المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية

د / مجدي أمين كتبي
قسم العلوم الرياضية
جامعة أم القرى – مكة المكرمة

د / مروان أمين كتبي
قسم الرياضيات
جامعة الملك عبد العزيز – جدة

الطبعة الأولى

١٤١٩ هـ – ١٩٩٩ م

المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية

د / مجدي أمين كتبي

قسم العلوم الرياضية

جامعة أم القرى – مكة المكرمة

د / مروان أمين كتبي

قسم الرياضيات

جامعة الملك عبد العزيز – جدة

الطبعة الأولى

١٤١٩ هـ – ١٩٩٩ م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كتبي ، مجدي امين عبدالباري

المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية / مجدي امين كتبي ، مروان امين كتبي ._ مكة

٠٠٠ ص ؛ ٠٠ سم

ردمك ٨-٣٦٤-٣٥-٩٩٦٠

١ – المعونات الاقتصادية السعودية – الدول النامية أ – كتبي ، مروان امين عبدالباري

(م. مشارك) ب _ العنوان

ديوي ٥١٣ ١٩/٢٩٦٣

رقم الإيداع : ١٩/٢٩٦٣

ردمك : ٨-٣٦٤-٣٥-٩٩٦٠

الطبعة الأولى ١٤١٩ هـ / ١٩٩٩ م .

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب زدني علماً

سورة طه - الآية (١١٤)

صدق الله العظيم

إهـــــــداء

إلى أعزائنا .. الطلبه .. والطالبات
بكل الولاء والحب نتشرف بتقديم هذا الكتاب
إليكم سائلين الله العلى القدير أن يكون لكم مرشداً
لطريق النجاح والفلاح وأن يكون عوناً لكم ونسأل الله
أن ينفعكم بما فيه مع تمنياتنا لكم بالتوفيق
والله يوفقكم ويرعاكم

مقدمه

الحمد لله رب العاملين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم . أما بعد :-

فإنطلاقا من رغبة الطلبه والطالبات فى الحصول على مرجع لحل المعادلات التفاضليه العاديه ذا الخصائص الآتيه :

- أن يكون المرجع مكتوب بلغتهم
- أن يكون المرجع شاملاً للمواضيع
- أن يكون المرجع ذا تدرج منطقى فى سرد المعلومات
- أن يكون المرجع منظماً ومنسقاً
- أن يكون المرجع مزوداً بالأمثله التوضيحية
- أن يكون المرجع مزوداً بالتمارين
- أن يكون المرجع ذا طباعة جيده
- أن يكون ثمن المرجع معقولاً وفى متناول يد الجميع

فقد حاولنا جاهدين بقدر الإمكان أن نلبى رغبة إخواننا وأخواتنا الطلبه والطالبات وذلك من خلال هذا الكتاب الذى بين أيديكم .

يحتوى هذا الكتاب فى مجمله على ثمانية أبواب وكل باب يحتوى على عدد من المواضيع المتعلقة ببعضها البعض كما هو موضح فى محتويات هذا الكتاب .

والله نسأل أن ينفعنا بما علمنا وأن يبارك لنا أعمالنا كما نعوذ به سبحانه من علم لاينفع ومن قلب لايخشع ومن نفس لاتشبع ومن دعوة لايستجاب لها وأن الحمد لله رب العالمين .

هذا والله ولى التوفيق

د / مجدى أمين كتبى

قسم العلوم الرياضيه

جامعه أم القرى – مكة المكرمة

د / مروان أمين كتبى

قسم الرياضيات

جامعه الملك عبد العزيز – جـده

المحتويات

- مقدمه

الباب الأول

- المعادلات التفاضليه العاديه ١
- رتبة ودرجة المعادلات التفاضليه العاديه ٢
- تمارين (1) ٤
- حل المعادلات التفاضليه العاديه ٥
- تكوين المعادلات التفاضليه من الحل العام ٩
- تمارين (2) ١٢

الباب الثانى

- أولا . المعادلات التفاضليه ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى ١٤
- النوع الأول ١٤
- (أ) المعادلات التى يمكن فصل المتغيرات فيها ١٤
- تمارين (3) ٢٠
- (ب) المعادلات التى تؤول إلى فصل المتغيرات فيها ٢١
- النوع الثانى ٢٥
- (أ) المعادلات المتجانسة ٢٥
- تمارين (4) ٢٨

❊ (ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات متجانسة ٢٩

❊ تمارين (5) ٣١

❊ النوع الثالث ٣٢

❊ (أ) المعادلات التفاضليه التامة ٣٢

❊ تمارين (6) ٣٨

❊ (ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات تامة وذلك
بإستخدام معامل المكامله ٣٩

❊ تمارين (7) ٤٤

❊ النوع الرابع ٤٤

❊ (أ) المعادلات التفاضليه الخطية ٤٤

❊ تمارين (8) ٥٠

❊ (ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات خطية ٥٠

❊ أولاً : معادله برنوللى ٥٠

❊ ثانياً : معادله ريكات ٥٣

❊ ثالثاً : المعادلات التى تكون على الصوره :

$\frac{dy}{dx} + p(x)e^{y} = Q(x)$ ٥٦

❊ رابعاً : المعادلات التى تكون على الصوره :

$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)\,p(x) = Q(x)$ ٥٧

❊ تمارين (9) ٥٨

❊ ثانياً : المعادلات التفاضليه ذات الرتبة الأولى والدرجات العليا ٥٩
❊ (أ) معادلات تحل فى p ٥٩
❊ (ب) معادلات تحل فى y ٦١
❊ (جـ) معادلات تحل فى x ٦٣
❊ (د) معادلة كليروت ٦٤
❊ تمارين (10) ٦٦

◻ البـــاب الثالث

❊ المعادلات التفاضليه الخطيه من الرتبه الثانيه ذات المعاملات الثابته ٦٧
❊ بعض الخواص الأساسيه للمعادلات التفاضليه الخطيه المتجانسه من الرتبه الثانيه ٦٧
❊ أولاً : المعادلات التفاضليه الخطية المتجانسة من الرتبة الثانيه ذات المعاملات الثابته ٧٢
❊ (أ) الجذران حقيقيان ومختلفان ٧٤
❊ (ب) الجذران مركبين ٧٥
❊ (جـ) الجذران حقيقيان ومتساويان ٧٦
❊ تمارين (11) ٧٩

❊ ثانياً : المعادلات التفاضليه الخطيه الغير متجانسة من الرتبة الثانيه ذات المعاملات الثابته ٧٩

❊ (أ) طريقة مقارنة المعاملات ٨٠

❊ تمارين (12) ٩٠

❊ (ب) طريقة تغيير الثوابت أو البارامترات ٩٠

❊ تمارين (13) ٩٤

❊ (جـ) طريقة المؤثرات التفاضليه ٩٥

❊ تمارين (14) ١٠٣

☐ البـــاب الرابع

❊ المعادلات التفاضليه الخطيه من الرتبة النونيه ذات المعاملات الثابته ١٠٤

❊ تمارين (15) ١١٣

☐ البـــاب الخامس

❊ المعادلات التفاضليه الخطية ذات المعاملات المتغيره والتى تؤول إلى معادلات تفاضليه خطية ذات معاملات ثابته ١١٤

❊ أولاً : معادلة أيلر الخطيه ١١٤

❊ ثانياً : معادلة لجندر الخطيه ١١٧

❊ تمارين (16) ١١٩

□ الباب السادس

* تحويلات لابلاس ١٢٠
* تمارين (17) ١٣٢
* معكوس تحويل لابلاس ١٣٣
* تمارين (18) ١٣٩
* حل المعادلات التفاضليه الخطية ذات المعاملات الثابته بإستخدام تحويلات لابلاس ١٤٠
* تمارين (19) ١٤٧

□ الباب السابع

* المعادلات التفاضليه الخطية من الرتبة الثانيه ذات المعاملات المتغيره ١٤٨
* **أولاً : حل المعادلات التفاضليه الخطيه المتجانسه من الرتبه الثانيه ذات المعاملات المتغيره** ١٤٩
* (أ) طريقة تخفيض الرتبة ١٤٩
* (ب) طريقة التخلص من المشتقه الأولى ١٥٤
* (جـ) طريقة تحليل المؤثر ١٥٨
* تمارين (20) ١٦٧

❊ ثانياً : حل المعادلات التفاضليه الخطيه الغير متجانسه
من الرتبه الثانيه ذات المعاملات المتغيرة ١٦٨
❊ (أ) طريقة تخفيض الرتبة ١٦٩
❊ (ب) طريقة التخلص من المشتقه الأولى ١٧١
❊ (جـ) طريقة تحليل المؤثر ١٧٥
❊ (د) طريقة تغيير الثوابت أو البارامترات ١٧٧
❊ تمارين (21) ١٨٠

◻ البـــاب الثامن

❊ حل المعادلات التفاضليه ذات المعاملات
المتغيره وذات الرتب الأعلى من الرتبه الأولى ١٨١
❊ النوع الأول : المتغير التابع غير موجود ١٨١
❊ النوع الثانى : المتغير المستقل غير موجود ١٨٤
❊ النوع الثالث : المعادلات التفاضليه الخطيه ذات
حل خاص معروف ١٨٦
❊ تمارين (22) ١٨٩
❊ المـــراجـــع ١٩٠

الباب الأول

المعادلات التفاضلية العادية

Ordinary Differential Equations

بصورة عامه المعادله التفاضلية تكون عباره عن معادله تحتوى على تفاضلات (معاملات تفاضليه) .

وإذا كانت المعادله تحتوى على تفاضلات كليه ولاتحتوى على تفاضلات جزئيه فإنها تسمى معادلات تفاضلية عاديه Ordinary Differential Equations وإذا كانت تحتوى على تفاضلات جزئيه فإنها تسمى معادلات تفاضليه جزئيه Partial Differential Equations . ويمكن القول أيضا بأن المعادلات التفاضلية عباره عن معادلات تحتوى على دوال مجهوله تحت علامة المعامل التفاضلى أو التفاضل . وبالتالى إذا كانت الدوال المجهوله فى المعادله التفاضليه دوال بالنسبه لمتغير واحد فقط فإن المعادله التفاضليه فى هذه الحاله تسمى عاديه فمثلاً المعادلات التفاضليه الآتيه :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3 \qquad (1)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = o \qquad (3)$$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = k\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (4)$$

$$(x+y^2-3y)+(x^2+3x+y)\frac{dy}{dx}=o \qquad (5)$$

هى معادلات تفاضليه عاديه .

ولكن إذا كانت الداله المجهوله فى المعادله التفاضليه هى داله بالنسبة لمتغيرين أو أكثر فإن المعادله التفاضليه تسمى معادله تفاضليه جزئيه فمثلاً المعادلات التفاضليه الآتيه :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=o$$

هى معادلات تفاضليه جزئيه .

وستكون دراستنا مقتصره فقط على المعادلات التفاضليه العاديه .

رتبة ودرجة المعادلات التفاضليه العادية

The Order and Degree of an Ordinary Differential Equations.

* رتبة المعادله التفاضليه العاديه هى رتبة أعلى معامل تفاضلى موجود فى المعادله . ففى المعادلات التفاضليه المرقمه من (1) إلى (5) نجد أن المعادله (1) ، (5) يكونان من الرتبة الأولى ، المعادلتان (2) ، (4) يكونان من الرتبة الثانيه بينما المعادله (3) تكون من الرتبة الثالثه .

* درجة المعادلة التفاضلية العاديه هى الدرجة الجبرية للمعامل التفاضلى ذو

أعلى رتبة فى المعادله بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خاليه من الأسس الكسرية فالمعادلات (1) ، (2) ، (5) يكونوا من الدرجة الأولى ، المعادلتان (3) ، (4) يكونان من الدرجة الثانية . فالمعادله (4)

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = k\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

يمكن كتابتها على الصوره

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = k^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

وهى تكون معادله تفاضليه عادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية .

كذلك نجد أن

$$\sqrt[3]{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

حيث يمكن كتابتها على الصوره

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

وهذه أيضا يمكن كتابتها على الصوره

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

وهذه معادله تفاضلية عادية من الرتبة الثانية والدرجة الرابعة .

كذلك نجد أن

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - x^7y = \sin(x)$$

هى معادله تفاضلية عادية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة .

تمارين (1)

بين رتبة ودرجة كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية :

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3x}{4y}$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} = k\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}$

حل المعادلات التفاضلية العادية

Solution of The Ordinary Differential Equations

حل المعادله التفاضلية هو الداله الغير محتويه على المعاملات التفاضلية والتى عندما نعوض بها فى المعادله التفاضليـــة تحولهـا إلـــى متطابقـة .

وبالتــالى نجــد أن $y = c\,x^2$ هو حل للمعادله $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$

حيث أنه بالتعويـض عـن قيمة y بـ $c\,x^2$ ، y' بـ $2cx$ فى المعــادله

$x\dfrac{dy}{dx} = 2y$ فإننا نحصل على $x \cdot 2cx = 2cx^2$

ملاحظة : c هو عدد ثابت إختيارى .

مثال : حقق أن $y = e^{2x}$ هو حل للمعادله $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

الحل : إذا كانت $y = e^{2x}$ فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} = 0$$

إذن $y = e^{2x}$ هو حل للمعادله التفاضليه المعطاه .

مثال : أثبت أن $y = A\,e^{x} + B\,e^{-2x} + x^2 + x$

حيث A , B ثوابت تكون حل للمعادله $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 3 - 2x^2$

البرهان : نحن نكون من $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + x^{2} + x$ الآتى :

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{x} - 2Be^{-2x} + 2x + 1$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} = Ae^{x} + 4Be^{-2x} + 2$$

وبالتعويض عن هذه القيم فى المعادله التفاضلية فإننا نحصل على المتطابقة

$$Ae^{x} + 4Be^{-2x} + 2 + Ae^{x} - 2Be^{-2x} + 2x + 1 - 2Ae^{x} - 2Be^{-2x} - 2x^{2} - 2x = 3 - 2x^{2}$$

مثال : أثبت أن $\text{Ln}\, y + \left(\frac{x}{y}\right) = c$

يكون حل للمعادله (a) $(y - x)\frac{dy}{dx} + y = o$

البرهان : بإستخدام التفاضل الضمنى لـ $\text{Ln}\, y + \left(\frac{x}{y}\right) = c$

نحن نجد أن $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y^{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = o$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{y - x} \quad (b)$$

وبالتعويض فى (a) عن $\frac{dy}{dx}$ من (b) نحن نجد أن

$$(y - x)\left(\frac{-y}{y - x}\right) + y = -y + y = o$$

والمعادله التفاضليه يمكن أن يكون لها أكثر من حل . لذلك دعنا نوضح هذه الحقيقه بعرض الأمثله الآتيه :

مثال : كلاً من الدوال

$y = \sin(x)$ ، $y = \sin(x) + 3$ ، $y = \sin(x) - \frac{4}{3}$

تمثل حلا للمعادله التفاضليه $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ (معادله من الرتبه الأولى)

ولكن من دراستنا من حساب التفاضل والتكامل وجد أن الداله التى مشتقتها $\cos(x)$ هى $y = \sin(x) + c$ حيث c ثابت إختيارى .

مثال : المعادله التفاضليه ذات الرتبه الثانيه $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

حلها يعطى بالعلاقه $y = x^3 + c_1 x + c_2$ حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين والحل أمكن الحصول عليه بالتكامل مرتين .

فنلاحظ من المثالين الأول والثانى أن المعادله التفاضليه يمكن أن يكون لها أكثر من حل ويمكن بصفة عامه أن يمثل بصيغة واحده تحتوى على ثابت إختيارى واحد كما فى المثال الأول وثابتين إختياريين كما فى المثال الثانى وبصفة عامه فإن حل المعادله التفاضليه ذات الرتبه النونيه تحتوى على n ثابت إختيارى مثل هذا الحل الذى يحتوى على عدد من الثوابت والذى يساوى رتبة المعادله التفاضليه يسمى بالحل العام .

تعريف : الحل العام للمعادله التفاضليه هو الحل الذى يحتوى على عدد من الثوابت الإختياريه ويكون مساويا للعدد الذى يمثل رتبة المعادله التفاضليه .

مثال : أثبت أن $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ يمثل الحل العام

للمعادله التفاضليه $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = o$

الحل : بالتعويض عن الطرف الأيسر من المعادله نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y = \{-4c_1\cos(2x)-4c_2\sin(2x)\}+4\{c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)\} = o$$

ومن ثم فإن الداله $y = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$ تكون حلاً وحيث أن الحل يحتوى على ثابتين إختياريين ويكون مساوياً لعدد رتبة المعادله التفاضليه إذن فإنه يمثل الحل العام .

تعريف : الحل الخاص للمعادله التفاضليه هو حل نحصل عليه من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم معينه .

فمثلا الحلــــول $y = \frac{8}{3}e^x$ ، $y = 2e^x$ ، $y = e^x$ حلـــــول خـاصة للمعادله $\frac{dy}{dx} = y$ بينما الحل $y = ce^x$ يمثل حلاً عاماً لان c ثابت إختيارى.

والحل الخاص يمكن أن نحصـل عليــه عنـدما تكون هناك شــروط إبتدائية (Initial Condition) موضوعه على الحل نفسه .

فمثلاً لحل المعادله $\frac{dy}{dx} = 2x$ بحيث أن $y = 1$ عند $x = o$ نجد أن الحل العام هو $y = x^2 + c$ ولكن عند $x = o$ كانت $y = 1$ فإن $c = 1$ أى أن $y = x^2 + 1$ حلا يحقق المعادله التفاضليه وفى نفس الوقت يحقق الشرط الموضوع على الحل وبالتالى فإن هذا الحل يكون حلا خاصاً .

ملاحظة : الشروط الإبتدائية يمكن تصنيفها إلى نوعين

أ - شروط لقيم إبتدائية وفيها تكون قيمة المتغير المستقل مساوية للصفر

ب - شروط لقيم حديه وفيها تكون قيمة المتغيرالمستقل غير مساويه للصفر

تكوين المعادلات التفاضلية من الحل العام

Finding The Differential Equations From The General Solution

دعنا نرمز لـ .... ، $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ، $y' = \dfrac{dy}{dx}$

ولنفرض أن لدينا $y = ax + bx^3$ إذن

$$y'' = 6bx \quad (1) \qquad ، \qquad y' = a + 3bx^2$$

من (1) نجد أن

$$a = y' - 3x^2\left(\frac{1}{6}\frac{y''}{x}\right) = y' - \frac{1}{2}xy'' \quad (2) \qquad ، \qquad b = \frac{1}{6}\frac{y''}{x}$$

وبالتعويض عن قيمة b, a فى $y = ax + bx^3$ نجد أن

$$y = xy' - \frac{1}{2}x^2y'' + \frac{1}{6}x^2y'' = xy' - \frac{1}{3}x^2y''$$

إذن

$$-\frac{1}{3}x^2y'' + xy' - y = 0$$

وهذه هى المعادله التفاضليه المطلوبـه حيـث حصلنا عليها بحذف الثابتين b, a وذلك عن طريق التفاضل .

مثال : كون المعادله التفاضليه والتى يكون حلها العام هو $y = cx^2 + c^2$

الحل : نوجد $\dfrac{dy}{dx} = 2cx$ إذن $c = \left(\dfrac{1}{2x}\right)\dfrac{dy}{dx}$

وبالتعويض عن قيمة c فى المعادله $y = cx^2 + c^2$ نحصل على

$$y = \left(\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2x}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

وبالتبسيط نجد أن $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4x^2y = o$

وهذه هى المعادله التفاضليه المطلوبه وهى من الرتبه الأولى .

مثال : أوجد المعادله التفاضلية التى يكون حلها العام $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

الحل : بإيجاد التفاضل بالنسبة لـ x نحن نجد

$$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = o$$

$$\therefore\ a = x + y\frac{dy}{dx} = x + yy'$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

وبالتعويض عن قيمة a فى

نحن سوف نحصل على المعادله المطلوبه وهى :

$$(-yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2$$

أو

$$y^2 = x^2 + 2xyy'$$

أو

$$2xyy' + x^2 - y^2 = o$$

مثال : أوجد المعادله التفاضليه التى يكون حلها العام معطى كالاتى :-

$$y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$$

(1)

الحل : حيث أننا نسعى إلى حذف الثابتين A ، B من (1) فإننا سوف نوجد المشتقة الأولى والثانية لـ (1) وبالتالى سوف يكون لدينا ثلاثة معادلات يمكن من خلالها إيجاد المعادله التفاضلية المطلوبه . إذن

$$y' = 2 A e^{2x} - 3 B e^{-3x} \qquad (2)$$

$$y'' = 4 A e^{2x} + 9 B e^{-3x} \qquad (3)$$

نحن نستطيع حذف الثابت B من (1) ، (2) وذلك بضرب (1) فى 3 ثم جمعها مع (2) إذن

$$3y + y' = 5 A e^{2x} \qquad (4)$$

كما نستطيع أيضا أن نحذف الثابت B من (2) ، (3) وذلك بضرب (2) فى 3 ثم جمعها مع (3) إذن

$$3y' + y'' = 10 A e^{2x} \qquad (5)$$

ونحذف الثابت A من (4) ، (5) وذلك بضرب (4) فى -2 ثم جمعها مع (5) فنجد أن $3 y' + y'' = 2 (3y + y')$

ومن ثم نجد أن $y'' + y' - 6y = 0$ هى المعادله التفاضليه المطلوبه ومن الرتبة الثانيه .

طريقة أخرى :

للحصول على المعادله التفاضليه فى هذا المثال فإننا نعلم من نظرية فى الجبر البسيط أن الثلاث معادلات (1) ، (2) ، (3) إذا أعتبرت كمعادلات ثلاثة فى مجهولين A ، B فإنه يمكن أن يكون لهما حل عندما فقط يكون

$$\begin{vmatrix} -y & e^{2x} & e^{-3x} \\ -y' & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ -y'' & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

وبما أن e^{-3x} & e^{2x} لايمكنا أن يكونان مساويان للصفر فإن (6) يمكن إعادة كتابتها بعد إزالة العاملين e^{-3x} & e^{2x}

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & -3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

ومن ثم يمكن تبسيطها لكى نتمكن من الحصول على المعادله التفاضليه المطلوبه إذن

$$y \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} y' & -3 \\ y'' & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} y' & 2 \\ y'' & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ 30y - (9y' + 3y'') + 4y' - 2y'' = 0$$

$$\therefore\ -5y'' - 5y' + 30y = 0$$

$$\therefore\ y'' + y' - 6y = 0$$

وهى نفس المعادله التفاضليه المطلوبه التى حصلنا عليها مسبقاً .

تمارين (2)

س1 أثبت أن كل معادله مما يأتى تكون حلا للمعادله التفاضليه المكتوبه أمامها .

1. $y = x^2 + x + c$ ، $y' = 2x + 1$

2. $y = x^2 + c\,x$ ، $xy' = x^2 + y$

3. $y = c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) + 9x^2 - 2$ ، $y'' + 9y = 81x^2$

س٢ أوجد الحل العام للمعادلات التفاضليه الاتيه :

1. $y' - e^x = o$

2. $y'' - e^x = o$

3. $y'' - \cos(x) = o$

س٣ أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضليه الآتيه :

1. $y' + e^x = o \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad y = 1$ (شروط لقيم حديه)

2. $y' - \sec^2(x) = o \quad ; \quad x = o \quad ; \quad y = 1$ (شروط لقيم إبتدائيه)

3. $y'' - 1 = o \quad ; \quad x = o \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad y' = 2$ (شروط لقيم إبتدائيه)

س٤ أوجد المعادلات التفاضليه للأتى

1. $y = x^3 + c$

2. $y = c\,x^2$

3. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

4. $y = c\,e^x$

5. $y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)$

6. $y = x \sin(x + c)$

الباب الثانى

أولا : المعادلات التفاضليه ذات الرتبه الأولى والدرجة الأولى

First Order Differential Equations Of The First Degree

الصورة العامه للمعادله التفاضليه من الرتبه الأولى والدرجة الأولى هى

$$F(x;y,y')=o \qquad (1)$$

وإذا أمكن حل هذه المعادله بالنسبة إلى y' فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$y'=f(x,y)$$

فمثلاً المعادله $9yy'+4x=o$ يمكن كتابتها على الصورة $y'=\frac{-4x}{9y}$

وحيث أن $y'=\frac{dy}{dx}$ فإن هذه المعادله $y'=f(x,y)$ يمكن وضعها على

الصورة

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=o \qquad (2)$$

وبالطبع أى من الصورتين تؤدى للأخرى .

ويمكن أن نقسم المعادلات التفاضليه ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى إلى أربعة أنواع :-

النوع الأول :

(أ) المعادلات التى يمكن فصل المتغيرات فيها

Equations With variables Seperable

(١) عندما يكون $\frac{dy}{dx}=f(x)$ فإن

$$dy=f(x)dx$$

$$\therefore \quad \int dy = \int f(x)\,dx$$

ومنها يكون الحل العام على الصوره

$$y = \phi(x) + c$$

حيث c ثابت إختيارى .

مثال ، حل المعادله التفاضليه $x^2 \dfrac{dy}{dx} = 1 + x$

الحل ، يمكن كتابة هذه المعادله على الصوره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \int dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{x} + \text{Ln}(x) + c . \quad (*)$$

يمكننا أن نعبر عن هذه المسأله كما يلى :

أوجد المنحنى الذى ميله عند النقطه (x, y) هو $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

إن الحل $(*)$ يبين أن هناك عدد لانهائى من هذه المنحنيات وذلك بإعطاء

c قيم إختيارية .

يمكننا الآن أن نخصص ونسأل عن المنحنى الذى يحقق الشرط المعطى وكذلك يمر بالنقطه $(1, 2)$.

وللإجابة فإننا قد حصلنا مسبقاً على الحل العام وهو $y = -\frac{1}{x} + Ln(x) + c$

وإذا عوضنا عن النقطه $(1, 2)$ فى الحل العام فإننا نجد أن

$$2 = -1 + Ln(1) + c = -1 + c$$

$$\therefore \quad c = 3$$

$\therefore$ المنحنى المطلوب والذى يكون ميله مساوياً لـ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ ويمر بالنقطة $(1, 2)$ هو $y = -\frac{1}{x} + Ln(x) + 3$.

(٢) عندما يكون $\frac{dy}{dx} = f(y)$ فإن

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

ومنها نجد أن الحل العام يكون على الصوره :

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c$$ حيث c ثابت إختيارى

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} + a\,y + b = o$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادله على الصوره

$$\frac{dy}{a\,y + b} = -\,dx$$

$$\therefore \int \frac{dy}{a\,y + b} = -\int dx$$

$$\therefore \frac{1}{a} \operatorname{Ln}(a\,y + b) = -x + c$$

(٢) عندما يكون $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$ فإن

$$g(x)\,dx = f(y)\,dy$$

ومنها يكون الحل العام على الصورة :

$$\int g(x)\,dx = \int f(y)\,dy + c$$

يجب أن نلاحظ أننا نحتاج فقط إلى ثابت إختيارى واحد .

مثال ، حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$$

الحل ، هذه المعادله كما هى مكتوبة تظهر أنها صعبه ولكننا يمكن أن نعيد كتابتها فتصبح على الصوره الآتيه

$$e^{-3y}\,dy = e^{2x}\,dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نجد

$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

وهو حل المعادله التفاضليه المعطاه

مثال ، حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2(y)\sin(x)$$

الحل ، يمكن فصل المتغيرات بحيث يكون

$$\int \sec^2(y)\,dy = \int \sin(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \tan(y) = -\cos(x) + c$$

وهو حل المعادله التفاضليه المعطاه

ملاحظه : $\frac{1}{\cos^2(y)} = \sec^2(y)$

مثال ، حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} + y^2 e^x = y^2$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادله على الصوره

$$\frac{dy}{dx} = y^2 (1 - e^x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y^2} = (1 - e^x) \, dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نجد أن

$$-\frac{1}{y} = x - e^x + c \qquad \text{أو} \qquad x + \frac{1}{y} - e^x + c = o$$

هو حل المعادله التفاضليه المعطاه .

مثال : أوجد الحل العام للمعادله التفاضليه $\tan (x) \frac{dy}{dx} = y$

ثم أوجد الحل الخاص عندما $y = 2$ عند $x = \frac{\pi}{6}$

الحل : بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\tan (x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\tan (x)} = \frac{\cos (x)}{\sin (x)} dx$$

وبتكامل الطرفين نجد أن

$$\mathrm{Ln} (y) = \mathrm{Ln} (\sin (x)) + \mathrm{Ln} (c) = \mathrm{Ln} (c \sin (x))$$

وبأخذ e للطرفين نجد أن

$$y = c \sin (x)$$

وهذا هو الحل العام حيث c ثابت إختيارى . ولكن عندما $y = 2$ عند

فإن $x = \frac{\pi}{6}$

$$2 = c \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{c}{2} \rightarrow c = 4$$

إذن الحل الخاص يكون على الصوره :

$$y = 4 \sin(x)$$

تمارين (3)

س١ : حل المعادلات التفاضليه الآتيه

1. $x + y\,y' = o$

2. $y' = \frac{y}{x}$

3. $x(y^2 - 1)\,dx + y(x^2 - 1)\,dy = o$

4. $y' = e^{(2x + 2y)}$

5. $y' + e^x y = e^x y^2$

6. $\sec^2(x)\tan(y)\,dx + \sec^2(y)\tan(x)\,dy = o$

7. $\sin(y)\,dx = (x^2 + 1)\cos(y)\,dy$

س٢ : حـل المعـادله $y' = \frac{-y}{(x-3)}$ ثم أوجـد معـادله المنحـنى الذى يمربالنقطه (4 , 1)

س٣ : أوجد الحل العام والخاص لكل مما يأتى :

1. $\theta \dfrac{dr}{d\theta} = -2r$; $r = q$ when $\theta = -\dfrac{1}{3}$

2. $2y\,dx + x^2\,dy = -dx$; $y = \dfrac{7}{2}$ when $x = \dfrac{1}{\ln 2}$

(ب) المعادلات التى تؤول إلى فصل المتغيرات فيها

Equations That Lead To Seperable Equations

(١) المعادلات التى تكون على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

حيث b , a ثوابت يمكن أن تحول إلى معادلات تفاضلية يمكن فصل المتغيرات فيها وذلك بإجراء التعويض الآتى

$$z = ax + by$$

ومن ثم فإن

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

وهذا يكافىء

$$\frac{dz}{dx} = a + b f(z)$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{a + b f(z)} = dx$$

وبالتالى نكون قد تمكنا من فصل المتغيرات ومن ثم نجرى التكامل للطرفين حيث نجد

$$\int \frac{dz}{a + b f(z)} + c = x .$$

مثال : حل المعادله التفاضليه $\frac{dy}{dx} = 2x + y$

الحل : بفرض $z = 2x + y$ نجد أن $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dz}{dx} = 2 + z$

وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dz}{z+2} = dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على $Ln(z+2) = x + Ln(c)$

وبأخذ e للطرفين نجد أن

$$z = -2 + c e^x$$

أو $2x + y = -2 + c e^x$ أو

$$y = c e^x - 2x - 2 .$$

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$$

الحل : بفرض أن $z = x - y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

أو $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{1}{z} - 1$ إذن $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}$

إذن بفصل المتغيرات نجد أن

$$z\,dz = -dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على $z^2 = -2x + c$ أو $(x-y)^2 = c - 2x$.

(٢) المعادلات التى تكون على الصوره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} \quad , \quad \text{where} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

فى هذه الحالة فإن البسط والمقام للطرف للطرف الأيمن إذا ساوينا كل منهما بالصفر فإنهما يمثلان خطان متوازيان . ويمكن تحويل المعادلات التفاضلية التى تكون على الصورة أعلاه إلى معادلات تفاضليه يمكن فصل المتغيرات فيها وذلك بإجراء التعويض الآتى : $z = ax + by$

مثال : حل المعادله التفاضليه $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$

الحل : بفرض $z = x + y$ نجد أن $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

وبالتعويض فى المعادله التفاضليه المعطاه نحصل على

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z-1}{z+1} = \frac{2z}{z+1}$$

إذن بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{z+1}{z}\,dz = 2\,dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نجد أن $z + \mathrm{Ln}(z) + c = 2x$

أو

$$(x+y) + \mathrm{Ln}(x+y) + c = 2x$$

أو

$$x - y - \mathrm{Ln}(x+y) = c .$$

مثال : حل المعادله التفاضليه $(2x+4y-1)\dfrac{dy}{dx}=x+2y+1$

حيث أن $y=o$ عند $x=o$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادله التفاضلية على الصوره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2(x+2y)-1}$$

وبفرض $z=x+2y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{2(z+1)}{2z-1}=\frac{4z+1}{2z-1}$$

إذن بفصل المتغيرات نجد أن

$$\left(\frac{2z-1}{4z+1}\right)dz=dx$$

أو

$$dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2(2z-1)}{4z+1}dz\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(4z+1)-3}{4z+1}dz\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{3}{4z+1}\right]dz$$

وبإخذ التكامل للطرفين نجد أن

$$x=\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}Ln(4z+1)+c$$

ولكن معطى لدينا أن $y=o$ عند $x=o$

إذن $o=o-\dfrac{3}{8}Ln(1)+c$ إذن $c=o$

إذن

$$x=\frac{1}{2}(x+2y)-\frac{3}{8}Ln(4x+8y+1)$$

أو

$$8x=4x+8y-3Ln(4x+8y+1)$$

أو

$$4(x-2y)+3Ln(4x+8y+1)=o$$

النـــوع الثانى :

(أ) المعادلات المتجانسة

Homogeneous Equations

تعـــريف : المعادله التفاضليه من الرتبه الأولى $y' = f(x,y)$ تسمى متجانسه إذا كانت الداله $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة n أى تحقق المتطابقة

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

فمثلاً الداله $f(x,y) = x^4 - x^2 y^2$ تكون متجانسة من الدرجة الرابعة لان

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^2 . (\lambda y)^2 = \lambda^4 [x^4 - x^2 y^2] = \lambda^4 f(x,y)$$

أما الداله $f(x,y) = e^{-(y/x)} + \tan\left(\frac{2y}{x}\right)$ فهى متجانسة من درجة صفر .

والداله $f(x,y) = x^3 + \cos(x)\sin(y)$ فهى غير متجانسة .

تعريف : المعادله التفاضليه التى تكون على الصوره

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = o$$

تسمى معادله تفاضلية متجانسة إذا كانت كلا من الدالتين f ، g متجانسة ومن نفس الدرجة فمثلاً

$$x \,\mathrm{Ln}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \frac{y^2}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = o$$

متجانسة من الدرجة الأولى أما المعادله $(3x + y^2)\,dx + (x - 2y)\,dy = o$ فهى غير متجانسة .

ويمكن القول أيضا بأن المعادله التى على الصوره $y' = f(x, y)$ تسمى معادله تفاضليه متجانسة إذا كانت $f(x, y)$ داله متجانسه من الدرجة صفر . وعلى وجه العموم فإن أى معادله تفاضليه متجانسه يمكن وضعها على الصوره :

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

ولحل مثل هذه المعادله نضع $z = \dfrac{y}{x}$

ومنها $xz = y$ إذن $x\dfrac{dz}{dx} + z = \dfrac{dy}{dx}$

وبالتعويض فى (1) نحصل

$$x\frac{dz}{dx} + z = \phi(z)$$

إذن

$$x\frac{dz}{dx} = \phi(z) - z = w(z)$$

وبالتالى يكون فصل المتغيرات كالاتى :

$$\frac{dz}{w(z)} = \frac{dx}{x}$$

وهذه يمكن حلها كما تعلمنا مسبقاً .

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل : الطرف الأيمن يكون على الصوره $f\left(\frac{y}{x}\right)$ إذن فهى معادله تفاضليه متجانسه وبوضع $y = xz$ نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

وبالتعويض عنها فى المعادله التفاضليه المعطاه نجد أن

$$x \frac{dz}{dx} + z = z + \tan(z)$$

وبالتالى يكون فصل المتغيرات كالاتى

$$\frac{dz}{\tan(z)} = \frac{dx}{x}$$ أو $$\frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz = \frac{dx}{x}$$

وبأخذ التكامل للطرفين نجد أن

$$Ln(\sin(z)) = Ln(x) + Ln(c)$$

أو

$$\sin(z) = c\,x$$

أو

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = c\,x$$

مثال : حل المعادله التفاضليه $(x^2 - x\,y + y^2)\,dx = x\,y\,dy$

الحل : حيث أن هذه المعادله التفاضليه تكون متجانسه ومن الدرجه الثانيه إذن نفرض أن $y = x\,z$ ومنها يكون $dy = x\,dz + z\,dx$

إذن

$$(x^2 - x^2 z + x^2 z^2)\,dx = x^2 z\,(x\,dz + z\,dx)$$

إذن

$$x^2(1 - z + z^2)\,dx = x^2 z\,(x\,dz + z\,dx)$$

إذن

$$(1 - z + z^2)\,dx = z\,(x\,dz + z\,dx)$$

أو

$$(1 - z)\,dx = z\,x\,dz$$

وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dx}{x} = \frac{z}{1-z} dz$$

أو

$$\frac{dx}{x} + \frac{z}{z-1} dz = 0$$ إذن $$\frac{dx}{x} + \left[\frac{(z-1)+1}{z-1}\right] dz = 0$$

إذن $$\int \frac{dx}{x} + \int dz + \int \frac{dz}{z-1} = 0$$

إذن $$\operatorname{Ln}(x) + z + \operatorname{Ln}(z-1) = \operatorname{Ln}(c)$$

إذن $$x(z-1)e^{z} = c$$

ومنها $$x\left(\frac{y}{x} - 1\right)e^{(y/x)} = c$$

أو $$(y-x)e^{(y/x)} = c.$$

تمارين (4)

حل المعادلات التفاضليه الآتيه

1. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

2. $y' = \dfrac{y^2}{xy + x^2}$

3. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 - xy$

4. $x\dfrac{dy}{dx} = y - x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$

5. $x(x^2 - 6y^2)\dfrac{dy}{dx} = 4y(x^2 + 3y^2)$

(ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات متجانسه

Equations That Lead To Homogenous Equations

المعادلات التفاضليه اللاتى يكونن على الصوره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \qquad (1)$$

حيث $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ليست متجانسة لوجود كلا من c_1 ، c_2 فى البسط

والمقام ويمكن تحويلهن إلى معادلات متجانسه بإجراء التعويض الآتى

$$x = x_1 + h \quad ، \quad y = y_1 + k$$

فنحصل على $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ ، $dx = dx_1$

وبالتعويض عن كل من $\frac{dy}{dx}$ ، y ، x فى المعادله (1) نحصل على

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \qquad (2)$$

ثم نوجد قيم h , k وذلك بحل المعادلتين الآتيتين معاً :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \quad ، \quad a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وبذلك تصبح المعادله (2) كالاتى :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}$$

وهذه معادله متجانسه يمكن حلها كما تعلمنا مسبقاً ومن ثم نعود إلى x , y بحيث نحصل على حل المعادله (1) .

مثال : حل المعادله التفاضليه
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

الحل : هذه المعادله ليست متجانسه ولتحويل هذه المعادلـــه إلى معادلـــه متجانسه نجرى التحويل الآتى :

$$x = x_1 + h \quad , \quad y = y_1 + k$$

إذن

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 - y_1 + (h - k + 1)}{x_1 + y_1 + (h + k - 3)}$$

وبحـــل المعادلتيـــن

$$h - k + 1 = 0 \quad , \quad h + k - 3 = 0$$

نحصـــل علـى

$$h = 1 \quad , \quad k = 2$$

وبذلك نحصل على المعادله المتجانسه

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1}$$

وباستخدام التعويض

$$z = \frac{y_1}{x_1}$$

ينتج

$$y_1 = z\, x_1$$

ومنها

$$\frac{dy_1}{dx_1} = x_1 . \frac{dz}{dx_1} + z$$

إذن

$$z + x_1 \frac{dz}{dx_1} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

إذن $$x_1 \frac{dz}{dx_1} = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{(1+z)}{(1-2z-z^2)} dz = \frac{dx_1}{x_1}$$

ومنها نجد أن $$-\frac{1}{2}\int \frac{(-2-2z)}{(1-2z-z^2)} dz = \int \frac{dx_1}{x_1}$$

إذن $$-\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1-2z-z^2) = \operatorname{Ln}(x_1) - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(c)$$

ومنها $$(1-2z-z^2)\, x_1^2 = c$$

أو $x_1^2 - 2x_1 y_1 - y_1^2 = c$ وبالتالى يكون $x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c$.

تمارين (5)

حل المعادلات التفاضليه الآتيه

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+1}$

2. $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

3. $(x-5y+5) + (5x-y+1)\frac{dy}{dx} = 0$

4. $(2x-4y+5)\frac{dy}{dx} = x-2y+3$

النـــوع الثالـث :

(أ) المعادلات التفاضليه التامه

Exact Differential Equations

تسمى المعادله التفاضليه ذات الرتبه الأولى :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = o \qquad (1)$$

بالمعادله التفاضليه التامه إذا كانت $N(x,y)$ ، $M(x,y)$ دالتين متصلتين وقابلتين للتفاضل وتحقق العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

ولاثبات العلاقة (2) نفرض أن لدينا الداله $u(x,y)$ وبكتابة المعادله (1) على الصوره

$$d\{u(x,y)\} = o \qquad (3)$$

وبالتالى يكون حلها العام هو

$$u(x,y) = c$$

وبما أن

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

وعليه فإن

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

وبتفاضـل العلاقة الأولى فى (4) بالنسـبة لـ y والثانيـة بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

إذن نجد أن
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أى أن العلاقة (2) هو شرط ضرورى ليكون الطرف الأيسر للمعادله (1) تفاضلاً تاماً للداله $u(x, y)$.

مثال : هل المعادله التفاضليه الأتيه تكون تامه

$$x y^2 dx + (x^2 y - \cos(y)) dy = 0$$

الحل :
$$M(x, y) = x y^2 \quad , \quad N(x, y) = (x^2 y - \cos(y))$$

إذن
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 x y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 x y$$

إذن
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتالى تكون المعادله التفاضليه المعطاه تامه .

مثال : هل المعادله التفاضليه الأتيه تكون تامه

$$\tan(y) dx + x dy = 0$$

الحل :
$$M(x, y) = \tan(y) \quad , \quad N(x, y) = x$$

إذن
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2(y) \quad , \quad \frac{\partial N}{dx} = 1$$

إذن
$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتالى تكون المعادله التفاضليه المعطاه غير تامه .

* ولحل المعادله التفاضليه التامه $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = o$

بحيث أن
$$du = M\,dx + N\,dy \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ونحن وجدنا مسبقاً من العلاقه (4) أن
$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

وبالتالى نجد أن
$$u(x, y) = \int M(x, y)\,\partial x + f(y)$$

حيث أنه عند حساب التكامل $\int M(x, y)\,\partial x$ فإن y تعتبر كثابت

وبالتالى تكون الداله $f(y)$ داله إختياريه فى y . ولايجاد $f(y)$ نحن سوف نفاضل الداله $u(x, y)$ بالنسبه لـ y :

إذن
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,\partial x\right) + \frac{d f(y)}{dy}$$

وحيث أن $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ فإن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, \partial x \right) + \frac{d f(y)}{dy} = N(x, y)$$

ومن هذه المعادله نحن نحصل على $f'(y)$ وبإستخدام التكامل نحن نستطيع أن نجد $f(y)$ والأمثله الآتيه تبين ذلك .

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = o$$

الحل : $N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ ، $M(x, y) = \frac{2x}{y^3}$

إذن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6x}{y^4}$ ، $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$

وعليه فإن الشرط $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ متحقق وهذا يعنى أن الطرف الأيسر فى المعادله المعطاه هو تفاضل تام لداله مجهوله $u(x, y)$. والأن سنبحث عن هذه الداله .

حيث أن

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$$

فإن

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \phi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \phi(y)$$

حيث $\phi(y)$ داله مجهوله حتى الآن فى y وبتفاضل هذه العلاقه بالنسبه لـ y أخذين فى الإعتبار أن

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

وبناء على ذلك فإن

$$\frac{-3x^2}{y^4} + \phi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

وبالتالى فإن

$$\phi'(y) = \frac{1}{y^2}$$

إذن

$$\phi(y) = -\frac{1}{y} + c_1$$

إذن

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c_1$$

وبهذا يكون الحل العام للمعادله التفاضليه المعطاه هو

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c_2$$

حيث c_1 ، c_2 ثوابت إختيارية .

• طريقة أخرى لحل المعادله التفاضلية التامه وهى تتلخص فيما يلى :

نحسب $$(i) \quad \int M(x,y)\,dx$$

ثم نحسب $$(ii) \quad \int N(x,y)\,dy$$

وبالتالى يكون الحل العام عباره عن الحدود التى ظهرت فى (i) مضافاً إليها الحدود التى ظهرت فى (ii) ولم تظهر فى (i) = ثابت إختيارى .

فبالنسبة للمثال السابق نجد أن

$$(i) \quad \int M(x,y)\,dx = \int \frac{2x}{y^3}\,dx = \frac{x^2}{y^3}$$

$$(ii) \quad \int N(x,y)\,dy = \int \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \right) dy = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3}$$

وبالتالى يكون الحل العام هو $$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

وهو نفس الجواب الذى حصلنا عليه مسبقاً .

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$2x\sin(3y)\,dx + 3x^2\cos(3y)\,dy = o$$

الحل : $N(x,y) = 3x^2\cos(3y)$ ، $M(x,y) = 2x\sin(3y)$

إذن $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 6x\cos(3y)$ ، $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6x\cos(3y)$

وعليه فإن الشرط $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ متحقق وهذا يعنى أن الطرف الأيسر

فى المعادله المعطاه تفاضل تام

إذن

$$\text{(i)} \quad \int M\,dx = \int 2x\sin(3y)\,dx = x^2\sin(3y)$$

$$\text{(ii)} \quad \int N\,dy = \int 3x^2\cos(3y)\,dy = x^2\sin(3y)$$

إذن الحل العام هو $x^2\sin(3y) = c$ حيث c ثابت إختيارى.

تمــارين (6)

س1 : أثبت أن المعادله التفاضليه الآتيه تكون تامه ثم أوجد حلها العام

وحلها الخاص عندما تكون $y = 1$ عند $x = 1$

$$(x^3 - 3x^2y + 2xy^2)\,dx - (x^3 - 2x^2y + y^3)\,dy = o$$

س٢ : حل المعادله التفاضليه الآتيه بعد التحقق من كونها تامه

$$(x^2 + Ln(y))\,dx + \left(\frac{x}{y}\right)dy = o$$

س٣ : حل المعادله التفاضليه

$$x\,y^2\,dx + (x^2 y - \cos(y))\,dy = o$$

س٤ : أوجد المعادله التفاضليه التامه والتى يكون حلها العام معطى كالاتى

$e^x \sin(y) = c$ حيث c ثابت إختيارى .

(ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات تامه وذلك بإستخدام معامل المكامله .

Equations That Lead To Exact Equations By Using The Integrating Factor

فى بعض الأحيان تكون المعادله التفاضليه

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = o \qquad (1)$$

غير تامه . ولكن يمكن جعلها تامه وذلك بضربها فى داله مناسبة ولتكن $g(x,y) \neq 0$. هذه الداله تسمى معامل التكامل أو المكامله (Integrating Factor) للمعادله (1) وعلى ذلك فإن

$$g(x,y).M(x,y)\,dx + g(x,y).N(x,y)\,dy = o \qquad (2)$$

تكون تامه إذا وإذا فقط تحقق الشرط

$$\frac{\partial(gM)}{\partial y} = \frac{\partial(gN)}{\partial x}$$

$$g\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial g}{\partial y}=g\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial g}{\partial x}$$

وبالتالى يكون

$$M\frac{\partial g}{\partial y}-N\frac{\partial g}{\partial x}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)g=0$$

أى أن

وهذه معادله تفاضليه جزئية فى الداله المجهوله g والتى تعتمد على المتغيرين x, y وبشكل عام تكون مسأله تعيين عامل المكامله $g(x, y)$ من هذه المعادله أكثر صعوبة من تكامل المعادله الأصليه (1) . ولذلك نفرض أن g داله فى x أو g داله فى y فقط وذلك حسب ظروف المسأله :

أولا : إذا كان $g=g(x)$ فعندئذ يكون $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ وعليه فإن

$$\frac{dg}{dx}=\left[\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot g}{N}\right] \qquad (I)$$

ثانيا : أما إذا كان عامل المكامله داله فى y فقط أى أن $g=g(y)$ فإن $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ وعليه فإن

$$\frac{dg}{dy}=\left[\frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot g}{M}\right] \qquad (II)$$

مثال : حل المعادله التفاضليه $(x^2+y^2+x)\,dx+x\,y\,dy=0$

الحل :

$$M(x,y)=x^2+y^2+x \quad ، \quad N(x,y)=xy$$

إذن $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$

إذن المعادله غير تامه

إذن بإستخدام العلاقة (I) نجد :-

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dg}{dx} = \frac{g}{x}$$

وبالتالى يكون $\frac{dg}{g} = \frac{dx}{x}$

وبتكامل الطرفين ينتج $g = x$

إذان إذا ضربنا المعادله المعطاه فى x فإنها تصبح تامه وتصبح على الصورة الأتيه

$(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$ وبالتالى نجد كما تعلمنا مسبقاً من أن

حل المعادله التفاضليه يكون على الصوره :

$$\int M\,dx = \int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

كذلك

$$\int N\,dy = \int (x^2 y)\,dy = \frac{x^2 y^2}{2}$$

وبذلك يكون الحل العام هو

$$\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = c$$

أو

$$6x^2 y^2 + 4x^3 + 3x^4 = c$$

حيث c ثابت إختيارى

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = o$$

بعد إيجاد معامل المكامله لها .

الحل :

$$M(x,y) = 2xy \quad , \quad N(x,y) = (y^2 - 3x^2)$$

إذن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6x$$

إذن نلاحظ أن $\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$ وبالتالى تكون المعادله المعطاه غير تامه .

إذن بإستخدام العلاقه (I) نجد أن

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = \frac{2x + 6x}{y^2 - 3x^2} = f(x,y)$$

وهذه بالطبع مرفوضه لأنها معتمده على متغيرين x, y إذن نستخدم العلاقه (II) فنجد

$$\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M} = \frac{-6x - 2x}{2xy} = -\frac{4}{y} = f(y)$$

إذن
$$\frac{dg}{dy}=\frac{-4g}{y}$$

إذن
$$\frac{dg}{g}=-4\,\frac{dy}{y}$$

وبتكامل الطرفين نجد أن
$$g=\frac{1}{y^4}$$

إذن بضرب المعادله المعطاه فى $\frac{1}{y^4}$ فإنها تصبح تامه وتصبح على

الصوره
$$\left(\frac{2\,x}{y^3}\right)dx+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3\,x^2}{y^4}\right)dy=o$$

وبالتالى نجد كما تعلمنا مسبقاً من أن حل المعادله التفاضليه التامه يكون على الصوره :

$$\int M\,dx=\int\frac{2\,x}{y^3}\,dx=\frac{x^2}{y^3}$$

كذلك
$$\int N\,dy=\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3\,x^2}{y^4}\right)dy=-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}$$

وبذلك يكون الحل العام هو
$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$$

أو
$$x^2-y^2=c\,y^3$$

حيث c ثابت إختيارى .

س١ حل المعادلات التفاضليه الآتيه بعد إيجاد معامل المكامله لكل منها

1. $(2x + y)\,dx - x\,dy = 0$

2. $(y + x y^2)\,dx - x\,dy = 0$

س٢ حل المعادله التفاضلية الآتيه :

$$\{\sin(x)\sec^2(y) + \cos(x+y)\}\,dy + \{\cos(x)\tan(y) + \cos(x+y)\}\,dx = 0$$

النوع الرابع :

(أ) المعادلات التفاضليه الخطيه

Linear Differential Equations

تعريف : المعادله التفاضليه $F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$

تسمى خطيه إذا كانت F داله خطيه فى المتغيرات $y, y', \ldots, y^n$

وبالتالى تكون الصوره العامه للمعادله التفاضليه الخطيه من الرتبه n على النحو الآتى :

$$a_0(x)\,y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + a_n(x)\,y = g(x)$$

وأى معادله تفاضليه لاتكون على هذه الصوره فإنها تكون غير خطيه .

فمثلا المعادله $y''' + 2e^x y'' + y y' = x^4$ غير خطيـه لوجود $y y'$ أما $y'' + y = 0$ فهى خطيه .

والصوره العامه للمعادله التفاضليه الخطيه ذات الرتبه الأولى هى :

$$y' + p(x)\,y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $p(x)$ ، $Q(x)$ دوال متصله فى x ومعامل y' يساوى الوحده

وإذا كانت وحالة خاصة $Q(x) = 0$ فتؤول المعادله (1) إلى الصوره :

$$y' + p(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

تسمى المعادله (2) بالمعادله الخطيه المتجانسه أما المعادله (1) فهى معادله خطيه غير متجانسه .

من السهل مكامله المعادله الخطيه المتجانسه (2) وذلك بفصل المتغيرات كالاتى :

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

وبتكامل الطرفين نجد

$$Ln(y) = -\int p(x)\,dx + Ln(c)$$

وبأخذ e للطرفين نجد

$$y = c\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

ولحل المعادله الخطيه الغير متجانسه (1) فإننا نقوم بإيجاد معامل التكامل . لذلك دعنا نكتب المعادله (1) على الشكل

$$[\,p(x)\,y - Q(x)\,]\,dx + dy = 0$$

إذن

$$M(x, y) = p(x)\,y - Q(x) \quad , \quad N(x, y) = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = p(x) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

إذن باستخدام العلاقه (I) نجد أن

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}=p(x)$$

$$\therefore \frac{dg}{dx}=p(x)\cdot g$$

$$\therefore \int\frac{dg}{g}=\int p(x)\,dx$$

ومنها

$$Ln(g)=\int p(x)\,dx$$

وبأخذ e للطرفين ينتج

$$g=e^{\int p(x)\,dx}$$

وهذا يبين لنا أن $e^{\int p(x)\,dx}$ يمثل المعامل التكاملى للمعادله (1) .
دعنا الأن نضرب (1) فى هذا المعامل فنجد أن

$$e^{\int p(x)\,dx}(y'+p(x)y)=e^{\int p(x)\,dx}\cdot Q(x) \qquad (3)$$

وحيث أن

$$\frac{d\int p(x)\,dx}{dx} = p(x)$$

فإن هذه المعادله (3) يمكن كتابتها كالاتى :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx} \cdot y\right) = e^{\int p(x)\,dx}\, Q(x)$$

ويمكننا التحقق من ذلك بتفاضل حاصل ضرب الدالتين $\left(y \cdot e^{\int p(x)\,dx}\right)$

وبتكامل الطرفين نحصل على

$$y\, e^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} \cdot Q(x)\,dx + c$$

وبقسمة كل من الطرفين على $e^{\int p(x)\,dx}$ نحصل على صيغة الحل العام للمعادله (1) كالاتى :-

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)\,dx + c\right] \qquad (*)$$

مثال : حل المعادله التفاضليه الخطيه الأتيه

$$y' - y = e^{2x}$$

الحل :

$$p(x) = -1 \quad , \quad Q(x) = e^{2x}$$

إذن

$$\int p(x)\,dx = \int (-1)\,dx = -x$$

إذن معامل التكامل يكون

$$g(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-x}$$

وبالتعويض فى (*) نحصل على الحل العام

$$y(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}\,.\,e^{2x}\;dx + c\right] = e^{x}\;[\,e^{x} + c\,] = c\,e^{x} + e^{2x}$$

ملاحظة : المعامل التكاملى $g(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ يستخدم فقط فى المعادلات التفاضليه الخطية التى فيها معامل $\frac{dy}{dx}$ يساوى الوحدة ولذلك يجب جعل معامل $\frac{dy}{dx}$ هو الوحدة .

مثال : حل المعادله التفاضليه $\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)\frac{dy}{dx} + 2y = \tan(x)$

عندما $y(0) = 0$

الحل : بضرب طرفى المعادله فى $\tan(x)$ نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + 2y\tan(x) = \tan^2(x)$$

إذن $Q(x) = \tan^2(x)$ ، $p(x) = 2\tan(x)$

إذن معامل التكامل يكون :

$$g(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 2\tan(x)\,dx} = e^{2\,\mathrm{Ln}(\sec(x))} = \sec^2(x)$$

وبالتعويض فى الصوره العامه للحل (*) نجد أن

$$y(x) = \frac{1}{\sec^2(x)}\left[\int \sec^2(x)\tan^2(x)\,dx + c\right]$$

$$\therefore \quad y(x) = \frac{1}{\sec^2(x)} \cdot \frac{\tan^3(x)}{3} + \frac{c}{\sec^2(x)}$$

أو $y(x) = \frac{1}{3}\cos^2(x)\tan^3(x) + c\cos^2(x)$

وباستخدام الشروط المعطاه وهى $y = 0$ عندما $x = 0$ نجد أن $c = 0$

ومن ثم فالحل الخاص يكون على الصوره

$$y(x) = \frac{1}{3}\cos^2(x)\tan^3(x)$$

تمارين (8)

س١ حل المعادله التفاضليه الخطيه الآتيه : $xy' + y + 4 = 0$

س٢ حل المعادلات التفاضليه الخطيه الآتيه :

(i). $y' + y\tan(x) = \sin(2x)$; $y(0) = 1$

(ii). $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$; $y(1) = 0$

(ب) المعادلات التى تؤول إلى معادلات خطية

Equations That Lead To Linear Equations

أولا : معادله برنوللى *Bernoulli's Equation*

ومعادله برنوللى هى معادله تفاضليه من الرتبه الأولى وصورتها العامه هى

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

حيث n عدد ثابت أكبر من الصفر.(فى حاله $n = 0$ فتؤول المعادله (1) إلى المعادله الخطيه السابق التعامل معها) ، $p(x)$ ، $Q(x)$ دالتين متصلتين فى x أو ثابتان وتؤول هذه المعادله إلى المعادله الخطيه وذلك بإجراء التحويل الآتى :

بقسمه جميع حدود المعادله على y^n نحصل على

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)\,y^{-n+1}=Q(x) \qquad (2)$$

ثم نجرى التعويض : $z=y^{1-n}$

ومنها $\frac{dz}{dx}=(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$

وبالتعويض فى (2) نجد أن

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dz}{dx}+p(x)\,z=Q(x)$$

أى أن

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)\,p(x)\,z=(1-n)\,Q(x)$$

وهذه معادله تفاضليه خطيه تحل كما فى البند السابق .

مثال : حل المعادله التفاضليه $\frac{dy}{dx}+2y=y^2e^x$

الحل : بالقسمه على y^2 نحصل على

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+2y^{-1}=e^x \qquad (1)$$

وبوضع $z=y^{-1}$ ومنها

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

وبالتعويض فى (1) نحصل على

$$-\frac{dz}{dx}+2z=e^x$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} - 2z = -e^{x}$$

هى معادله تفاضليه خطيه

وبالتالى يكون $p(x) = -2$ ، $Q(x) = -e^{x}$

إذن معامل التكامل هو

$$g(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

إذن

$$z = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx} . Q(x)\,dx + c\right]$$

أى أن

$$z = e^{2x}\left[-\int e^{-2x} . e^{x}\,dx + c\right]$$

$$\therefore \quad z = e^{2x}\left[e^{-x} + c\right]$$

$$\therefore \quad z = e^{x} + c\,e^{2x} = \frac{1}{y}$$

إذن حل المعادله التفاضليه المعطاه يكون

$$y = \frac{e^{-x}}{(1 + c\,e^{x})}$$

حيث c ثابت إختيارى

ثانيا : معادله ريكات *Riccat's Equation*

تأخذ معادله ريكات فى حالتها العامه الصوره

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+Q(x)y+R(x) \qquad (1)$$

حيث p ، Q ، R دوال متصله فى x أو ثوابت . وتحتوى هذه المعادله كحالات خاصة على معادلتين سبق دراستهما :

(i) عندما تكون $p(x)=o$ نحصل على المعادله الخطيه

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)y+R(x)$$

(ii) عندما تكون $R(x)=o$ نحصل على معادله برنوللى

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+Q(x)y$$

لحل معادله ريكات فإنه لابد وأن يتوفر لدينا حلاً خاصاً لها حيث يمكن تحويل هذه المعادله إلى معادله خطيه من الرتبه الأولى وذلك بوضع

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

حيث y_1 يمثل حلاً خاصاً لمعادله ريكات

إذن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

وبالتعويض فى (1) نحصل على :

$$\frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=p(x)\,.\left(y_1+\frac{1}{z}\right)^2+Q(x)\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+R(x)$$

$$\therefore\quad \frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=p(x)\,.\left(y_1^2+\frac{2y_1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+Q(x)\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+R(x)$$

وهذه المعادله يمكن تجزئتها إلى معادلتين هما :

$$\frac{dy_1}{dx}=p(x)\,y_1^2+Q(x)\,y_1+R(x)$$

وهذه تكون على صورة معادله ريكات حيث أن حلها y_1 معروف ومعطى كحل خاص للمعادله (1) .

أما المعادله الثانيه فهى

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2p(x)\,y_1}{z}+\frac{p(x)}{z^2}+\frac{Q(x)}{z}$$

ولحل هذه المعادله فإننا نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=-2z\,p(x)\,y_1-p(x)-Q(x)\,z$$

$$\therefore\quad \frac{dz}{dx}=-(2p(x)\,y_1+Q(x))\,z-p(x)$$

$$\therefore\quad \frac{dz}{dx}+(2p(x)\,y_1+Q(x))\,z=-p(x)$$

وهذه معادله خطية تحل كما فى البند السابق .

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

حيث $y_1 = \frac{1}{x}$ هو حل خاص لها

الحل : نفرض أن

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

إذن $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$ وبالتعويض فى المعادله المعطاه نجد أن

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

إذن

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x\,z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2}$$

وبالضرب فى $-z^2$ نجد أن

$$z' + \frac{2}{x} z = -1$$

وهذه معادله خطيه تحل كالآتى

معامل التكامل هو

$$g(x) = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{Ln(x^2)} = x^2$$

إذن

$$z = \frac{1}{x^2}\left(\int x^2 . (-1)\, dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^3}{3} + c\right]$$

إذن
$$y=\frac{1}{x}+\left[-\frac{x^2}{\frac{x^3}{3}+c}\right]$$

هو حل المعادله التفاضليه المعطاه

ثالثا : المعادلات التى تكون على الصوره :

$$\frac{dy}{dx}+p(x)e^{y}=Q(x)$$

وهذه يمكن تحويلها إلى معادلات خطيه وذلك بوضع

$$u=e^{-y}$$

ومنها
$$\frac{du}{dx}=-e^{-y}\frac{dy}{dx}$$

إذن
$$e^{-y}\frac{dy}{dx}+p(x)=e^{-y}\ Q(x)$$

وبالتعويض نجد أن
$$-\frac{du}{dx}+p(x)=u\ .\ Q(x)$$

إذن
$$\frac{du}{dx}+Q(x).u=\ p(x)$$

وهذه معادله تفاضليه خطيه تحل كما تعلمنا مسبقاً .

رابعاً : المعادلات التى تكون على الصورة

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)\,p(x) = Q(x)$$

وهذه يمكن تحويلها إلى معادلات خطية وذلك بوضع

$$v = f(y)$$

ومنها

$$\frac{dv}{dx} = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

إذن بالتعويض نجد أن

$$\frac{dv}{dx} + p(x)\,v = Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية تحل كما تعلمنا مسبقاً .

مثال : حل المعادلة التفاضلية

$$\sin(y)\frac{dy}{dx} = (\cos(x))\cdot(2\cos(y) - \sin^2(x))$$

الحل :

$$\sin(y)\frac{dy}{dx} - 2\cos(x)\cos(y) = -\cos(x)\sin^2(x)$$

$$-\sin(y)\frac{dy}{dx} + 2\cos(x)\cos(y) = \cos(x)\sin^2(x)$$

وبفرض $v = \cos(y)$ إذن $\frac{dv}{dx} = -\sin(y)\frac{dy}{dx}$

وبالتالى يكون $\frac{dv}{dx} + 2v\cos(x) = \cos(x)\sin^2(x)$

وهذه معادلة خطية تحل كما يلى

معامل التكامل هو $g(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{2\sin(x)}$

إذن

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + c\right]$$

إذن

$$y = e^{-2\sin(x)}\left[\int e^{2\sin(x)} \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)\, dx + c\right]$$

$$y = e^{-2\sin(x)}\left[\frac{1}{2} e^{2\sin(x)} \cdot \sin^2(x) - \frac{1}{2} e^{2\sin(x)} \sin(x) + \frac{1}{4} e^{2\sin(x)} + c\right]$$

إذن

$$\cos(y) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4} + c\, e^{-2\sin(x)}$$

وهو حل المعادله التفاضلية المعطاه حيث c هو ثابت إختيارى .

ملاحظة :

لايجــاد التكامــل $\int e^{2\sin(x)} \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)\, dx$ فــإننــا

نستخدم طريقة التجزىء مرتين متتاليتين .

تمارين (9)

س١ : حل معادلة برنو للى الآتية

$$\frac{dy}{dx} + y\cot(x) = y^2 \sec^2(x)$$

س٢ : حل المعادلة الآتية

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{x^2+1} e^y = \frac{2x}{x^2+1}$$

س٣ : حل معادلة ريكات الآتية

$$x^3 y' = x^2 y + y^2 - x^2 \quad ; \quad y_1 = x$$

س٤ : حل المعادلة الآتية

$$x^2 \cos(y) \frac{dy}{dx} = 2x \sin(y) - 1$$

ثانيا : المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجات العليا

Differential Equations Of First Order And Higher Degree

المعادله التفاضلية من الرتبة الأولى صورتها العامه هى $f(x, y, y') = 0$

أو $f(x, y, p) = 0$ حيث $p = \frac{dy}{dx}$. فإذا كانت درجة p أكبر من الواحد

كما فى المعادله

$$p^3 - 3p^2x + 2y = 0$$

فإننا نسمى هذه المعادله معادله تفاضلية من الرتبة الأولى ومن درجات أعلى وفى هذا المثال تكون المعادله من الدرجة الثالثة والصورة العامه لهذا النوع من المعادلات من الرتبة الأولى والدرجة n هى :

$$p^n + f_1(x, y)\, p^{n-1} + f_2(x, y)\, p^{n-2} + \dots + f_{n-1}(x, y)\, p + f_n(x, y) = 0 \quad (1)$$

وتوجد عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات :-

(أ) معادلات تحل فى p :

فى هذه الحالة يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادله (1) الذى نعتبره ككثيرة حدود بالنسبة لـ p فى صورة n من العوامل الخطية الحقيقية أى أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$(p - F_1)(p - F_2) \dots (p - F_n) = 0$$

نساوى كل عامل من عوامل المعادله بالصفر فنحصل على n من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى التى يمكن حلها .

إذن

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = F_2(x, y)\text{ ،}$$

.

.

.

$$\frac{dy}{dx} = F_n(x, y)$$

فنحصل على الحلول

$$\phi_1(x, y, c_1) = 0 \text{ ،} \quad \phi_2(x, y, c_2) = 0, \ldots, \phi_n(x, y, c_n) = 0 \qquad (2)$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية (1) هو حاصل ضرب

$$\phi_1(x, y, c_1) \cdot \phi_2(x, y, c_2) \ldots \phi_n(x, y, c_n) = 0$$

للحلول الناتجة من (2)

وحيث أن المعادلة التفاضلية (1) من الرتبة الأولى إذن لابد وأن تحتوى على ثابت إختيارى واحد فقط إذن بالتالى يكون الحل العام لها على الصورة

$$\phi_1(x, y, c) \cdot \phi_2(x, y, c) \ldots \phi_n(x, y, c) = 0$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية

$$p^3 - p^2 - 2p = 0$$

الحل : يمكن كتابة المعادله أعلاه على الصورة

$$p(p^2 - p - 2) = 0$$

أو

$$p(p-2)(p+1) = 0$$

إذن $p = o$ ومنها $\frac{dy}{dx} = o$ ومنها $y = c_1$

أو $p = 2$ ومنها $\frac{dy}{dx} = 2$ ومنها $y = 2x + c_2$

أو $p = -1$ ومنها $\frac{dy}{dx} = -1$ ومنها $y = -x + c_3$

وبالتالى يكون الحل العام هو

$$(y - c_1) (y - 2x - c_2) (y + x - c_3) = o .$$

وحيث أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى فإن من المتوقع أن لايحتوى الحل إلا على ثابت إختيارى واحد وعليه فيؤول الحل إلى

$$(y - c) (y - 2x - c) (y + x - c) = o$$

(ب) معادلات تحل فى y :

وهى على الصورة

$$y = f (x , y') = f (x , p) \qquad (1)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = F\left(x , p , \frac{dp}{dx} \right)$$

وهى معادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبحل المعادله $p = F\left(x , p , \frac{dp}{dx} \right)$ نحصل على

$$p = \phi (x , c) \qquad (2)$$

وبالتعويض عن (2) فى (1) نحصل على $y = f(x, \phi(x, c))$ وهذا يكون هو حل المعادلة (1) .

مثال : حل المعادله

$$y = 2px + p^4 x^2 \qquad (1)$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة لـ x نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2xp^4 + 4x^2p^3\frac{dp}{dx}$$

إذن

$$2x\frac{dp}{dx}[1 + 2xp^3] + p(1 + 2xp^3) = 0$$

أو

$$(1 + 2xp^3)\left[2x\frac{dp}{dx} + p\right] = 0$$

نهمل العامل $1 + 2xp^3$ لانه لا يحتوى على المشتقة $\frac{dp}{dx}$

وبالتالى فإن

$$p + 2x\frac{dp}{dx} = 0$$

وبفصل المتغيرات وإجراء التكامل نجد أن $xp^2 = c$ حيث c ثابت إختيارى

إذن لدينا

$$y = 2px + p^4x^2$$

وبالتعويض عن قيمة $p = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x}}$ نجد أن

$$y = 2\,\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x}}\,.\,x + \frac{c^2}{x^2}\,.\,x^2$$

إذن

$$y = 2\sqrt{c}\,.\sqrt{x}\; + c^2$$

ومنها

$$(\,y - c^2)^2 = 4\,c\,x$$

وهو يمثل الحل العام للمعادله (1) .

(جـ) معادلات تحل فى x :

وهى على الصورة

$$x = f\,(\,y\,,\,p\,)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة لـ y نحصل على

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\;.\;\frac{dp}{dy} = F\left(y\,,\,p\,,\,\frac{dp}{dy}\right)$$

وهذه معادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى . وبحل المعادله

$$\frac{1}{p} = F\left(\,y\,,\,p\,,\,\frac{dp}{dy}\,\right)$$

نحصل على $p = \phi\,(\,y\,,\,c\,)$

وبالتعويض عن قيمة $p = \phi\,(\,y\,,\,c\,)$ فى المعادله $x = f\,(\,y\,,\,p\,)$ فإننا نحصل على حلها .

مثال : حل المعادله $y = 3\,p\,x + 6\,p^2\,y^2$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة

$$3\,x = \frac{y}{p} - 6\,p\,y^2$$

ثم نجرى التفاضل بالنسبة لـ y فنحصل على

$$\frac{3}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py$$

$$y\frac{dp}{dy}\left[\frac{1}{p^2} + 6y\right] + 2p\left[\frac{1}{p^2} + 6y\right] = o$$

إذن

$$\left[\frac{1}{p^2} + 6y\right]\left[y\frac{dp}{dy} + 2p\right] = o$$

بمساواه $2p + y\dfrac{dp}{dy}$ بالصفر وبفصل المتغيرات وبإجراء التكامل نجد أن

$py^2 = c$ حيث c ثابت إختيارى

إذن $p = \dfrac{c}{y^2}$ وبالتعويض عنها فى المعادله الأصلية المعطاه نحصل على الحل العام لها

$$y^3 = 3cx + 6c^2 .$$

نلاحظ أننا أهملنا الحد أو العامل $\dfrac{1}{p^2} + 6y$ لانه لايحتوى علي المشتقة $\dfrac{dp}{dy}$

(د) معادلة كليروت *Clairaut's Equation*

إن المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$y = px + f(p)$$

تسمى معادله كليروت وحلها يكون على الشكل

$$y = cx + f(c)$$

(c ثابت إختيارى)

ويمكن الحصول عليه بسهولة وذلك بوضع c بدلا من p فى المعادلة المعطاه .

مثال : حل المعادله

$$y = p x + \sqrt{4 + p^2}$$

الحل :

$$y = c x + \sqrt{4 + c^2}$$

مثال : حل المعادله

$$(y - p x)^2 = 1 + p^2$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة

$$(y - p x)^2 - (1 + p^2) = o$$

إذن

$$[(y - p x) - \sqrt{1 + p^2}] [(y - p x) + \sqrt{1 + p^2}] = o \qquad (*)$$

إذن

$$y - p x - \sqrt{1 + p^2} = o$$

ومنها

$$y = p x + \sqrt{1 + p^2}$$

ومنها

$$y = c x + \sqrt{1 + c^2}$$

أيضا نجد

$$y - p x + \sqrt{1 + p^2} = o$$

ومنها

$$y = p x - \sqrt{1 + p^2}$$

ومنها

$$y = c x - \sqrt{1 + c^2}$$

إذن الحل العام للمعادله (*) يكون على الصورة

$$(y - c x - \sqrt{1 + c^2}) (y - c x + \sqrt{1 + c^2}) = o$$

أو

$$(y - c x)^2 = 1 + c^2$$

تمارين (10)

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

1- $x^2 (y')^2 + 4xyy' + 3y^2 = 0$

2- $xp^2 - yp - y = 0$

3- $x = yp + p^2$

4- $p^2 x(x-2) - p(2y - 2xy - x + 2) + y^2 + y = 0$

الباب الثالث

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابته

Linear Differential Equations of The Second Order With Constant Coefficients

مقدمه :

تسمى المعادله التفاضلية من الرتبة الثانية بالخطية إذا كانت من الدرجة الأولى بالنسبة للدالة المجهولة y ومشتقاتها y'' ، y' أى أنها تكون على الصورة

$$a y'' + b y' + c y = f(x) \qquad (*)$$

حيث a , b , c دوال معطاه فى x أو ثوابت [$a \neq o$]

وإذا كانت $f(x) = o$ فى (*) فإن المعادلة

$$a y'' + b y' + c y = o$$

تسمى متجانسة (Homogeneous)

أما إذا كانت $f(x) \neq o$ فإن المعادله

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

تسمى غير متجانسة (Nonhomogeneous) .

والآن سوف نستعرض بعض الخواص الأساسية للمعادلات الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

١ - إذا كان y_2 ، y_1 حلين خاصيين للمعادله التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية (أي لايحتويان على ثوابت)

$$ay'' + by' + cy = o \qquad (1)$$

فإن $y_1 + y_2$ يكون أيضا حلا خاصاً لهذه المعادلة .

٢ - إذا كان y_1 حلاً للمعادلة (1) فإن cy_1 يكون حلاً أيضاً لها حيث c كمية ثابته .

تعريف :

الدوال $f_i(x)$ حيث $i = 1, .., n$ تكون مرتبطة خطياً (Linearly dependent) فى الفترة $a \le x \ge b$ إذا وجدت مجموعة من الثوابت $a_1 , a_2 , \ldots a_n$ (ليس جميعهم أصفار) بحيث أن

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) = o \qquad (2)$$

تعريف :

الدوال $f_i(x)$ حيث $i = 1, \ldots, n$ تكون غير مرتبطة (مستقلة) خطياً (Linearly independent) إذا كانت المجموعة الوحيدة من الثوابت $a_1 , a_2 , \ldots a_n$ والتى تكون العلاقة (2) متحققة هى المجموعة التى يكون فيها $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = o$

مثال : الدالتان $f_1 = \sqrt{3}\, x^3$ ، $f_2 = 7x^3$ يكونان مرتبطان خطياً فى أى فترة لان

$$7(\sqrt{3}\, x^3) - \sqrt{3}\,(7x^3) = o$$

فى أى فترة .

كذلك يمكن القول بأنه إذا كانت النسبة $\frac{f_1}{f_2}$ تساوى ثابت فإننا نستطيع القول بأن f_1 ، f_2 مرتبطان خطياً .

مثال : الدالتان $f_1 = x$ ، $f_2 = \frac{1}{x^2}$ يكونان مستقلان خطياً لان العلاقة $a_1 x + \frac{a_2}{x^2} = 0$ تكون متحققة عندما $a_1 = a_2 = 0$ ولتفسير ذلك نستطيع القول بأننا إذا أخذنا أى عددين لـ x غير الصفر وليكونا على سبيل المثال -1 ، 1 وعوضنا عنهما فى العلاقة $a_1 x + \frac{a_2}{x^2} = 0$ فإننا نحصل على معادلتين هما $a_1 + a_2 = 0$ ، $-a_1 + a_2 = 0$ وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $a_1 = a_2 = 0$.

ويمكن القول أيضا بأنه إذا كانت النسبة $\frac{f_1}{f_2}$ لا تساوى ثابت فإننا نستطيع القول بأن f_1 ، f_2 مستقلان خطياً .

تعريف :

يسمى حلا المعادله (1): y_2 ، y_1 بحلين غير مرتبطين (مستقلين) خطياً فى $[a, b]$ إذا كانت النسبة بينهما لاتساوى مقدار ثابت أى أن

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{ثابت}$$

ويســـمى الحلان y_1 ، y_2 فى الحالــة العكسية بالحلين المرتبطين خطيـا فى [a , b] إذا وجد عدد ثابت λ بحيث يكون $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$.

مثال : إذا كانت لدينا المعادلة $y'' - y = o$ فإنه من السهل التأكد من أن الدوال e^x ، e^{-x} ، $3e^x$ ، $5e^{-x}$ هى حــلول لـــهـــذه المعـــادله وأن الـــدالتين e^x ، e^{-x} غيـر مـرتبـطين خطيا أما e^x ، $3e^x$ فـهـمـا مرتبطان خطياً .

تعريف :

إذا كانت y_2 ، y_1 دالتين فى x فإن المحدد

$$w(y_1 , y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

يسمى بالرونسكيان (wronskian) لهاتين الدالتين .

٣ – إذا كانت الدالتان y_2 ، y_1 مـرتبطتين خطيا فى الفتـرة [a , b] فإن الرونسكيان يكون مساويا للصفر .

٤ – إذا كان الحلان y_2 ، y_1 للمعـادلــة (1) غيـر مـرتبـطين خطيـا فى الفتـرة [a , b] فـإن الرونسكيـان $w(y_1 , y_2)$ لا يكون مساويا للصفر عند أى نقطة .

٥ – إذا كان y_2 ، y_1 حلين خاصين وغير مـرتبطين خطياً للمعادلة (1) فـإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يكــون هــو حلها العــام حيــث c_2 ، c_1 ثابتين إختياريين .

٦ - إذا علم حل خاص للمعادله (1) فإن الحل الآخر يكون على الصورة

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

وبالتالى يكون الحل العام على الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

مثال : عين الحل العام للمعادلة

$$(1 - x^2)\,y'' - 2x\,y' + 2y = o$$

إذا علم أن $y_1 = x$ هو حل خاص لها

الحل : بإستخدام الخاصية السابقة نجد أن

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx}}{x^2}\,dx = x \int \frac{e^{-Ln\,(1-x^2)}}{x^2}\,dx$$

$$y_2 = x \int \frac{dx}{(1-x^2)\,x^2} = x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\,(1-x)} + \frac{1}{2\,(1+x)}\right)dx$$

$$y_2 = x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

ومن ثم فإن الحل العام يكون على الصورة

$$y = c_1\,x + c_2\left(-1 + \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

ملاحظة : لايجاد $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)\,x^2}\,dx$ فإننا نستخدم طريقة التجزىء .

أولا : المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

Homogeneous Linear Differential Equations Of The Second Order With Constant Coefficients

نريد حل المعادله

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \qquad (1)$$

حيث أننا سنعتبر أن المعاملات $a\,,\,b\,,\,c$ ثوابت .

لحل مثل هذا النوع من المعادلات سنفرض أن $y = e^{\lambda x}$ هو حل للمعادله التفاضلية (1) حيث λ ثابت وعليه فإن

$$y = e^{\lambda x} \to y' = \lambda\,e^{\lambda x} \to y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

وبالتعويض فى (1) نحصل على

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

إذن

$$e^{\lambda x}[a\lambda^2 + b\lambda + c] = 0$$

ومن ثم فإن $y = e^{\lambda x}$ هو حل للمعادلة (1) إذا كان λ هو حل للمعادلة

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادله (2) تسمى بالمعادله المميزة (Characteristic Equation) للمعادلة (1) ولها جذران λ_1 ، λ_2 ويعطيان بالصورة

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ، \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وحيث أن a , b , c ثوابت حقيقية فإن جذرى المعادلة المميزة إما أن يكونا

أ - حقيقين ومختلفين $\lambda_1 \neq \lambda_2$

ب - مركبين

جـ - حقيقيان ومتساويان $\lambda_1 = \lambda_2$

قاعدة :

الحل :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

(حيث c_2 ، c_1 ثابتين إختياريين)

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

إذا كان وإذا كان فقط y_2 ، y_1 حلين غير مرتبطين خطيا .

والآن سوف نوضح كل من الحالات الثلاث لجذرى المعادلة المميزة :-

أ - الجذران حقيقيان ومختلفان *Real Distinct Roots*

مثال : حل المعادلة $y'' + 3y' + 2y = 0$

الحل : نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ ومنها $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ومنها $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه نجد أن

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} + 2 e^{\lambda x} = 0$$

إذن

$$e^{\lambda x} [\lambda^2 + 3\lambda + 2] = 0$$

إذن المعادلة المميزه هى $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ومنها نجد أن

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

إذن $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = -2$

إذن الحلان الخاصان هما $y_1 = e^{-x}$ ، $y_2 = e^{-2x}$

وحيث أن

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = e^{x} \neq \text{ثابت}$$

إذن فهما غير مرتبطين خطياً وبذلك يكون الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

ب - الجذران مركبين *Complex Roots*

نحن نعلم أن المعادلة المميزه هى

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = o$$

وبالتالى يكون الجذران هما

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ،}$$

فإذا كان $b^2 < 4ac$ فإن λ_2 ، λ_1 يكونان مركبين.أى أن

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \text{،} \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta$$

حيث α ، β أعداد حقيقية وبالتالى يكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = e^{\alpha x}[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}]$$

$$y = e^{\alpha x}[c_1(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + c_2(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))]$$

$$y = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos(\beta x) + i(c_1 - c_2)\sin(\beta x)]$$

وبالسماح لـ c_1 , c_2 ليكونا مركبين ومترافقين (conjugate) فإن

$$c_1 = k + iD$$

$$c_2 = k - iD$$

حيث k ، D حقيقيان وعليه فإن

$$c_1 + c_2 = 2k$$

$$c_1 - c_2 = 2iD$$

ومنها نجد أن

$$i(c_1 - c_2) = -2D$$

إذن

$$y = e^{\alpha x}[2k\cos(\beta x) - 2D\sin(\beta x)]$$

أو

$$y = e^{\alpha x}[A_1\cos(\beta x) + A_2\sin(\beta x)]$$

حيث A_1 ، A_2 ثابتين إختياريين .

مثال : حل المعادلة $y'' + y' + y = 0$

الحل : بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ نجد أن المعادلة المميزه هى

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

ومنها نجد أن

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ،}$$

إذن

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left\{C\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

حيث C ، B ثوابت إختيارية .

جـ - الجذران حقيقيان ومتساويان ***Real Equal Roots***

يكون الجذران حقيقيان ومتساويان عندما يكون $b^2 = 4ac$ وبالتالى يكون الجذران

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a}$$

إذن يكون الحلان الخاصان هما

$$y_1 = y_2 = e^{\frac{-b}{2a}x}$$

وإذا أردنا الحصول على الحل العام فكالمعتاد نجد أن

$$y = A\,e^{-\frac{b}{2a}x} + B\,e^{-\frac{b}{2a}x}$$

حيث A , B ثوابت إختيارية .

وهذا بالطبع لايمثل الحل العام لان الحلان الخاصان y_1 ، y_2 مرتبطين خطياً

حيث أن $\frac{y_1}{y_2} =$ ثابت

لذلك نفترض أن الحل العام للمعادلة (1) هو $y = e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot u(x)$

حيث $u(x)$ دالة مجهولة ونريد إيجادها . لذلك نوجد

$$y' = e^{-\frac{b}{2a}x}\left\{u' - \frac{b}{2a}u\right\}$$

$$y'' = e^{-\frac{b}{2a}x}\left\{u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right\}$$

وبالتعويض عنها فى $a y'' + b y' + c y = o$ فإننا نجد أن

$$a\,e^{-\frac{b}{2a}x}\left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right) + b\,e^{-\frac{b}{2a}x}\left(u' - \frac{b}{2a}u\right) + c\,e^{-\frac{b}{2a}x}\,u = o$$

إذن
$$a\left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right) + b\left(u' - \frac{b}{2a}u\right) + cu = o$$

$$au'' - bu' + \frac{b^2}{4a}u + bu' - \frac{b^2}{2a}u + cu = o$$

$$au'' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)u = o$$

$$au'' + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)u = o$$

ولكن نعلم أن $b^2 = 4ac$ إذن $-b^2 + 4ac = o$

ومنها نجد أن

$$au'' = o \rightarrow u'' = o \rightarrow u' = B$$

ومنها

$$u = Bx + A$$

حيث B , A ثوابت إختيارية

إذن الحل العام يكون على الصورة

$$y = u \,.\, e^{-\frac{b}{2a}x} = (Bx + A)\, e^{-\frac{b}{2a}x}$$

مثال : حل المعادله

$$y'' - 6y' + 9y = o$$

الحل : بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ نجد أن المعادلة المميزه هى $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = o$

ومنها نجد أن

$$(\lambda - 3)^2 = o$$

إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ إذن الحل العام للمعادله المعطاه هو

$$y = e^{3x}(A + Bx).$$

تمارين (11)

حل المعادلات التفاضلية الآتية

1. $y'' + y' - 2y = 0$

حيث $y(0) = 4$ ، $y'(0) = 1$

2. $4y'' + 4y' - 7y = 0$

3. $4y'' + y = 0$

4. $y'' + y = 0$

علماً بأن $y(0) = 3$ ، $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

5. $y'' + 8y' + 16y = 0$

6. $y'' - 4y' + 4y = 0$

حيث $y(0) = 3$ ، $y'(0) = 1$

ثانياً : المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

Nonhomogeneous Linear Differential Equations Of The Second Order With Constant Coefficients

وصورتها العامه

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (1)$$

حيث c ، b ، a ثوابت ، $f(x) \neq 0$

الحل العام لهذا النوع من المعادلات التفاضلية يكون على الصورة

$$y_G = y_c + y_p$$

حيث y_c تسمى بالدالة المكملة (complementary function) وهى تمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة $a y'' + b y' + c y = o$ ، y_p تسمى بالحل الخاص أو التكامل الخاص (particular integral) وهو يمثل أى حل خاص للمعادلة الغير متجانسه (1) .

لقد شرحنا مسبقا كيفية الحصول على الحل العام y_c . وللحصول على الحل y_p فإننا سوف نناقش الطرق الآتيه :

(أ) طريقة مقارنة المعاملات *Method Of Comparing The Coefficients*

ولشرح هذه الطريقة فإننا سوف نذكر الحالات الآتيه :

الحالة الأولى :

عندما تكون $f(x)$ عبارة عن كثيرة حدود فى x

أى أن $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = p_n(x)$

فإننا فى هذه الحالة نفرض أن الحل الخاص y_p يكون على صورة كثيرة حدود ومن نفس درجة كثيرة الحدود للدالة $f(x)$ فمثلاً إذا كانت $f(x) = 1 + x$ فإننا سنفرض أن $y_p = a x + b$ وإذا كانت $f(x) = x^2$ فإننا سنفرض أن $y_p = a x^2 + b x + c$ وإذا كانت $f(x) = x + x^3$ مثلا فإننا سنفرض أن $y_p = a x^3 + b x^2 + c x + d$ وهكذا حيث أن a , b , c , d ثوابت نهدف إلى إيجادها عن طريق مقارنة المعاملات كما سنرى فى الأمثلة الآتية :

مثال : أوجد y_p للمعادلة $y'' + 2y' + y = 1 + x$

الحل : نلاحظ أن الطرف الأيمن عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الأولى إذن

سنفرض أن $y_p = a + bx$ إذن $y'_p = b$ ، $y''_p = 0$

وبالتعويض فى المعادلة أعلاه نجد أن $2b + (a + bx) = 1 + x$

وبمقارنة المعاملات لـ x^1 ، x^0 نجد أن $b = 1$

، $2b + a = 1$

إذن $a = -1$

إذن يكون الحل y_p على الصورة

$$y_p = x - 1$$

مثال : أوجد y_p للمعادلة $y'' + 2y' = x + x^2$

الحل : نلاحظ أن الطرف الأيمن عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية إذن سنفرض أن

$$y_p = Ax^2 + Bx + c$$

إذن $y'_p = 2Ax + B$

إذن $y''_p = 2A$

وبالتعويض فى المعادلة أعلاه نجد أن

$$2A + 2[2Ax + B] = x + x^2$$

وهنا نلاحظ أننا لايمكن مقـارنة العوامل لـ x^2 لأن الطرف الأيسر خال من x^2 لذلك نحن نفترض أن

$$y_p = x\,(A x^2 + B x + c)$$

إذن
$$y_p = A x^3 + B x^2 + c x$$

ومنها
$$y'_p = 3 A x^2 + 2 B x + c$$

$$y''_p = 6 A x + 2 B$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه نجد أن

$$6 A x + 2 B + 2 [3 A x^2 + 2 B x + c] = x + x^2$$

وبمقارنة المعاملات لـ x^2 ، x^1 ، x^o نجد أن

$$6 A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$6 A + 4 B = 1 \longrightarrow B = o$$

$$2 B + 2 c = o \longrightarrow c = o$$

إذن الحل الخاص يكون على الصورة . $y_p = \dfrac{x^3}{6}$

الحالة الثانية :

عندما تكون $f(x)$ على صورة دالة أسية أى أن

$$f(x) = \text{An exponential function}$$

أى عندما تكون على سبيل المثال

$$f(x) = A\, e^{\alpha x}$$

فإننا فى هذه الحالة نفرض أن الحل الخاص y_p يكون على الصورة

$$y_p = B\, e^{\alpha x}$$

حيث B قيمة مجهولة نريد إيجادها . لذلك نحن نجد أن

$$y'_p = \alpha B\, e^{\alpha x}$$

$$y''_p = \alpha^2 B\, e^{\alpha x}$$

وبالتعويض فى (1) نجد أن

$$a\alpha^2 B e^{\alpha x} + b\alpha B e^{\alpha x} + c B e^{\alpha x} = A e^{\alpha x}$$

إذن

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c) B e^{\alpha x} = A e^{\alpha x}$$

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c) B = A$$

وبالتالى تكون

$$B = \frac{A}{a\alpha^2 + b\alpha + c}$$

مثال : أوجد الحل الخاص y_p للمعادله

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^x$$

الحل : نفرض أن الحل الخاص

$$y_p = c\, e^x$$

إذن $$y'_p = c e^x$$

$$y''_p = c e^x$$

وبالتعويض فى المعادله المعطاه نجد أن

$$c e^x + 3 c e^x + 2 c e^x = 2 e^x$$

إذن $$6 c e^x = 2 e^x$$

إذن $$c = \frac{1}{3}$$

إذن $$y_p = \frac{1}{3} e^x$$

الحالة الثالثة :

عندما تأخذ $f(x)$ أحد الصور الآتية

$$f(x) = \begin{cases} A\cos(nx) + B\sin(nx) \\ A\cos(nx) \\ B\sin(nx) \end{cases}$$

فإننا فى هذه الحالة نفرض أن الحل الخاص y_p يكون على الصورة

$$y_p = K\cos(nx) + M\sin(nx)$$

حيث K , M مجاهيل نريد إيجادها وهذا سنوضحه من خلال المثال الآتى :

مثال : أوجد الحل الخاص y_p للمعادله

$$y'' + y' + 3y = \cos(2x)$$

الحل : نفرض أن

إذن

$$y_p = K\cos(2x) + M\sin(2x)$$

$$y'_p = -2K\sin(2x) + 2M\cos(2x)$$

$$y''_p = -4K\cos(2x) - 4M\sin(2x)$$

وبالتعويض فى المعادله المعطاه وبعد إجراء عمليات التبسيط والإختصار نجد أن

$$(-K+2M)\cos(2x)+(-M-2K)\sin(2x)=\cos(2x)$$

وبمقارنة معاملات $\cos(2x)$ ، $\sin(2x)$ نجد أن

$$-K+2M=1 \quad , \quad -M-2K=0$$

وبحل هاتين المعادلتين معاً نجد أن

$$K=-\frac{1}{5} \quad , \quad M=\frac{2}{5}$$

إذن

$$y_p=-\frac{1}{5}\cos(2x)+\frac{2}{5}\sin(2x).$$

الحالة الرابعة :

عندما تكون $f(x)$ عبارة عن دالة أسية مضروبة فى كثيرة حدود أى أن

$$f(x)=e^{\alpha x}\,.\,p_n(x)$$

فإننا فى هذه الحالة نفرض أن الحل الخاص y_p يكون على الصورة

$$y_p=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n)\,.\,e^{\alpha x}$$

مثال : لايجاد الحل الخاص y_p للمعادلة $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$

فإننا سنفرض أن

$$y_p=(Kx^2+Mx+N)\,.\,e^{3x}$$

حيث K ، M ، N ثوابت مجهولة ولايجادها فإننا نحل كما شرحنا مسبقاً حيث نقارن بين المعاملات .

الحالة الخامسة :

عندما تأخذ $f(x)$ أحد الصور الآتية :

$$f(x) = \begin{cases} p_n(x)\, e^{\alpha x} \sin(nx) \\ \\ p_n(x)\, e^{\alpha x} \cos(nx) \end{cases}$$

فإننا فى هذه الحالة نفرض أن الحل الخاص y_p يكون على الصورة

$$y_p = [\,(a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ..+ a_n)\, e^{\alpha x} \cos(nx)$$

$$+ (b_o x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n)\, e^{\alpha x} \sin(nx)\,]$$

مثال :

لايجاد الحل الخاص y_p للمعادلة $y'' + 3y' + 2y = x \sin(2x)$ فإننا سنفرض أن

$$y_p = (K_1 x + M_1) \sin(2x) + (K_2 x + M_2) \cos(2x)$$

ثم نحل كما فى السابق حيث نقارن بين المعاملات لايجاد قيم الثوابت K_1 ، M_1 ، K_2 ، M_2 .

مثال : ولإيجاد الحل الخاص y_p للمعادله $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$

فإننا سنفرض أن

$$y_p = (K_1 x + K_2) + C e^{3x}$$

ثم نحل كما فى السابق حيث نقارن بين المعاملات لايجاد قيم الثوابت K_1 ، K_2 ، C .

إن فكرة إنشاء صيغة إفتراضية للحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) :

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

حسب الصيغ الموضحة فى الحالات الخمس السابقة تنتج مما يأتى :

أ - نكتب جميع الحدود المستقله (غير مرتبطة) خطياً فى المتغير x والموجودين فى المجموعة المتكونة من $f(x)$ ومشتقاتها .

ب - نستبدل معاملات هذه الحدود المستقلة خطياً بمعاملات ثابتة حروفيه مثل A , B , C, ...

جـ - نضع y_p مساوياً لمجموع هذه الحدود .

د - بذلك نكون قد أوجدنا الصيغة الإفتراضية لـ y_p على أن تكون الشروط الأتية متحققة :

الشرط الأول :

أن يحتوى y_p على جميع الحدود المستقلة خطياً فى $f(x)$ ومشتقاتها

الشرط الثانى :

أن لا يحتوى y_p على حدين متشابهين (مرتبطين خطياً)

الشرط الثالث :

أن لا يحتوى y_p على حد مشابه لحد فى y_c

هـ - إذا إحتوى y_p على حد مشابه لحد فى y_c فإننا سوف نضرب كل حد فى y_p والذى يكون مشابه لحد فى y_c فى x المرفوع لاصغر أس ممكن صحيح غير سالب بحيث أن الشرطين الثانى والثالث يكونان متحققان .

مثال : أوجد y_p للمعادله $y'' + y' - 2y = 3 - 6x$

الحل : لدينا هنا $f(x) = 3 - 6x$

إذن $f'(x) = -6$ ، $f''(x) = 0$

إذن الحدود المستقلة خطياً فى $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ هم x^1 ، x^0

إذن نضع $y_p = A + Bx$

وحيث أن $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

وحيث أن y_p يكون محققاً للشروط السابقة الذكر إذن يكون $y_p = A + Bx$ هى الصيغة الإفتراضية لـ y_p إذن $y'_p = B$ ، $y'' = 0$

وبالتعويض عن y_p ، y'_p ، y''_p فى المعادله التفاضليـة المعطاه نجد أن

$$B - 2[A + Bx] = 3 - 6x$$

وبمقارنة معاملات x نجد أن

إذن $-2B = -6$ ، $B - 2A = 3$

إذن $B = 3$ ، $A = 0$

$$y_p = 3x$$

مثال : أوجد y_p للمعادله

الحل : لدينا هنا $y'' = x^2 + x + e^{3x}$

ومنها نجد أن

$$f(x) = x^2 + x + e^{3x}$$

$$f'(x) = 2x + 1 + 3e^{3x}$$

$$f''(x) = 2 + 9e^{3x}$$

إذن الحـــدود المســـتقلة خطيـــاً فـــى $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$

هم e^{3x} ، x^o ، x^1 ، x^2

إذن نضع

$$y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 e^{3x} + A_4$$

وحيث أن

$$y_c = c_1 x + c_2$$

وحيث أن y_p يحتوى على حدين مشابهين لحدين فى y_c إذن

$$y_p = A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 e^{3x} + A_4 x^4$$

هى الصيغة الإفتراضية لـ y_p والتى تكون محققة للشروط السابقة وبالتالى نجد أن

$$y'_p = 2A_1 x + 3A_2 x^2 + 3A_3 e^{3x} + 4A_4 x^3$$

$$y''_p = 2A_1 + 6A_2 x + 9A_3 e^{3x} + 12A_4 x^2$$

وبالتعويض عن y_p ، y'_p ، y''_p فى المعادله التفاضلية المعطاه

نجد أن

$$2A_1 + 6A_2 x + 9A_3 e^{3x} + 12A_4 x^2 = x^2 + x + e^{3x}$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن

$$12A_4 = 1 \rightarrow A_4 = \frac{1}{12}$$

$$6A_2 = 1 \rightarrow A_2 = \frac{1}{6}$$

$$2A_1 = o \rightarrow A_1 = o$$

$$9A_3 = 1 \rightarrow A_3 = \frac{1}{9}$$

إذن

$$y_p = \frac{x^3}{6} + \frac{e^{3x}}{9} + \frac{x^4}{12}$$

تمـــارين (12)

حل المعادلات التفاضلية الأتية

1- $2y'' + y' + 3y = 3x^2 + 5x + 8$

2- $y'' + 4y = 8x^2$

3- $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

4- $y'' - y' - 2y = 10\cos(x)$

5- $2y'' + y' - y = \sin(x)$

6- $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$

7- $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$

8- $y'' + 3y' + 2y = x\sin(2x)$

(ب) طريقة تغيير الثوابت أو البارامترات

The Method Of Variation Of Parameters

وهذه الطريقة عامة لايجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة والمناظرة للمعادلة الغير متجانسة . ولشرح هذه الطريقة نحن نبدأ ونقول :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (1)$$

وليكن y_c هو الحل العام والمناظر للمعادلة المتجانسة

$$y'' + ay' + by = o \qquad (2)$$

والمعطى على الصورة

$$y_c = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

حيث c_1 ، c_2 ثوابت إختيارية .

والآن نريد إيجاد y_p للمعادلة (1) والتى تكون على الصورة

$$y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x) \qquad (3)$$

حيث $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ دالتين مجهولتين فى المتغير x .

هذه ببساطة هى طريقة تغيير الثوابت لايجاد y_p ويتبقى علينا إيجاد هاتين الدالتين $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ المجهولتان . ولذلك نحن نفاضل الحل (3) نتحصل على

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + u'_1 y_1 + u'_2 y_2$$

ثم بإختيار الدالتين المجهولتين $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ بحيث تتحقق المتساوية

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \qquad (4)$$

فإذا أخذنا فى الإعتبار هذا الشرط فإن المشتقة الأولى للحل y'_p تصبح على الشكل

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \qquad (5)$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة لـ x نحصل على

$$y''_p = u_1 y''_1 + u_2 y''_2 + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 \qquad (6)$$

وبالتعويض عن (3) ، (5) ، (6) فى (1) وبتجميع الحدود التى تحتوى على u_1 ، u_2 نحصل على

$$u_1(y''_1 + a y'_1 + b y_1) + u_2(y''_2 + a y'_2 + b y_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x)$$

نلاحظ أن الصيغتين الموجودتين فى القوسين الأول والثانى تساويان الصفر لأن y_2 ، y_1 حلان للمعادلة المتجانسة $y'' + a y' + b y = 0$

وبالتالى نأخذ المتساوية الأخيرة

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \qquad (7)$$

المعادلتين (4) ، (7) تكون نظام من معادلتين جبريتين فى الدالتين المجهولتين u'_1 ، u'_2 وباستخدام طريقة المحددات يمكن تعيين كل من u'_1 ، u'_2 على الشكل :

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{w} \quad , \quad u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{w} \qquad (8)$$

حيث $w = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$

يمثل الرونسكيان لـ y_1 ، y_2

وبتكامل (8) نحصل على

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{w} dx \quad , \quad u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{w} dx$$

وبالتعويض عن قيمة u_1 ، u_2 فى (3) نحصل على y_p إذن

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w} dx \qquad (9)$$

ملحوظة (1) :

عند تكامل u'_1 ، u'_2 إذا أضفنا ثابتى التكامل لكل من u_1 ، u_2 فإن الحل (3) يمثل الحل العام للمعادله (1) أما إذا لم نضف ثابتى التكامل فإن الحل (3) يمثل الحل الخاص y_p للمعادله (1) .

ملحوظة (2):

تستخدم هذه الطريقة إذا كانت $f(x)$ فى المعادله (1) معقده أو على شكل $Ln(x)$ ، $sec(x)$ ، $tan(x)$ ، ....

مثال : حل المعادله

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

الحل : نلاحظ أن حل المعادله المتجانسه هو

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

إذن يكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = u_1(x) e^{3x} + u_2(x) x e^{3x}$$

حيث $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ دالتان مجهولتان فى x ونريد إيجادهما

إذن باستخدام العلاقتين السابقتين لايجاد $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ نحن نجد أن

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{w} dx \quad , \quad u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{w} dx$$

حيث

$$w = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

إذن نحن لدينا

$$y_1 = e^{3x} \rightarrow y'_1 = 3e^{3x}$$

$$y_2 = x e^{3x} \rightarrow y'_2 = e^{3x} + 3x e^{3x} ,$$

إذن

$$w = e^{6x}$$

إذن

$$u_1 = -\int \left[\frac{x\, e^{3x}}{e^{6x}} \cdot \frac{e^{3x}}{x^2} \right] dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\operatorname{Ln}(x)$$

$$u_2 = \int \left[\frac{e^{3x}}{e^{6x}} \cdot \frac{e^{3x}}{x^2} \right] dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}$$

إذن

$$y_p = -\operatorname{Ln}(x) \cdot e^{3x} - e^{3x}$$

ومن ثم فإن الحل العام هو

$$y_G = y_c + y_p = c_1\, e^{3x} + c_2\, x\, e^{3x} - \operatorname{Ln}(x) \cdot e^{3x} - e^{3x} .$$

تمارين (13)

أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية مستخدما طريقة تغيير الثوابت

1. $y'' + y = \sec(x)$
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
3. $y'' - 2y' + y = 2x^2 e^x$
4. $y'' + y = \sin(2x)$
5. $y'' + 2y' + 4y = e^{-x} \sin(\sqrt{3}\, x)$

(جـ) طريقة المؤثرات التفاضلية

The Differential Operators Method

سنعرف المؤثر بأنه المحول الذى يحول الدالة إلى دالة أخرى حيث سنعرف الرمز D على أنه المؤثر التفاضلى بالنسبة للمتغير x ويكتب كالاتى

$$D y = y' = \frac{dy}{dx}$$

أى أن D مؤثر عندما يؤثر على الداله $y(x)$ نحصل على المشتقة $y'(x)$ وكمثال على ذلك .

$$D(x^2) = 2x$$

$$D(\sin x) = \cos x$$

وبإستخدام D مرتين نحصل على المشتقة الثانية . إذن

$$D(Dy) = D(y') = y''$$

وللتبسيط نكتب

$$D(Dy) = D^2 y$$

أى أن

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

وبالمثل فإن

$$D^3 = \frac{d^3}{dx^3} \quad , \quad \ldots .$$

وبالتالى يمكن أن نكتب المعادلة التفاضلية $a y'' + b y' + c y = f(x)$ بإستخدام المؤثر التفاضلى D على الصورة

$$(aD^2 + bD + c)\, y = f(x)$$

وبالتالى نجد أن المقدار $a D^2 + b D + c$ كثيرة حدود حيث يمكن تحليلها كما فى الكميات الجبرية العادية .

وتستخدم طريقة المؤثر التفاضلى لايجاد التكامل الخاص y_p إذا كانت $f(x)$ فى المعادلة التفاضلية الغير متجانسة على شكل x^n ، e^x ، $\sin(px)$ ، $\cos(px)$ أو مجموع أو حاصل ضرب بينهم

وبصفة عامة فإن :

المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة

$$\phi(D)\, y = f(x) \qquad (1)$$

حيث

$$\phi(D) = a_o D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

حيث a_o ، a_1 ، $\dots a_n$ ثوابت

وحيث

$$D = \frac{d}{dx} \quad , \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad \dots$$

وحيث

$$Dy = \frac{dy}{dx} \quad , \quad D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad , \quad \dots$$

ومن ثم فإن

$$y = \frac{1}{\phi(D)} \cdot f(x)$$

ولكن السؤال هو ماذا نعنى عندما نقول بأن

$$\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{a_o D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n}$$

يؤثر على الداله $f(x)$.

إن طريقة المؤثر تعتمد على فهمنا كيف يؤثر $\frac{1}{\phi(D)}$ على $f(x)$ ولتبسيط ذلك نفـرض أن $\phi(D) = D$ وفى مـثـل هذه الحـالـة فـإن المعـادلة التفاضليـة تصبح

$$\phi(D)\, y = D y = f(x)$$

ويكون حلها هو

$$y = \int f(x)\, dx$$

وبكتابة الحل بإستخدام المؤثر D يكتب كالاتى

$$y(x) = \frac{1}{D} \cdot f(x)$$

ومن ثم يمكن أن نعرف المؤثر $\frac{1}{D}$ كالاتى

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\, dx$$

ومن ثم إذا كان $\frac{1}{D}$ يعنى أننا نكامل مرة واحدة وإذا كان $\frac{1}{D^2}$ يعنى إننا

نكامل مرتين ، $\frac{1}{D^3}$ يعنى أننا نكامل ثلاث مرات وهكذا .

والآن نشرح كيفية إستخدام المؤثر التفاضلى لايجاد y_p عندما تأخذ $f(x)$ الحالات الأتية :

الحالة الأولى :

عندما تكون $f(x) = x^n$ بحيث أن $D^m(x^n) = o$ عندما $m > n$

فإن المعادله (1) تكتب كالأتى $\phi(D)\, y = x^n$

ومن ثم فإن

$$y = \frac{1}{\phi(D)} x^n$$

دعنا أولا نكتب $\frac{1}{\phi(D)}$ على شكل متسلسلة لانهائية . ولفهم ذلك سنستعرض المثالين الأتيين :-

مثال ، لتكن

$$\phi(D) = D^2 + 4D + 5$$

إذن

$$\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{(D^2 + 4D + 5)} = \frac{1}{5\left(1 + \frac{4D + D^2}{5}\right)}$$

يجب أن نلاحظ أن

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \dots \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \dots \qquad \text{(ii)}$$

إذن بإستخدام (ii) نحصل على

$$\frac{1}{(D^2 + 4D + 5)} = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{4D + D^2}{5}\right) + \left(\frac{4D + D^2}{5}\right)^2 - \dots\right\}$$

مثال ، لتكن

$$\phi(D) = D^4 - 2D^3 + 3D^2$$

إذن

$$\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{D^2(D^2 - 2D + 3)} = \frac{1}{3D^2\left(1 - \frac{2D - D^2}{3}\right)}$$

وبإستخدام (i) نحصل على

$$\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{3D^2}\left\{1 + \frac{2D - D^2}{3} + \left(\frac{2D - D^2}{3}\right)^2 + \dots\right\}$$

إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية بإستخدام المؤثر التفاضلى

مثال : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 6y' + 4y = x^2 + 4$$

الحل : يمكن أن نكتب هذه المعادلة على الصورة

$$(D^2 + 6D + 4)\,y = x^2 + 4$$

أى أن

$$\phi(D) = D^2 + 6D + 4$$

وبالتالى

$$\phi(D)\,y = x^2 + 4$$

إذن

$$y_p = \left(\frac{1}{\phi(D)}\right)(x^2 + 4)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 6D + 4}(x^2 + 4) = \frac{1}{4\left(1 + \dfrac{6D + D^2}{4}\right)}(x^2 + 4)$$

إذن

$$y_p = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{6D + D^2}{4}\right) + \left(\frac{6D + D^2}{4}\right)^2 - \dots\right\}(x^2 + 4) \quad (*)$$

وحيث أن $D^n(x^2 + 4) = 0$ إذا كان $n > 2$. ومن ثم فإننا نحتاج من لطرف الأيمن من (*) على حد ثابت وحدود تحتوى على D ، D^2 فقط .

إذن

$$y_p = \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{3}{2}D + 2D^2 + \dots\right\}(x^2 + 4)$$

إذن

$$y_p = \frac{1}{4}(x^2+4) - \frac{3}{8}(2x) + \frac{1}{2}(2) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2 .$$

الحالة الثانية :

عندما تكون $f(x)$ على شكل $v(x)\ .\ e^{px}$ فإننا نستخدم العلاقة

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}\{e^{px}.v(x)\} = e^{px}\frac{1}{\phi(D+p)}.v(x)$$

مثال : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + 10y = x^2 e^{-x}$

مستخدما طريقة المؤثر التفاضلى .

الحل : بتطبيق العلاقة المذكورة فى الحالة الثانية نجد أن

$$y_p = \frac{1}{(D^2+3D+10)}x^2e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1}{(D-1)^2+3(D-1)+10}\right)x^2$$

$$y_p = e^{-x}\left(\frac{1}{D^2+D+8}\right)x^2$$

$$y_p = e^{-x}\left(\frac{1}{8\left(1+\frac{D+D^2}{8}\right)}\right)x^2 = \frac{e^{-x}}{8}\left\{1-\left(\frac{D+D^2}{8}\right)+\left(\frac{D+D^2}{8}\right)^2-\ldots\right\}x^2$$

$$y_p = \frac{e^{-x}}{8}\left\{1-\frac{D}{8}-\frac{7D^2}{64}+\ldots\right\}x^2 = \frac{e^{-x}}{8}\left\{x^2-\frac{x}{4}-\frac{7}{32}\right\}.$$

الحالة الثالثة :

عندما تكون $f(x)$ على شكل $x^n \cos(px)$ أو $x^n \sin(px)$ فإننا نستخدم الدالة الأسية المركبة

حيث $x^n e^{ipx} = x^n (\cos(px) + i \sin(px))$

ومن ثم يمكن أن نكتب

$$Re\{x^n e^{ipx}\} = x^n \cos(px)$$

$$Im\{x^n e^{ipx}\} = x^n \sin(px)$$

ومن ثم فإن

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}\{x^n \cos(px)\} = \frac{1}{\phi(D)} Re\{x^n e^{ipx}\} = Re\left\{\frac{1}{\phi(D)} x^n e^{ipx}\right\} ،$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}\{x^n \sin(px)\} = \frac{1}{\phi(D)} Im\{x^n e^{ipx}\} = Im\left\{\frac{1}{\phi(D)} x^n e^{ipx}\right\}$$

ثم نستخدم العلاقة المذكورة فى الحالة الثانية .

مثال : أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = x^2 \cos(x)$$

الحل :

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}(x^2 \cos(x)) = \frac{1}{D^2+4} . Re(x^2 e^{ix})$$

$$y_p = Re\left\{\frac{1}{D^2+4} x^2 e^{ix}\right\} = Re\left\{e^{ix} \frac{1}{(D+i)^2+4} .x^2\right\}$$

$$y_p = Re\left\{e^{ix} \frac{1}{D^2+2iD+3} .x^2\right\} = Re\left\{e^{ix} \frac{1}{3\left(1+\frac{2iD+D^2}{3}\right)} .x^2\right\}$$

$$y_p = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{ix}}{3}\left[1-\left(\frac{2iD+D^2}{3}\right)+\left(\frac{2iD+D^2}{3}\right)^2-\ldots\right]x^2\right\}$$

$$y_p = \frac{1}{3}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}\left[1-\frac{2iD}{3}-\frac{7D^2}{9}+\ldots\right]x^2\right\} = \frac{1}{3}\operatorname{Re}\left\{e^{ix}\left[x^2-\frac{4ix}{3}-\frac{14}{9}\right]\right\}$$

$$y_p = \frac{1}{3}\left\{x^2\cos(x)+\frac{4x}{3}\sin(x)-\frac{14}{9}\cos(x)\right\}.$$

تمارين (14)

أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية مستخدما طريقة المؤثرات التفاضلية

1. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
2. $y'' - 2y' + y = 2x^2 e^x$
3. $y'' + y = \sin(2x)$
4. $y'' + 2y' + 4y = e^{-x}\sin(\sqrt{3}\,x)$.

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة

Linear Differential Equations Of n-the Order With Constant Coefficients

والصورة العامة لها هى

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = f(x)$$

حيث $a_o , a_1 , a_2 \dots a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة فى x أو ثابت .

إن كل ما ذكر عن المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة يمكن تعميمة على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة . ولايجاد حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة فإننا نعلم أن

$$y_G = y_c + y_p$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية الأتية

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = o$$

الحل : نفرض أن $y = e^{\lambda x}$

وبإيجاد y' ، y'' ، y''' ثم بالتعويض عنهم فى أصل المعادلة المعطاه نجد أن المعادلة المميزه تكون على الصورة

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

إذن

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

إذن

$$\lambda_1 = 1 \quad ، \quad \lambda_2 = -2 \quad ، \quad \lambda_3 = 3$$

إذن الحل العام للمعادله المعطاه هو

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x} + Ce^{3x}$$

حيث A , B , C ثوابت إختيارية .

مثال : حل المعادله

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$$

الحل : بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ نجد أن المعادله المميزة تكون على الصورة :

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$$

إذن

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

إذن

$$\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = -1 + 2i \;,\; \lambda_3 = -1 - 2i$$

إذن الحل العام للمعادلة المعطاه هو

$$y = Ae^{x} + e^{-x}\{B\cos(2x) + C\sin(2x)\}$$

حيث A ، B ، C ثوابت إختيارية .

مثال : حل المعادله $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$

الحل : بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ نجد أن المعادله المميزه هى

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

إذن

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad ، \quad \lambda_3 = -3$$

إذن الحل العام للمعادلة المعطاه هو

$$y = A e^{-3x} + (Bx + C) e^{x}$$

حيث A ، B ، C ثوابت إختيارية .

مثال :

حل المعادلة $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

الحل :

بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ نجد أن المعادله المميزة هى

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

إذن $(\lambda - 1)^3 = 0$

إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

إذن الحل العام للمعادلة المعطاه هو

$$y = e^{x} (A x^2 + B x + C)$$

حيث A ، B ، C ثوابت إختيارية

مثال :

بإستخدام طريقة مقارنه المعاملات أوجد y_p للمعادله

$$y''' - y'' - 8y' + 12y = 10 e^{2x} + 25 e^{-3x}$$

الحل :

نجد هنا أن

$$f(x) = 10e^{2x} + 25e^{-3x}$$

وبالتالى نجد أن

$$f'(x) = 20e^{2x} - 75e^{-3x}$$

$$f''(x) = 40e^{2x} + 225e^{-3x}$$

$$f'''(x) = 80e^{2x} - 675e^{-3x}$$

إذن الحدود المستقلة خطياً فى $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$

هم e^{-3x} ، e^{2x}

إذن نضع

$$y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x}$$

وحيث أن

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

وحيث أن y_p يحتوى على حدين مشابهين لحدين فى y_c

إذن

$$y_p = Ax^2 e^{2x} + Bxe^{-3x}$$

هى الصيغة الإفتراضية لـ y_p . وبإيجاد y'_p ، y''_p ، y'''_p ومن ثم التعويض عن y_p ، y'_p ، y''_p ، y'''_p فى المعادله التفاضلية المعطاه نجد أن

$$10Ae^{2x} + 25Be^{-3x} = 10e^{2x} + 25e^{-3x}$$

وبمقارنه المعاملات نجد أن

$$10A = 10 \rightarrow A = 1$$

$$25B = 25 \rightarrow B = 1$$

إذن

$$y_p = x^2 e^{2x} + xe^{-3x}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية مستخدماً طريقة تغيير الثوابت

$$y''' + y' = \sec(x) \qquad (1)$$

الحل : نعلم أن

$$y_G = y_c + y_p$$

إذن حل المعادلة $y''' + y' = 0$ هو

$$y_c = A \sin(x) + B \cos(x) + C \qquad (2)$$

حيث A ، B ، C ثوابت إختيارية

الآن لايجاد y_p نحن نفرض أن

$$y_p = u_1(x) \sin(x) + u_2(x) \cos(x) + u_3(x) \qquad (3)$$

حيث $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ ، $u_3(x)$ دوال مجهولة فى x ونريد إيجادهم

لذلك نحن نوجد

$$y'_p = u_1 \cos(x) - u_2 \sin(x) + u'_1 \sin(x) + u'_2 \cos(x) + u'_3 \qquad (4)$$

وبوضع الشرط الأول

$$u'_1 \sin(x) + u'_2 \cos(x) + u'_3 = 0 \qquad (5)$$

إذن y'_p تصبح كالاتى

$$y'_p = u_1 \cos(x) - u_2 \sin(x) \qquad (6)$$

ومن ثم فإن

$$y''_p = -u_1 \sin(x) - u_2 \cos(x) + u'_1 \cos(x) - u'_2 \sin(x)$$

وبوضع الشرط الثانى

$$u'_1 \cos(x) - u'_2 \sin(x) = 0 \qquad (7)$$

إذن y''_p تصبح كالاتى

$$y''_p = -u_1 \sin(x) - u_2 \cos(x) \qquad (8)$$

ومن ثم فإن

$$y'''_p = -u_1 \cos(x) + u_2 \sin(x) - u'_1 \sin(x) - u'_2 \cos(x) \qquad (9)$$

وبالتعويض عن (3) ، (6) ، (8) ، (9) فى (1) وبعد إجراء بعض العمليات التبسيطية نجد أن

$$-u'_1 \sin(x) - u'_2 \cos(x) = \sec(x) \qquad (10)$$

وبحل المعادلات الثلاث (5) ، (7) ، (10) أنياً عن طريق إستخدام المحددات نجد أن

$$u'_1(x) = -\tan(x) \quad , \quad u'_2(x) = -1$$

$$u'_3(x) = \sin(x)\tan(x) + \cos(x) = \sec(x)$$

وبالتالى نجد أن

$$u_1(x) = \operatorname{Ln}(\cos(x)) \quad , \quad u_2(x) = -x$$

$$u_3(x) = \operatorname{Ln}(\sec(x) + \tan(x))$$

إذن $y_p = \operatorname{Ln}(\cos(x)) \,.\, \sin(x) - x\cos(x) + \operatorname{Ln}(\sec(x) + \tan(x))$

إذن $y_G = A\sin(x) + B\cos(x) + C + \operatorname{Ln}(\cos(x)) \,.\, \sin(x) - x\cos(x)$

$$+ \operatorname{Ln}(\sec(x) + \tan(x)) \,.$$

ملاحظة :

نلاحظ أنه عند حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات العاملات الثابته بطريقة تغيير الثوابت أنه لابد من توفر شرط واحد . أما بالنسبة عند حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثالثة ذات المعاملات الثابته بطريقة تغيير الثوابت فلابد من توفر شرطين إثنين . وبالتالى يمكن التعميم بنفس الطريقة .

مثال : أوجد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية الآتية مستخدماً طريقة المؤثرات التفاضلية

$$y''' + 2y' = x^2 - x$$

الحل : يمكن صياغة المعادلة المعطاه على الصورة

$$(D^3 + 2D)\, y = x^2 - x$$

وبالتالى نجد أن

$$y_p = \frac{1}{D^3 + 2D}(x^2 - x)$$

إذن

$$y_p = \frac{1}{D(D^2 + 2)}(x^2 - x)$$

$$y_p = \frac{1}{2D\left(1 + \frac{D^2}{2}\right)}(x^2 - x)$$

$$y_p = \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{D^2}{2} + \left(\frac{D^2}{2}\right)^2 - \ldots\right](x^2 - x)$$

نحن نحتاج فقط من الطرف الأيمن لـ D^2 إذن

$$y_p = \frac{1}{2D}[x^2 - x - 1]$$

$$y_p = \frac{1}{2}\int (x^2 - x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

حيث $\frac{1}{D}$ تعنى التكامل مرة واحدة فقط .

مثال : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية مستخدما طريقة المؤثرات التفاضلية

$$y''' + 2y'' + 3y' - y = e^{2x}$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة أعلاه على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 + 3D - 1)\, y = e^{2x}$$

إذن

$$y_p = \frac{1}{(D^3 + 2D^2 + 3D - 1)}\, e^{2x}$$

ومنها نجد أن

$$y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{(D+2)^3 + 2(D+2)^2 + 3(D+2) - 1}\right).(1)$$

$$y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{D^3 + 8D^2 + 23D + 21}\right)\cdot(1)$$

$$y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{21\left(1+\frac{23D+8D^2+D^3}{21}\right)}\right)(1)$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{e^{2x}}{21}\{1-\ldots\}.(1)$$

إذن

$$y_p = \frac{e^{2x}}{21}$$

مثال : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية مستخدما طريقة المؤثرات التفاضلية

$$y''' + 3y'' - 4y = xe^{-2x} + x^2$$

الحل :

$$y_p = \frac{1}{(D^3+3D^2-4)}(xe^{-2x}+x^2)$$

$$y_p = \frac{1}{(D^3+3D^2-4)}(xe^{-2x}) + \frac{1}{(D^3+3D^2-4)}(x^2)$$

إذن

$$y_p = e^{-2x}\frac{1}{\{(D-2)^3+3(D-2)^2-4\}}(x) + \frac{1}{D^3+3D^2-4}(x^2)$$

إذن

$$y_p = e^{-2x}\frac{1}{D^3-3D^2}(x) - \frac{1}{4\left(1-\frac{3D^2+D^3}{4}\right)}(x^2)$$

$$y_p = e^{-2x}\frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{D-3}\right)(x) - \frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{3D^2+D^3}{4}\right)+\ldots\right\}(x^2)$$

$$y_p = e^{-2x}\,\frac{1}{D^2}\,\frac{1}{-3\left(1-\frac{D}{3}\right)}(x) - \frac{1}{4}\left(x^2+\frac{3}{2}\right)$$

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{-3}\,\frac{1}{D^2}\left\{1+\frac{D}{3}+\ldots\right\}(x) - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8}$$

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{-3}\,\frac{1}{D^2}\left\{x+\frac{1}{3}\right\} - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8}$$

إذن

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{-3}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8}$$

تمارين (15)

حل المعادلات التفاضلية الآتية

1. $y''' - y'' = 2\cos(x)$
2. $y''' + 4y' = 16\sin(2x)$
3. $y''' + y' = \sec^2(x)$
4. $y''' + y'' - 2y' = 8x$
5. $y''' + y' = -6\cos(2x)$

حيث $y'' = 0$ ، $y' = -3$ ، $y = 1$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

6. $y''' + y'' = 4xe^x$

حيث $y'' = 0$ ، $y' = -4$ ، $y = -4$ عند $x = 0$

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة والتى تؤول إلى معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة

Linear Differential Equations With Variable Coefficients Which lead To Linear Differential Equations With Constants Coefficients

أولا : معادلة أيلر الخطية *Euler's Linear Equation*

تسمى المعادلة

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x) \quad (1)$$

حيث أن $A_0 , A_1 .. A_n$ ثوابت , $f(x)$ دالة في x بمعادلة أيلر التفاضلية .

ولحل هذا النوع من المعادلات التفاضلية فإننا سوف نستخدم التعويض

$$x = e^z \to z = Ln\ x \to \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-z}$$

حيث سوف تصبح لدينا معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة . نحن إذا إستخدمنا التعبير $\frac{d^K y}{dz^K} = D^K y$ فإننا نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{x} Dy \text{ ،}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^2}\ D\ (D-1)\ y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)\right\} = \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^3}\ D\ (D-1)(D-2)\ y$$

.

.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\ D\ (D-1)\ \ldots(D-n+1)\ y$$

وبالتعويض عن هذه القيم $\frac{d^ny}{dx^n}\ \ldots\ ،\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ،\ \frac{dy}{dx}$ فى (1)

نجد أنه بالتأكيد سوف تعطى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة .

وبحل هذه المعادله بإحدى الطرق التى تعلمناها مسبقاً وبالتعويض فى الحل عن z بـ $\text{Ln } x$ فإننا سوف نحصل على حل المعادلة (1) .

مثال : حل $\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 6x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = x^2$

الحل :

بوضع $z = \text{Ln}\ (x)$

وبإيجاد $\frac{dy}{dx}\ ،\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ،\ \frac{d^3y}{dx^3}$

حسب ما شرحنا مسبقاً وبالتعويض عنهم فى المعادله المعطاه . نجد أن .

$$\frac{x^3}{x^3} D(D-1)(D-2)y + \frac{6x^2}{x^2} D(D-1)y + 8\frac{x}{x} Dy - 8y = e^{2z}$$

إذن بالتبسيط نجد أن

$$(D^3 + 3D^2 + 4D - 8)y = e^{2z}$$

وهذه المعادلة يمكن حلها ببساطة كماتعلمنا مسبقاً إذ نجد أن

$$y_c = C_1 e^z + e^{-2z}(C_2 \sin(2z) + C_3 \cos(2z))$$

حيث C_1 ، C_2 ، C_3 ثوابت إختيارية

$$y_p = \frac{1}{20} e^{2z}$$

وبالتعويض عن $z = Ln(x)$ فى y_c ، y_p فإننا نحصل على

$$y_c = C_1 x + \frac{1}{x^2}[C_2 \sin(2 Ln x) + C_3 \cos(2 Ln x)]$$

$$y_p = \frac{1}{20} x^2$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضليه المعطاه يكون على الصورة

$$y = y_c + y_p$$

أى أن

$$y = C_1 x + \frac{1}{x^2}[C_2 \sin(2 Ln x) + C_3 \cos(2 Ln x)] + \frac{1}{20}x^2$$

ثانيا : معادلة لجندر الخطية *Legendre's Linear Equation*

تسمى المعادله

$$p_0\,(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\,(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\,(ax+b)\frac{dy}{dx}+p_n\,y=f(x) \quad (1)$$

حيث p_n ، ..... ، p_1 ، p_0 ثوابت ، $f(x)$ دالة فى x

بمعادلة لجندر التفاضلية .

ولحل هذا النوع من المعادلات التفاضلية فإننا سوف نستخدم التعويض

$$ax+b=e^z \rightarrow z=\text{Ln}\,(ax+b)$$

وبالتالى نجد أن $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{a}{ax+b}$

وبإستخدام هذا التعويض فإنه سيصبح لدينا معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة .

نحن إذا إستخدمنا التعبير $\dfrac{d^ky}{dz^k}=D^ky$ فإننا نجد أن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{a}{ax+b}\,\frac{dy}{dz}=\frac{a}{ax+b}\,Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\,\frac{dy}{dz}\right)=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\,D\,(D-1)y$$

.

.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{a^n}{(ax+b)^n}\,D\,(D-1)\,(D-2)\ldots\ldots(D-n+1)\,y$$

وبالتعويض عن هذه القيم $\frac{d^n y}{dx^n}, \ldots , \frac{d^2 y}{dx^2} , \frac{dy}{dx}$ فى (1) نجد أنه بالتأكيد

سوف تعطى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة . وبحل هذه المعادلة بإحدى الطرق التى تعلمناها مسبقاً وبالتعويض فى الحل عن z بـ $Ln(ax+b)$ فإننا سوف نحصل على حل المعادله (1) .

مثال : حل المعادلة

$$(x+2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} + y = 3x + 4$$

الحل : بوضع

$$x + 2 = e^z$$

ومن ثم

$$z = Ln(x+2)$$

وبإيجاد $\frac{d^2 y}{dx^2} , \frac{dy}{dx}$ حسب ما شرحنا مسبقاً وبالتعويض عنهم فى المعادلة المعطاه نجد أن

$$\{D(D-1) - D + 1\} y = (D^2 - 2D + 1) y = 3e^z - 2$$

وهذه المعادلة يمكن حلها ببساطة كما تعلمنا مسبقاً إذن نجد أن

$$y_c = C_1 e^z + C_2 z e^z$$

حيث C_1 ، C_2 ثابتين إختياريين

$$y_p = \frac{3 z^2 e^z}{2} - 2$$

وبالتالى نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه هو

$$= y_c + y_p$$

إذن

$$y = C_1 e^z + C_2 z e^z + \frac{3}{2} z^2 e^z - 2$$

أو

$$y = C_1 (x+2) + C_2 (x+2) \operatorname{Ln}(x+2) + \frac{3}{2} (x+2) . \operatorname{Ln}^2 (x+2) - 2.$$

تمارين (16)

حل المعادلات التفاضلية الآتية

1. $x^2 y'' + 2 x y' - 2 y = x^2$
2. $x y' + 2 y = x^5$
3. $x^3 y''' + 3 x^2 y'' - 6 x y' - 6 y = 0$
4. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1) y' - 12 y = 6x$

الباب السادس

تحويلات لابلاس Laplace Transforms

تعريف ، إذا كانت الدالة $f(t)$ معرفة لجميع قيم t بحيث أن $t \in [o, \infty)$ وإذا كانت s عدد حقيقى فإن $\bar{f}(s)$ والمعرفة كالاتى :

$$\bar{f}(s) = \int_{o}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_{o}^{b} e^{-st} f(t)\, dt$$

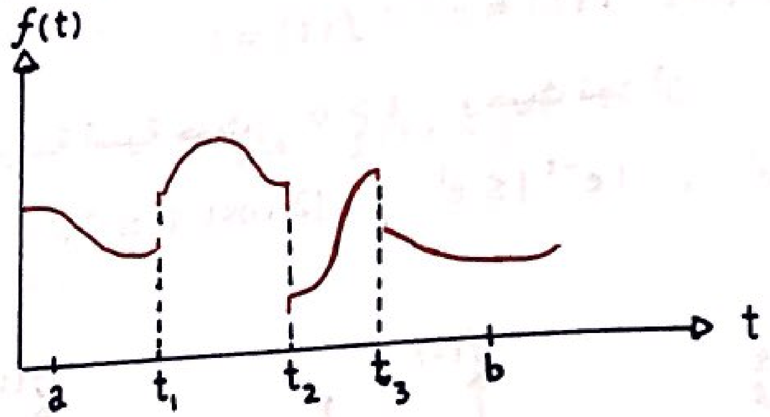
تسمى بتحويل لابلاس لـ f بشرط أن تكون النهاية موجودة . وفى بعض الأحيان فإننا نستخدم الرمز $L\{f(t)\}$ بدلاً من $\bar{f}(s)$.

إن الشروط الكافية لضمان وجود $L\{f(t)\}$ هى :

أ - أن تكون f مستمرة جزئيا (piecewise continuous) فى الفترة $[o, \infty)$

ب - أن تكون f ذات رتبة أسية (exponential order) لـ $t > T$.

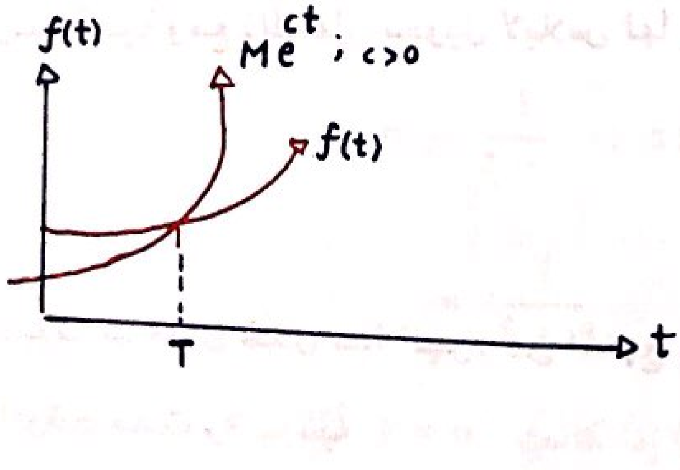
تعريف ، تسمى الدالة $f(t)$ مستمرة جزئيا فى الفترة $[o, \infty)$ إذا وفى أى فترة $o \le a \le t \le b$ يوجد على الأكثر عدد منتهى من النقاط t_K حيث $K = 1, 2, \ldots, n$ ، $(t_{K-1} < t_K)$ بحيث أن تكون الدالة f غير مستمرة عند هذه النقاط t_K وتكون مستمرة فى كل فترة مفتوحة $t_{K-1} < t < t_K$.



تعريف : تسمى الدالة f بأنها ذات رتبة أسية (exponential order) إذا وجد عدد c ، $M>0$ ، $T>0$ بحيث

$|f(t)| \leq Me^{ct}$ عند $t>T$.

وإذا كانت على سبيل القول f دالة تزايدية فإن الشرط $|f(t)| \leq Me^{ct}, t>T$ يعنى أن شكل الدالة f فى الفترة (T, ∞) يكون ذا تزايد أقل من تزايد شكل الدالة Me^{ct} حيث c عدد ثابت موجب .

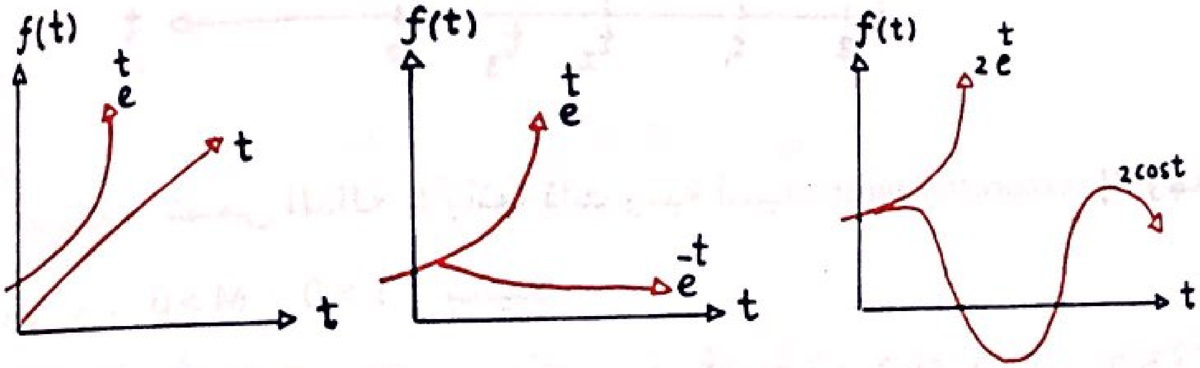


وعلى سبيل المثال فإن الدوال

$f(t) = 2\cos t$ ، $f(t) = e^{-t}$ ، $f(t) = t$

يكونوا جميعاً ذات رتبة أسية حيث $t > o$ وحيث نجد أن

$|t| \le e^t$, $|e^{-t}| \le e^t$, $|2\cos t| \le 2e^t$.



أما الدالة $f(t) = e^{t^2}$ فهى ليست ذات رتبة أسية لان شكل الدالة يكون ذا تزايد أكثر من تزايد أى أس موجب لـ e لكل $t > c > o$. إننا يجب أن نلاحظ أن هذين الشرطين يكونان كافيان لضمان وجود تحويل لابلاس ولكن

ليسا ضروريين لوجود تحويل لابلاس حيث أن الدالة $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ ليست ذات رتبة أسية ومع ذلك فإن تحويل لابلاس لها يكون موجود .

$$L(t^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

إننا سوف نتعامل خلال هذا الجزء من المنهج مع دوال ذات رتبة أسية وفى نفس الوقت مستمرة جزئياً .

قاعدة (1)

إذا كانت $f(t) = e^{at}$ فإن

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{for } s > a$$

البرهان ،

$$\bar{f}(s) = L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{a-s} \quad ; \quad s > a$$

$$= \frac{1}{s-a}.$$

وكحالة خاصة من القاعدة (1) إذا كانت $a = 0$ فإن

$$L(1) = \frac{1}{s}.$$

قاعدة (2)

إذا كانت $f(t) = t^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ فإن

$$\bar{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

البرهان :

$$\bar{f}(s) = L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^n \right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1}\, dt \quad ; \quad s > 0$$

$$= 0 + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1}\, dt \quad ; \quad s > 0$$

$$= \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} L(t^{n-2})$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} L(t^{n-3})$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{s^n} L(t^o)$$

$$= \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\therefore L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

إن تحويل لابلاس يكون له خاصية التحويل الخطى حيث أن

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}$$

حيث α ، β ثوابت .

ولبرهان ذلك فإن

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

$$= \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} .$$

قاعدة (3)

إذا كانت $f(t) = \sin(at)$ فإن $\bar{f}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

البرهان ،

نحن نعلم أن

$$\sin(at) = \frac{1}{2i}\{e^{iat} - e^{-iat}\} = \frac{1}{i}\sinh(iat)$$

إذن

$$L\{\sin(at)\} = L\left\{\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right\}$$

$$= \frac{1}{2!}L(e^{iat}) - \frac{1}{2i}L(e^{-iat})$$

وباستخدام القاعدة (1) نجد أن

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2ia}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

قاعدة (4)

إذا كانت $f(t) = \cos(at)$ فإن

$$L\{\cos(at)\} = \frac{s}{a^2 + s^2}$$

البرهان :

$$\cos(at) = \frac{1}{2}\{e^{iat} + e^{-iat}\} = \cosh(iat)$$

إذن

$$L\{\cos(at)\} = \frac{1}{2} L(e^{iat}) + \frac{1}{2} L(e^{-iat})$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+ia}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2 + a^2}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2} .$$

قاعدة (5)

إذا كانت $f(t) = \sinh(at)$ فإن

$$\bar{f}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

البرهان : نحن نعلم أن

$$\sinh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

إذن

$$L\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2}$$

قاعدة (6)

إذا كانت $f(t) = \cosh(at)$ فإن

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

البرهان :

$$\cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$$

إذن

$$L\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

مثال : أوجد $L\{3t - 5\sin(2t)\}$

الحل :

$$L\{3t - 5\sin(2t)\} = 3\,L(t) - 5\,L(\sin(2t))$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{s^2} - 5 \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)}, \quad s > 0.$$

مثال : أوجد $L\{f(t)\}$ for $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 4 \\ 3 & t \ge 4 \end{cases}$

الحل :

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^4 e^{-st} f(t)\, dt + \int_4^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^4 e^{-st}(0)\, dt + \int_4^\infty e^{-st}(3)\, dt$$

$$= \left[\frac{-3\,e^{-st}}{s} \right]_4^{\infty}$$

$$\therefore\ L\{f(t)\} = \frac{3\,e^{-4s}}{s}\ ,\ s > o$$

قاعدة (7)

إذا كان $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فإن $L(e^{at} f(t)) = \bar{f}(s-a)$

البرهان ،

$$L(e^{at} f(t)) = \int_o^{\infty} e^{-st}\,[e^{at} . f(t)]\,dt$$

$$= \int_o^{\infty} e^{-(s-a)t}\ f(t)\,dt$$

$$= \bar{f}(s-a).$$

كذلك إذا كان $L(f(t)) = \bar{f}(s)$ فإن

$$L(e^{-at} f(t)) = \bar{f}(s+a)\ .$$

قاعدة (8)

$$L\{t\,f(t)\} = -\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = -\frac{d\,L\{f(t)\}}{ds}$$

البرهان :

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

إذن

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \bar{f}'(s) = \int_0^\infty (-t)\,e^{-st} f(t)\,dt = -L\{t\,f(t)\}$$

إذن

$$L\{t\,f(t)\} = -\frac{d\bar{f}(s)}{ds}\ .$$

قاعدة (9)

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n} = (-)^n \frac{d^n L\{f(t)\}}{ds^n}$$

حيث

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

مثال : أوجد

$$L(t^2 \sin(at)) \text{ ، } L(t\cos(at)) \text{ ، } L(t\sin(at))$$

الحل ،

$$L(t\sin(at)) = -\frac{dL\{\sin(at)\}}{ds}$$

$$= \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$L(t\cos(at)) = -\frac{dL\{\cos(at)\}}{ds}$$

$$= \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$L(t^2\sin(at)) = \frac{d^2L\{\sin(at)\}}{ds^2}$$

$$= -\frac{dL\{t\sin(at)\}}{ds}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{6as^2-2a^3}{(s^2+a^2)^3}$$

مثال ، أوجد

$L(e^{-at}\sin(bt))$ ، $L(e^{at}.t^n)$ ، $L(e^{-at}\cos(bt))$

الحل ، باستخدام قاعدة (7) نجد أن

$$L(e^{-at}\cos(bt)) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$L(e^{at}.t^n) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \quad ; \quad s > a$$

إذن

$$L(e^{-at}\sin(bt)) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

تمارين (17)

أوجد $L\{f(t)\}$ لكل مما يأتي

1. $f(t) = 4t - 10$
2. $f(t) = 1 + e^{4t}$
3. $f(t) = \sin^2(t)$
4. $f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$
5. $f(t) = 4t^2 - 5\sin(3t)$

معكوس تحويل لابلاس *The Inverse of Laplace Trans form*

تعريف ,

نحن نقول بأن $L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ هو معكوس تحويل لابلاس لـ $\bar{f}(s)$ فيكون

$$L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$$

قاعدة (10)

(a) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

(b) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

(c) $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^{n} \quad , n = o , 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots$

(d) $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^{2}+a^{2}}\right\} = \sin(at)$

(e) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{2}+a^{2}}\right\} = \cos(at)$

(f) $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^{2}-a^{2}}\right\} = \sinh(at)$

(g) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{2}-a^{2}}\right\} = \cosh(at)$

ونستطيع القول أيضا بأن معكوس تحويل لابلاس يكون له خاصية التحويل الخطى حيث أن

$$L^{-1}\{\alpha\bar{f}(s)+\beta\bar{g}(s)\} = \alpha L^{-1}\{\bar{f}(s)\}+\beta L^{-1}\{\bar{g}(s)\}$$

حيث α ، β ثوابت

مثال : أوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

الحل :

إذا أردنا تطبيق (c) فى القاعدة (10) فإننا نجد أن $n = 2$ وبالتالى يجب أن نضرب ونقسم بالعدد $2!$ إذن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2!} L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} t^2$$

مثال : أوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 49}\right\}$$

الحل : إذا أردنا تطبيق فقرة (d) فى القاعدة (10) فإننا نجد أن $a^2 = 49$ لذلك يجب أن نضرب ونقسم بالعدد 7

إذن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 49}\right\} = \frac{1}{7} L^{-1}\left\{\frac{7}{s^2 + 49}\right\}$$

$$= \frac{1}{7} \sin(7t)$$

مثال : أوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2 + 9}\right\}$$

الحل :

$$L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2 + 9}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 9}\right\}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\} = 2\cos(3t) - 2\sin(3t) .$$

إن إستخدام الكسور الجزئية يعمل دوراً مهما فى الحصول على معكوس تحويل لابلاس ولذلك دعنا نستعرض هذه الأمثلة

مثال : أوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-2}\right\}$$

الحل :

$$\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{s+2}$$

حيث A , B ثوابت مجهولة نريد إيجادها إذن

$$A(s+2) + B(s-1) = 1$$

بأخذ $s = 1$ نجد أن

$$3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

وبأخذ $s = -2$ نجد أن

$$-3B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

إذن
$$\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(s+2)}$$

إذن
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}.$$

مثال : أوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$$

الحل :

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+4}$$

إذن

$$As^2(s^2+4)+Bs(s^2+4)+C(s^2+4)+(Ds+E)s^3=3s-2$$

وبوضع $s=0$ نجد أن $C=-\frac{1}{2}$

وبمقارنة معاملات s^4 ، s^3 ، s^2 ، s نجد أن

$$A+D=0 \text{ ، } B+E=0 \text{ ، } 4A+C=0 \text{ ، } 4B=3$$

إذن

$$B=\frac{3}{4} \text{ ، } E=-\frac{3}{4} \text{ ، } A=\frac{1}{8} \text{ ، } D=-\frac{1}{8}$$

إذن

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^3}+\frac{-s/8-3/4}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + \frac{3}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} - \frac{1}{8} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\}$$

$$- \frac{3}{8} L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} t - \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t).$$

قاعدة (11)

$$L^{-1}[\bar{f}(s-a)] = e^{at} L^{-1}(\bar{f}(s)) = e^{at} f(t).$$

مثال ، أوجد

$$L^{-1}\left(\frac{6s-4}{s^2 - 4s + 20} \right)$$

الحل ،

$$\frac{6s-4}{s^2 - 4s + 20} = \frac{6s-4}{(s-2)^2 + 16}$$

(وذلك عن طريق إكمال المربع)

$$= \frac{6(s-2) + 8}{(s-2)^2 + 16}$$

$$= \frac{6(s-2)}{(s-2)^2 + 16} + \frac{(2)(4)}{(s-2)^2 + 16}$$

$$= L\,[6e^{2t}\cos(4t) + 2e^{2t}\sin(4t)]$$

$$= L\,[2e^{2t}(3\cos(4t) + \sin(4t))]$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s-4}{s^2 - 4s + 20} \right) = 2e^{2t}(3\cos(4t) + \sin(4t)).$$

ملاحظة :

إذا كانت $f(t)$ مستمرة جزئيا فى الفترة $[0, \infty)$ وذات رتبة أسية لكل $t > T$ فإن

$$\lim_{s \to \infty} L\{f(t)\} = 0$$

مثال ، الدالتان

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{s+1} \quad , \quad \bar{f}(s) = s^2$$

لايكونا تحويل لابلاس لدوال ذات رتبة أسية ومستمرة جزئيا لان

$$F_1(s) \nrightarrow 0 \quad , \quad F_2(s) \nrightarrow 0$$

عندما $s \to \infty$. ولذلك فإننا نستطيع القول بأن

$L^{-1}\{F_1(s)\}$ ، $L^{-1}\{F_2(s)\}$ غير موجودان .

تمارين (18)

أوجد ما يأتى

1- $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$

2- $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+49}\right\}$

3- $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-2}\right\}$

4- $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$

5- $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+3s}\right\}$

6- $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s-8}\right\}$

7- $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

8- $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة باستخدام تحويلات لابلاس

Solution of Linear Differential Equations With Constants Coefficients By Using Laplace Transforms

إن من أهم تطبيقات تحويل لابلاس هو حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والتى تتوفر لها شروط إبتدائية .

دعنا فى البداية نستعرض القواعد الاتية :

قاعدة (12)

إذا كانت $f'(t) = \frac{df}{dt}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $f'(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة أسية وكانت بالطبع الداله $f(t)$ مستمره عند $t \geq 0$ فإن

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

أو

$$\bar{f}'(s) = s\bar{f}(s) - f(0)$$

البرهان :

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$$

وباستخدام التكامل بالتجزئى نجد أن

$$L\{f'(t)\} = [\, e^{-st} . f(t)\,]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0)$$

أو

$$= s\bar{f}(s) - f(0) .$$

قاعدة (13)

إذا كانت $f''(t)=\dfrac{d^2f}{dt^2}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $f''(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة أسية وكانت $f'(t)$ ، $f(t)$ مستمرتان عند $t \geq 0$ فإن

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

البرهان :

$$L\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$
$$= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$
$$= s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

قاعدة (14)

إذا كانت $f^n(t) = \dfrac{d^n f}{dt^n}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $f^n(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة أسية وكانت الدوال f^{n-1} ،.. ، f' ، f مستمرة عند $t \geq 0$ فإن

$$L\{f^n(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

إن مسألة حل المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وذات الشروط الإبتدائية سوف تؤول إلى مسألة حل معادلة جبرية وذلك عند إستخدام تحويل لابلاس حسب القواعد السالفة الذكر ولفهم ذلك دعنا نفترض أن لدينا :

$$a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d f(t)}{dt} + a_o f(t) = g(t) \qquad (1)$$

حيث

$$f(0) = f_o \,,\; f'(0) = f'_o , \ldots ، f^{n-1}(0) = f_o^{n-1}$$

وحيث أن $\left\{ \begin{array}{l} a_i \,, i = o, 1, \ldots, n \\ f_o \;،\; f'_o \;،\; \ldots ،\; f_o^{n-1} \end{array} \right.$ يكونوا ثوابت

وبإستخدام تحويل لابلاس لحل هذه المعادله التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابته وذات الشروط الإبتدائية وبإستخدام خاصية التحويل الخطى لتحويل لابلاس فإنه يمكن كتابة (1) على الصورة .

$$a_n L \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} + a_{n-1} L \left\{ \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right\} +$$

$$\ldots + a_o L\{ f(t) \} = L\{ g(t) \} \qquad (2)$$

وبإستخدام القواعد السالفة الذكر نجد أن

$$a_n [s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} \bar{f}(s) - s^{n-2} f(0)$$

$$- \ldots - f^{n-2}(0)] + \ldots + a_o \bar{f}(s) = \bar{g}(s)$$

أو

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_o] \bar{f}(s) = a_n [s^{n-1} f_o + \ldots + f_o^{n-1}]$$

$$+ a_{n-1} [s^{n-2} f_o + \ldots + f_o^{n-2}] + \ldots + \bar{g}(s) \qquad (3)$$

حيث

$$\bar{g}(s) = L\{ g(t) \} \quad ، \quad \bar{f}(s) = L\{ f(t) \}$$

وبحل (3) لـ $\bar{f}(s)$ وبأخذ معكوس تحويل لابلاس نحن نستطيع أن نجد $f(t)$ والتى تمثل حل المعادلة (1) .

مثال : حل المعادلة التفاضلية $y' + y = e^t$ حيث $y(0) = 0$

الحل : هذه معادلة خطية من الرتبة الأولى ويمكن حلها باستخدام تحويلات لابلاس . إذن بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة أعلاة نجد أن

$$s\bar{y} - 0 + \bar{y} = \frac{1}{s-1}$$

حيث

$$L\{y'\} = sL\{y\} - y(0) = s\bar{y} - 0$$

$$L\{y\} = \bar{y}$$

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

إذن نجد أن

$$\bar{y}(s+1) = \frac{1}{s-1}$$

إذن

$$\bar{y} = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

وبأستخدام طريقة الكسور الجزئية للتحليل نجد أن

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

إذن

$$\bar{y} = L\{y\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

وبأخذ معكوس لابلاس L^{-1} للطرفين نجد أن

$$L^{-1}[L\{y\}] = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$y = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

إذن

$$y = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

أو

$$y = \sinh(t) \cdot$$

ويمكن أيضا أن نحل المعادلة المعطاه عن طريق إستخدام المعامل التكاملى

إذن لدينا $y' + y = e^{t}$ حيث $y(0) = 0$

وبالتالى نجد أن معامل التكامل لها هو e^{t} كما تعلمنا مسبقاً . إذن الحل يكون على الصورة الأتية

$$y = e^{-t}\left[\int e^{t} \cdot e^{t}\, dt + c\right]$$

حيث c ثابت إختيارى

إذن

$$y = e^{-t}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + c\right]$$

إذن

$$y = \frac{1}{2}e^{t} + c\,e^{-t}$$

وهذا هو حلها العام . ولكن معطى لدينا $y(0) = 0$ إذن $c = -\frac{1}{2}$

وبالتالى نجد أن $\sinh(t) = y = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$ هو حلها الخاص .

مثال : بإستخدام تحويل لابلاس حل المعادلة $y'' + 7y' + 12y = 0$

حيث $y'(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$

الحل :

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + 7\{s\bar{y} - y(0)\} + 12\bar{y} = 0$$

إذن

$$(s^2 + 7s + 12)\,\bar{y} - (s+7) = 0$$

$$\bar{y} = \frac{s+7}{s^2 + 7s + 12} = \frac{s+7}{(s+3)(s+4)}$$

وبإستخدام طريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$\bar{y} = \frac{4}{s+3} - \frac{3}{s+4}$$

إذن بأخذ L^{-1} للطرفين نجد أن

$$y = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}\ .$$

مثال :

بإستخدام تحويل لابلاس حل المعادلة $y'' + y = \sin(2t)$

حيث $y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

الحل : بتطبيق تحويل لابلاس للمعادلة المعطاه نجد أن

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + \bar{y} = \frac{2}{s^2+4}$$

إذن

$$s^2\bar{y} - 1 + \bar{y} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\bar{y}\,(s^2+1) = \frac{s^2+6}{s^2+4}$$

إذن

$$\bar{y} = \frac{s^2+6}{(s^2+1)\,(s^2+4)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\bar{y} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

وبأخذ L^{-1} للطرفين نجد أن

$$y = \frac{5}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t) \cdot$$

تمارين (19)

بإستخدام تحويل لابلاس حل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية :

1- $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$; $i(0) = 0$

2- $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

3- $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3t}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

4- $y'' + 3y' + 2y = 2 + 6t + 2t^2$; $y(0) = 3,\ y'(0) = -4$

الباب السابع

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

Linear Differential Equations Of The Second Order With Variable Coefficients

مقدمه

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة هى

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (1)$$

حيث أن المعاملات $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ لايكونوا معاً ثوابت (بمعنى أن يكون واحداً منهم على الأقل متغير) , $a_0(x) \neq 0$ ، $f(x)$ داله فى x أو ثابت.

ويمكن كتابة المعادله (1) على الصورة

$$y'' + R(x)y' + S(x)y = Q(x) \qquad (2)$$

حيث $R(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ، $S(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$ لايكونا معاً ثابتين ، $Q(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}$. وإذا كانت $f(x) = 0$ فى المعادله (1) فإن المعادله (1) تسمى بالمعادله التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة .

أما إذا كانت $f(x) \neq 0$ فى المعادله (1) فإن المعادله (1) تسمى بالمعادله التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة .

أولا : حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

Solution Of Homogeneous Linear Differential Equations Of The Second Order With Variable Coefficients .

توجد هناك عدة طرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والتى تكون على الصورة

$$y'' + R(x)\,y' + S(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

حيث $R(x)$ ، $S(x)$ ليسا معاً ثابتين (بمعنى أن يكون واحد منهم على الأقل متغير) وسنذكر منها مايلى :

(أ) طريقة تخفيض الرتبة : *Reduction Of Order Method*

وتستخدم هذه الطريقة فى حالة توفر حل خاص واحد للمعادله (1)

ولشرح ذلك دعنا نفرض أن y_1 هو حل خاص ومعلوم للمعادله (1)

إذن نحن نسعى لإيجاد الحل العام للمعادله (1) والذى يكون على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلان خاصان ومستقلان خطياً للمعادله (1) ، c_1 ، c_2 ثابتان إختياريان .

وبالتالى سوف نفرض أن

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x) \qquad (2)$$

حيث $v(x)$ داله مجهولة ونريد إيجادها بحيث تكون y_2 هى حل خاص آخر للمعادله (1) وفى نفس الوقت يكون الحلان y_1 ، y_2 مستقلان خطياً

$$y'_2 = v(x)\, y'_1(x) + v'(x)\, y_1(x)$$

إذن بإيجاد

$$y''_2 = v(x)\, y''_1(x) + v'(x)\, y'_1(x) + v'(x)\, y'_1(x) + v''(x)\, y_1(x)$$

وبالتعويض عن y_2 ، y'_2 ، y''_2 فى (1) وبتجميع الحدود نجد أن

$$v(y''_1 + R y'_1 + S y_1) + v'(2 y'_1 + R y_1) + v'' y_1 = 0 \qquad (3)$$

وبما أن y_1 هو حل للمعادله (1) إذن المقدار الأول من جهة اليسار للمعادله (3) يكون صفراً .

وبالقسمة على y_1 حيث أن $y_1 \neq 0$ نجد أن

$$v'' + \left(R + 2 \frac{y'_1}{y_1} \right) v' = 0 \qquad (4)$$

وبوضع $v' = p$ نحن نستطيع أن نخفض رتبة المعادله (4) من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى حيث نجد أن

$$p' + \left(R + 2 \frac{y'_1}{y_1} \right) p = 0 \qquad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها بسهولة كما تعلمنا مسبقاً .

إذن حلها يكون على الصورة

$$p = v' = c\, e^{-\int \left(R + 2 \frac{y'_1}{y_1} \right) dx} = c\, u(x)$$

حيث c ثابت إختيارى وحيث

$$u(x) = e^{-\int\left(R + 2\frac{y'_1}{y_1}\right)dx} = e^{-\int R\,dx - 2\int \frac{y'_1}{y_1}dx}$$

$$= e^{-\int R\,dx} \cdot e^{-2\int \frac{y'_1}{y_1}dx}$$

$$= e^{-\int R\,dx} \cdot e^{-2\,Ln\,y_1}$$

$$= e^{-\int R\,dx} \cdot \frac{1}{y_1^2}$$

إذن

$$u(x) = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int R\,dx}$$

وبالتالى نجد أن

$$v = c\int u(x)\,dx$$

وبما أن

$$y_2 = v(x) \cdot y_1(x)$$

إذن

$$y_2 = c\,y_1(x)\int u(x)\,dx$$

إذن

$$y_2 = c\, y_1(x) \int \frac{e^{-\int R(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

ومنها نجد أن

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int R(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

وهذه هى صيغة إيجاد الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) . إذن إستطعنا إيجاد y_2 بحيث أن y_1 ، y_2 مستقلان خطياً .

ملاحظة عند تكامل v' إذا أضفنا ثابت التكامل لـ v فإن الحل (2) يمثل الحل العام للمعادلة (1) أما إذا لم نضف ثابت التكامل فإن الحل (2) يمثل الحل الخاص الثانى للمعادله (1) .

مثال :

حل المعادله التفاضليه

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 0$$

بمعلومية حل خاص هو

$$y_1 = x$$

الحل : بما أن الحل العام يكون على الصوره

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

وبما أن y_1 معطى لدينا إذن نجد y_2 وبالتالى يكون

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int R(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

إذن

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-3}{x} dx}}{x^2}\, dx$$

$$y_2 = x \int \frac{x^3}{x^2}\, dx \quad = \frac{x^3}{2}$$

إذن الحل العام يكون كالاتى

$$y = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{2}$$

أو

$$y = c_1 x + c_3 x^3 \quad ; \quad \left(c_3 = \frac{1}{2} c_2 \right)$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين .

قاعدة (1)

يكون $y = x$ حل خاص للمعادله (1) إذا كان $R(x) + x\,S(x) = 0$

قاعدة (2)

يكون $y = e^{mx}$ حل خاص للمعادله (1) إذا كان

$$m^2 + mR(x) + S(x) = 0$$

مثال :

فى المثـال السـابق نجـد أن $y = x$ هـو حل خـاص للمـعـادله

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 0$$ وذلك لان القاعدة (1) تكون متحققه

حيث أن $$\frac{-3}{x} + \frac{3x}{x^2} = 0$$

مثال :

أيضا نجد أن $y = e^{2x}$ هو حل خاص للمعادله

$$y'' - \frac{(4x-7)}{(x-2)} y' + \frac{(4x-6)}{(x-2)} y = 0$$

وذلك لان القاعدة (2) أعلاه تكون متحققة عندما $m = 2$ وبالتالى نجد أن

$$m^2 + mR(x) + S(x) = (2)^2 - 2\,\frac{(4x-7)}{(x-2)} + \frac{(4x-6)}{(x-2)} = 0 .$$

(ب) طريقة التخلص من المشتقة الأولى

The Cancellation Method Of First Derivative

وتستخدم هذه الطريقة عند عدم توفرحل خاص للمعادله (1) وبالتالى نفرض أن الحل العام للمعادله (1) يكون على الصوره

$$y(x) = u(x) . v(x)$$

وبإيجاد $y' = u v' + u' v,$

$y'' = u v'' + 2u' v' + u'' v.$

وبالتعويض عن y ، y' ، y'' فى المعادله (1) وبتجميع الحدود فإننا نحصل على

$$u''(x) + \left[2\frac{v'(x)}{v(x)} + R(x)\right]u'(x) + \frac{1}{v(x)}[v''(x) + R(x)v'(x) +$$

$$S(x)v(x)]u(x) = \frac{o}{v(x)} \qquad (2)$$

وللتخلص من المشتقة الأولى $u'(x)$ فى هذه المعادله فإننا سوف نختار $v(x)$ بحيث أن

$$2\frac{v'(x)}{v(x)} + R(x) = o$$

أو

$$\frac{d\,v(x)}{v(x)} = -\frac{1}{2}R(x)\,dx$$

إذن

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int R(x)dx}$$

وبالتالى نجد أن

$$v'(x) = -\frac{1}{2}R(x)\,v(x)$$

$$v''(x) = -\frac{1}{2}R(x)v'(x) - \frac{1}{2}v(x)\,R'(x)$$

وبالتعويض عن $v(x)$ ، $v'(x)$ ، $v''(x)$ فى (2) وبتجميع الحدود نجد أن

$$u''(x) + \left[-\frac{1}{2}R(x)\frac{v'(x)}{v(x)} - \frac{1}{2}R'(x) - \frac{1}{2}R^2(x) + S(x)\right]u(x) = 0$$

إذن

$$u''(x)+\left[-\frac{1}{4}R^2(x)-\frac{1}{2}R'(x)+S(x)\right]u(x)=0$$

وبوضع

$$K=S(x)-\frac{1}{4}R^2(x)-\frac{1}{2}R'(x)$$

نحصل على

$$u''(x)+K\,u(x)=0$$

وبالتالى إذا كان المقدار K عدد ثابت فإن المعادله

$$u''(x)+K\,u(x)=0$$

تصبح معادله تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابته وهذه بالطبع يمكن حلها كما تعلمنا مسبقاً .

أما إذا كان المقدار $K=\frac{a}{x^2}$ حيث a عدد ثابت فإن المعادله $u''(x)+K\,u(x)=0$ تصبح كالاتى $x^2u''(x)+a\,u(x)=0$

وهذه تكون على صورة معادله أيلر (Euler)وهذه أيضا يمكن حلها ببساطة كما تعلمنا مسبقاً وذلك بوضع $x=e^z$.

مثال : بإستخدام طريقة التخلص من المشتقة الأولى حل المعادلة التفاضلية

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=0$$

الحل :

$$R(x)=-\frac{3}{x} \quad , \quad S(x)=\frac{3}{x^2}$$

$$v(x)=e^{-\frac{1}{2}\int R(x)dx}=e^{\frac{3}{2}\ln x}=x^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

$$\text{،}\ K = S(x) - \frac{1}{4}R^2(x) - \frac{1}{2}R'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4x^2} - \frac{3}{2x^2} = -\frac{3}{4x^2}$$

إذن بإستخدام التحويل

$$y = u(x) \,.\, v(x) = u(x) \,.\, x^{\frac{3}{2}}$$

فإن المعادله المعطاه تصبح على الصورة

$$u''(x) - \frac{3}{4x^2}\,u(x) = 0$$

أو

$$x^2 u''(x) - \frac{3}{4}\,u(x) = 0$$

وهذه تكون على صورة معادله أيلر

إذن بوضع $x = e^z$ نحن نجد أن

$$\left(D^2 - D - \frac{3}{4}\right)u(z) = 0$$

وهذه معادله خطية متجانسة ذات معاملات ثابته ويكون حلها معطى على الصورة

$$u(z) = c_1\, e^{-\frac{z}{2}} + c_2\, e^{3\cdot\frac{z}{2}}$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين

وبالتعويض عن $z = \ln x$ نجد أن

$$u(x) = c_1\, x^{-\frac{1}{2}} + c_2\, x^{\frac{3}{2}}$$

وبما أن $y = u(x) \,.\, x^{\frac{3}{2}}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه والمطلوب حلها إذن

$$y = x^{\frac{3}{2}}\left[\, c_1\, x^{-\frac{1}{2}} + c_2\, x^{\frac{3}{2}} \,\right]$$

أو

$$y = c_1\, x + c_2\, x^3 \,,$$

(جـ) طريقة تحليل المؤثر

إن المعادله التفاضلية (1) :

$$y'' + R(x)y' + S(x)y = 0$$

يمكن كتابتها بإستخدام المؤثر التفاضلى كالاتى

$$(D^2 + R(x)D + S(x))y = 0 \qquad (2)$$

وإذا أمكن تحليل الطرف الأيسر من (2) بحيث يكون

$$\{(D+M(x))\ (D+N(x))\}\ y = (D+M(x))\ \{(D+N(x))y\} = (D^2 + R(x)D + S(x))\ y = 0 \qquad (3)$$

فإننا نضع

$$(D+N(x))y = v \qquad (4)$$

وبالتالى فإن المعادله (3) تصبح كالاتى

$$(D+M(x))\ v = 0 \qquad (5)$$

وهذه معادله تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها ببساطة لايجاد قيمة v . ثم نعوض عن قيمة v فى (4) وبذلك نحصل أيضا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وبحلها نكون قد حصلنا على قيمة y والتى تمثل الحل العام للمعادله (1) أو (2) .

إننا يجب أن نلاحظ أنه إذا كان لدينا M ، N دالتين تحتويان على المتغير المستقل وكانت u داله فى x فإن

$$(D+M)(D+N)u = (D+M)(Du + Nu) = D(Du) + MDu + D(Nu) + MNu$$

$$= D^2u + MDu + NDu + uDN + MNu$$

وكذلك يمكن القول بانه من الممكن أن

$$(D+M)(D+N)u \neq (D+N)(D+M)u$$

ولتوضيح ذلك نجد أن

$$(D-x)(D-x^2)u = D^2u - x^2 Du - 2xu - xDu + x^3 u$$

$$(D-x^2)(D-x)u = D^2 u - xDu - u - x^2 Du + x^3 u$$

واضح أن

$$(D-x)(D-x^2)u \neq (D-x^2)(D-x)u$$

إن صعوبة هذه الطريقة تكمن فى تحليل الطرف الأيسر والأمثلة الآتية سوف تشرح طرق التحليل .

مثال : بإستخدام طريقة تحليل المؤثر حل المعادله التفاضلية

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2} y = o \qquad (1)$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادله على الصورة

$$\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right)y = o \qquad (2)$$

ولنفرض أن الطرف الأيسر من هذه المعادله يمكن تحليله على الصورة

$$(D+M)(D+N)\,y \qquad (3)$$

حيث M ، N دالتين فى x أو

$$D^2y + (M+N)Dy + (N' + MN)y \qquad (4)$$

إذا كانت الصيغة (4) تساوى الطرف الأيسر من (2) فإننا نجد أن

$$M+N = -\frac{3}{x} \quad , \quad N' + MN = \frac{3}{x^2}$$

وبالتالى نجد أن $M = \frac{-3}{x} - N$ وبالتعويض عنها فى $N' + MN = \frac{3}{x^2}$

نجد أن

$$N' - \frac{3}{x} N - N^2 = \frac{3}{x^2} \qquad (5)$$

وهذه المعادله (5) يمكن كتابتها على الصورة

$$x^2 N' - 3 x N - x^2 N^2 = 3 \qquad (6)$$

إننا نفترض أن حل المعادله (6) يكون على الصورة $N = \frac{a}{x}$

ومن ثم نجد أن $N' = -\frac{a}{x^2}$ وبالتعويض عن قيمتى N ، N' فى (6)

نجد أن

$$-a - 3a - a^2 = 3$$

أو

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

إذن

$$(a+3)(a+1) = 0$$

وبالتالى نجد أن $a = -1$ أو $a = -3$

فعندما $a = -1$ نجد أن $N = \frac{-1}{x}$ وبالتالى $M = \frac{-2}{x}$

وبالتالى فإن (3) تكون كالاتى

$$\left(D - \frac{2}{x}\right)\left(D - \frac{1}{x}\right)y = D^2 y - \frac{3}{x} D y + \frac{3}{x^2} y = \left(D^2 - \frac{3}{x} D + \frac{3}{x^2}\right) y$$

وهذا يعنى أن تحليل الطرف الأيسر من (2) على الصورة $\left(D - \frac{2}{x}\right)\left(D - \frac{1}{x}\right) y$ يكون صحيحاً وبالتالى نستطيع حل المعادله المطلوبه وذلك بفرض أن

$$\left(D - \frac{1}{x}\right) y = z \qquad (7)$$

إذن $\left(D-\frac{2}{x}\right)z=o$ وحل هذه المعادله الخطية من الرتبة الأولى يكون

$$z=c_1\,x^2$$

حيث c_1 ثابت إختيارى

وبالتعويض عن z فى (7) نجد أن

$$\left(D-\frac{1}{x}\right)y=c_1\,x^2$$

وبحل هذه المعادله التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى عن طريق إيجاد معامل التكامل نجد أن

$$y=\frac{c_1}{2}\,x^3+c_2\,x$$

وبوضع $\frac{c_1}{2}=c_3$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوب حلها هو

$$y=c_3\,x^3+c_2\,x$$

حيث c_2 ، c_3 ثابتين إختياريين .

أما عندما $a=-3$ نجد أن

$$N=\frac{-3}{x} \quad , \quad M=o$$

وبالتالى فإن (3) تكون كالاتى

$$D\left(D-\frac{3}{x}\right)y=D^2y-\frac{3}{x}Dy+\frac{3}{x^2}y=\left(D^2-\frac{3}{x}D+\frac{3}{x^2}\right)y$$

وهذا أيضا يعنى أن تحليل الطرف الأيسر من (2) على الصورة $D\left(D-\frac{3}{x}\right)y$ يكون صحيحاً وبالتالى نستطيع حل المعادله المطلوب حلها وذلك بفرض أن

$$\left(D-\frac{3}{x}\right)y=z \qquad (8)$$

إذن $Dz = o$ وحل هذه المعادله هو $z = k_1$

وبالتعويض عن z فى (8) نجد أن $\left(D - \frac{3}{x} \right) y = k_1$

وبحل هذه المعادله التفاضليه الخطية من الرتبة الأولى عن طريق إيجاد معامل التكامل نجد أن $y = \frac{k_1 x}{-2} + k_2 x^3$ وبوضع $\frac{k_1}{-2} = k_3$

نجد أن الحل العام للمعادله المطلوب حلها هو $y = k_3 x + k_2 x^3$

حيث k_1 ، k_2 ، k_3 ثوابت إختيارية . وهو نفس الحل الذى حصلنا عليه سابقاً . ويمكن حل المثال السابق بطريقة أخرى مماثلة وذلك عن طريق ضرب المعادله (1) فى x^2 فإننا نجد أن $x^2 y'' - 3 x y' + 3 y = o$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$(x^2 D^2 - 3 x D + 3)\, y = o \qquad (2)$$

ولنفرض أن الطرف الأيسر من هذه المعادله يمكن تحليله على الصورة

$$(x D + M)(x D + N)\, y \qquad (3)$$

أو

$$x^2 D^2 y + x(M + N + 1) Dy + (M N + x N')\, y \qquad (4)$$

حيث M ، N دالتين فى x .

إذا كانت الصيغة (4) تساوى الطرف الأيسر من (2) فإننا نجد أن $M N + x N' = 3$ ، $x(M + N + 1) = -3x$

وبالتالى نجد أن $M = -N - 4$ وبالتعويض عنها فى $MN + x N' = 3$

نجد أن

$$-N^2 - 4N + x N' = 3 \qquad (5)$$

إننا نفترض أن حل (5) يكون على الصورة $N = a$ ومن ثم نجد أن $N' = o$ وبالتعويض عن قيمتى N ، N' فى (5)

نجد أن $-a^2 - 4a = 3$ أى أن $a^2 + 4a + 3 = 0$

أو $(a+3)(a+1) = 0$

وبالتالى نجد أن

$a = -3$ ، $a = -1$

فعندما $a = -1$ نجد أن $N = -1$ ، $M = -3$

وبالتالى فإن (3) تكون كالاتى

$$(xD-3)(xD-1)\ y = (x^2D^2 - 3xD + 3)\,y$$

وهـــذا يعنى أن تحليـــل الطـــرف الأيســـر من (2) عـــلى الصورة $(xD-3)(xD-1)y$ يكون صحيحاً وبالتالى نستطيع حل المعادله المطلوب حلها وذلك بفرض أن

$$(xD-1)\ y = z \qquad (6)$$

إذن $(xD-3)\ z = 0$ أو $\left(D - \frac{3}{x}\right) z = 0$

وهذه معادلـه خطيـه من الرتبـه الأولى ويكـون حـلها كالاتى

$z = c_1 x^3$ حيث c_1 ثابت إختيارى

وبالتعويض عن z فى (6) نجد أن $(xD-1)y = c_1 x^3$

أو $\left(D - \frac{1}{x}\right)y = c_1 x^2$ وبحل هذه المعادله التفاضليه الخطيه من الرتبه الأولى عن طريق إيجاد معامل التكامل نجد أن $y = \frac{c_1}{2}x^3 + c_2 x$

وبوضع $\frac{c_1}{2} = c_3$ نجـد أن الحـل العـام للمعـادله المطلـوب حلها هو

$y = c_3 x^3 + c_2 x$ حيث c_2 ، c_3 ثابتين إختياريين :

أما عندما $a = -3$ نجد أن $N = -3$ ، $M = -1$ وبالتالى فإن (3) تكون كالاتى

$$(xD-1)(xD-3)\,y = (x^2D^2 - 3xD + 3)\,y$$

ومن ثم يمكن إيجاد الحل العام للمعادله المطلوب حلها وذلك بوضع

$$(xD-3)\,y = z \qquad (7)$$

إذن

$$(xD-1)\,z = o$$

أو $\left(D - \frac{1}{x}\right) z = o$ وحل هذه المعادله يكون $z = k_1 x$

حيث k_1 ثابت إختيارى وبالتعويض عن z فى (7) نجد أن

$(xD-3)\,y = k_1 x$ أو $\left(D - \frac{3}{x}\right) y = k_1$ وبحل هذه المعادله التفاضليه الخطيـة من الـرتبـه الأولى عن طريـق إيجـاد معامـل التكامل نجد أن

$y = \frac{-k_1 x}{2} + k_2 x^3$ وبوضع $-\frac{k_1}{2} = k_3$ نجـد أن الحل العـام للمعـادله المطلوب حلها هو

$y = k_3 x + k_2 x^3$ حيث k_2 ، k_3 ثوابت إختيارية وهو نفس الحل الذى حصلنا عليه مسبقاً .

مثال : بإستخدام طريقة تحليل المؤثر حل المعادله التفاضلية

$$x^2D^2y + x^2Dy - (x+2)\,y = o \qquad (1)$$

الحل ، لنفرض أن الطرف الأيسر من هذه المعادله يمكن تحليله على الصورة

$$(xD+M)(xD+N)y \qquad (2)$$

أو

$$x^2D^2y+x(M+N+1)\,Dy+(MN+xN')y \qquad (3)$$

حيث M ، N دوال فى x .

إذا كانت الصيغة (3) تساوى الطرف الأيسر من (1) فإننا سوف نجد

$$x(M+N+1)=x^2 \quad , \quad MN+xN'=-x-2 \qquad (4)$$

وبالتالى نجد أن $M=x-N-1$ وبالتعويض عنها فى $MN+xN'=-x-2$

نجد أن

$$(x-1)N-N^2+xN'=-x-2 \qquad (5)$$

وبفرض أن حل المعادله (5) يكون على الصورة

$$N=ax+b$$

نجد أن (5) تكون

$$(x-1)(ax+b)-(ax+b)^2+xN'=-x-2$$

إذن

$$ax^2+xb-b-(a^2x^2+2axb+b^2)=-x-2$$

ولايجاد قيم a ، b فإننا سوف نستخدم طريقة مقارنه المعاملات لـ x^2 ، x^1 ، x^o حيث نجد أن

$$a-a^2=o \quad , \quad b-2ab=-1 \quad , \quad -b-b^2=-2$$

وهذه المعادلات الثلاث تكون متحققة عندما $b=1$ ، $a=1$

إذن بالتالى نجد أن

$$N=x+1 \quad , \quad M=-2$$

وبالتالى يمكن كتابة المعادله (1) على الصورة

$$(xD-2)(xD+x+1)\,y=o \qquad (6)$$

ولحل المعادله (6) نفرض أن

$$z=(xD+x+1)y \qquad (7)$$

$$(xD-2)\,z=0$$

إذن

وحل هذه المعادله الخطية من الرتبه الأولى يكون

$$z=c_1x^2$$

حيث c_1 ثابت إختيارى

وبالتعويض عن z فى (7) نجد أن

$$(xD+x+1)y=c_1x^2$$

وبحل هذه المعادله التفاضلية الخطية من الرتبه الأولى عن طـريق إيجـاد المعامل التكاملى نجد أن

$$y=c_1\left[x-\frac{2x-2}{x}\right]+c_2\,\frac{e^{-x}}{x}$$

أو

$$xy=c_1[x^2-2x+2]+c_2e^{-x}$$

حيث c_2 ثابت إختيارى

قاعده :

إذا كانت M ، N دوال فى x ، كان c عدد ثابت فإن

$$[MD^2+(Mc+N)D+cN]\,y=(MD+N)(D+c)\,y$$

مثال : بإستخدام طريقة تحليل المؤثر حل المعادله التفاضلية الأتيه

$$[xD^2+(2x-1)D-2]\,y=0 \qquad (1)$$

الحل : بإستخدام القاعدة السابقة نجد أن

$$M=x \;\;،\;\; N=-1 \;\;،\;\; c=2$$

إذن يمكن كتابة الطرف الأيسر من (1) على الصورة

$$[xD^2+(2x-1)D-2]\,y=(xD-1)(D+2)\,y$$

وبالتالى نجد أن $(xD-1)(D+2)y=0$

إذن نضع

$$(D+2)y=z \qquad (2)$$

وبالتالى نحل المعادله التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

$$(xD-1)\,z=0$$

وحلها يكون معطى على الصورة $z=c_1\,x$ حيث c_1 ثابت إختيارى

وبالتعويض عن z فى (2) نجد أن

$$(D+2)y=c_1\,x$$

وبحل هذه المعادله التفاضليـة الخطيـة من الرتبـة الأولى عن طريق إيجاد معامل التكامل نجد أن $y=c_1\,(2x-1)+c_2e^{-2x}$

ملاحظة

إذا كانت G ، K ، C ، B ، A دوال فى x فإن

$$(AD+B)(CD+K)G=A\frac{dC}{dx}\frac{dG}{dx}+AC\frac{d^2G}{dx^2}+A\left(K\frac{dG}{dx}+G\frac{dK}{dx}\right)+BC\frac{dG}{dx}+BKG.$$

تمــاريـن (20)

س١ حل المعادلات التفاضلية الأتيه مستخدما طريقة تخفيض الرتبه

1. $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$
2. $xy''-(x+3)y'+3y=0$

س٢ حل المعادلات التفاضلية الأتيه مستخدما طريقة التخلص من المشتقه الأولى

1. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$

2. $xy'' - (x+3)y' + 3y = 0$

س٣ بإستخدام طريقة تحليل المؤثر التفاضلى حل المعادلات التفاضلية الأتيه

1. $x^2 y'' + (2x^2 - x)y' - 2xy = 0$

2. $x^2 y'' - xy' + y = 0$

ثانياً : حل المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبه الثانيه ذات المعاملات المتغيرة

Solution of Non - Homogeneous Linear Differential Equations Of The Second Order With Variable Coefficients .

إن الطرق التى ذكرناها مسبقاً لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة يمكن إستخدامها لحل المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والتى تكون على الصورة

$$y'' + R(x)y' + S(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $R(x)$ ، $S(x)$. ليسا معاً ثابتين (بمعنى أن يكون واحدا منهم على الأقل متغير) ، $Q(x)$ داله فى x أو ثابت بحيث أن $Q(x) \neq 0$ وإضافة إلى هذه الطرق فإنه توجد طريقة أخرى تسمى بطريقة تغيير الثوابت أو البارامترات .

(أ) طريقة تحفيض الرتبة *Reduction Of Order Method*

وتستخدم هذه الطريقة فى حالة توفر حل خاص واحد وليكن $y_1(x)$ للمعادله المتجانسه والمناظرة للمعادله (1) :

$$y'' + R(x)\, y' + S(x)\, y = o \qquad (2)$$

ولايجاد الحل العام للمعادلة (1) فإننا سوف نفرض أن الحل العام للمعادله (1) يكون على الصورة

$$y = v(x)\,.\,y_1(x) \qquad (3)$$

حيث $v(x)$ دالة مجهولة ونريد إيجادها

إذن بإيجاد $y'' = v\,.\,y''_1 + 2v'\,y'_1 + v''\,y_1$ ، $y' = v\,.\,y'_1 + v'\,.\,y_1$

وبالتعويض عن y ، y' ، y'' فى (1) وبتجميع الحدود نجد أن

$$v(y''_1 + R\,y'_1 + S\,y_1) + v'(2\,y'_1 + R\,y_1) + v''\,y_1 = Q(x) \qquad (4)$$

وبما أن y_1 هو حل خاص للمعادله المتجانسة (2) إذن المقدار الأول من جهة اليسار للمعادله (4) يكون صفرا إذن (4) تصبح كالاتى

$$y_1\,v'' + (2\,y'_1 + R\,y_1)\,v' = Q(x) \qquad (5)$$

وبوضع $v' = p$ فإننا نستطيع أن نخفض رتبة المعادله (5) من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى حيث نجد أن

$$y_1\,p' + (2\,y'_1 + R\,y_1)\,p = Q(x) \qquad (6)$$

وهذه معادله تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها بسهولة لايجاد p بدلاله x وحيث أن $p = v'$ إذن يمكن إيجاد v بدلاله x وذلك عن طريق إجراء التكامل حيث نجد أن

$$v = \int p\,dx$$

ومن ثم نكون قد أوجدنا الداله المجهولة v وبالتعويض عنها فى (3) نكون قد حصلنا على الحل العام للمعادله (1) .

مثال : حل المعادله التفاضلية

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}\,y = x^2 \qquad (1)$$

الحل : وجدنا مسبقاً أن $y_1(x) = x$ هو حل خاص للمعادله المتجانسه

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}\,y = 0$$

حيث أن

$$R(x) + x\,S(x) = 0$$

أى أن

$$\frac{-3}{x} + \frac{3x}{x^2} = 0$$

إذن نفرض أن الحل العام للمعادله (1) يكون على الصورة

$$y = v\,.\,y_1 = x\,v \qquad (2)$$

حيث v داله مجهولة فى x . إذن

$$y' = x\,.\,v' + v \quad , \quad y'' = x\,.\,v'' + 2v'$$

وبالتعويض عن y ، y' ، y'' فى (1) نجد أن

$$x\,v'' + 2v' - 3v' - \frac{3}{x}v + \frac{3}{x}v = x\,v'' - v' = x^2$$

وبالقسمة على x نجد أن

$$v'' - \frac{1}{x}v' = x \qquad (3)$$

وبوضع $p = v'$ نجد أن (3) تصبح كالاتى

$$p' - \frac{1}{x}p = x$$

وهذه معادله تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها عن طريق إيجاد المعامل التكاملى لها حيث نجد أن

$$p = x^2 + c_1 x$$

حيث c_1 ثابت إختيارى

وحيث أن

$$p = v'$$

إذن

$$v = \int p\,dx = \int (x^2 + c_1 x)\,dx$$

وبما أن

$$\int (x^2 + c_1 x)\,dx = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$$

حيث c_2 ثابت إختيارى إذن $v = \frac{x^3}{3} + c_3 x^2 + c_2$ وذلك بوضع $\left(c_3 = \frac{c_1}{2} \right)$. وبالتعويض عن قيمة v فى (2) نجد أن الحل العام هو

$$y = \frac{x^4}{3} + c_3 x^3 + c_2 x .$$

(ب) طريقة التخلص من المشتقة الأولى

The Cancellation Method Of First Derivative

يمكن ببساطة تطبيق هذه الطريقة والتى شرحنها مسبقاً وذلك لحل المعادله التفاضلية الغير متجانسة

$$y'' + R(x)y' + S(x)y = Q(x)$$

[$R(x)$ ، $S(x)$] ليسا معا ثابتين

مع مراعاة وضع $Q(x)$ والتى لاتساوى الصفر فى المكان المخصص لها

حسب خطوات الشرح السابقة الذكر .

مثال : حل المعادله التفاضلية الآتية مستخدماً طريقة التخلص من المشتقة الأولى

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = x^2$$

الحل :

$$R(x) = \frac{-3}{x} \quad ، \quad S(x) = \frac{3}{x^2}$$

إذن

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int R(x)\,dx} = e^{\frac{3}{2}\operatorname{Ln} x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$K = S(x) - \frac{1}{4} R^2(x) - \frac{1}{2} R'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4x^2} - \frac{3}{2x^2} = -\frac{3}{4x^2}$$

إذن بإستخدام التحويل

$$y = u(x) \,.\, v(x) = u(x) \,.\, x^{\frac{3}{2}}$$

فإن المعادله أعلاه تصبح على الصورة

$$u''(x) - \frac{3}{4x^2} u(x) = x^2 \,.\, x^{-\frac{3}{2}}$$

أو $x^2 u''(x) - \frac{3}{4} u(x) = x^{\frac{5}{2}}$ وهذه تكون على صورة معادله أيلر

إذن بوضع $x = e^z$ نحن نجد أن

$$\left(D^2 - D - \frac{3}{4}\right) u(z) = e^{\frac{5z}{2}} \qquad (*)$$

وهذه معادله خطية غير متجانسة ذات معاملات ثابته إذن حلها يكون على الصورة $u = u_c + u_p$ حيث u_c هو الحل العام للمعادله المتجانسة $\left(D^2 - D - \frac{3}{4}\right) u = 0$. إذن كما تعلمنا مسبقا نجد أن

$u_c = c_1 e^{-\frac{z}{2}} + c_2 e^{3\cdot\frac{z}{2}}$ ، حيث u_p هو الحل الخاص للمعادلة الغير متجانسة (*) .

ولايجاد u_p فإننا سوف نستخدم طريقة المؤثر حيث نجد أن

$$u_p = \frac{1}{\left(D^2 - D - \frac{3}{4}\right)} \left\{ e^{5\cdot\frac{z}{2}} \right\}$$

وبالتالى نجد أن

$$u_p = e^{5\cdot\frac{z}{2}} \frac{1}{\left(D + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(D + \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{4}} \cdot (1)$$

وبحلها كما تعلمنا سابقاً نجد أن

$$u_p = \frac{1}{3} e^{5 \cdot \frac{z}{2}}$$

إذن

$$u = c_1 e^{-\frac{z}{2}} + c_2 e^{3 \cdot \frac{z}{2}} + \frac{1}{3} e^{5 \cdot \frac{z}{2}}$$

وبالتعويض عن $z = \text{Ln}\, x$ نجد أن

$$u = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{5}{2}}$$

وبما أن $y = u(x)\ x^{\frac{3}{2}}$ هو الحل العام للمعادله التفاضلية المعطاه والمطلوب حلها إذن

$$y = x^{\frac{3}{2}} \left[c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3} \right]$$

أو

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + \frac{x^4}{3}$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين.

(جـ) طريقة تحليل المؤثر Operational Factoring Method

أيضا يمكننا إستخدام هذه الطريقة والتى شرحناها مسبقاً وذلك لحل المعادله التفاضلية الغير متجانسة $y'' + R(x)\, y' + S(x)\, y = Q(x)$

[$R(x)$ ، $S(x)$ ليسا معاً ثابتين]

مع مراعاة وضع $Q(x)$ والتى لا تساوى الصفر فى المكان المخصص لها حسب خطوات الشرح السابقة الذكر.

مثال : بإستخدام طريقة تحليل المؤثر حل المعادله التفاضلية

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}\,y = x^2 \qquad (1)$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادله بإستخدام المؤثر على الصورة

$$\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right)y = x^2 \qquad (2)$$

ولقد رأينا سابقاً أن الطرف الأيسر من (2) يمكن تحليله إما على صورة

$$\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right)y = \left(D - \frac{2}{x}\right)\left(D - \frac{1}{x}\right)y \qquad (3)$$

أو على صورة

$$\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right)y = D\left(D - \frac{3}{x}\right)y \qquad (4)$$

إذن بإستخدام (3) نجد أن (2) تصبح كالاتى

$$\left(D - \frac{2}{x}\right)\left(D - \frac{1}{x}\right)y = x^2 \qquad (5)$$

ولحل (5) فإننا نفرض أن

$$\left(D-\frac{1}{x}\right) y = z \qquad (6)$$

إذن

$$\left(D-\frac{2}{x}\right) z = x^2$$

وحل هذه المعادله الخطية من الرتبة الأولى يكون

$$z = x^3 + k x^2$$

حيث k ثابت إختيارى

وبالتعويض عن z فى (6) نجد أن

$$\left(D-\frac{1}{x}\right) y = x^3 + k x^2$$

وبحل هذه المعادله التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى نجد أن

$$y = \frac{x^4}{3} + c_2 x^3 + c_1 x$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين

وهذا هو الحل العام للمعادله التفاضلية المطلوب حلها . كذلك نجد أنه عند إستخدام (4) فإن (2) تصبح

$$D\left(D-\frac{3}{x}\right) y = x^2 \qquad (7)$$

ولحل (7) نفرض أن

$$\left(D-\frac{3}{x}\right) y = z \qquad (8)$$

إذن $Dz = x^2$ وهذه معادله تفاضلية حلها يكون معطى كالاتى

Scanned with CamScanner

$$z = \frac{x^3}{3} + k$$

وبالتعويض عن z فى (8) نجد أن

$$\left(D - \frac{3}{x}\right) y = \frac{x^3}{3} + k$$

حيث k ثابت إختيارى

وهذه معادله تفاضلية خطية من الرتبة الأولى حلها يكون معطى كالاتى

$$y = \frac{x^4}{3} + c_2 x^3 + c_1 x$$ حيث c_1 ، c_2 ثوابت إختيارية .

(د) طريقة تغيير الثوابت أو البارامترات

The Method Of Variation Of Parameters

إن كل ماسبق ذكره وشرحه فى الباب الثالث عن هذه الطريقة يمكن تطبيقه لايجاد الحل الخاص أو العام للمعادله التفاضلية الغير متجانسة :

$$y'' + R(x) y' + S(x) y = Q(x) \qquad (1)$$

[$R(x)$ ، $S(x)$ ليسا معا ثابتين]

ويمكن أن نلخص هذه الطريقة فى الخطوات الأتيه

أ - نوجد الحل العام والذى يكون على الصورة $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ للمعادله التفاضلية المتجانسة والمناظرة للمعادله (1) والتى تكون على الصورة

$$y'' + R(x) y' + S(x) y = o \qquad (2)$$

حيث أن $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ هما حلان خاصان ومستقلان خطيا للمعادله (2) ، c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين

ب - نكتب الحل العام أو الخاص للمعادله (1) فى الصورة

$$y = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x) \qquad (3)$$

وذلك بإستبدال الثابتين الإختياريين c_1 ، c_2 بدالتين مجهولتين هما $u_1(x)$ ، $u_2(x)$.

جـ - نوجد الدالتان المجهولتان $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ عن طريق حل المعادلتان

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \qquad , \qquad u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = Q(x)$$

جبرياً فى u'_1 ، u'_2 وذلك بإستخدام طريقة المحددات ومن ثم مكاملتهما حيث نجد أن

$$u_1 = -\int \frac{y_2\, Q(x)}{w}\, dx \qquad , \qquad u_2 = \int \frac{y_1\, Q(x)}{w}\, dx$$

حيث

$$w = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

د - نعوض عن قيمتى u_1 ، u_2 فى (3) مع ملاحظة أنه عند تكامل u'_1 ، u'_2 إذا أضفنا ثابتى التكامل لكل من u_1 ، u_2 فإن الحل (3) يمثل الحل العام للمعادله (1) أما إذا لم نضف ثابتى التكامل فإن الحل (3) يمثل الحل الخاص y_p للمعادله (1) .

مثال : حل المعادله التفاضلية الآتيه مستخدماً طريقة تغيير الثوابت

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = x^2 \qquad (1)$$

الحل : وجدنا مسبقا أن الحل العام للمعادله التفاضلية المتجانسة والمناظرة للمعادله المعطاه أعلاه (1) هو $y = c_1 x + c_2 x^3$

حيث c_1 ، c_2 ثابتين إختياريين .

وبإستخدام طريقة تغيير الثوابت فإننا نجد أن الحل العام للمعادله (1) يكون على الصورة $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ أو $y = u_1 x + u_2 x^3$

حيث أن $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ هما الحلان الخاصان والمستقلان خطيا للمعادله التفاضلية المتجانسة والمناظرة لـ (1) .

وحيث u_1 ، u_2 هما دالتان مجهولتان فى x .

إذن لايجاد كلا من u_1 ، u_2 فإننا سوف نستخدم العلاقتين الآتيتين

$$u_1 = -\int \frac{y_2 Q(x)}{w} dx \quad ; \quad u_2 = \int \frac{y_1 Q(x)}{w} dx$$

حيث $w = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$ أى أن $w = 2x^3$

إذن

$$u_1 = -\int \frac{x^3 . x^2}{2x^3} dx = -\frac{x^3}{6} + c_3$$

$$، \ u_2 = \int \frac{x \cdot x^2}{2x^3}\, dx = \frac{x}{2} + c_4$$

وبالتعويض عن u_1 ، u_2 فى صورة الحل العام للمعادله (1) نجد أن

$$y = \left(-\frac{x^3}{6} + c_3 \right) x + \left(\frac{x}{2} + c_4 \right) x^3$$

إذن $y = c_3\, x + c_4\, x^3 + \dfrac{x^4}{3}$ حيث c_3 ، c_4 ثابتين إختياريين .

تمارين (21)

س١ : حل المعادلات التفاضلية الأتية مستخدماً طريقة تخفيض الرتبة وطريقة التخلص من المشتقة الأولى ثم طريقة تغيير الثوابت .

1. $(x^2 + 1)\, y'' - 2xy' + 2y = 6(1 + x^2)^2$

2. $x y'' - (x + 3)\, y' + 3y = 4x^4\, e^x$

س٢ : بإستخدام طريقة تحليل المؤثر التفاضلى حل المعادلات التفاضلية الأتيه

1. $x y'' + (2x - 1)\, y' - 2y = 4x^2$

2. $x y'' + (3 - 2x^2)\, y' - 4xy = 4x\, e^{x^2}$

3. $y'' + (1 + \cot x)\, y' + (\cot x - \csc^2 x)\, y = 2e^x .$

الباب الثامن

حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة وذات الرتب الأعلى من الرتبة الأولى

Solution Of Differential Equations With Variable Coefficients And Of Order Higher Than The First

لاتوجد طريقة عامة لحل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة وذات الرتب الأعلى من الرتبة الأولى وإنما توجد طرق لحل بعض أنواع هذه المعادلات .

النوع الأول : المتغير التابع غير موجود

إذا كانت المعادله التفاضلية تحتوى على مشتقات المتغير التابع y ولكن لاتحتوى على y أى تكون على الصورة

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

فإن التعويض

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

سوف يخفض رتبة المعادله التفاضلية بمقدار رتبة واحده .

مثال : المعادله التفاضلية من الرتبة الثانية $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$

سوف تخفض رتبتها إلى الرتبة الأولى وذلك بإستخدام التعويض

$$p=\frac{dy}{dx}\ ,\quad \frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

فتصبح المعادله كالاتى $\quad x\dfrac{dp}{dx}+p=0$

كما يمكن القول أيضاً بأنه إذا كانت المعادله التفاضلية معطاه على الصورة

$$F\left(\frac{d^ny}{dx^n}\ ,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ ,\ \ldots\ \frac{d^ky}{dx^k}\ ,\ x\right)=0$$

أى أنه إذا كانت $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ هى أصغر رتبة لاشتقاق المتغير التابع y

الموجود فى المعادله التفاضليه وكانت y غير محتواه فى المعادله فإن

التعويض $\quad p=\dfrac{d^ky}{dx^k}\ ,\ \dfrac{dp}{dx}=\dfrac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}\ ,\ \ldots\dfrac{d^{n-k}p}{dx^{n-k}}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$

سوف يخفض رتبة المعادله التفاضلية بمقدار k رتبة

مثال : المعادله التفاضليه ذات الرتبه الثالثه

$$x\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}=12x^3$$

سوف تخفض رتبتها إلى الرتبة الأولى أى خفضت رتبتها بمقدار رتبتين وذلك عن طريق التعويض

$$p = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

وبالتالى تصبح المعادله التفاضلية كالاتى

$$x\frac{dp}{dx} - 2p = 12x^3$$

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^3$$

الحل : هذه المعادله لاتحتوى على المتغير التابع y وبالتالى يمكن تخفيض رتبتها وذلك بوضع

$$p = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

إذن المعادله التفاضليه تصبح كالاتى

$$x\frac{dp}{dx} - 2p = 12x^3$$

وهذه معادله تفاضليه خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها عن طريق إيجاد معامل التكامل إذن حلها يكون على الصورة

$$p = 12x^3 + c_1 x^2$$

ولكن

$$p = \frac{d^2y}{dx^2}$$

إذن
$$y = \int \left[\int p\, dx \right] dx$$

إذن
$$y = \frac{3}{5} x^5 + \frac{c_1}{12} x^4 + c_2 x + c_3$$

وبوضع $c_4 = \frac{c_1}{12}$ نجد أن حل المعادله التفاضلية المطلوب حلها هـو

$y = \frac{3x^5}{5} + c_4 x^4 + c_2 x + c_3$ حيث c_1 ، c_2 ، c_3 ثوابت إختيارية .

النوع الثانى : المتغير المستقل غير موجود

إذا كانت المعادله التفاضليه خاليه من المتغير المستقل x أى تكون على الصورة

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n} , \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} , \ldots\ldots , \frac{dy}{dx} , y \right) = o$$

فإن التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p \ ، \ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \ ،$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = \left\{ p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right\} \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \ ، \ \ldots$$

سوف يخفض رتبة المعادله التفاضليه بمقدار رتبة واحده

مثال : المعادله التفاضليه من الرتبة الثانية

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

سوف تخفض رتبتها إلى الرتبة الأولى وذلك بإستخدام التعويض

$$p = \frac{dy}{dx} \quad , \quad p\frac{dp}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

فتصبح المعادله كالاتى

$$yp\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0 \quad .$$

مثال : حل المعادله التفاضليه

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

الحل : حيث أن هذه المعادله التفاضليه لاتحتوى على x إذن بوضع

$$p = \frac{dy}{dx} \quad , \quad p\frac{dp}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

تصبح المعادله التفاضليه أعلاه كالاتى

$$yp\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0$$

وبالقسمة على p نجد أن

$$y\frac{dp}{dy} + 2p = 0$$

وهذه معادله تفاضليه خطية من الرتبة الأولى ويمكن حلها عن طريق فصل المتغيرات . إذن حلها يكون على الصورة

$$p = \frac{c_1}{y^2}$$

وحيث أن

$$p = \frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{c_1}{y^2} = \frac{dy}{dx}$$

وبالتالى يكون

$$y^2 \, dy = c_1 \, dx$$

إذن بتكامل الطرفين نجد أن

$$\frac{y^3}{3} = c_1 x + c_2$$

أو $y^3 = c_3 x + c_4$ وذلك بوضع $c_3 = 3c_1$ ، $c_4 = 3c_2$ حيث c_1 ، c_2 ثوابت إختيارية .

النوع الثالث : المعادلات التفاضلية الخطية ذات حل خاص معروف

إذا كان $y_1(x)$ حل خاص معروف للمعادله

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \qquad (1)$$

فإن التعويض

$$y = y_1(x) \, . \, v(x)$$

حيث $v(x)$ دالة مجهولة سوف يحول المعادله

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = Q(x) \qquad (2)$$

إلى معادله أخرى ومن نفس الرتبة للمعادلة (2) ولكنها لاتحتوى على المتغير التابع وبالتالى يمكن حلها عن طريق تخفيض رتبتها كما تعلمنا مسبقاً .

مثال : حل المعادله التفاضلية

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$$

حيث أن $y_1 = x$ هو حل خاص لها .

الحل : نفرض أن الحل لهذه المعادله التفاضلية هو

$$y = y_1 . v = x v$$

إذن

$$y' = x v' + v$$

$$y'' = x v'' + 2 v'$$

$$y''' = x v''' + 2 v''$$

وبالتعويض عن $y \ , \ y' \ , \ y'' \ , \ y'''$ فى المعادله المعطاه أعلاه نجد أن

$$x^4 v''' + 4x^3 v'' = 2x^4$$

إذن

$$v''' + \frac{4}{x} v'' = 2$$

وبوضع

$$p = \frac{d^2 v}{dx^2} \ , \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{d^3 v}{dx^3}$$

نجد أن

$$\frac{dp}{dx} + \frac{4}{x} p = 2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى تحل عن طريق إيجاد المعامل التكاملى حيث أن حلها يكون معطى كالاتى .

$$p = \frac{2x}{5} + \frac{c_1}{x^4}$$

وحيث أن

$$p = v'' = \frac{2x}{5} + \frac{c_1}{x^4}$$

إذن

$$v' = \int \left(\frac{2x}{5} + \frac{c_1}{x^4} \right) dx$$

إذن

$$v' = \frac{x^2}{5} + \frac{c_1}{-3x^3} + c_2$$

وبالتالى

$$v = \frac{x^3}{15} + \frac{c_1}{6x^2} + c_2 x + c_3$$

وبوضع $c_4 = \frac{c_1}{6}$ إذن

$$v = \frac{x^3}{15} + \frac{c_4}{x^2} + c_2 x + c_3$$

حيث c_1 ، c_2 ، c_3 ثوابت إختيارية .

وبالتعويض عن v فى الحل العام للمعادله التفاضلية المعطاه نجد أن

$$y = x\left[\frac{x^3}{15} + \frac{c_4}{x^2} + c_2\, x + c_3 \right]$$

إذن

$$y = \frac{x^4}{15} + \frac{c_4}{x} + c_2\, x^2 + c_3\, x \quad .$$

تمـــاريـــن (22)

حل المعادلات التفاضلية الآتية

1. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} = 12$

2. $\left(x^2 \dfrac{d}{dx} + x \right)\left(x \dfrac{dy}{dx} + 2\,y \right) = x^2\, e^x \quad ; \quad \text{Let } z = x\dfrac{dy}{dx} + 2y$

3. $x^2\, y'' + (\, y'\,)^2 = o$

4. $y\, y'' + (\, y'\,)^2 = 2$

5. $y''' \, . \, y'' = 1$

6. $y''' + y'' = x^2$

7. $(\,2\,x - 3\,)\, y''' - (\,6\,x - 7\,)\, y'' + 4\,x\,y' - 4\,y = 8$

حيث $y_1 = x$ هو حل خاص لها

المراجع

1 - Ayres , F. ; *Theory and Problems of Differential Equations* , *Schaum's outline Series* . McGraw-Hill, New york , 1972.

2 - Boyce , W. E. and DiPrima , R. C. ; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* , 3rd edition , John Wiley & Sons, Inc. , New york , 1977 .

3 - Kells , L. M. ; *Elementary Differential Equations*, 6th edition , McGraw-Hill , New york , 1965 .

4 - Zill , D. G. ; *A First Course in Differential Equations with Applications* , 4th edition , PWS-KENT , Boston , 1989 .

❄ ❄ ❄ ❄ ❄

د / مجدي أمين كتبي

- من مواليد مكة المكرمة عام ١٣٨١ هـ .
- تلقى تعليمه الإبتدائي و المتوسط و الثانوي بمدرسة الفلاح بمكة .
- حصل على درجة البكالوريوس من جامعة أم القرى بمكة عام ١٤٠٢ هـ .
- عين معيداً بقسم العلوم الرياضية بجامعة أم القرى بمكة عام ١٤٠٢ هـ .
- أبتعث إلى بريطانيا من قبل جامعة أم القرى بمكة في آواخر عام ١٤٠٣ هـ لتحضير درجتي الماجستير و الدكتوراه في مجالي الرياضيات و الإحصاء .
- حصل على درجة الماجستير من جامعة " سانت أندروس " ببريطانيا عام ١٤٠٧ هـ .
- حصل على درجة الدكتوراه من جامعة " سانت أندروس " ببريطانيا عام ١٤١٠ هـ .
- عين أستاذاً مساعداً بجامعة أم القرى بمكة المكرمة بقسم العلوم الرياضية عام ١٤١٠ هـ .
- شارك في عدة مؤتمرات دولية وله عدة أبحاث تخصصية .

د / مروان أمين كتبي

- من مواليد مكة المكرمة عام ١٣٨٦ هـ .
- تلقى تعليمه الإبتدائي والمتوسط بمدرسة الفلاح بمكة .
- تلقى تعليمه الثانوي بمدرسة حراء الشاملة بمكة .
- حصل على درجة البكالوريوس من جامعة أم القرى بمكة عام ١٤٠٧ هـ .
- عين معيداً بالكلية المتوسطة و مركز العلوم و الرياضيات بمكة عام ١٤٠٧ هـ .
- إنتقل إلى جامعة الملك عبد العزيز بجدة وعين بها معيداً عام ١٤٠٩ هـ .
- أبتعث إلى بريطانيا من قبل جامعة الملك عبد العزيز بجدة عام ١٤١١ هـ لتحضير درجتي الماجستير و الدكتوراه في الرياضيات .
- حصل على درجة الماجستير من جامعة " ويلز - سوانزي " ببريطانيا عام ١٤١٣ هـ .
- حصل على درجة الدكتوراة من جامعة " ويلز - سوانزي " ببريطانيا عام ١٤١٦ هـ .
- عين أستاذاً مساعداً بجامعة الملك عبد العزيز بجدة بقسم الرياضيات عام ١٤١٦ هـ .

ثمن النسخة 25 ريالاً سعودياً

BOUDOUR P.PRESS مطابع بهادر

ردمك : ٨ - ٣٦٤ - ٣٥ - ٩٩٦٠