البوابات والدارات المنطقية:

مقدمة:

الدراسات المنطقية (تسمى أيضاً الشبكات المنطقية) هي هياكل تبنى من بعض الدراسات التي تسمى بوابات منطقية، كل دارة منطقية يمكن النظر إليها كآلة (L) تحتوي على واحدة أو أكثر من أجهزة الإدخال وواحدة فقط من أجهزة الإخراج.

إن كل جهاز إدخال (L) يرسل إشارة معينة يقال لها بت (bit) رقم ثنائي إما (1) أو (0) إلى الدارة (L) تعالج L مجموعة البتات لتعطي في النهاية بت الخرج.

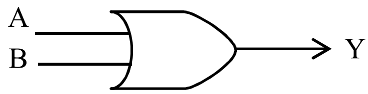
يستخدم الجبر البولياني نمذجة دارات العناصر الإلكترونية لأننا نستطيع اعتبار أي دخل أو خرج لمثل هذه العناصر ينتمي إلى المجموعة {0,1} ويتم تصميم الدارات المنطقية الرقمية باستخدام قواعد الجبر البولياني التي تطبق على متتابعات من n بت أي (n-bit) لكل جهاز إدخال والآلة السابقة الذكر (L) تعمل على معالجة المتتابعة الداخلة بتاً بتاً (أي معالجة بت واحد في المرة) لنحصل في النهاية على متتابعة من n بت في الخرج.

البوابات المنطقية:

يوجد ثلاث بوابات منطقية أساسية نقوم بوصفها فيما يلي، حيث نصطلح على أن الخطوط الداخلة إلى رمز البوابة من جهة اليسار هي خطوط الإدخال والخط المنفرد من اليمين هو خط الخرج سبق أن ذكرنا أن التوابع البوليانية يمكن التعبير عنها بدلالة العمليات NOT, OR, AND وبالتالي من السهل تحقيق التوابع البوليانية بهذا النوع من البوابات.

١ – بوابة (أو) OR:

تمثل هذه البوابة بالشكل التالي:

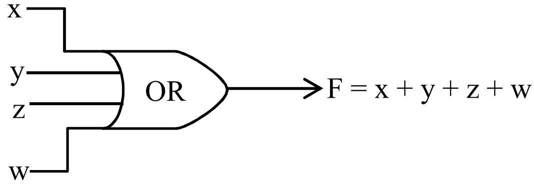


نلاحظ أن الشكل السابق لمدخلين y,x ومخرج F حيث الجمع يعرف بجدول الصواب التالي:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

بذلك يكون الخرج $F = 0$ فقط عندما يكون المدخلان y,x مساويان للصفر.

مع الإشارة أن هذه البوابة يمكن أن يكون لها أكثر من مدخلين كما في الشكل التالي:



الشكل السابق يمثل بوابة لها 4 مداخل ومخرج واحد حيث $F = 0$ إذا وفقط إذا كانت جميع المدخلات مساوية للصفر.

مثال:

نفرض أن البيانات المدخلة للبوابة (أو) هي المتعددة المكونة من ثمانية من البتات 8-bit التالية:

$x = 10000101 \qquad y = 10100001$

$z = 00100100 \qquad w = 10010101$

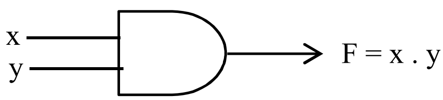
الحل:

البوابة (أو) تعطي ناتجاً (0) عندما تكون كل المدخلات أصفار وهذا يحدث في الأماكن الثاني والخامس والسابع وبالتالي تكون متعددة الخرج:

$$F = 10110101$$

٢ – بوابة (و) AND:

تمثل هذه البوابة بالشكال التالي:

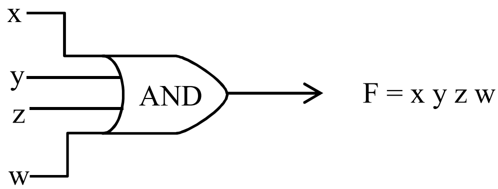


الشكل السابع بمدخلين y,x ومخرج F حيث الضرب يعرف بجدول الصواب التالي:

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

يكون الخرج يساوي (1) فقط إذا كانت $x = 1$ و $y = 1$ وغير ذلك فإن $F = 0$.

هذه البوابة يمكن أن يكون لها أكثر من مدخلين كما في الشكل التالي:



الشكل السابق يصور بوابة لها أربعة مدخلات w,z,y,x ومخرج F = xyzw حيث يكون F = 1 إذا وفقط إذا كانت المدخلات الأربعة مساوية 1.

مثال:

نأخذ البيانات المدخلة للبوابة (و) وهي متعددة مكونة من ثمانية من البتات 8-bit.

$x = 1110011 \qquad y = 01111011$

$z = 01110011 \qquad w = 11101110$

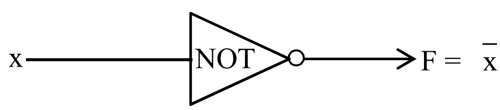
الحل:

البوابة (و) تنتج (1) إذا وفقط إذا كانت جميع المدخلات مساوية (1) وهذا يحدث فقط في الأماكن الثاني والثالث والسابع أي متعددة الخرج:

$F = 01100010$

٣ – بوابة النفي NOT:

تمثل هذه البوابة بالشكل التالي:



لها مدخل واحد x ومخرج $\bar{x}$ وتعرف بجدول الصواب التالي:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

مثال:

لنفرض أن بوابة النفي مطلوب منها العمل على المتعددات الثلاثة التالية:

$x_3 = 101100111000$ $x_2 = 10001111$ $x_1 = 110001$

بوابة النفي تغير كل (0) إلى (1) وكل (1) إلى (0) نحصل على:

$\overline{x_3} = 010011000111$ $\overline{x_2} = 01110000$ $\overline{x_1} = 001110$

وهي المخرجات الثلاثة المناظرة.

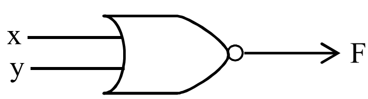
٤ – بوابة (نفي و) N AND:

نوضحها بالشكل التالي:

وهي تكافئ بوابة (و) يتلوها بوابة ليس.

٥ – بوابة (نفي أو) NOR:

نوضحها بالشكل التالي:



وهي تكافئ بوابة (أو) يتلوها بوابة ليس.

جدول الصواب للبوابتين NAND و NOR:

x	y	NAND	NOR
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

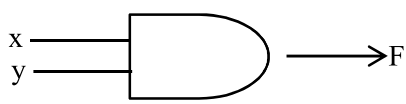
ملاحظات هامة:

١ – يمكن أن يكون للبوابتين NAND و NOR اثنان أو أكثر من المدخلات تماماً مثل بوابتي (و) و (أو) المناظرتين.

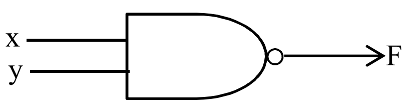
٢ – مخرج البوابة (نفي و) يكون صفراً إذا وفقط إذا كانت كل المدخلات تساوي (1).

مخرج البوابة (نفي أو) يساوي (1) إذا وفقط إذا كانت كل المدخلات تساوي الصفر.

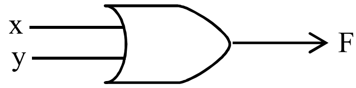
٣ – عند تمثيل بوابتي (نفي و)، (نفي أو) يكون الشكل يختلف عن تمثيل (و) و (أو) فقط بالدائرة قبل سهم الخرج.



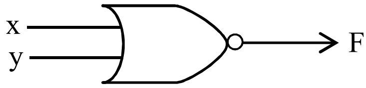
(و)



(نفي و)



(أو)



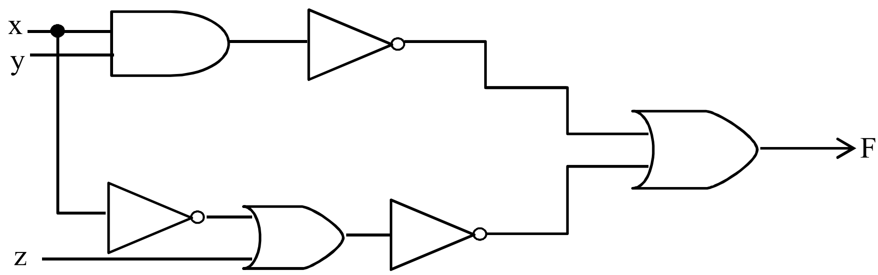
نفي (أو)

٤ – بعض النصوص تستخدم الدائرة الصغيرة للإشارة إلى المتمم ونضعها قبل البوابة.

الدارات المنطقية:

الدارة المنطقية هي هيكل محكم التكوين ومركباته الأولية هي البوابات (أو)، (و)، (ليس).

نوضح من خلال الشكل التالي دارة منطقية:



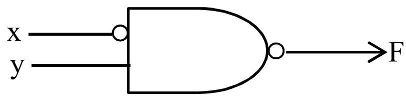
مدخلاتها z,y,x ومخرجها F النقطة (•) تشير إلى مكان يتفرع منه خط الإدخال بحيث يرسل إشارة البت في أكثر من اتجاه بالعمل من اليسار إلى اليمين يعبر عن F بدلالة المدخلات z,y,x كالآتي:

قيمة المخرج من بوابة (و) هو x.y وهذا يتم نفيه بعد ذلك ليعطي $\left(\overline{xy}\right)$ أما المخرج من البوابة (أو) السفلية فهو $\bar{x}+z$ حيث ينفى بعد ذلك ليعطي $\left(\overline{\bar{x}+z}\right)$ وأخيراً مخرج البوابة (أو) التي من اليمين لها مدخلان $\left(\overline{xy}\right)$ و $\left(\overline{\bar{x}+z}\right)$ نحصل على:

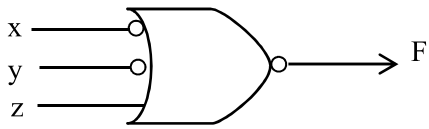
$$F=\left(\overline{xy}\right)+\left(\overline{\bar{x}+z}\right)$$

مثال:

اكتب التعبير البولياني المناظر للدارتين المنطقيتين الموضحتين في الشكلين الآتيين:



الشكل (١)



الشكل (٢)

الحل:

بالنسبة للشكل (١) التعبير البولياني هو:

$$F = \left(\overline{\overline{x}B}\right)$$

بالنسبة للشكل (٢) التعبير البولياني هو:

$$F = \left(\overline{\overline{x} + \overline{y} + z}\right)$$

دارة (و – أو):

الدارة المنطقية L المناظرة لمجموع حواصل ضرب في الجبر البولياني تسمى دارة (و – أو).

مثل هذه الدارة L لها العديد من المدخلات حيث:

١ – بعض المدخلات أو متمماتها تغذي كل بوابة (و).

٢ – مخرجات كل بوابات (و) تغذي بوابة وحيدة (أو).

٣ – مخرج بوابة (أو) هو مخرج الدارة L.

الدارات المنطقية كجبر بولياني:

نلاحظ أن جدول الصواب للبوابات (أو) ، (و)، (ليس) تتطابق على الترتيب مع جداول الصواب للتقارير $p \vee q$ (الفصل أو) $p \wedge q$ (الفصل و) $\sim p$ (نفي p).

الفارق الوحيد هنا هو استخدام 1 , 0 بدلاً من F, T لهذا فإن الدارة المنطقية تحقق نفس القوانين التي تحققها التقارير، وبالتالي فهي تكون جبراً بوليانياً ونقدم ما سبق من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

الدارة المنطقية تكون جبراً بوليانياً.

وعلى هذا فإن كل المصطلحات المستخدمة في الجبر البولياني يمكن استخدامها في الدارات المنطقية.

العمليات المنطقية – البوابات المنطقية الرقمية:

وجدنا أنه عندما نضع العمليتان الثنائيتان OR, AND بين متحولين y,x يتشكل لدينا تابعان بوليانيان xy و x + y والسؤال المطروح هنا من أجل n متحول ثنائي ما هو عدد التوابع البوليانية المختلفة التي يمكن أن نحصل عليها. نجد الجواب الثاني من أجل n متحول ثنائي يوجد 2^{2n} تابع بولياني مختلف وعليه فمن أجل المتحولين x و y أي $(n = 2)$ نحصل على $2^{2\times2} = 16$ تابع بولياني هذا يعني أن التابعين OR, AND هما اثنان من أصل 16 تابع.

نعرض في الجدول التالي قيم الحقيقة لـ 16 تابع بولياني من F_0 حتى F_{15} التي يمكن تشكيلها من المتحولين y,x.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

مع الإشارة إلى أنه يمكن التعبير جبرياً عن الـ (16) تابع بواسطة التوابع البوليانية كما يلي:

التابع البولياني	التعبير الجبري
F_0	0
F_1	xy
F_2	$x\overline{y}$
F_3	x
F_4	$\overline{x}y$
F_5	y
F_6	$x\overline{y}+\overline{x}y$
F_7	$x+y$
F_8	$(\overline{x+y})$
F_9	$xy+\overline{x}\,\overline{y}$
F_{10}	$\overline{y}$
F_{11}	$x+\overline{y}$
F_{12}	$\overline{x}$
F_{13}	$\overline{x}+y$
F_{14}	$\overline{xy}$
F_{15}	1

يمكن تقسيم هذه التوابع إلى ثلاث فئات:

١ – التوابع الثابتة:

$$F_{15} = 1 \qquad F_0 = 0$$

٢ – التوابع الأحادية:

$$F_{10} \rightarrow \overline{y}$$
$$F_{12} \rightarrow \overline{x}$$
$$F_3 \rightarrow x$$
$$F_5 \rightarrow y$$

٣ – توابع بعمليات ثنائية: يوجد 10 توابع بعمليات ثنائية مثل:

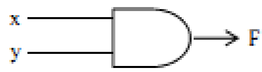
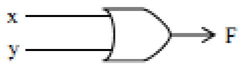
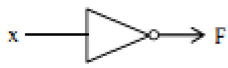
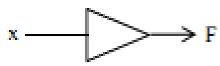
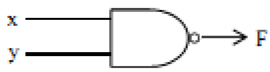
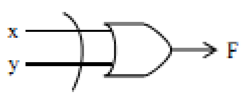
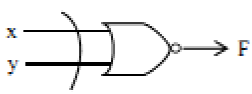
XoR, NoR, NAND, OR, AND

البوابات المنطقية الرقمية:

يستخدم الجبر البولياني نمذجة دارات العناصر الإلكترونية حيث يمكن اعتبار أي دخل أو خرد لمثل هذه العناصر ينتمي إلى المجموعة {0,1} يتم تعميم الدارات الرقمية باستخدام قواعد الجبر البولياني وذلك لأننا نستطيع التعبير عن التوابع البوليانية بدلالة العمليات الثابتة NOT, OR, AND.

طبعاً من السهل تحقيق التوابع البوليانية لهذا النوع من البوابات، ولكن يفضل بناء بوابات أخرى (مشتقة) من أجل العمليات المنطقية الأخرى.

ذكرنا أنه يوجد (10) توابع بعمليات ثنائية نشير هنا إلى أن ثمانية فقط من هذه التوابع مهيأة لتكون بوابات منطقية نوضحها بالجدول التالي:

الاسم	الرسم	التابع	جدول الحقيقة
AND		$F = x \,.\, y$	x y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		$F = x + y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NOT		$F = \bar{x}$	x F 0 1 1 0
Buffer		$F = x$	x F 0 0 1 1
NAND		$F = (\overline{xy})$	x y xy F 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0
NOR		$F = (\overline{x + y})$	x y x+y F 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0
XOR		$F = x\bar{y} + \bar{x}y$ $= x \oplus y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		$F = xy + \bar{x}\,\bar{y}$ $= (\overline{x \oplus y})$	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

تمارين محلولة

١ – أوجد قيمة $1\ .\ 0\ \left(\overline{0+1}\right)$

الحل:

$$1\ .\ 0 + \left(\overline{0+1}\right) = 1\ .\ 0 + \bar{1} = 0 + 0 = 0$$

٢ – حول المساواة التالية إلى تكافؤ منطقي:

$$1\ .\ 0 + \left(\overline{1+0}\right) = 0$$

الحل:

$$(T \wedge F) \vee \left(\overline{T \vee F}\right) \equiv F$$

٣ – حول التكافؤ المنطقي التالي إلى مساواة:

$$(T \wedge T) \vee \sim F \equiv T$$

الحل:

$$(1\ .\ 1) + 0 = 1$$

٤ – من جدول القيم أوجد قيم التابع البولياني المعطى بالعبارة:

$$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$$

الحل:

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

٥ – أثبت من خلال الجدول صحة قانون التوزيع:

$$x(y+z) = xy + xz$$

الحل:

x	y	z	y + z	xy	xz	x(y+z)	xy + xz
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

من مطابقة العمودين الأخيرين تنتج المساواة.

٦ – حول قانون التوزيع التالي إلى تكافؤ منطقي:

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

الحل:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

٧ – أثبت صحة قانون الامتصاص:

$$x(x + y) = x$$

الحل:

x	y	x + y	x (x + y)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

بمقارنة العمودين الأول والأخير تنتج المساواة.

٨ – أوجد مرافق العبارات التالية:

1) $x\,(y + 0)$

2) $\overline{x}\ .\ 1 + (\overline{y}\ + z)$

الحل:

١ – $x\ (y + 0)$ نبدل عملية (.) بعملية (+) والعكس عملية (+) بعملية (.) أيضاً نبدل (0) بـ ($\overline{0}$) أب بـ (1) نحصل على:

مرافق $x(y + 0)$ هو $x + (y\ .\ 1)$.

٢ – بنفس الطريقة نجد:

مرافق $\overline{x}.1 + (\overline{y} + z)$ هو $(\overline{x} + 0).(\overline{y}.z)$ التي يمكن كتابتها $(\overline{x} + 0)(\overline{y}z)$.

٩ – اوجد متمم التابع (المرافق):

$$F(x,y,z) = x(\overline{y}\,\overline{z}\ + yz)$$

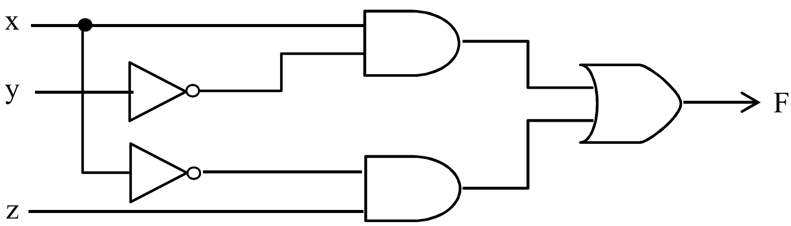
الحل:

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \left[\overline{x(\overline{y}\,\overline{z} + yz)}\right] = \overline{x} + (\overline{\overline{y}\,\overline{z} + yz})\\ &= \overline{x} + (\overline{\overline{y}\,\overline{z}})(\overline{yz}) = \overline{x} + (y + z)(\overline{y} + \overline{z})\\ &= \overline{x} + y\overline{z} + \overline{y}z\end{aligned}$$

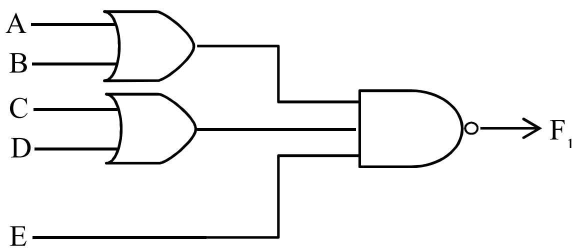
١٠ – حقق التابع التالي باستخدام البوابات الأساسية NOT, OR, AND

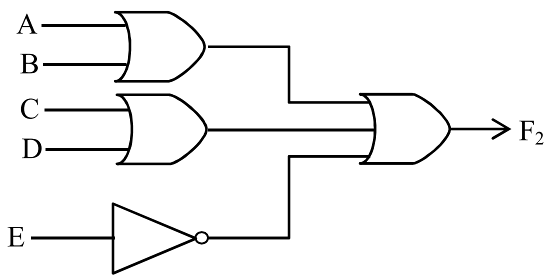
$$F = x\,\overline{y}\ +\ \overline{x}\,z$$

الحل:



١١ – أوجد التابع البولياني لكل من F_1، F_2 هل يوجد علاقة بينهما:





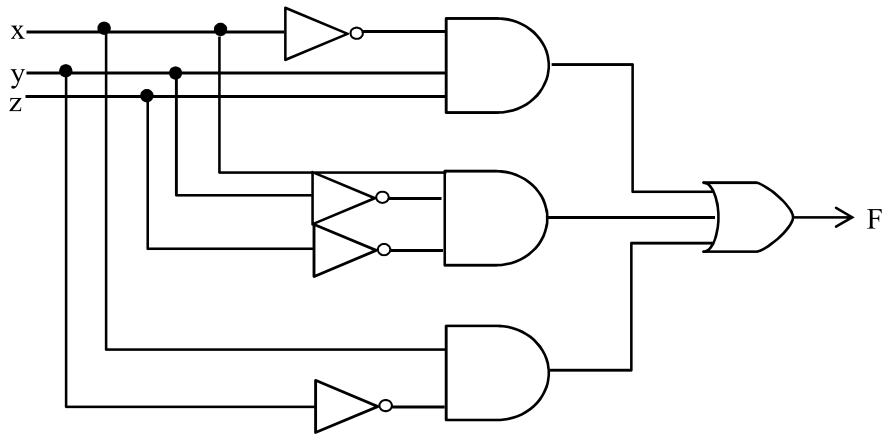
الحل:

$$F_1 = \left[\overline{(A+B).(C+D).E}\right]$$

$$F_2 = (\overline{A+B}) + (\overline{C+D}) + \overline{E}$$

من الواضح أن $F_1 = F_2$ حسب قانون دومورغان.

١٢ – عبر عن المخرج F كتعبير بولياني حيث z,y,x هي مدخلات الدارة المنطقية التالية:



الحل:

مخرج أول بوابة $\bar{x}yz$

مخرج ثاني بوابة $x\bar{y}\bar{z}$

مخرج ثالث بوابة $x\bar{y}$

وعليه يكون $F = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}$

١٣ – حقق التابع التالي:

$$F = (\overline{xy + zw + v})$$

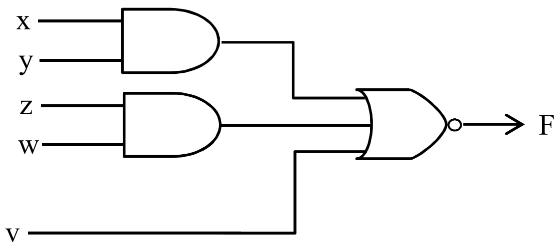
باستخدام:

a) البوابات NOR, AND.

b) البوابات NOT, NAND, AND.

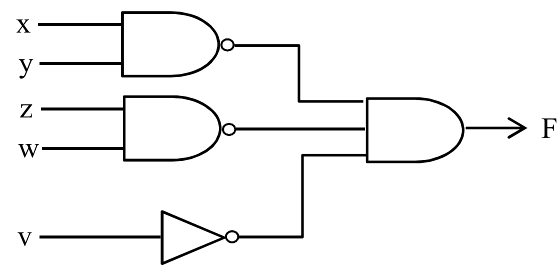
الحل:

(a



(b نستخدم قانون دومورغان يكتب التابع بالشكل:

$$F = \overline{(xy + zw + v)} = \overline{xy}.\overline{zw}.\overline{v}$$



١٤ – عبر عن التابع XOR:

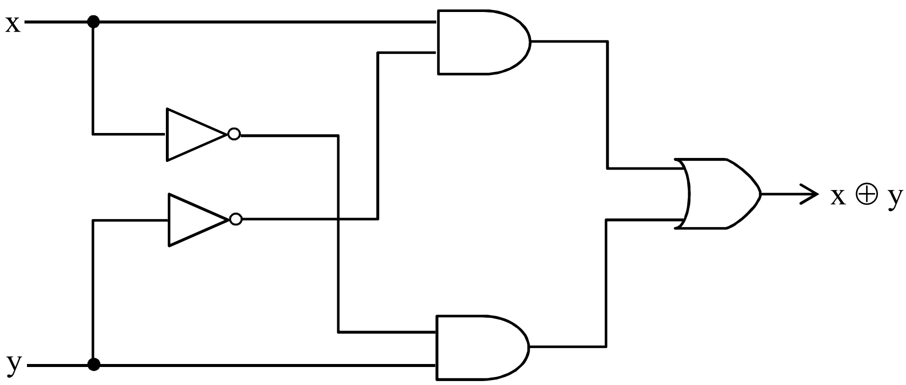
(a باستخدام البوابات:

OR AND NOT

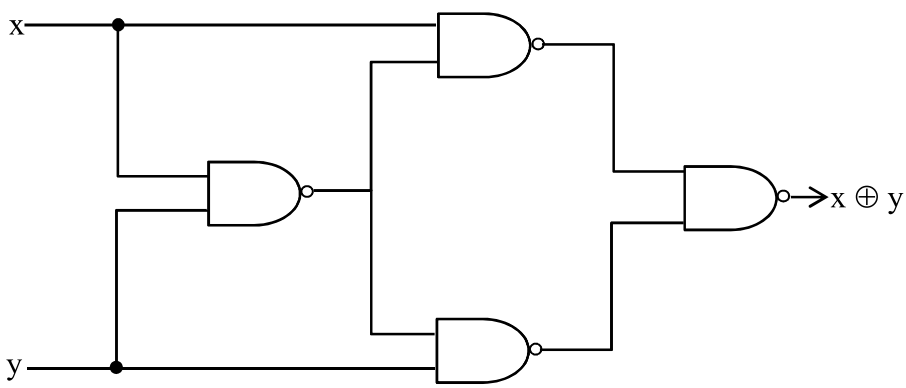
(b باستخدام NAND.

الحل:

(a



(b



تمارين للحل

١ – أوجد التوابع البوليانية F، G الموضحة بالجدول التالي:

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

٢ – أوجد قيم التابعين التاليين من خلال الجدول:

$F_1 = x + \bar{y}z$ $\qquad\qquad$ $F_2 = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$

٣ – أثبت صحة قانون التوزيع التالي:

$$x + (y + z) = (x + y)\,(x + z)$$

٤ – أوجد جدول الحقيقة للتابعين التاليين:

$F_1 = xy + x\bar{y} + \bar{y}z$ $\qquad\qquad$ $F_2 = yz + \bar{x}\bar{z}$

٥ – عبر عن التابع التالي كمجموع حدود صغرى وكجداء حدود عظمى:

$$F(x,y,z,w) = \bar{y}w + \bar{x}w + yw$$

٦ – أوجد قيم التوابع كمجموع حدود صغرى:

a) $F(x, y, z, w) = \sum(2,4,7,10,12,14)$

b) $F(x, y, z) = \prod(3,5,7)$

٧ – حول كل مما يلي إلى مجموع مضاريب وجداء مجاميع:

a) $(u + xw)(x + \bar{u}w)$

b) $\bar{x} + x(x + \bar{y})(y + \bar{z})$

٨ – حقق التابع التالي $F = xy + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z$ باستخدام:

a) بوابات NOT, OR, AND.

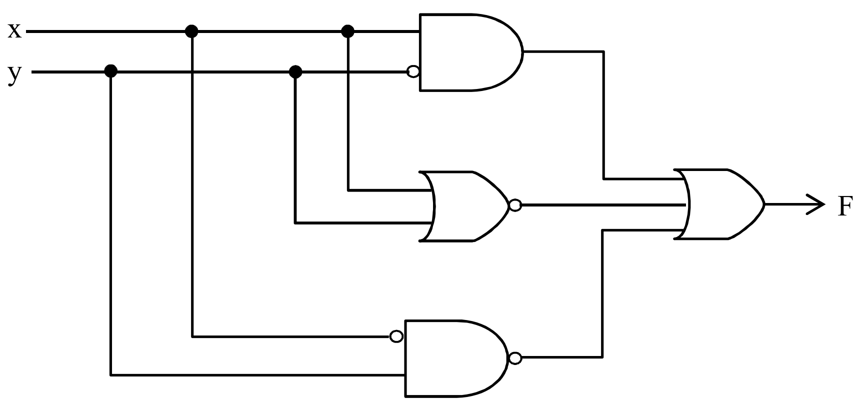
b) بوابات NOT, OR.

c) بوابات NOT, AND.

d) NOT NAND.

e) NOT NOR.

٩ – عبر عن المخرج F كتعبير بولياني بدلالة المدخلين y,x للدارة المنطقية:



١٠ – اكتب المعادلات البوليانية وارسم الدارة المنطقية التي خرجها معرف بجدول الحقيقة التالي:

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

– انتهت المحاضرة –

د. ميسم جديد