1\left(x_2 - C_{2.m_2}\right)$			القرار الأمثل	
	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$m_1 = 3$	$Max = f_2(x_2)$	m_2^*
	$R = 0.7 \ C = 3$	$R = 0.8 \ C = 5$	$R = 0.9 \ C = 6$		
5	$0.7 \times 0.5 = 0.35$	-	-	0.35	1
6	$0.7 \times 0.5 = 0.35$	-	-	0.35	1
7	$0.7 \times 0.7 = 0.49$	$0.8 \times 0.5 = 0.40$	-	0.49	1
8	$0.7 \times 0.9 = 0.63$	$0.8 \times 0.5 = 0.40$	$0.9 \times 0.5 = 0.45$	0.63	1
9	$0.7 \times 0.9 = 0.63$	$0.8 \times 0.7 = 0.56$	$0.9 \times 0.5 = 0.45$	0.63	1

جدول المرحلة الثالثة:

x_3	$R_{3,m3}.f_2\left(x_3, m_3\right)$			القرار الأمثل	
	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$Max = f_2(x_2)$	m_3^*
	$R = 0.6 \ C = 1$	$R = 0.8 \ C = 2$	$R = 0.9 \ C = 3$		
6	$0.6 \times 0.35 = 0.210$	-	-	0.210	1
7	$0.6 \times 0.35 = 0.210$	$0.8 \times 0.35 = 0.280$	-	0.280	2
8	$0.6 \times 0.49 = 0.294$	$0.8 \times 0.35 = 0.280$	$0.9 \times 0.35 = 0.314$	0.315	3
9	$0.6 \times 0.63 = 0.378$	$0.8 \times 0.49 = 0.392$	$0.9 \times 0.35 = 0.315$	0.315	2
10	$0.6 \times 0.63 = 0.378$	$0.8 \times 0.63 = 0.504$	$0.9 \times 0.49 = 0.441$	0.504	2*

ونقرأ الحل الأمثل اعتباراً من جدول المرحلة الثالثة فنجد أن:

$$m_3^* = 2 \quad , \quad m_2^* = 1 \quad , \quad m_1^* = 3$$

والموثوقية المقابلة تساوي:

$$0.9 \times 0.7 \times 0.8 = 0.504$$

XIV – 3 – 3 حل مسائل البرمجة الخطية بوساطة البرمجة الديناميكية

لنأخذ مسألة البرمجة الخطية بشكلها العام التالي:

$$Max\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$... ... ...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1 x_2, ..., x_n \ge 0$$

يمكن صياغة مسألة البرمجة الخطية هذه كمسألة برمجة ديناميكية كما يلي:

نعتبر كل نشاط j $(j = 1, 2, ..., n)$ كمرحلة حيث تمثل مستويات الأنشطة x_j بدائل (متغيرات) المرحلة j. بما أن x_j مستمرة، فإن كل مرحلة تحتوي على عدد لانهائي من البدائل (المتغيرات) في منطقة الإمكانيات.

سنفرض أن المعاملات $0 \le a_{ij}$ (سنذكر فيما بعد سبب هذه الفرضية).

إن مسألة البرمجة الخطية هي مسألة تخصيص (توزيع). لذلك فإنه يمكن اعتبار كميات الموارد – التي تخصص للمرحلة الحالية والتي تليها – كمتحولات الحالة لهذه المرحلة. (هذا في حالة أسلوب حسابي خلفي).

بما أنه يوجد لدينا m مورد، فإن حالة النظام يجب أن تمثل بشعاع ذي m بعد.

لتكن $(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj})$ حالة النظام في المرحلة j، حيث تخصص كميات الموارد: $1, 2, ..., m$ للمراحل $j, j+1, ..., n$.

باستخدام أسلوب الحساب الخلفي، لنرمز بـ $f_j(B_{ij}, B_{2j}, ..., B_{mj})$ للقيمة المثلى لتابع الهدف من أجل المراحل $j, j+1, ..., n$ ولنفرض أن متحولات الحالة $(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj})$ معطاة. لذلك:

$$f_n(B_{1n}, B_{2n}, ..., B_{mn}) = \underset{\substack{0 \le a_{in}x_n \le B_{in} \\ i=1,2,...,m}}{Max} \{C_n x_n\}$$

$$f_j(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj}) = \underset{\substack{0 \le a_{ij}x_j \le B_{ij} \\ i=1,2,...,m}}{Max} \{c_j x_j + f_{j+1}(B_{1j} - a_{1j}x_j, ..., B_{mj} - a_{mj}x_j)\}$$

وذلك من أجل $0 \le B_{ij} \le b_i,\ j = 1, 2, ..., n-1$ من أجل جميع قيم j, i.

مثال: لنأخذ مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } f(x) = 2x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \le 430$$
$$2x_2 \le 460$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل: بما أنه يوجد موردان فقط، فإن متحولات الحالة في مسألة البرمجة الديناميكية المكافئة تمثل بمتحولين فقط. لتكن (B_{1j}, B_{2j}) حالة النظام في المرحلة j حيث $j=1,2$. إذاً:

$$f_2(B_{12}, B_{22}) = \underset{\substack{0 \le x_2 \le B_{12} \\ 0 \le 2x_2 \le B_{22}}}{\text{Max}} \{5x_2\}$$

بما أن:

$$0 \le x_2 \le \min\{B_{12}, B_{22/2}\} \;\&$$
$$f_2(x_2 / B_{12}, B_{22}) = 5x_2$$

فإن:

$$f_2(B_{12}, B_{22}) = \underset{x_2}{\text{Max}}\, f_2(x_2 | B_{11}, B_{22}) = 5\,\text{Min}\left(B_{12}, \frac{B_{22}}{2}\right)$$

و

$$x_2^* = \min\left(B_{12}, \frac{B_{22}}{2}\right)$$

الآن لننتقل إلى المرحلة الأولى:

$$f_1(B_{11}, B_{21}) = \underset{0 \le 2x_1 \le B_{11}}{\text{Max}} \{2x_1 + f_2(B_{11} - 2x_1, B_{21})\}$$
$$= \underset{0 \le 2x_1 \le B_{11}}{\text{Max}} \left\{2x_1 + 5\text{Min}\left(B_{11} - 2x_1, \frac{B_{21}}{2}\right)\right\}$$

بما أن هذه هي المرحلة الأخيرة، لنأخذ $B_{21} = 460, B_{11} = 430$. إذاً:

$$0 \le x_1 \le \frac{B_{11}}{2} = 215$$

$$f_1\left(x_1/B_{11},B_{21}\right)=f_1\left(x_1/430,460\right)=2x_1+5\min\left(430-2x_1,\frac{460}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}2x_1+1150 & 0\le x_1\le 100\\ -8x_1+2150 & 100\le x_1\le 215\end{cases}$$

إذاً من أجل هذا المجال لـــ x_1 نجد:

$$f_1\left(B_{11},B_{21}\right)=\underset{x_1}{\mathrm{Max}}\left\{2x_1+1150,\ -8x_1+2150\right\}$$

$$=2(100)+1150=\left\{-8(100)+2150\right\}=1350$$

والتي نحصل عليها عندما $x_1^*=100$.

الآن، لنحسب x_2^* . لاحظ أن:

$$B_{12}=B_{11}-2x_1=430-200=230$$

$$B_{22}=B_{21}-0=460$$

$$\Rightarrow x_2^*=\min\left(B_{12},\frac{B_{22}}{2}\right)=\min\left(230,\frac{460}{2}\right)=230$$

وبالتالي فإن القيمة المثلى لتابع الهدف هي:

$$f^*\left(x^k\right)=1350$$

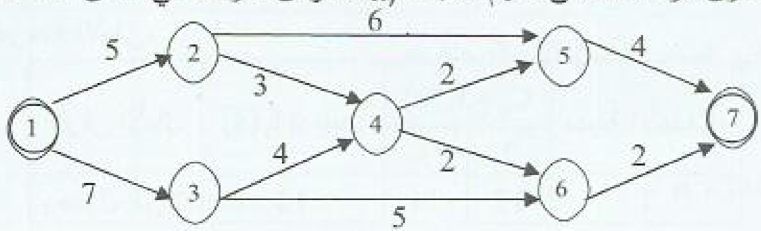
ونحصل عليها عند $x_1^*=100$ & $x_2^*=230$

ملاحظة: لقد فرضنا في الفقرة أعلاه أن جميع المعاملات a_{ij} غير سالبة، لأنه إذا كـــان بعض هذه المعاملات سالباً فإن:

من أجل القيد الذي من النوع (≥ أصغر أو يساوي) لن يكون صحيحاً دائماً أن الطرف الأيمن يعطي أكبر قيمة لمتحولات الحالة. وخاصة إذا كان الحل يحصل عنـــد متغيرات غير محدودة. أي أن مسألة البرمجة الديناميكية غير ملائمـــة لحـــل مـــسائل البرمجة الخطية بشكل عام.

XIV – 4 مسائل محلولة

1 – تعطي الشبكة الموضحة أدناه الطرائق المختلفة للانتقال من المدينة (1) إلى المدينة (7) بعد اجتياز عدد معين من المدن. إن الأزمنة المختلفة (بالساعات) لقطع هذه الطرائق تكون موضحة على أسهم الشبكة (يهمل زمن التوقف في المدن المختلفة).



المطلوب:

- اكتب المسألة بصيغة نموذج برمجة ديناميكية وعرّف بوضوح المراحل والحالات وتابع الهدف.
- أوجد الحل الأمثل الذي يحدد أقصر طريق من المدينة (1) إلى المدينة (7).

الحل: لنرمز بـ $f_n(s)$ إلى تكلفة السياسة المثلى فيما إذا تم الانطلاق من المدينة (s) في المرحلة n. ولغاية الوصول إلى المدينة الأخيرة. إذا رمزنا بـ C_{sj} إلى أجور السفر بين s و j في أية مرحلة كانت.

إن العلاقة التتابعية الخلفية لهذه المسألة هي:

$$f_n(s) = \text{Min}\left\{C_{sj} + f_{n+1}(j)\right\}$$

يمكن تجزئة هذه المسألة إلى ثلاث مراحل. ولنعرض الجداول الثلاثة الخاصة بمراحل المسألة المدروسة.

جدول المرحلة الثالثة:

القرار الأمثل	$\min = f_3(s)$	$\frac{C_{sj}}{j=7}$	مدينة الانطلاق
وصول إلى 7	4	4	5
وصول إلى 7	2	2	6

جدول المرحلة الثانية:

القرار الأمثل	$Min = f_2(s)$	$C_{sj} + f_3(j)$				مدينة الانطلاق
وصول إلى 6 غير مباشر	7	7	-	9	10	2
وصول إلى 6 مباشر	7	8	7	10	-	3

جدول المرحلة الأولى:

القرار الأمثل	$min = f_1(s)$	$C_{sj} + f_2(s)$		مدينة الانطلاق
		3	2	
وصول إلى 2	12	14	12	1

ويحدد الحل الأمثل من الجدول الأخير فالسابق له وهكذا... ويمكن تلخيص ذلك كما يأتي:

مدينة الوصول	مدينة الانطلاق	ترتيب المرحلة
2	1	1
6 غير مباشر	2	2
7	6	3

وعليه فإن السياسة المثلى (المسار الأمثل لهذه الرحلة) هي:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

وأجور السفر (الزمن اللازم) هي:

$$5 + 3 + 2 + 2 = 12$$

ملاحظة: كان ممكناً تقسيم الرحلة إلى أربع مراحل، فتكون الجداول الخاصة لهذه الرحلة كالتالي:

الجدولان الأول والرابع مشابهان للأول والثالث في الطريقة السابقة.

جدول المرحلة الثالثة:

القرار الأمثل	$min = f_3(s)$	$C_{sj} + f_4(s)$		مدينة الانطلاق
		6	5	
وصول إلى 6	4	4	6	4

جدول المرحلة الثانية:

مدينة الانطلاق	$C_{sj}+f_3(s)$			$\min = f_2(s)$	القرار الأمثل
	4	5	6		
2	7	10	-	7	وصول إلى 4
3	8	-	7	7	وصول إلى 6

وبالتالي فإن المسار الأمثل لهذه الرحلة هو:

$$1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7$$

والزمن اللازم هو:

$$5+3+2+2=12$$

2 – يُراد تصميم جهاز إلكتروني يتألف من أربعة أقسام مرتبة بشكل تسلسلي. من أجل تحسين الموثوقية بهذا الجهاز نقوم بإضافة وحدات موازية وعاكس للتيار إلى كل قسم في الجهاز. لنفرض أنه يجب إضافة وحدة موازية واحدة على الأقل لكل قسم. ولنفرض أن رأس المال المخصص لتحسين الموثوقية في الجهاز هو $c = 15$. إن البيانات الخاصة بالموثوقية $R_{i,mi}$ وبالتكلفة $c_{i,mi}$ للقسم i $(i=1,2,3,4)$ ولعدد معين m_i من الوحدات الموازية تكون في الجدول التالي:

m_i	$i=1$		$i=2$		$i=3$		$i=4$	
	R	C	R	C	R	C	R	C
1	0.7	4	0.6	2	0.9	3	0.5	3
2	0.75	5	0.8	4	-	-	0.82	5
3	0.85	7	-	-	-	-	-	-

المطلوب:

- اكتب هذه المسألة بصيغة نموذج برمجة ديناميكية معرفاً تابع الهدف والمراحل ومتحولات الحالات في كل مرحلة.
- حدد عدد الوحدات الموازية التي يجب إضافتها إلى كل قسم في الجهاز لكي نحصل على موثوقية كلية عظمى للجهاز دون تجاوز رأس المال المخصص.

الحل: لنرمز للموثوقية بـ R_{i,m_i} وللتكلفة بـ c_{i,m_i} ولعدد الوحدات الموازية في القسم i بـ m_i.

يمكن كتابة المسألة بالصيغة التالية:

$$\text{Max } R = \prod_{i=1}^{4} R_{i,m_i}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{4} c_{i,m_i} \le 15$$

حيث يمثل R تابع الهدف.

نلاحظ أنه يمكن تقسيم هذه المسألة إلى أربع مراحل ومتحولات الحالة في كل مرحلة هي مقادير المال المخصصة في كل قسم. لنفرض أن $f_i(x_i)$ تشير إلى موثوقية الأقسام (1-4). لنشكل العلاقة التتابعية الأمامية التي تمثل هذه المسألة:

$$f_1(x_1) = \underset{\substack{m_1 \\ 0 \le C_{1,m_1} \le x_1}}{\text{Max}} \left\{R_{1,m_1}\right\}$$

$$f_i(x_i) = \underset{\substack{m_i \\ 0 \le C_{1,m_i} \le x_1}}{\text{Max}} \left\{R_{i,m_i} \cdot f_{i-1}\left(x_i - c_{i,m_i}\right)\right\}$$

من أجل $i = 2,3,4$

إن متحولات الحالة (مقادير الأموال المخصصة لكل قسم) في كل مرحلة تخضع للقيود التالية:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} \le x_1 \le 15 - c_{21} - c_{31} - c_{41} \\ c_{11} + c_{21} \le x_2 \le 15 - c_{31} - c_{41} \\ c_{11} + c_{21} + c_{31} \le x_3 \le 15 - c_{41} \\ c_{11} + c_{21} + c_{31} + c_{41} \le x_4 \le 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4 \le x_1 \le 7 \\ 6 \le x_2 \le 9 \\ 9 \le x_3 \le 12 \\ 12 \le x_4 \le 15 \end{aligned}$$

لإيجاد الحل، نشكل جداول المراحل الأربعة:

جدول المرحلة الأولى:

x_1	$R_{1,m1}$			القرار الأمثل	
	$m_1=1$	$m_1=2$	$m_1=3$	$Max = f_1(x_1)$	m_1^*
	R=0.7 c=4	R=0.75 c=5	R=0.85 c=7		
4	0.7	-	-	0.71	1
5	0.7	0.75	-	0.75	2
6	0.7	0.75	-	0.75	2
7	0.7	0.75	0.85	0.85	3

جدول المرحلة الثانية:

x_2	$R_{2,m2}.\ f_1(x_2-c_{2,m2})$				القرار الأمثل	
	$m_2=1$		$m_2=2$		$Max=f_2(x_2)$	m_2*
	R=0.6	c = 2	R=0.8	c = 4		
6	$0.6 \times 0.7 = 0.42$		-		0.42	1
7	$0.6 \times 0.75 = 0.45$		-		0.45	1
8	$0.6 \times 0.75 = 0.45$		$0.8 \times 0.7 = 0.56$		0.56	2
9	$0.6 \times 0.85 = 0.51$		$0.8 \times 0.75 = 0.6$		0.6	2

جدول المرحلة الثالثة:

x_3	$R_{3,m3}.f_2(x_3-c_3,m_3)$		القرار الأمثل	
	$m_3 = 1$		$Max = f_3(x_3)$	m_3*
	R = 0.9	c = 3		
9	$0.9 \times 0.42 = 0.378$		0.378	1
10	$0.9 \times 0.45 = 0.405$		0.405	1
11	$0.9 \times 0.56 = 0.504$		0.504	1
12	$0.9 \times 0.6 = 0.54$		0.54	1

جدول المرحلة الرابعة:

<table>
<tr><td rowspan="3">x_4</td><td colspan="4">$R_{4,m4}\cdot f_3(x_4-c_{4,m4})$</td><td colspan="2">القرار الأمثل</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m_4=1$</td><td colspan="2">$m_4=2$</td><td rowspan="2">$Max=f_4(x_4)$</td><td rowspan="2">M_4^*</td></tr>
<tr><td>R=0.8</td><td>c = 2</td><td>R=0.82</td><td>c = 5</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">$0.8 \times 0.378 = 0.3024$</td><td colspan="2">-</td><td>0.3024</td><td>1</td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="2">$0.8 \times 0.405 = 0.324$</td><td colspan="2">-</td><td>0.324</td><td>1</td></tr>
<tr><td>14</td><td colspan="2">$0.8 \times 0.504 = 0.4032$</td><td colspan="2">$0.82 \times 0.378 = 0.30996$</td><td>0.4032</td><td>1</td></tr>
<tr><td>15</td><td colspan="2">$0.8 \times 0.54 = 0.432$</td><td colspan="2">$0.82 \times 0.405 = 0.3321$</td><td>0.432</td><td>1</td></tr>
</table>

وبالتالي فإنه يمكن قراءة الحل الأمثل من جدول المرحلة الرابعة، فنجد أن:

$$m_4^* = 1 \ , \ m_3^* = 1 \ , \ m_2^* = 2 \ , \ m_1^* = 2$$

والموثوقية المقابلة هي:

$$R = 0.8 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.75 = 0.432$$

والتكلفة المقابلة لذلك تساوي:

$$C = 3 + 3 + 4 + 5 = 15$$

ملحق

مقدمة في التحليل المحدب

مقدمة في التحليل المحدب

The Convex Analysis

سندرس في هذه المقدمة من التحليل المحدب المواضيع المهمة في التوابع المحدبة بالإضافة إلى دراسة بعض الخواص المتعلقة بهذا النوع من التوابع. سيتضح من دراستنا القادمة أنه يمكن الاستفادة من هذه الخواص في الحصول على شروط مثلى مناسبة وطرق حسابية جيدة لإيجاد حلول مسائل البحث عن الحل الأمثل.

سنعتبر في هذه المقدمة الفضاء الشعاعي R^n، الفضاء الإقليدي الذي نعرف فيه النظيم بالشكل الآتي:

$$\|X\| = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

حيث يسمح لنا هذا النظيم بتعريف المسافة $d(X, Y)$ بين كل عنصرين من R^n كما يأتي:

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

ونقول في هذه الحالة، عن الفضاء الشعاعي R^n إنه فضاء شعاعي متري ونسمي عناصره بالنقاط. نعرف فيما يلي بعض مفاهيم التبولوجيا والتحليل المحدب التي نراها ضرورية لدراسة البرمجة الرياضية.

I.1 - المجموعات:

تعريف "1" المجموعة (Set): المجموعة هي عدد (منتهٍ أو غير منتهٍ) من العناصر أو الأشياء والتي تشترك فيما بينها بصفة أو أكثر، بحيث يمكننا أن نحدد تماماً من خلال تلك الصفة انتماء عنصر ما إلى تلك المجموعة أو عدم انتمائه.

يمكن تحديد أي مجموعة عن طريق كتابة عناصرها أو تحديد الخواص التي تتحقق من قبل عناصرها.

فمثلاً المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ يمكن تحديدها بشكل آخر كما يلي:

$$S = \{ x : 1 \le x \le 5 \text{ و } x \text{ عدد صحيح} \}$$

تعريف "2" الجوار (Neighborhood):

لتكن X نقطة من الفضاء الشعاعي R^n وليكن ε عدداً صغيراً موجباً، عندئذ مجموعة النقاط:

$$N_\varepsilon(X) = \{ Y: \| Y-X \| < \varepsilon \}$$

تدعى جواراً للنقطة X

تعريف "3" النقاط الداخلية (Internal points):

لتكن S مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي R^n، ولتكن $X \in S$. عندئذ نقول عن X إنها نقطة داخلية من S إذا وجد جوار واحد على الأقل للنقطة X محتوى في S. أي: إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$\{ Y: \| Y - X \| < \varepsilon \} \subset S$$

المجموعة المؤلفة من جميع النقاط X تدعى داخلية S، ونرمز لها بالرمز $Int(S)$.

تعريف "4" غلاقة مجموعة (Closure of Set):

لتكن S مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي R^n، إن غلاقة S هي مجموعة كل النقاط من R^n التي يحتوي أي جوار لها نقاطاً من S، ونرمز لها بالرمز $C\ell(S)$، أي $X \in C\ell(S)$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يكون $S \cap N_\varepsilon(X) \neq \phi$

تعريف "5" المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة:

نقول عن المجموعة $S \subset R^n$ أنها مفتوحة (Open Set) إذا وفقط إذا كان $S = Int(S)$. نقول عن المجموعة $S \subset R^n$ أنها مغلقة (Closed Set) إذا وفقط إذا كان $S = C\ell(S)$.

تعريف "6" النقاط المحيطية (Boundary Points):

لتكن S مجموعة جزئية من الفضاء R^n الشعاعي، نقول عن النقطة $X \in S$ إنها نقطة محيطية لـ S إذا لم تكن نقطة داخلية في S وليست نقطة داخلية في متممة S. أي بشكل آخر، نقول عن $X \in S$ أنها نقطة محيطية لـ S إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ فإن الجوار $N_\varepsilon(X)$ يحوي نقطة على الأقل من S ونقطة على الأقل لا

تنتمي إلى S. ندعو مجموعة كل النقاط المحيطية محيط المجموعة S، ونرمــز لهــا بالرمز ∂S.

تعريف "7" المجموعة المحدودة (Bounded Set):

نقول عن المجموعة $S \subset R^n$ إنها محدودة إذا وجد من أجلها عدد حقيقي $r > 0$ بحيث أن $\| X \| < r$ من أجل كل نقطة $X \in S$.

مثــال "1": لنأخذ المجموعة المعرفة بالشكل:

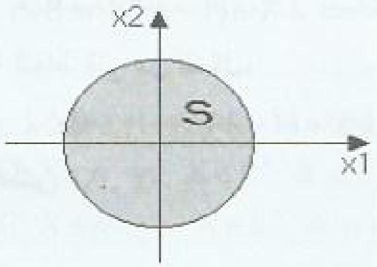
$$S = \{ X = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \} \subset R^2$$

نلاحظ أن مجموعة النقاط الداخلية هي:

$$\text{Int}(S) = \{ X = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 4 \}$$

ومجموعة النقاط المحيطية هي:

$$\partial S = \{ X = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 4 \}$$



الشكل (1)

وغلاقة S هي: $C\ell(S) = S$. ونلاحظ أيضاً أن S هي مجموعة مغلقة.

I.2 - المجموعات المحدبة:

تعريف " 1 " المستقيم:

إذا كانت Y, X نقطتين ما من الفضاء R^n فإننا نقول عن مجموعــة النقــاط المعرفة بالشكل:

$$D = \{ Z : Z = \lambda X + (1 - \lambda) Y \quad ; \quad \lambda \in R \}$$

أنها المستقيم المار بالنقطتين Y, X.

تعريف " 2 " القطعة المستقيمة:

إذا كانت X, Y نقطتين ما من الفضاء R^n فإننا نقول عن مجموعة النقـــاط المعرفة بالشكل:

$$[X,Y] = \{ Z: Z=\lambda X+(1-\lambda)Y \quad ; \quad 0\leq \lambda \leq 1 \}$$

إنها القطعة المستقيمة المغلقة التي طرفاها X, Y .

كما نقول عن مجموعة النقاط المعرفة بالشكل:

$$(X,Y) = \{ Z: Z=\lambda X+(1-\lambda)Y \quad ; \quad 0< \lambda <1 \}$$

إنها القطعة المستقيمة المفتوحة التي طرفاها X, Y.

تعريف " 3 " المجموعة المحدبة:

نقول عن مجموعة $S\subset R^n$ أنها محدبة، إذا كانـــت جميـــع نقـــاط القطعـــة المستقيمة المغلقة التي طرفاها أي نقطتين من نقاط المجموعة منتمية أيضاً إلـــى هـــذه المجموعة. أي:

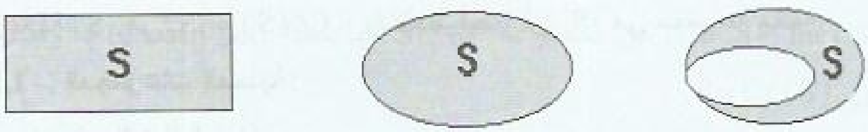
$$\forall \; X,Y \in S \Rightarrow \lambda X+(1-\lambda)Y \in S \;\; ; \;\; \lambda\in [0,1]$$

كما ندعو مجموعة النقاط التي من الشكل:

$$\{ Z=\lambda X+(1-\lambda)Y \quad ; \quad 0\leq \lambda \leq 1 \}$$

تركيبات خطية محدبة للنقطتين X, Y .

مثـــال " 1 ":



مجموعة غير محدبة   مجموعة محدبة   مجموعة محدبة

الشكل (2)

مثـــال "2":

المجموعة P من الفضاء R^3 المعرفة بالشكل:

$$P=\{ X=(x_1 , x_2 , x_3) : \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \}$$

هي مجموعة محدبة. تدعى مستوياً في الفضاء R^3.

وبشكل عام فإن المجموعة المعرفة بالشكل:

$$P=\{X:\ C^t X=\alpha\ ;\ \alpha\in R\ \&\ C\in R^n\}$$

هي مجموعة محدبة تدعى مستوياً في الفضاء R^n . حيث نقصد هنا بالشعاع C^t منقول الشعاع C.

مثال " 3 ":

المجموعة P من الفضاء R^2 المعرفة بالشكل:

$$P=\{\ X=(x_1,x_2)\ :\ x_1+x_2\leq 2\ \}$$

هي مجموعة محدبة تدعى نصف فضاء، وجميع نقاطها واقعة في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم.

$$\{\ X=(x_1,x_2)\ :\ x_1+x_2=2\ \}$$

وبشكل عام فان المجموعة المعرفة بالشكل:

$$P=\{X: C^t X\leq\alpha\ ;\ \alpha\in R\ \&\ C\in R^n\}$$

هي نصف فضاء من الفضاء R^n، وهو مجموعة محدبة.

ملاحظة " 1 ":

إن أي مستوٍ P يعرف لنا نصفي فضاء مغلقين.

$$P^+=\{X:\ C^t X\geq\alpha\ ;\ X\in R^n\ \&\ \alpha\in R\}\ ,$$
$$P^-=\{X:\ C^t X\leq\alpha\ ;\ X\in R^n\ \&\ \alpha\in R\}$$

وكل منهما مجموعة محدبة.

كما أن أي مستوٍ P يعرف لنا نصفي فضاء مفتوحين:

$$P^+=\{X:\ C^t X>\alpha\ ;\ \alpha\in R\ \&\ X\in R^n\}\ ,$$
$$P^-=\{X:\ C^t X<\alpha\ ;\ \alpha\in R\ ,\&\ X\in R^n\}$$

وكل منهما مجموعة محدبة.

مثال "4":

المجموعة $S\subset R^n$ المعرفة بالشكل:

$$S=\{\ X=(x_1,x_2)\ :\ x_1^2+x_2^2\leq 4\ \}$$

هي مجموعة محدبة، وذلك لأن: $\forall\ X,Y\in S\ \ \&\ \ \lambda\in[0,1]$

فإن:

$$\lambda X+(1-\lambda)Y = \lambda(x_1, x_2)+(1-\lambda)(y_1, y_2)$$
$$= (\lambda x_1+(1-\lambda)y_1 \;,\; \lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$
$$(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2 + (\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2 =$$
$$\lambda^2 x_1^2+2\lambda(1-\lambda)x_1 y_1+(1-\lambda)^2 y_1^2 + \lambda^2 x_2^2 +$$
$$2\lambda(1-\lambda)x_2 y_2+(1-\lambda)^2 y_2^2$$

وبالاستفادة من المتراجحة:

$$2xy \le x^2 + y^2$$

نجد:

$$\lambda X+(1-\lambda)Y \le \lambda^2 x_1^2+\lambda(1-\lambda)(x_1^2+y_1^2)+(1-\lambda)^2 y_1^2 +$$
$$\lambda^2 x_2^2+\lambda(1-\lambda)(x_2^2+y_2^2)+(1-\lambda)^2 y_2^2 = 4$$

وهذا يعني أن: $\lambda x+(1-\lambda)y \in S$

أي أن S مجموعة محدبة.

نـــظـــريـــة " 1 ":

إن تقاطع مجموعتين محدبتين هو مجموعة محدبة.

البـــرهـــان:

ليكن S_2, S_1 مجموعتين محدبتين، ولنبـــرهن أن المجموعـــة $S=S_1 \cap S_2$ محدبة.

$$\forall\; X \in S \;\Rightarrow\; X \in S_1 \quad \& \quad X \in S_2$$
$$\forall\; Y \in S \;\Rightarrow\; Y \in S_1 \quad \& \quad Y \in S_2$$

بما أن S_1 مجموعة محدبة فإن $\lambda X+(1-\lambda)Y \in S_1$ وذلك $\forall\; \lambda \in [0,1]$.

بما أن S_2 مجموعة محدبة فإن $\lambda X+(1-\lambda)Y \in S_2$ وذلك $\forall\; \lambda \in [0,1]$.

وبالتالي فان $\lambda X+(1-\lambda)Y \in S_1 \cap S_2 = S$ وذلك $\forall\; \lambda \in [0,1]$.

أي أن S مجموعة محدبة.

ملاحظة "2":

يمكن تعميم النظرية السابقة ونقول إن تقاطع عدد منتـــه أو غيـــر منتـــه مـــن المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

مثـــال "5":

المجموعة S المعرفة بالشكل:

$$S = \{ X : \; X \in R^n \quad ; \quad A X \leq B \}$$

حيث A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ و B شعاع أبعاده تساوي $m \times 1$.

هي مجموعة محدبة تتكون من تقاطع m نصف فضاء.

نتائج: نقبل النتائج التالية بدون برهان:

1 – إذا كانت S مجموعة محدبة فإن داخليتها $\text{Int}(S)$ هي مجموعة محدبة.

2 – إذا كانت S مجموعة محدبة داخليتها غير خالية فإن $C\ell(S)$ هـي مجموعـة محدبة.

3 – إذا كانت S مجموعة محدبة داخليتها غير خالية فإن:

$$C\ell(\text{Int}(S)) = C\ell(S)$$

4 – إذا كانت S مجموعة محدبة داخليتها غير خالية فإن:

$$\text{Int}(C\ell(S)) = \text{Int}(S)$$

تعريف "4": لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ أشعة من الفضاء الاقليدي R^n. يسمى المجمـوع التالي:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$$

تركيباً خطياً محدباً للأشعة السابقة إذا كانت α_i أعداداً غير سـالبة ومجموعهـا يساوي الواحد. أي: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \& \quad \alpha_i \geq 0$

وحسب هذا التعريف، يمكن أن نعرف المجموعة المحدبة على الشكل التالي:

نقول عن مجموعة ما إنها محدبة، إذا كانت تحوي بالإضافة إلى أي نقطتين من نقاطها أي تركيب خطي محدب لهما.

تعريف "5" التغليف المحدب (The Convex Hull):

لتكن $S \subset R^n$، نسمي المجموعة المؤلفة من كل التركيبات الخطيـة المحدبـة لنقاط المجموعة S بالتغليف المحدب للمجموعة S. ونرمز لها بالرمز Conv (S). أو بشكل آخر: $X \in \text{Conv}(S)$ إذا وفقط إذا أمكن كتابة X بالشكل:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad ; \quad X_i \in S \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

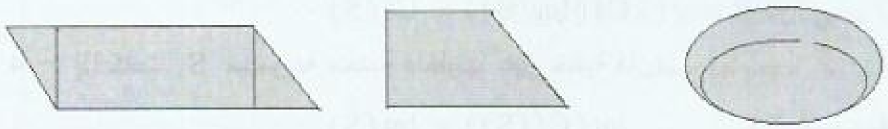
مثال "6":

الأشكال التالية توضح بعض الأمثلة للتغليف المحدب لمجموعة ما S .

S1 **S2 (النقاط الأربعة)** **S3 (المستطيل + النقطتين)**

الشكل (3)

إن التغليف المحدب لكل من المجموعات السابقة يكون كما يلي:



Conv (S1) **Conv (S2)** **Conv (S3)**

الشكل (4)

ملاحظة "3":

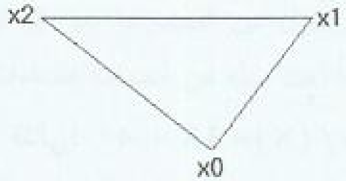
لتكن $S \subset R^n$، عندئذ المجموعة Conv (S) هي أصغر مجموعة محدبة تحوي المجموعة S.

تعريف "6" السمبلكس (The Simplex):

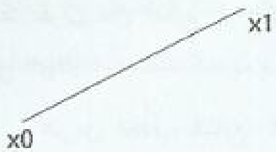
التغليف المحدب لمجموعة مؤلفة من عدد منته من النقاط $X_0 , X_1 , \ldots , X_k$ من الفضاء R^n يدعى متعدد رؤوس. وإذا كانت الأشعة: $X_1 - X_0 , X_2 - X_0 , \ldots , X_k - X_0$ مستقلة خطياً، فإن التغليف المحدب لهذه الأشعة (النقاط): $S = \text{Conv}(X_0 , X_1 , X_2 , \ldots , X_k)$

يدعى سمبلكس من الدرجة k في الفضاء R^n. ونقول عن النقاط $X_0 , X_1 , \ldots , X_k$ أنها رؤوس هذا السمبلكس.

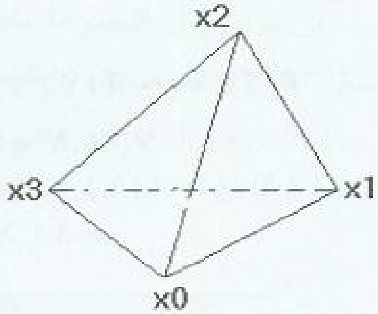
مثـــال " 7 " :



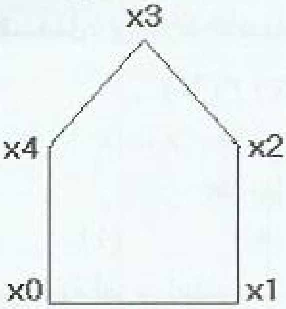
سمبلكس من الدرجة الثانية في R^2



سمبلكس من الدرجة الأولى في R^2



سمبلكس من الدرجة الثالثة في R^3



متعدد رؤوس في R^2

الشكل (5)

تعريف "7" التابع المحدب (The Convex Function):

نقول عن التابع f المعرف على مجموعة محدبة $S \subset R^n$ ويأخذ قيمة فـــي R أنه تابع محدب، إذا وفقط إذا كان:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

حيث: $\lambda \in [0,1] \quad \& \quad X, Y \in S$

تعريف "8" التابع المقعر(The Concave Function):

نقول عن التابع f إنه مقعر، إذا كان التابع $-f$ محدباً. أي إذا كان:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

حيث: $\lambda \in [0,1] \quad \& \quad X, Y \in S$

ملاحظة "4":

هناك بعض التوابع تدعى التوابع غير المحدبة وغير المقعرة، وذلك إذا كان من أجل التابع $f: S \subset R^n \rightarrow R$ يتحقق:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

حيث: $\lambda \in [0,1] \quad \& \quad X, Y \in S$

عندئذ نقول عن التابع f أنه " تآلفي ".

مثال "8":

ادرس تحدب التابع $f: S \subset R \to R$ التالي: $f(X) = 3X + 4$ حيث S مجموعة محدبة.

الحل: إن شرط التحدب هو:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y) \ ,$$

$$\forall \ X, Y \in S \quad \& \quad \lambda \in [0,1]$$

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = 3[\lambda X + (1-\lambda)Y] + 4$$

$$= 3\lambda X + 3(1-\lambda)Y + 4 \qquad (1)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\lambda f(X) = \lambda (3X + 4) = 3\lambda X + 4\lambda$$

$$(1-\lambda) f(Y) = (1-\lambda)(3Y + 4) = 3(1-\lambda)Y + 4 - 4\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = 3\lambda x + 3(1-\lambda)y + 4 \qquad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نجد أن:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

أي أن التابع $f(X) = 3X + 4$ هو تابع تآلفي.

مثـــال "9":

ادرس تحدب التابع $f(X) = |X|$ حيث $f: S \subset R \to R$ و S مجموعة محدبة.

الحل:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = |\lambda X + (1-\lambda) Y|$$

$$\leq |\lambda X| + |(1-\lambda) Y|$$

$$= \lambda |X| + (1-\lambda)|Y|$$

$$= \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

إذاً التابع $f(X) = |X|$ محدب.

تعريف "9" المجموعة متعددة السطوح (Polyhedral Set):

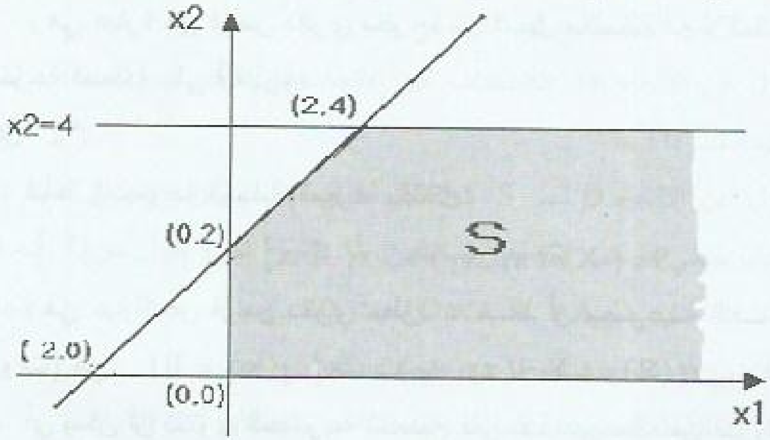
نقول عن المجموعة غير الخالية $S\subset R^n$ إنها متعـددة السـطوح، إذا كانـت تقاطعاً لعدد منته من أنصاف فضاءات مغلقة. أي: S مجموعة متعـددة السـطوح إذا كان:

$$S=\{X:\ C_i^t X\le\alpha_i\ ;\ \alpha_i\in R\ \ \&\ \ 0\ne C_i\in R^n\ \ ;\ i=1,2,\dots,m\}$$

من الواضح أن المجموعة متعددة السطوح هي مجموعة مغلقة ومحدبة.

مثـال " 10 ": المجموعة S المعرفة بالشكل:

$$S=\{\ X=(x_1,x_2):-x_1+x_2\le 2\ ,\ x_2\le 4\ ,\ x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0\ \}$$



الشكل (6)

هي مجموعة متعددة السطوح.

I.3 - النقاط الحدية والاتجاهات الحدية:

The Extreme Points and Extreme Directions

تعريف "1":

النقاط الحدية (أو الذروة Vertex): لتكن $S\subset R^n$ مجموعة محدبـة غيـر خالية. نقول عن $X\in S$ إنها نقطة حدية، إذا لم يكن بالإمكان كتابة X علـى شـكل تركيب محدب لنقطتين X_2 , X_1 من S.

أي: إذا كان من أجل كل $X_2 , X_1\in S$ و $\lambda\in[0,1]$ فإن التركيب المحدب $X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ يؤدي إلى أن $X=X_1=X_2$.

هذا التعريف يعني أن النقطة $X \in S$ هي نقطة حدية (أو ذروة) في المجموعة المحدبة S إذا لم يكن بالإمكان إيجاد أي قطعة مستقيمة مفتوحة (X_1, X_2) محتواة في S وبحيث $X \in (X_1, X_2)$. نرمز لمجموعة النقاط الحدية (الذروات) للمجموعة S بالرمز $\text{ext}\ (S)$. ومن الواضح أن الذروات هي نقاط محيطية، أي أن $\text{ext}(S) \subset \partial S$.

مثال "1":

لنأخذ المجموعة المحدبة المعرفة بالشكل:

$$S = \{\ X = (x_1, x_2) :\ \ x_1^2 + x_2^2 < 1\ \}$$

وهي عبارة عن قرص دائري مفتوح. من السهل ملاحظة أنه لا تحتوي هذه المجموعة المحدبة على أية ذروة.

مثال "2":

لنأخذ المجموعة المحدبة المعرفة بالشكل:

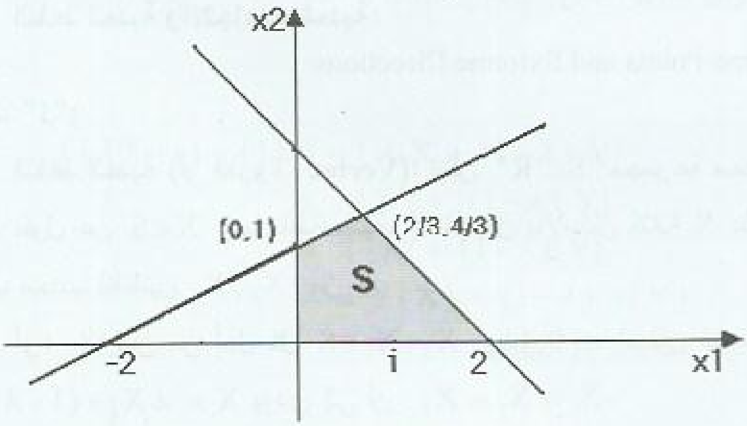
$$S = \{\ X = (x_1, x_2) :\ \ x_1^2 + x_2^2 \le 1\ \}$$

وهي عبارة عن قرص دائري مغلق. نلاحظ أن مجموعة النقاط الحدية (الذروات) هي: $\text{ext}(S) = \{\ X = (x_1, x_2) :\ \ x_1^2 + x_2^2 = 1\ \}$

أي يمكن أن تحتوي المجموعة المحدبة على عدد غير منته من الذروات.

مثال " 3 ":

لنأخذ المجموعة المحدبة المعرفة بالشكل:



الشكل (7)

$$S=\{\, X=(x_1,x_2)\ :\ x_1+x_2\le 2\ ,\ -x_1+2x_2\le 2\ ,\ x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0\,\}$$

من رسم هذه المجموعة الموضح بالشكل (7) نجد أن مجموعة النقاط الحدية هي:

$$\text{ext}(S)=\{\,(0,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (2/3,4/3)\ ,\ (2,0)\,\}$$

أي يمكن أن تحتوي المجموعة المحدبة على عدد محدود من الذروات.

تعريف "2" الاتجاه الحدي:

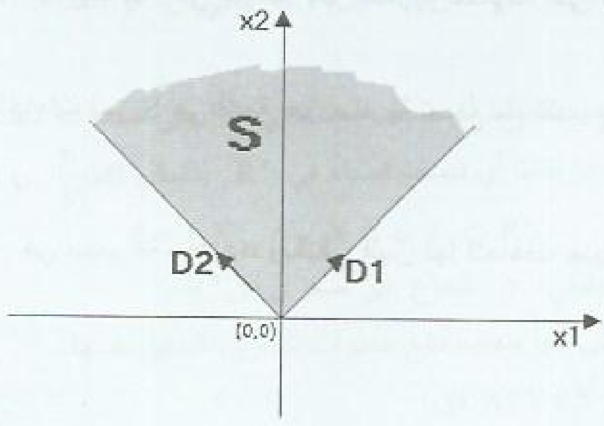
لتكن S مجموعة مغلقة ومحدبة من الفضاء R^n. نقول عن شعاع غير صفري D من الفضاء R^n إنه اتجاه لـ S إذا كان من أجل أي نقطة $X\in S$ فإن $X+\lambda D\in S$ من أجل جميع قيم $\lambda\ge 0$.

نقول عن الاتجاه D_1 إنه يختلف عن الاتجاه D_2 إذا كان $D_1\ne\alpha D_2$ من أجل أي قيمة لـ $\alpha>0$.

نقول عن الاتجاه D لـ S إنه اتجاه حدي، إذا لم يكن بالإمكان كتابة D على شكل تركيب خطي موجب لاتجاهين مختلفين. أو بتعبير آخر، نقول عن D أنه اتجاه حدي لـ S إذا كان $D=\lambda_1 D_1+\lambda_2 D_2$ حيث $\lambda_1,\lambda_2>0$ و D_1 , D_2 اتجاهان لـ S ، يقتضي أن تكون هناك $\alpha>0$ بحيث يكون $D_1=\alpha D_2$.

مثال "4": لنأخذ المجموعة المغلقة والمحدبة من الفضاء R^2 التالية:

$$S=\{\, X=(x_1,x_2)\ :\ x_2\ge |x_1|\,\}$$



الشكل (8)

إن اتجاهات S هي أشعة غير صفرية تصنع زاوية θ مع المحور $0x_2$ حيث $\theta \leq \frac{\pi}{4}$. كما نلاحظ أن هناك اتجاهان حديان لـ S هما:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

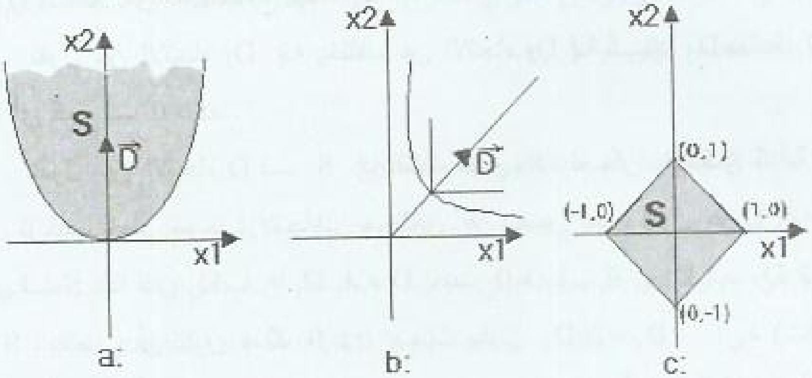
مثـال "5":

عيّن مجموعة الاتجاهات لكل من المجموعات المحدبة التالية:

a) $S_1 = \{ X = (x_1, x_2) : x_2 \geq x_1^2 \}$

b) $S_2 = \{ X = (x_1, x_2) : x_1 x_2 \geq 1 , x_1 > 0 \}$

c) $S_3 = \{ X = (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| \leq 1 \}$



الشكل (9)

a) إن الاتجاهات لـ S_1 هي أشـعة غير صفرية محمولة على المحور $\overrightarrow{0x_2}$ وهي حدية.

b) إن الاتجاهات لـ S_2 هي أشعة غير صفرية تصنع مع الشعاع $\overrightarrow{D}$ زاوية أصغر أو تساوي $\frac{\pi}{4}$.

c) إن S_3 هي مجموعة محدودة، وبالتالي فليس لها اتجاهات حدية.

تمارين محلولة

تمرين " 1 ":

أثبت أن مجموعة نقاط أي مستوٍ في الفضاء R^n هي مجموعة محدبة.

الحل: تعطى مجموعة نقاط أي مستوٍ في الفضاء R^n بالشكل التالي:

$$S = \{ X : \rho^t . X = \alpha \} \subset R^n$$

حيث α أي عدد حقيقي، ρ شعاع غير صفري من R^n. أي:

$$\rho^t = (\rho_1, ..., \rho_n)$$

ولإثبات أن S مجموعة محدبة، يكفي البرهان على تحقق الشرط التالي:

من أجلِ أي $X, Y \in S$ يجب أن يكون:

$$Z = \lambda X + (1-\lambda) Y \in S \quad ; \quad \forall \ \lambda \in [0,1]$$

في الواقع، بما أن $X, Y \in S$ فإن:

$$\rho^t . X = \alpha \quad \& \quad \rho^t . Y = \alpha$$

وعندئذ فإن:

$$\rho^t . Z = \rho^t [\lambda X + (1-\lambda) Y] = \lambda \rho^t X + (1-\lambda) \ \rho^t Y$$
$$= \lambda \ \alpha + (1-\lambda) \alpha = \alpha$$

وبما أن $\rho^t . Z = \alpha$ فإن $Z \in S$ ، وهذا يعني أن S محدبة.

تمرين "2":

أثبت أن مجموعة نقاط أي نصف فضاء في R^n هي مجموعة محدبة.

الحل: تعطى مجموعة نقاط أي نصف فضاء في R^n بالشكل التالي:

$$S = \{ X : \rho^t . X \le \alpha \} \subset R^n$$

حيث α أي عدد حقيقي، ρ شعاع غير صفري من R^n.

وللبرهان على أنها محدبة نتبع خطوات التمرين السابق نفسها.

في الواقع، إذا كان $X, Y \in S$ فإن:

$$\rho^t . X \le \alpha \quad \& \quad \rho^t . Y \le \alpha$$

$$\rho^t.Z = \rho^t[\lambda X + (1-\lambda)Y] = \lambda \rho^t X + (1-\lambda)\ \rho^t Y$$
$$\leq \lambda\ \alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$$

وبما أن $\rho^t.Z \leq \alpha$ فإن $Z \in S$، ومنه فإن S مجموعة محدبة.

ملاحظة: بالطريقة السابقة نفسها يمكن البرهان على أن تقاطع m نصف فضاء في R^n هو مجموعة محدبة. حيث يعبر عن هذا التقاطع بالمجموعة

$$S = \{\ X:\ AX \leq B\ \} \subset R^n$$

حيث $A_{m \times n}$, $B \in R^m$.

تمرين "3":

ارسم المجموعة التالية ثم أثبت أنها محدبة.

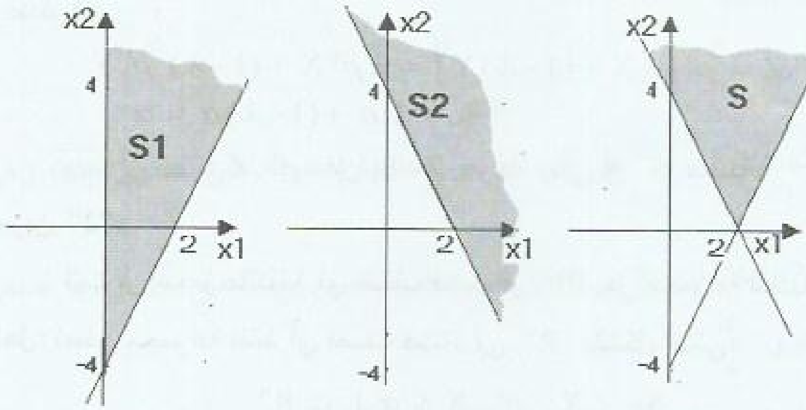
$$S = \{\ X = (x_1, x_2):\ x_2 \geq |2x_1 - 4|\ \}$$

الحل: تكتب هذه المجموعة بالشكل:

$$S = \{\ X:\ \ x_2 - 2x_1 \geq -4 \quad \& \quad x_2 + 2x_1 \geq 4\ \}$$

أي أنها تقاطع مجموعتين

$$S_1 = \{\ X:\ x_2 - 2x_1 \geq -4\ \}\ ,\ \ S_2 = \{X:\ x_2 + 2x_1 \geq 4\ \}$$



الشكل (10)

واضح من الرسم أن المجموعات الثلاث S_2 , S_1 , S محدبة لأن الخط الواصل بين أي نقطتين في أي من هذه المجموعات ينتمي إلى هذه المجموعة. لنثبت ذلك باستخدام التعريف الرياضي للتحدب.

في الواقع، إذا كان $X, Y \in S$ فإن:

$$x_2 \geq |2x_1 - 4| \quad \& \quad y_2 \geq |2y_1 - 4| \qquad (1)$$

ليكن:

$$Z = (z_1, z_2) = \lambda X + (1-\lambda) Y \quad ; \quad \lambda \in [0,1]$$
$$= \lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2)$$
$$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 , \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$$

أي أن:

$$z_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \quad , \quad z_2 = \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2$$

عندئذ إذا كان $z_2 \geq |2z_1 - 4|$ فإن $Z \in S$، وبالتالي تكـون المجموعـة S محدبة.

إذاً بالاستفادة من المتراجحتين (1) نجد:

$$z_2 = \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \geq \lambda |2x_1 - 4| + (1-\lambda) |2y_1 - 4|$$
$$= |2\lambda x_1 - 4\lambda| + |2(1-\lambda) y_1 - 4(1-\lambda)|$$
$$\geq |2\lambda x_1 - 4\lambda + 2(1-\lambda) y_1 - 4(1-\lambda)|$$
$$= |2(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) - 4|$$
$$= |2z_1 - 4|$$

وهو المطلوب.

تمرين " 4 ": لتكن المجموعة التالية:

$$S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \ , \ x_3 = 8 \}$$

المطلوب رسم هذه المجموعة وإيجاد $\operatorname{Int}(S), C\ell(S), \partial S$. ثم أثبت أنهـا محدبة.

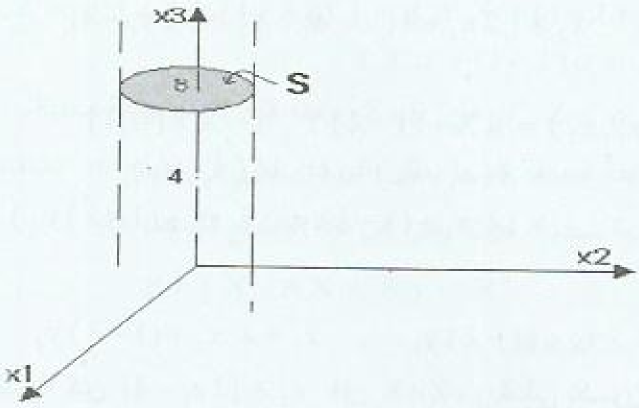
الحل: تتألف هذه المجموعة من تقاطع المجموعتين:

$$S_1 = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \}$$

وهي عبارة عن جسم اسطوانة نصف قطرها 4 ومحورها $0x_3$.

$$S_2 = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_3 = 8 \}$$

وهي عبارة عن مستو يوازي المستوي x_1ox_2 .



الشكل (11)

- مجموعة النقاط الداخلية: بما أنه لا يوجد في المجموعة S أي نقطة جوارها محتوى كلياً في S فإن: $Int(S)=\phi$

- مجموعة النقاط اللاصقة: نلاحظ أن جوار كل نقطة من S يتقاطع مع S أي أن المجموعة S تساوي لصاقتها $C\ell(S)=S$، وهذا يعني أن المجموعة S مغلقة.

- مجموعة النقاط المحيطية: إن كل نقطة من المجموعة التالية:

$$\partial S=\{\, X:\ \ x_1^2+x_2^2=16 \quad , \quad x_3=8 \,\}$$

لها جوار يحتوي على نقاط من داخل المجموعة S ونقاط من خارجها.

والمجموعة ∂S تشكل أيضاً النقاط الحدية لـ S.

- لا يوجد للمجموعة S اتجاهات حدية، لأنها مجموعة محدودة.

بقي أن نثبت أن S مجموعة محدبة.

إذا فرضنا أن $X,Y\in S$ فإن:

$$x_1^2+x_2^2\le 16 \ \ , \ \ x_3=8 \quad \& \quad y_1^2+y_2^2\le 16 \ \ , \ \ y_3=8$$

ولنعتبر أن:

$$Z=\lambda X+(1-\lambda)Y \qquad ; \qquad \lambda\in[0,1]$$

$$z_i=\lambda\ X_i+(1-\lambda)Y_i \qquad ; \qquad i=1,2,3\,. \qquad (2)$$

عندئذ إذا كان: $z_1^2+z_2^2\le 16 \ \ , \ \ z_3=8$

فان Z المعرفة بالعلاقة (2) تنتمي إلى S وهـذا يعنـي أن S مجموعـة محدبة. إذاً، من (2) نجد:

$$\begin{aligned} z_1^2+z_2^2 &= (\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2+(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2 \\ &= \lambda^2(x_1^2+x_2^2)+(1-\lambda)^2(y_1^2+y_2^2)+2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+x_2y_2) \\ &\le 16\lambda^2+16(1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2) \\ &\le 16\lambda^2+16(1-\lambda)^2+32\lambda(1-\lambda)\le 16 \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى، فإن:

$$z_3=\lambda x_3+(1-\lambda)y_3=8\lambda+8(1-\lambda)=8$$

وهو المطلوب.

تمرين "5":

أثبت صحة المتراجحة التالية:

$$|X^t.Y|\le\frac{1}{2}(\|X\|^2+\|Y\|^2)\qquad\forall\ X,Y\in R^n$$

الحل: حسب تعريف جداء شعاعين وخواص القيمة المطلقة نجد:

$$|X^t.Y|=|\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i\,.\,y_i|\qquad(1)$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$(x_i+y_i)^2\ge 0\quad\forall\ x_i,y_i\in R\ \Rightarrow\ x_i.y_i\ge-\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)$$

$$(x_i-y_i)^2\ge 0\quad\forall\ x_i,y_i\in R\ \Rightarrow\ x_i.y_i\le\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)$$

ومنه نجد:

$$|x_i.y_i|\le\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)\qquad(2)$$

بأخذ مجموع الطرفين نجد:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}|x_i.y_i| &\le \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|X\|^2+\|Y\|^2)\qquad(3) \end{aligned}$$

وذلك حسب تعريف نظيم شعاع.

أخيراً نبدل (3) في (1) فنجد:

$$| X^t . Y | \leq \frac{1}{2} (\|X\|^2 + \|Y\|^2) \quad ; \quad \forall\ X, Y \in R^n$$

تمرين "6":

أثبت أن:

$$\| \lambda X \| = |\lambda| . \| X \| \quad ; \quad \lambda \in R$$

الحل:

$$\| \lambda X \|^2 = (\lambda X)^t . (\lambda X) = \lambda^2 . X^t . X = \lambda^2 . \| X \|^2$$

$$\| \lambda X \|^2 = \lambda^2 \| X \|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\lambda X\| = |\lambda| . \| X \|$$

تمرين " 7 ":

برهن أنه من أجل أي شعاعين X , Y من الفضاء R^n يكون:

1) $\| X+Y \|^2 + \|X-Y\|^2 = 2 (\| X \|^2 + \| Y \|^2)$

2) $| X^t . Y| \leq \| X \| . \| Y \|$

3) $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$

البرهان:

$$1) \quad \| X+Y \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + 2 x_i y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \| X \|^2 + \| Y \|^2 + 2X^t . Y \qquad (1)$$

$$\| X - Y\|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2 - 2X^t . Y \qquad (2)$$

بجمع (1) مع (2) نجد:

$$\| X+Y \|^2 + \|X-Y\|^2 = 2 (\| X \|^2 + \| Y \|^2)$$

$$2) \quad \| X\lambda + Y \|^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \| X \|^2 . \lambda^2 + 2X^t . Y\lambda + \| Y \|^2 \geq 0$$

نلاحظ من الطرف الأيسر ثلاثي حدود غير سالب، فإن مميزه غير موجب.

$$4(X^t . Y)^2 - 4 \| X \|^2 . \| Y \|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$| X^t . Y | \leq \| X \| . \| Y \| \qquad (3)$$

3)

نضرب طرفي (3) بـ 2 ونضيف المقدار $\| X \|^2 + \| Y \|^2$ فنجد:

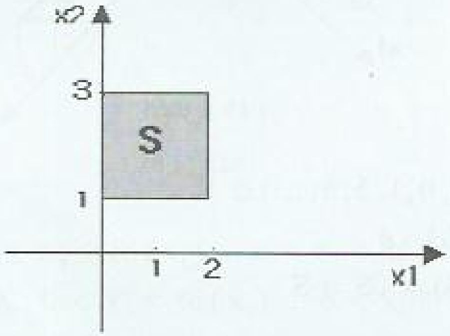
$$\| X \|^2 + \| Y \|^2 + 2|X^t . Y| \le \| X \|^2 + \| Y \|^2 + 2 \|X\|.\| Y\|$$
$$(\| X \mp Y \|)^2 \le (\| X \| + \| Y \|)^2$$
$$\| X \mp Y \| \le \| X \| + \| Y \|$$
$$\| X \mp Y \| \ge \| X \| - \| Y \|$$

تمرين "8":

ارسم كل من المجموعات التالية وعين داخلية ولصاقة ومحيط كل منها.

1)

$$S = \{ X : -2 \le X \le 3 \} \subset R$$
$$Int(S) = \{ X : -2 < X < 3 \} \quad , \quad C\ell(S) = S \quad , \quad \partial S = \{ -2 , 3 \}$$



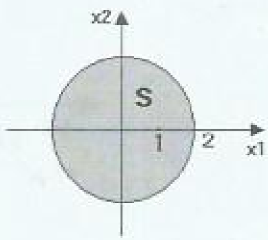
الشكل (12)

2)

$$S = \{ X : 0 \le x_1 \le 2 , 1 \le x_2 \le 3 \} \subset R^2$$
$$Int(S) = \{ X : 0 < x_1 < 2 \ , \ 1 < x_2 < 3 \} \ , \ C\ell(S) = S$$
$$\partial S = \{ X : 0 < x_1 < 2 \ \& \ x_2 = 1,3 \} \cup \{ X : x_1 = 0,2 \ \& \ 1 \le x_2 \le 3 \}$$

3)

$$S = \{ X : x_1^2 + x_2^2 \le 4 \} \subset R^2$$
$$Int\, S = \{ X : x_1^2 + x_2^2 < 4 \}$$
$$C\ell(S) = S$$
$$\partial S = \{ X : x_1^2 + x_2^2 = 4 \}$$



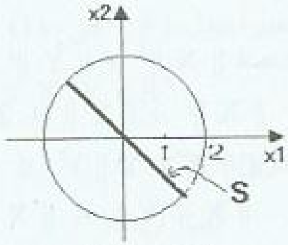
الشكل (13)

4)

$S=\{ X: x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \;, x_1 + x_2 = 0 \} \subset R^2$

$Int(S)=\phi$

$C\ell(S) = \partial S = S$



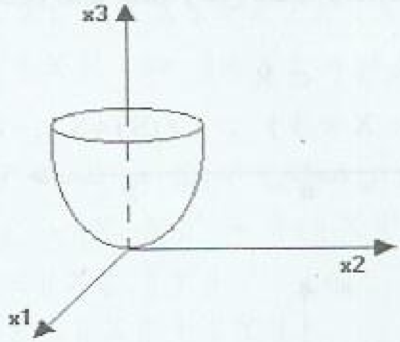
الشكل (14)

5)

$S=\{ X: x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \} \subset R^3$

$Int(S)=\{X: x_1^2 + x_2^2 < x_3 \}$

$C\ell(S) = S \quad , \quad \partial S = \{X: x_1^2 + x_2^2 = x_3 \}$



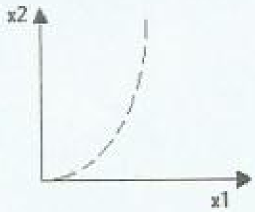
الشكل (15)

6)

$S=\{ 0,1,2,3,....\} \subset R$

$Int(S)=\phi$

$C\ell(S) = \partial S = S$



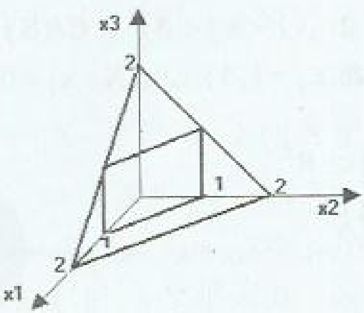
الشكل (16)

7)

$S=\{ X: x_2 = x_1^2 \;, x_1 = 0,1,2,3,....\} \subset R^2$

$Int(S)=\phi \quad , \quad C\ell(S) = \partial S = S$

8)



الشكل (17)

$S=\{X: x_1+x_2+x_3 \le 2\ ,\ x_1+x_2=1\ ,\ (x_1,x_2,x_3)\ge 0\}\subset R^3$

$\mathrm{Int}(S)=\phi \quad , \quad C\ell(S)=\partial S = S$

9)

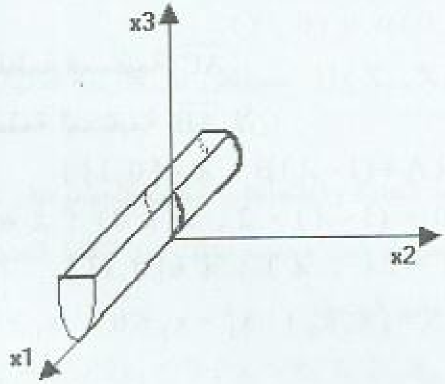
$S=\{X: x_2^2 < x_3 < a\ ,\ |x_1| < b\}\subset R^3$

$\mathrm{Int}(S)=S$

$C\ell(S)=\{X: x_2^2 \le x_3 \le a\ ,\ |x_1| \le b\}\subset R^3$

$\partial S=\{X: x_2^2=x_3\ ,\ |x_1|\le a\ ,\ x_3\le b\}\ \cup$

$\{X: x_2^2=x_3\ ,\ |x_1|=a\ ,\ x_3=b\}\subset R^3$



الشكل (18)

10)

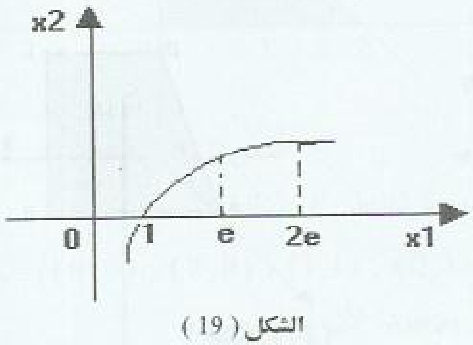
$S=\{X: 0\le x_2\le \ell n(x_1)\ ,\ e < x_1 < 2e\}\subset R^2$

$\mathrm{Int}(S)=\{X: 0 < x_2 < \ell n(x_1)\ ,\ e < x_1 < 2e\}$

$C\ell(S)=\{X: 0\le x_2\le \ell n(x_2)\ ,\ e < x_1 < 2e\}$

$\partial S=\{X: x_2=0\ ,\ \ell n(x_1)\ ,\ e\le x_1\le 2e\}\ \cup$

$\{X: 0\le x_2\le \ell n(x_1)\ ,\ x_1=e, 2e\}$



الشكل (19)

تمرين "9":

أ - أوجد التغليف المحدب لكل من المجموعات التالية:

$$S_1 = \{ -1 , +1 , 3 \} \subset R$$

$$S_2 = \{ (0,1) , (2,0) \} \subset R^2$$

$$S_3 = \{ X=(x_1 , x_2) : x_1^2 - x_2 = 0 , x_1 \geq 0 \} \subset R^2$$

$$S_4 = \{ (1,0,0) , (1,3,0) , (0,3,2) , (0,0,2) \} \subset R^3$$

$$S_5 = \{ (0,0) , (3,0) , (0,2) \} \subset R^2$$

الحـــل:

إن $H(S_1)$ هو القطعة المستقيمة $\overline{AC}$.

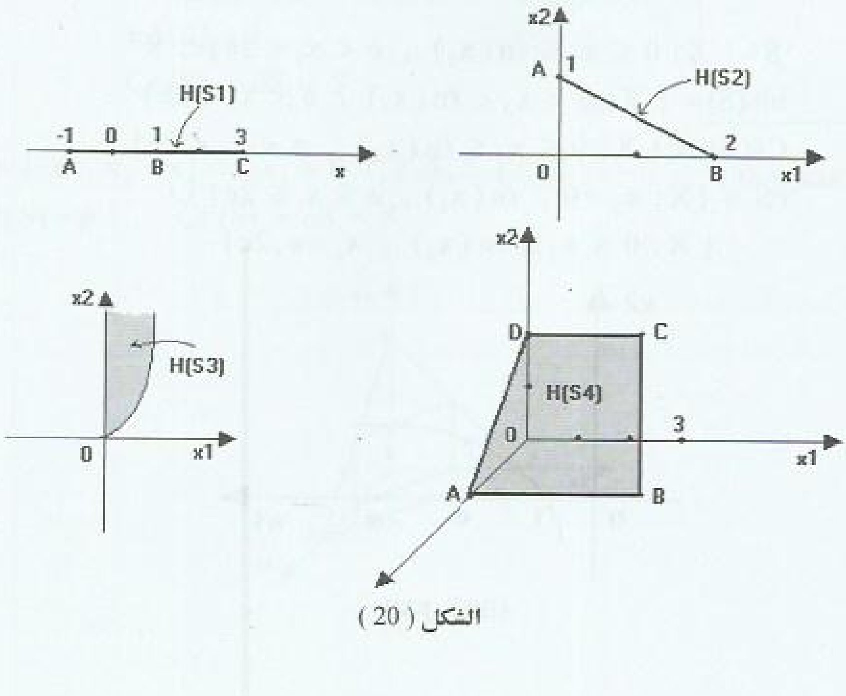
إن $H(S_2)$ هو القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ لأن:

$$H(S_2) = \{ \lambda A + (1-\lambda) B : \lambda \in [0,1] \}$$
$$= \{ (0 + (1-\lambda) \times 2 , \lambda + 0) : \lambda \in [0,1] \}$$
$$= \{ 2 - 2\lambda , \lambda) : \lambda \in [0,1] \}$$

إن $H(S_3)$ هو $H(S_3) = \{ X=(x , x_2) : x_1^2 - x_2 \leq 0 , x_1 \geq 0 \}$

أما $H(S_4)$ هو:

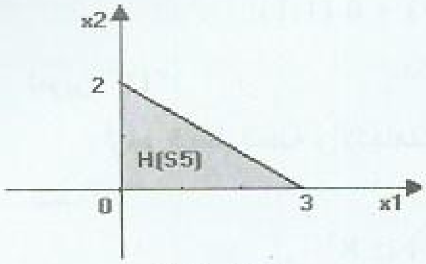
$H(S_4) = ABCD$ متوازي أضلاع



الشكل (20)

ب – أثبت أن S_5 تشكل سمبلكس من الدرجة الثانية في الفضاء R^2 .

الحـــل:



الشكل (21)

إن:

$$x_2 - x_1 = (3 , 0)$$
$$x_3 - x_1 = (0 , 2)$$

وهما شعاعان مستقلان خطياً لأنه لا يمكن التعبيرعن أحدهما بدلالة الآخر أي:

$$(3 , 0) \neq \alpha (0 , 2) \quad \forall \alpha \in R$$

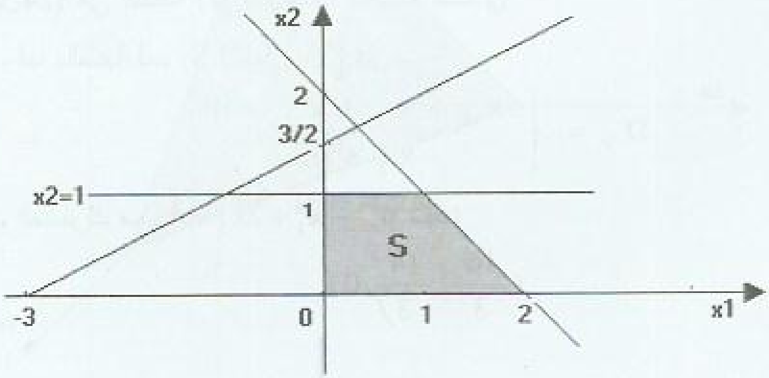
أي أن $H(X_1 , X_2 , X_3)$ سمبلكس من الدرجة الثانية.

تمرين "10":

عين جميع النقاط الحدية والاتجاهات الحدية للمجموعة S ثم اكتب النقطة $y=(1,1/2)^t$ على شكل تركيب محدب مؤلف من النقاط الحدية زائد تركيب غير سالب مؤلف من الاتجاهات الحدية:

$$S= \{X=(x_1 , x_2) : -x_1 +2x_2 \leq 3 , \ x_1 +x_2 \leq 2 , \ x_2 \leq 1 , \ (x_1 , x_2) \geq 0\}$$

الحـــل:



الشكل (22)

النقاط الحدية هي مجموعة النقاط E التالية:

$$E=\{(0,0) , (2,0) , (1,1) , (0,1)\}$$

الاتجاهات الحدية غير موجودة لأن S محدودة.

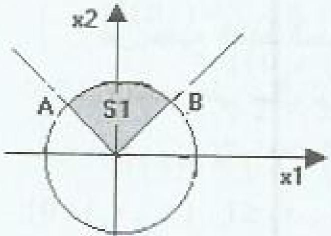
$$y=(1,1/2)=\lambda\ (2,0)+(1-\lambda)(0,1)+0\ (0,0)+0\ (1,1)$$
$$y=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}\ (0,1)+0\ (0,0)+0\ (1,1)$$

تمرين "11":

أوجد النقاط الحدية والاتجاهات الحدية لكل من المجموعات متعـددة السطوح التالية:

$$S_1=\{X=(x_1,x_2):x_2\geq|x_1|\ ,\ \|x\|^2\leq 1\}\subset R^2$$
$$S_2=\{X=(x_1,x_2):x_1+x_2\geq 2\ ,\ -x_1+x_2=4\ ,\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\}\subset R^2$$
$$S_2=\{X=(x_1,x_2,x_3):x_1+x_2+x_3\leq 10\ ,\ -x_1+2x_2=4\ ,$$
$$x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\ ,\ x_3\geq 0\}\subset R^3$$

الحل:



الشكل (23)

إن مجموعة النقاط الحدية للمجموعـة S_1 هي:{نقطة المبدأ (0,0) + جميـع نقـاط القـوس $E_1=\{\ AB$

ولا توجد اتجاهات حديـة لــ S1 لأنها مجموعة محدودة. مجموعة النقاط الحدية لــ S_2 (الشكل24) هي النقطة (0,4) وهناك اتجـاه حـدي واحد. أما بالنسبة لــ S_3 (الشكل 25) فإن:

$$D_2=\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ x_3=0\end{cases}$$

بالحل المشترك مع $p:\ -x_1+2x_2=4$ نجد:

$$(\frac{16}{3},\frac{14}{3},0)$$

كذلك:

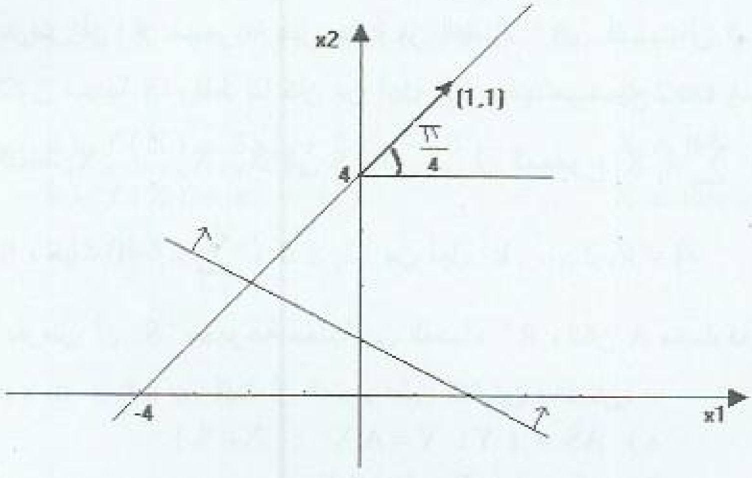
$$D_1=\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ x_1=0\end{cases}$$

بالحل المشترك مع P نجد (0,2,8). تقاطع P مع المحور x_2 هو (0,2,0).

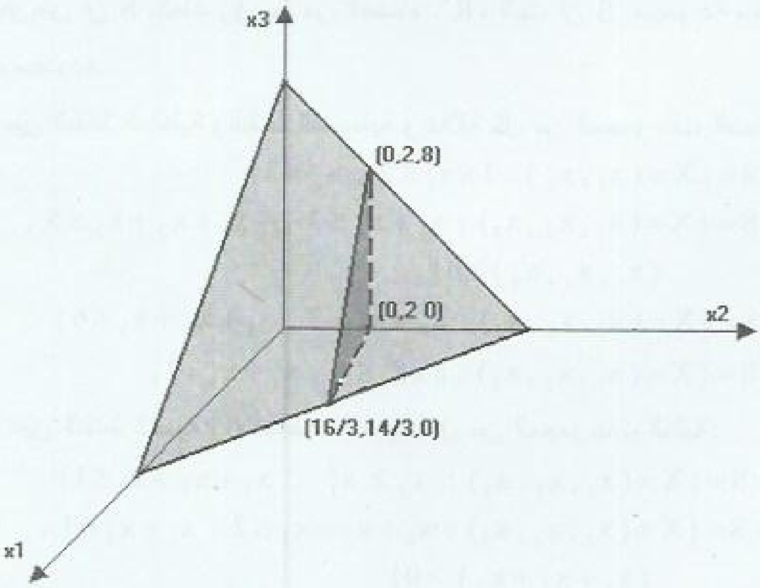
وبالتالي فإن مجموعة النقاط الحدية لــ S_3 هي:

$$E_3 = \{ (\frac{16}{3}, \frac{14}{3}, 0), (0,2,0), (0,2,8) \}$$

أما الاتجاهات الحدية فهي غير موجودة.



الشكل (24)



الشكل (25)

لمعرفة المزيد حول مفاهيم التحليل المحدب، يمكن الإطـــلاع علـــى المراجـــع المختصة وأذكر على سبيل المثال المرجع رقم 2 والمرجع رقم 3 من قائمة المراجـــع الأجنبية.

تمارين "1"

1 – بفرض أن S مجموعة غير خالية من الفضاء R^n. أثبت أن المجموعة S تكون محدبة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد صحيح $k \geq 2$ فإن انتماء النقاط $X_1, X_2, \ldots, X_k$ إلى S يؤدي إلى أن المجموع $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j$ ينتمي إلى S، حيث $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ و $\lambda_j \geq 0$ من أجل $j = 1, 2, \ldots, k$.

2 – بفرض أن S مجموعة محدبة من الفضاء R^n ولتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ و $\alpha \in R$. أثبت أن المجموعتين التاليتين محدبتان:

a) $AS = \{ Y : Y = AX \ ; \ X \in S \}$

b) $\alpha S = \{ \alpha X : X \in S \}$

3 – بفرض أن S متعدد رؤوس من الفضاء R^n، أثبت أن S مجموعة مغلقة ومحدبة ومحدودة.

4 – عيّن النقاط الداخلية والنقاط المحيطية وغلاقة كل من المجموعات المحدبة الآتية:

a) $S = \{ X = (x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq 2 \ , \ x_2 = 3 \}$

b) $S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 \leq 3 \ , \ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \ , \ (x_1, x_2, x_3) \geq 0 \}$

c) $S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 3 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \}$

d) $S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : \| x \|^2 \leq 4 \ , \ x_1 + x_3 = 1 \}$

5 – عيّن النقاط الحدية والاتجاهات الحدية لكل من المجموعات التالية:

a) $S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : \ x_2 \geq x_1^2 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \}$

b) $S = \{ X = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \ , \ x_1 + x_2 = 1 \ , \ (x_1 + x_2 + x_3) \geq 0 \}$

6 – أوجد التغليف المحدب للمجموعة المؤلفة من النقاط التالية:

$x_3 = (0, 2) \quad , \quad x_2 = (3, 0) \quad , \quad x_1 = (0, 0)$

ثم أثبت أنها تشكل سمبلكس من الدرجة الثانية في الفضاء R^2.

7 – بيّن فيما إذا كانت المجموعات التالية هي مجموعات محدبة أم لا.

a) $S=\{X=(x_1,x_2) : |2x_1-3| \le x_2\}$

b) $S=\{X=(x_1,x_2,x_3) : \|X\|^2 = 2x_3 \ , \ x_3 \ge 0\}$

c) $S=\{X=(x_1,x_2) : 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 4\}$

d) $S=\{X=(x_1,x_2) : \|X\|^2 \le 2x_1 \ , \ 2x_1+x_2 \ge 2\}$

8 – ادرس تحدب كل من التوابع التالية:

a) $f(X) = 3x_1^2 + 5x_2 - 10 \quad ; \quad X \in R^2$

b) $f(X) = x_1^2 + x_2^2 \quad ; \quad X \in R^2$

c) $f(X) = x^3 \quad ; \quad X \in R$

دليل المصطلحات العلمية

انكليزي – عربي

A

Absolute	مطلق
Absolute (global) Maximum	القيمة العظمى (الكلية) المطلقة
Activity	نشاط
Addition of Matrices	جمع المصفوفات
Addition of Vectors	جمع الأشعة
Adjoin	مرافق
Admissible Solution	حل مقبول
Algorithm	خوارزمية – طريقة الحل
Allocation	توزيع ، تخصيص
Alternative	بديل
Arrow Diagram	مخطط شبكي
Artificial Constraint	قيد اصطناعي (مصطنع)
Artificial Variable	متحول اصطناعي (متغير اصطناعي)
Assignment Problem	مسألة التعيين أو التخصيص
Augmentation of a Matrix	توسيع مصفوفة
Augmented Matrix	مصفوفة موسعة

B

Basic	أساسي
Basic Solution	حل أساسي
Basic Variable	متغير (متحول) أساسي
Basic Matrix	مصفوفة قاعدة
Balancing Transportation Model	موازنة نموذج النقل

Big – M Method	طريقة الأمثال الكبيرة
Binding Constraint	قيد يتحقق على شكل مساواة
Bordered Hessian Matrix	مصفوفة هيسيان المحدودة
Bounded Variable	متغير (متحول) محدد أو مقيد
Bounding	تحديد
Bounding of Set	محيط مجموعة
Boundary Point	نقطة محيطية
Branch and Bound Method	طريقة التفريع والتحديد

C

Canonical Form	صيغة أو شكل نظامي أو قانوني
Characteristic Equation	المعادلة المميزة
Classical Optimization	طريقة إيجاد القيمة المثلى التقليدية
Closed Set	مجموعة مغلقة
Closure of a Set	غلاقة مجموعة
Cofactor	عامل مرافق
Column Vector	شعاع عمود
Commutable	تبادلي
Compact Set	مجموعة متراصة
Complex	عقدي
Constraint	قيد
Constrained Optimization	طرق إيجاد القيمة المثلى المقيدة
Continuous Function	تابع مستمر
Convergence	تقارب
Concave Function	تابع مقعر
Convex	محدب
Convex Combination	تركيب محدب

Convex Function	تابع محدب
Convex set	مجموعة محدبة
Convex Hull	تغليف محدب
Corollary	نتيجة
Cost	تكلفة أو كلفة
CPM (Critical Path Method)	أسلوب المسار الحرج
Critical Path	المسار الحرج
Cutting Method	طريقة القطع أو البتر
Cycling (or Circling)	دوران

D

Decision Variable	متغيرات القرار
Degenerate Basic Solution	حل أساسي متردٍ (سيئ)
Determinant of Matrix	معين مصفوفة
Diagonal Matrix	مصفوفة قطرية
Dimension of Vector Space	بعد فضاء شعاعي
Direct Search Methods	طرق البحث المباشر
Dual	مرافق (ثنيوي)
Dual Problem	مسألة مرافقة
Dual Theorem	نظرية الترافق
Dual Simplex Method	طريقة المرافق للسمبلكس
Dual Solution	الحل المرافق
Dummy Activity	النشاط الوهمي
Dynamic Programming	البرمجة الديناميكية

E

Eigen Value	قيمة خاصة
Eigen Vector	شعاع خاص

Elementary Operations	التحويلات الأولية
Economic Interpretation	التعليل (التفسير) الاقتصادي
Entering Variable	المتغير الداخل
Equality	مساواة
Equivalent Matrices	المصفوفات المتكافئة
Expected Value	قيمة متوقعة
Extreme Direction of a Set	اتجاه حدي لمجموعة
Extreme Point	نقطة حدية

F

Feasible Region	منطقة الإمكانيات
Feasible Solution	حل ممكن
Feasibility Condition	شرط الإمكانية
Function	تابع

G

Game Theory	نظرية الألعاب
Geometric Programming	البرمجة الهندسية
Global Maximum	القيمة العظمى الكلية
Gradiant	متدرج
Graphical Solution	الحل البياني
Graphical Vector	شعاع التدرج
Greatest Lower Bound	الحد الأدنى الأعظمي

H

Half - Line	نصف مستقيم
Half - Space	نصف فضاء
Hyperplane	مستوي (في فضاء بعده أكثر من 3)

I

Identity Matrix	مصفوفة واحدية (أحادية)
Independence	استقلال
Infinimum	حد أدنى أعظمي
Inequality	عدم مساواة (متراجحة)
Initial Feasible Point	نقطة ممكنة ابتدائية
Inflection Point	نقطة انعطاف
Integer Programming	برمجة بقيم صحيحة
Interior of a Set	داخلية مجموعة
Interior Point	نقطة داخلية
Intersection	تقاطع
Inverse Matrix	مقلوب مصفوفة
Innovative Matrix	مصفوفة ملتفة
Irregular Matrix	مصفوفة شاذة

L

Least Upper Bound	حد أعلى أصغري
Least Cost Method	طريقة التكلفة الأقل
Leaving Variable	المتغير الخارج
Lemma	تمهيدية ، نتيجة بديهية
Linear Programming	البرمجة الخطية
Linear Combination	تركيب خطي
Linear Dependence	ارتباط خطي
Linear Equation	معادلة خطية
Linear Independence	استقلال خطي
Local Maximum	القيمة العظمة الموضعية (المحلية)
Lower Value of Game	القيمة الصغرى للعبة

M

Mathematical Method	النموذج الرياضي
Mathematical Programming	البرمجة الرياضية
Matrix	مصفوفة
Maximum Value	قيمة أعظمية
Method of Penalty (M - Technique)	تقنية M (طريقة الغرامة)
Minimum Value	القيمة الصغرى (قيمة أصغرية)
Minimax Criterion	معيار تصغير أكبر خسارة
Minimization	تصغير
Mixed Strategy	استراتيجية مختلطة
Model	نموذج

N

Negative Definite Matrix	مصفوفة محددة سالبة
Negative Semi-definite Matrix	مصفوفة شبه محددة سالبة
Neighborhood	جوار
Non-basic Variable	متحول غير أساسي (غير قاعدي)
Non-Linear Problem	مسألة غير خطية
Non-Negative Variable	متحول غير سالب
Non-Negativity Restrictions	شروط عدم السلبية
Non-Singular Matrix	مصفوفة غير شاذة
Non-Critical Activity	فعالية غير حرجة
Norm of Vector	نظيم شعاع
Normal of Hyperplane	ناظم مستوي زائدي
Normal Form of a Matrix	الصيغة الطبيعية لمصفوفة
Null Matrix	مصفوفة صفرية
NullPotente Matrix	مصفوفة عديمة الفعالية

O

Objective Function	تابع أو دالة الهدف
Open Set	مجموعة مفتوحة
Operations Research	بحوث العمليات
Optimal Feasible Solution	حل ممكن أمثل
Optimality Conditions	شروط مثلى (الأمثلية)
Opportunity Cost	تكلفة الفرصة
Optimum	الأمثل أو الأفضل
Order	مرتبة
Orthogonal Vectors	أشعة متعامدة

P

Parameters	معاملات أو ثوابت
Partial Derivative	المشتق الجزئي
Partitioned Matrices	المصفوفات المجزأة
Payoff Matrix	مصفوفة المدفوعات
Periodical	دوري
Phase	مرحلة
Pivot element	العنصر المحوري (عنصر الدوران)
Pivoting	عملية تركيز مصفوفة أو اختزالها (تدوير مصفوفة)
Pivot Equation	المعادلة المحورية (معادلة التدوير)
Positive Definite Matrix	مصفوفة محددة موجبة
Positive Semi-definite Matrix	مصفوفة شبه محددة موجبة
Polytope	متعدد رؤوس
Polyhedral Set	مجموعة متعددة السطوح
Primal	أولي
Postoptimality Analysis	تحليل ما بعد الأمثل

Principle Of Optimality	مبدأ الأمثلية
Probability	احتمال
Project	مشروع
Programming Problem	مسألة برمجة
Pure Strategy	استراتيجية صرفة

Q

Quadratic Form	تعبير (أو صيغة) تربيعي
Quadratic Programming	برمجة تربيعية

R

Rank Of A Matrix	رتبة مصفوفة
Reduced Tableau	جدول مختزل
Recursive Equation	معادلة تتابعية
Redundant Constraint	قيد زائد (لامعنى له)
Reduction Of a Matrix	اختزال مصفوفة
Relative (Local) Maximum	القيمة العظمى النسبية (المحلية)
Row Operations (Gauss-Jordan Method)	عمليات السطر (طريقة غوص – جوردان)

S

Saddle Point	نقطة استقرار
Sample Space	فراغ العينة
Scalar Matrix	مصفوفة سلمية
Scalar Product	جداء سلمي
Separating Hyperplane	مستوي فاصل زائدي
Search Methods	طرائق البحث
Secondary Constraint	قيود ثانوية
Sequence	متتالية
Set	مجموعة

Similar Matrices	المصفوفات المتشابهة
Simplex Method	الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس)
Singular Values of a Matrix	القيم الشاذة لمصفوفة
Slake Variable	مجهول (متغير) الفرق
Solution Space	فراغ الحل
Strategic Game	لعبة استراتيجية
Stage (In Dynamic Programming)	مرحلة
Standard Form	صيغة (أو شكل) معياري
Starting Basic Solution	حل أساسي ابتدائي
Stepping Stone Solution	طريقة المسارات المغلقة أو التدرج
Strategy	استراتيجية
Sufficient Conditions	الشروط الكافية
Surplus Variable	متغير فائض أو فروق
Symmetric Matrix	مصفوفة متناظرة

T

Tableau	جدول
Theorem	نظرية
Transportation Problem	مسألة النقل
Transpose of Matrix	منقول مصفوفة
Two Phase Zero Sum Game	لعبة شخصين بمجموع صفري
Two Phase Method	طريقة الحل على مرحلتين

U

Unbounded Solution	حل غير محدود
Union	اجتماع
Unrestricted Variable	متغير (متحول) غير مقيد
Unstable Game	لعبة غير مستقرة

V

Value of Game	قيمة اللعبة
Variable	متغير (متحول)
Variance	تباين
Vector	شعاع أو متجهة
Vector Function	تابع شعاعي
Vector Space	فضاء شعاعي أو خطي
Vertex	رأس أو ذروة

Z

Zero Matrix	مصفوفة صفرية
Zero Vector	شعاع صفري

المراجع العلمية

أ – المراجع العربية

١. التنهيج الرياضي – منشورات جامعة حلب – حلب 1975 – الدكتور خالد ماغوط.

٢. بحوث العمليات– منشورات جامعة حلب – حلب 1982 – الدكتور عادل رجب.

٣. البرمجة الخطية – منشورات جامعة حلب – حلب 1986 – الدكتور خالد ماغوط.

٤. مقدمة في بحوث العمليات (أساليب وتطبيقات) – منشورات الجامعة الأردنية – عمان 1989 – الدكتور محمد الطراونة والدكتور سليمان عبيدات.

٥. بحوث العمليات المبرمجة – منشورات دار الأمل للنشر والتوزيع – الأردن 1991 – الدكتور عوض منصور ، الدكتور عبد ذياب العجيلي ، الدكتور طارق الحاج، الأستاذ عزام صبري .

٦. بحوث العمليات (1)– منشورات جامعة حلب – حلب 1992 – الدكتور خالد ماغوط والدكتور محمد شعبان.

٧. المدخل إلى بحوث العمليات – منشورات جامعة حلب – حلب 1992 – الدكتور أحمد رفيق قاسم.

٨. البرمجة الخطية – منشورات جامعة حلب – حلب 1994 – الدكتور واجب غريبي والدكتور خالد ماغوط.

٩. بحوث العمليات – منشورات دار وائل للنشر والتوزيع – عمان 1999 – الدكتور محمد عبد العال النعيمي، الدكتور رفاه شهاب الحمداني، والدكتور أحمد شهاب الحمداني.

١٠. بحوث العمليات (1) – منشورات جامعة دمشق – دمشق 2001 – الدكتور وائل خنسة والدكتورة عُلى أبو عمشة.

١١. بحوث العمليات (1) – منشورات جامعة حلب – حلب 2005 – الدكتور محمد دباس الحميد.

١٢. مقدمة في بحوث العمليات – منشورات دار وائل للنشر والتوزيع – عمان – الطبعة الرابعة 2004 – فتحي خليل حمدان ورشيق رفيق مرعي.

ب – المراجع الأجنبية

1. Taha , H. , Operations Research , Person Prentice Hall, 8th edition 2007.
2. Luenberger, D., Linear and Nonlinear Programming, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
3. Fourer, R., D., Gay, and B. Kernighan, AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming, 2ed edition., Brooks/Cole-Thompson, Pacific Grove, CA, 2003.
4. Vanderbei, R., Linear Programming: Foundation and Optimization, 2nd edition, Kluwer Academic Publishers, Boston MA, 2001.
5. Radin, R., Optimization in Operations Research, Person Prentice Hall, NJ, 1998.
6. Bertsekas, D., Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.
7. Maghaut, kh., Modified Primal – Dual Simplex Algorithm, Proceeding of the Xth I. K. M. Weimar, DDR, 1984 (vol. 6).
8. Michel Minoux, Programmation mathematique, Dunod, Imprimerie Gauthier – Villars , Paris , 1983.
9. Denardo, E., Dynamic Programming Theory and Applications, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1982.
10. Rockafellar, R., T. , Convex Analysis , Princeton, University Press , New Jersey , 1970.
11. Hadley, G., Linear Programming , Addison – Wesley, Reading mass., 1962.

تم تدقيق الكتاب لغوياً من قبل:

الدكتور

عيسى العاكوب

Aleppo University Publications
Faculty of Information Technology

Mathematical Programming

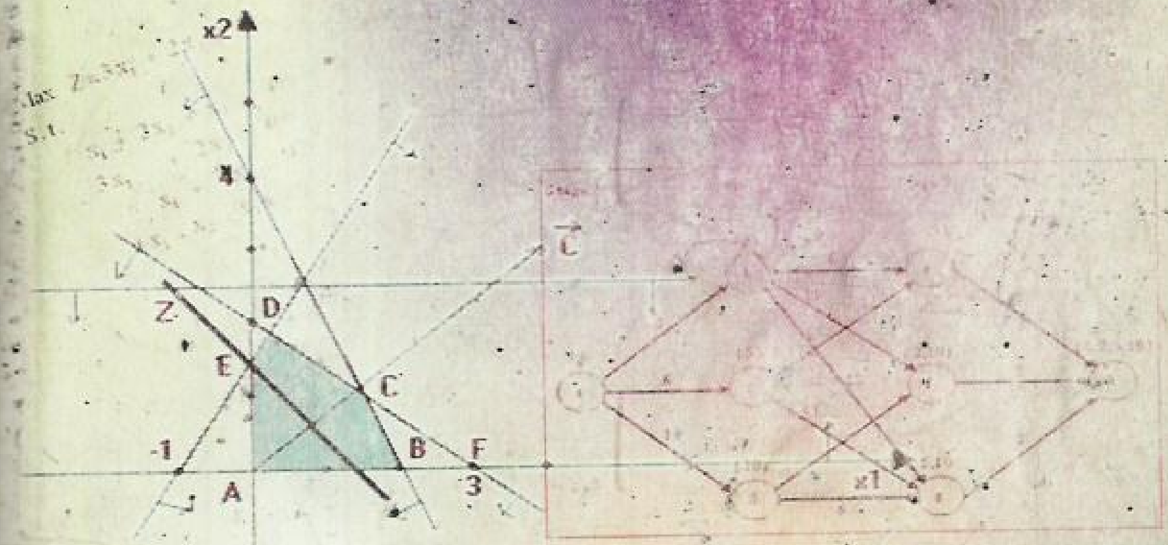
By

Dr. M. D. AL-HAMID
Prof. In Faculty of IT

Academic Year
2009 - 2010

Aleppo University Publications
Faculty of Information Technology

Mathematical Programming



By

Dr. M. D. AL-HAMID
Prof. In Faculty of IT

Academic Year
2010-2011

سعر المبيع للطلاب
٢٧٥ ل.س