الاسم:.............
المدة: ثلاث ساعات
الدرجة: ستمئة

نموذج امتحاني - الثالث الثانوي العلمي
الرياضيات (2019-2020)

# النموذج الأول

**أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية:** (45 درجة لكل سؤال)

**السؤال الأول:** الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع $f$

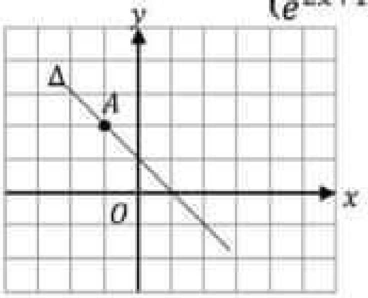
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $1 \mid -2$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ $+\infty$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $5$ | ↘ | $0$ |

1) أوجد $f(D)$ , $D_{f'}$ , $D_f$
2) أوجد معادلة نصف المماس للخط $C$ من اليمين
3) دل على القيم الحدية واذكر نوعها
4) ناقش حسب قيم $\lambda \in R$ حلول المعادلة $f(x) = \lambda$
5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$ , $f'(x) \geq 0$

**السؤال الثاني:** ليكن لدينا المجموعة $S = \{3,5,6,7\}$ ولدينا المجموعة $H$ من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية أرقامها مختلفة ومأخوذة من $S$ ولا يوجد أي عدد منها يقبل القسمة على 2 وكل عدد منها أكبر تماماً من 4000 أوجد عناصر $H$

**السؤال الثالث:** حل في $R$ جملة المعادلتين الآتيتين: $\begin{cases} x + y = 1 \\ e^{2x+1} . e^{y-1} = 1 \end{cases}$

**ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية:** (45 درجة لكل سؤال)




**السؤال الأول:** ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين $a, b$ علماً بأن المستقيم $\Delta$ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط $C$ في النقطة $A$

**السؤال الثاني :** في مجموعة الأعداد العقدية لتكن لدينا $P(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (2-4i)Z - 4i$
1) بيّن أن $Z = 2i$ حل للمعادلة $P(Z) = 0$
2) أوجد $c$ , $b$ إذا علمت أن $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + bZ + c)$
3) حل في $C$ المعادلة $P(Z) = 0$

**السؤال الثالث:** لدينا $A(1,1,1)$ $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وليكن $Q$ مستوي معادلته $Q: x - y + 2z + 4 = 0$ ، $S$ كرة مركزها $A$ ونصف قطرها $[AB]$ ، والمطلوب:
1) جد معادلة الكرة $S$ ثم أثبت أن $Q$ مماس للكرة $S$
2) أثبت أن $C(0,2,-1)$ هي مسقط $A$ على المستوي $Q$

**ثالثاً: حل التمارين الثلاث الآتية:** ( 80 درجة ، 70 درجة ، 70 درجة)

**التمرين الأول:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 9} \end{cases}$

1) a. أثبت أن $u_n > \sqrt{3}$ أيا يكن $n \in N$
b. أثبت أن $(u_n)$ متناقصة واستنتج أنها متقاربة.

2) أيا يكن $n \in N$ ليكن: $v_n = u_n^2 - 3$.
a. أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$
b. احسب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$

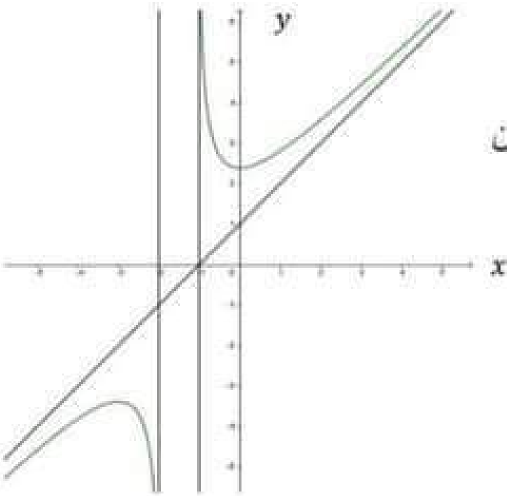
حسان البيطار
خلدون سيروان

$$2\ln\left(e^{\frac{m}{2}}.\frac{x+1}{x+2}\right)=x+1$$

$$2\ln e^{\frac{m}{2}}+2\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=x+1$$

$$2\frac{m}{2}=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$m=f(x)$$




$m\in\,]-\infty,-2-\ln 4[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان

$m=-2-\ln 4$ للمعادلة حل وحيد

$m\in\,]-2-\ln 4\ ,1+\ln 4[$ المعادلة مستحيلة الحل

$m=1+\ln 4$ للمعادلة حل وحيد

$m\in\,]1+\ln 4\ ,+\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان

------ انتهت الأسئلة ------

الشرط الثاني : $f(-2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

لنثبت أن: $f(-3 - x) + f(x) = -1$

$$f(-3-x) = -3 - x + 1 + 2\ln\left(\frac{-3-x+2}{-3-x+1}\right)$$

$$= -2 - x + 2\ln\left(\frac{-1-x}{-2-x}\right)$$

$$f(-3-x) + f(x) = -2 - x + 2\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) + x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$= -1 + 2\ln\left(\frac{1+x}{2+x} \cdot \frac{x+2}{x+1}\right) = -1$$ محققة

$\Leftarrow$ $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $C$

**4) أوجد معادلة كل مماس لـ $C$ يوازي المستقيم $d: 3y - 2x + 7 = 0$**

$d:\ 3y - 2x + 7 = 0$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$3x^2 + 9x = 2x^2 + 6x + 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$x = -4$

$f(-4) = -3 + 2\ln\frac{2}{3}$

$\left(-4, -3 + 2\ln\frac{2}{3}\right)$ نقطة التماس

$m = \frac{2}{3}$ الميل

$$y - \left(-3 + 2\ln\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(x+4)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - 3 + 2\ln\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3} + 2\ln\frac{2}{3}$$

$x = 1$

$f(1) = 2 + 2\ln\frac{3}{2}$

$\left(1, 2 + 2\ln\frac{3}{2}\right)$ نقطة التماس

$m = \frac{2}{3}$ الميل

$$y - \left(2 + 2\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2 + 2\ln\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 2\ln\frac{3}{2}$$

**5) ارسم الخط $C$ وبفرض $m$ عدد حقيقي موجب تماماً. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة:**

$$2\ln\left(\frac{xe^{\frac{m}{2}} + e^{\frac{m}{2}}}{x+2}\right) = x + 1$$

| النموذج الأول | نموذج امتحاني - الثالث الثانوي العلمي<br>الرياضيات (2019-2020) | الاسم:............<br>المدة: ثلاث ساعات<br>الدرجة: ستمئة |
|---|---|---|

**أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية:** (45 درجة لكل سؤال)

**السؤال الأول: الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $1$ ‖ $-2$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ |

**1) أوجد $D_f$ , $D_{f'}$ , $f(D)$**

$D_f = ]-\infty, +\infty[\backslash\{0\}$

$D_{f'} = ]-\infty, +\infty[\backslash\{0,3\}$

$f(D) = ]-\infty, +\infty[$

**2) أوجد معادلة نصف المماس للخط $C$ من اليمين**

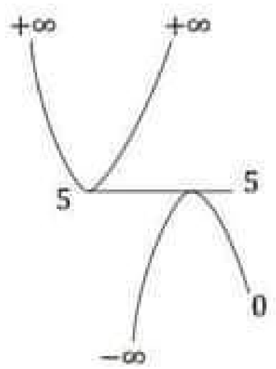
$m = -2$ نقطة التماس $(3,5)$

$T: \quad y - 5 = -2(x-3) \rightarrow \quad y = -2x + 11$

**3) دل على القيم الحدية واذكر نوعها**

$f(3) = 5$ محلية كبرى، $f(-2) = 5$ محلية صغرى

**4) ناقش حسب قيم $\lambda \in R$ حلول المعادلة $f(x) = \lambda$**




$\lambda \in ]-\infty, 0[$ حل وحيد

$\lambda = 0$ حل وحيد

$\lambda \in ]0,5[$ حلان مختلفان

$\lambda = 5$ حلان مختلفان

$\lambda \in ]5, +\infty[$ حلان مختلفان

**5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ , $f'(x) \geq 0$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ >}} f(t) = -\infty$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in [-2,0[ \cup ]0,3[$$

---

**السؤال الثاني: ليكن لدينا المجموعة $S = \{3,5,6,7\}$ ولدينا المجموعة $H$ من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية أرقامها مختلفة ومأخوذة من $S$ ولا يوجد أي عدد منها يقبل القسمة على 2 وكل عدد منها أكبر تماماً من 4000 أوجد عناصر $H$**

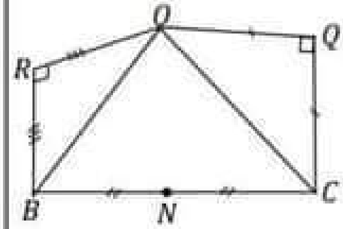
**طريقة ①:**

| | أحاد الألوف | مئات | عشرات | أحاد | | أحاد الألوف | مئات | عشرات | أحاد |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 6 | | | | أو | $\cancel{6}$ 5 7 | | | $\cancel{6}$ |
| | 1 | 3 | 2 | 1 | | 2 | 2 | 1 | 2 |

$n = \quad 1 \times 3 \times 2 \times 1 \quad + \quad 2 \times 2 \times 1 \times 2$

$n = 6 + 8 = 14$

**التمرين الثاني:** نتأمل مثلثاً $OBC$، ننشئ خارج هذا المثلث المثلثين $OQC$ , $ORB$ القائمين والمتساويي الساقين والنقطة $N$ في منتصف $[BC]$ . لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ نرمز $r,b,c,n,q$ للأعداد العقدية التي تمثلها $R,B,C,N,Q$ على الترتيب



1. ما هي صورة $O$ وفق الدوران بربع دورة مباشرة حول $Q$ ؟ أثبت أن $q=\frac{(1+i)c}{2}$
2. ما هي صورة $O$ وفق الدوران بربع دورة غير مباشرة حول $R$ ؟ أثبت أن $r=\frac{(1-i)b}{2}$
3. اكتب $n$ بدلالة $b\,,c$
4. أثبت أن $NQ=NR$ وأن $NQ\perp NR$

**التمرين الثالث:** بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

1) ادرس اطراد المتتالية
2) أثبت أن $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
3) استنتج قيمة المجموع $S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

**رابعاً: حل المسألتين الآتيتين:** (100 درجة لكل مسألة)

**المسألة الأولى:** في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان

$$Q: 4x+2y+z+5=0 \qquad P: 2x+y+5=0$$

1) أثبت أن $P\,,Q$ متقاطعين بفصل مشترك $d$
2) أثبت أن النقطة $A$ لا تقع على أياً من المستويين $P\,,Q$، ماذا تستنتج؟
3) اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك $d$
4) احسب بعد النقطة $A$ عن المستقيم $d$ الفصل المشترك
5) عيّن إحداثيات $N$ المسقط القائم للنقطة $A$ على المستوي $P$

**المسألة الثانية:** ليكن التابع $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ المعرف على $D=]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,+\infty[$

1) ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ $C$
2) أثبت أن $\Delta: y=x+1$ مقارب لـ $C$ وادرس الوضع النسبي
3) أثبت أن $A\left(\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $C$
4) أوجد معادلة كل مماس لـ $C$ يوازي المستقيم $d: 3y-2x+7=0$
5) ارسم الخط $C$ وبفرض $m$ عدد حقيقي موجب تماماً. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة:

$$2\ln\left(\frac{xe^{\frac{m}{2}}+e^{\frac{m}{2}}}{x+2}\right)=x+1$$

----- انتهت الأسئلة -----

طارق سعد الدين

وائل زعترية

**2) أوجد $b$ , $c$ إذا علمت أن $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + bZ + c)$**

$P(Z) = (Z - 2i)(z^2 + bZ + c)$

$P(Z) = Z^3 + bZ^2 + cZ - 2iZ^2 - 2biZ - 2ci$

$\quad = Z^3 + (b - 2i)Z^2 + (c - 2bi)Z - 2ci$

بالمقارنة مع: $P(Z) = Z^3 + (2 - 2i)Z^2 + (2 - 4i)Z - 4i$

$b - 2i = 2 - 2i$ ①

$c - 2bi = 2 - 4i$ ②

$-2c = -4$ ③

من ① : $b = 2$ ، من ③ : $c = 2$

نعوض في ② فنجدها محققة: $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + 2Z + 2)$

**3) حل في $C$ المعادلة $P(Z) = 0$**

$P(Z) = 0$

إما $Z - 2i = 0 \implies Z = 2i$

أو $Z^2 + 2Z + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 4(2)(1) = -4 < 0$ , $\sqrt{-\Delta} = 2$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$Z_2 = \overline{Z_1} = -1 - i$

---

السؤال الثالث: لدينا $A(1,1,1)$ $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
وليكن $Q$ مستوي معادلته $Q: x - y + 2z + 4 = 0$ ، $S$ كرة مركزها $A$ ونصف قطرها $[AB]$ ، والمطلوب:

**1) جد معادلة الكرة $S$**

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

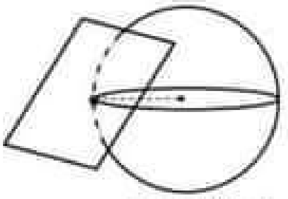
$AB = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} = R$

$\boxed{S:\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6}$

**2) أثبت أن $Q$ مماس للكرة $S$**

$$dist(A,Q) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

$$= \frac{|1(1) + (-1)(1) + 2(1) + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = R$$



إذاً $Q$ مماس للكرة $S$

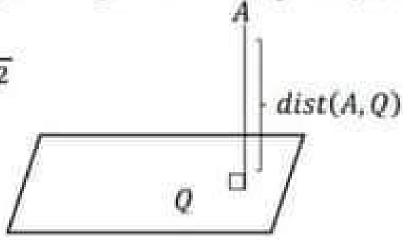
**3) أثبت أن $C(0,2,-1)$ هي مسقط $A$ على المستوي $Q$**

$CA = dist(A,Q)$

$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2}$

$\quad = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (2)^2}$

$\quad = \sqrt{6} = dist(A,Q)$



**طريقة 2:**

| آحاد | عشرات | مئات | ألوف |
|---|---|---|---|
| 3 | | | 5,6,7 |
| 5 | | | 6,7 |
| 7 | | | 5,6 |

$n = 3 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1$

$= 6 + 4 + 4 = 14$ طريقة

---

**السؤال الثالث: حل في $R$ جملة المعادلتين الآتيتين:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ e^{2x+1} . e^{y-1} = 1 \end{cases}$$

من 2: $e^{2x+1+y-1} = e^0$

$2x + y = 0$

$x + \underbrace{x + y}_{\text{من } 1} = 0$

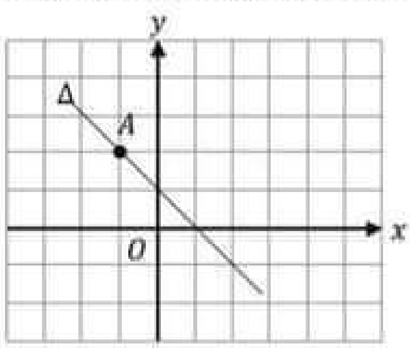
$x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}$

نعوض في 1 : $\boxed{y = 2}$

إذاً حل جملة المعادلتين هو: $S = \{(-1,2)\}$

---

**ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية:** (45 درجة لكل سؤال)



**السؤال الأول: ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $[-2,4]$ وفق:**

**$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين $a, b$ علماً بأن المستقيم $\Delta$ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط $C$ في النقطة $A$**

$A, B \in \Delta \Rightarrow \left.\begin{matrix} A(-1,2) \\ B(0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{0+1} = -1$

نقطة تماس $A(-1,2)$

ميل

$m = f'(-1) = -1$

$f$ اشتقاقي عند $x = -1$

$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$-1 = \frac{2a + 2(-a+b)}{4}$

$-4 = 2a + 2(4)$

$-12 = 2a$

$\boxed{a = -6}$

نقطة

$f(-1) = 2$

$2 = \frac{-a+b}{2}$

$\boxed{4 = -a + b}$ 1

نعوض في 1 $\leftarrow$

$4 = 6 + b$

$\boxed{-2 = b}$

---

**السؤال الثاني : في مجموعة الأعداد العقدية لتكن لدينا $P(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (2-4i)Z - 4i$**

**1) بيّن أن $Z = 2i$ حل للمعادلة $P(Z) = 0$**

$P(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (2-4i)(2i) - 4i$

$= -8i - 8 + 8i + 4i + 8 - 4i = 0$

أي $Z = 2i$ حل للمعادلة

$(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$

**.b احسب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$**

$v_n = v_0\, q^n$

$v_0 = (u_0)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$v_n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \rightarrow \quad \boxed{v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$v_n = u_n^2 - 3 \quad \rightarrow \quad u_n^2 = v_n + 3$

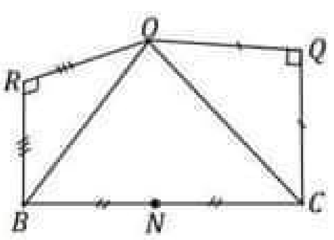
$u_n = \sqrt{v_n + 3}$

$$\boxed{u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3}}$$

---

**<u>التمرين الثاني:</u> نتأمل مثلثاً $OBC$، ننشئ خارج هذا المثلث المثلثين $ORB$ , $OQC$ القائمين والمتساويي الساقين والنقطة $N$ في منتصف $[BC]$ باختيار معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ نرمز $r,b,c,n,q$ للأعداد العقدية التي تمثلها $R,B,C,N,Q$ على الترتيب والمطلوب:**

**1) ما هي صورة $O$ وفق الدوران بربع دورة مباشرة حول $Q$؟ ثم أثبت أن $q=\frac{(1+i)c}{2}$**




$C$ صورة $O$ وفق دوران مركزه $Q$ وزوايته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_C - Z_Q = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_O - Z_Q)$$
$$c - q = i(0 - q)$$
$$c = -qi + q = q(1-i)$$
$$q = \frac{c}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$
$$q = \frac{(1+i)c}{2}$$

**2) ما هي صورة $O$ وفق الدوران بربع دورة غير مباشرة حول $R$ ؟ أثبت أن $r=\frac{(1-i)b}{2}$**

$B$ صورة $O$ وفق دوران مركزه $R$ وزوايته $\frac{-\pi}{2}$

$$Z_B - Z_R = e^{\frac{-\pi}{2}i}(Z_O - Z_R)$$
$$b - r = -i(0 - r)$$
$$b = r\,i + r = (1+i)r$$
$$r = \frac{b}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$
$$r = \frac{(1-i)b}{2}$$

**3) اكتب $n$ بدلالة $b$ , $c$**

$N$ منتصف $[BC] \;\Leftarrow\; n = \frac{b+c}{2}$

**4) أثبت أن $NQ = NR$ وأن $NQ \perp NR$**

$$Z_{\overrightarrow{NR}} = Z_R - Z_N = r - n$$
$$= \frac{(1-i)b}{2} - \frac{b+c}{2} = \frac{(1-i)b - (b+c)}{2}$$

إذاً $C$ مسقط $A$ على المستوي $Q$

**ثالثاً: حل التمارين الثلاث الآتية: ( 80 درجة ، 70 درجة ، 70 درجة)**

**التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} \end{cases}$

**1) a. أثبت أن $u_n > \sqrt{3}$ أياً يكن $n \in N$**

① نثبت صحة المتراجحة من أجل $n = 0$

$u_0 = 2 > \sqrt{3}$ محققة

② نفرض صحة المتراجحة من أجل $n$ : أي $u_n > \sqrt{3}$ صحيحة

③ نثبت صحة المتراجحة من أجل $n+1$

$$u_{n+1} > \sqrt{3}$$

لدينا من الفرض:

$$u_n > \sqrt{3}$$
$$u_n^2 > 3$$
$$u_n^2 + 9 > 12$$
$$\sqrt{u_n^2+9} > 2\sqrt{3}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} > \sqrt{3}$$
$$u_{n+1} > \sqrt{3}$$

محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل $n \in N$

**b. أثبت أن $(u_n)$ متناقصة واستنتج أنها متقاربة.**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2+9} - 2u_n}{2}$$
$$= \frac{u_n^2 + 9 - 4u_n^2}{2(\sqrt{u_n^2+9} + u_n)} = \frac{-3(u_n^2-3)}{2(\sqrt{u_n^2+9}+u_n)} < 0$$

المتتالية متناقصة حيث $u_n > \sqrt{3}$

لدينا المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{3}$ فهي متقاربة

**2) أياً يكن $n \in N$ ليكن: $v_n = u_n^2 - 3$.**

**a. أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$**

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}(u_n^2+9) - 3$$
$$= \frac{1}{4}u_n^2 + \frac{9}{4} - 3 = \frac{1}{4}u_n^2 - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(u_n^2 - 3) = \frac{1}{4}v_n$$

$$\frac{2}{4} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين $\vec{n}_P$ ، $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً ، ومنه $P$ و $Q$ متقاطعان

**2) أثبت أن النقطة $A$ لا تقع على أياً من المستويين $P , Q$، ماذا تستنتج؟**

نعوض $A(3,-1,2)$ بمعادلة $P$ نجد: $2(3) - 1 + 5 = 10 \neq 0 \Leftarrow A \notin P$

نعوض $A$ بمعادلة $Q$: $4(3) + 2(-1) + 2 + 5 = 17 \neq 0 \Leftarrow A \notin Q$

ومنه $A$ خارج المستويين $P$ و $Q$

**3) اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك $d$**

نوجد المعادلة الوسيطية لـ $d$ $\Leftarrow$

$$d: \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 & ① \\ 4x + 2y + z + 5 = 0 & ② \end{cases}$$

من ① نجد $\boxed{y = -2x - 5}$ نعوض في ② فنجد: $\boxed{z = 5}$

وبفرض $x = t \Leftarrow$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 5 \quad ; t \in R \\ z = 5 \end{cases}$$

**4) احسب بعد النقطة $A$ عن المستقيم $d$ الفصل المشترك**

بفرض $A'$ المسقط القائم لـ $A$ على $d \Leftarrow A'(t_0, -2t - 5, 5)$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} . \vec{u} = 0}$ حيث $\vec{u}(1,-2,0)$

$$\overrightarrow{AA'}(t_0 - 3, -2t_0 - 4, 3)$$

$$t_0 - 3 + 4t_0 + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t_0 = -1}$$

إذاً $A'(-1,-3,5)$ ولدينا $A(3,-1,2) \Leftarrow \overrightarrow{AA'}(-4,-2,3)$

$\|\overrightarrow{AA'}\| = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$ بعد $A$ عن $d$

**5) عيّن إحداثيات $N$ المسقط القائم للنقطة $A$ على المستوى $P$**

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم $d'$ المار من $A$ وعمودي على $P$

$$d': \begin{cases} x = 2h + 3 \\ y = h - 1 \quad ; h \in R \\ z = 2 \end{cases} \Leftarrow \vec{u}_{d'} = \vec{n}_P(2,1,0)$$

وبتعويض المعادلات الوسيطية لـ $d'$ في معادلة $P$ نجد:

$$2(2h + 3) + (h - 1) + 5 = 0$$

$$4h + 6 + h - 1 + 5 = 0$$

$$5h = -10 \Rightarrow \boxed{h = -2}$$

وبتعويض في $d'$ فنجد $N(-1,-3,2)$

---

**المسألة الثانية: ليكن التابع $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ المعرف على $D = ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[$**

**1) ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ $C$**

$f$ معرف واشتقاقي على $D$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي $\lim_{x \to -2^{<}} f(x) = -1 - \infty = -\infty$

$$= \frac{b - bi - b - c}{2} = \frac{-bi - c}{2}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{nQ}}} = \frac{r - n}{q - n} = \frac{\frac{(1-i)b}{2} - \frac{b+c}{2}}{\frac{(1+i)c}{2} - \frac{b+c}{2}}$$

$$= \frac{b - ib - b - c}{c + ic - b - c} = \frac{-ib - c}{-b - ic} = \frac{i(-b + ic)}{-b + ic}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}} = i$$

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}}\right) = \arg(i) \qquad \left|\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}}\right| = |i|$$

$$(\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NR}) = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{NR}{NQ} = 1$$

$$NR \perp NQ \qquad NR = NQ$$

---

**التمرين الثالث: بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$**

**1) ادرس اطراد المتتالية**

لنأخذ التابع $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ المعرف على $[0, +\infty[$

$f$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

| |
|---|
| ملاحظة: كسرين لهما نفس البسط<br>فالمقام الأكبر هو الكسر الأصغر |

**2) أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$**

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

**3) استنتج قيمة المجموع $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$**

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

بالاستفادة من صيغتي $u_n$:

$$S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots\cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

$$S = -1 + \sqrt{100} = 9$$

---

**رابعاً: حل المسألتين الآتيتين:** (100 درجة لكل مسألة)

**المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(3, -1, 2)$ والمستويان**

$$Q: 4x + 2y + z + 5 = 0 \qquad P: 2x + y + 5 = 0$$

**1) أثبت أن $P, Q$ متقاطعين بفصل مشترك $d$**

$$\vec{n}_P(2,1,0) \;,\; \vec{n}_Q(4,2,1)$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 0 + 2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$ $\quad$ $x = -1$ مقارب شاقولي

$$f'(x) = 1 + 2\left(\frac{x+1-x-2}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 1 + 2\left(\frac{-1}{(x+1)(x+2)}\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+3x+2-2}{(x+1)(x+2)}$$
$$f'(x) = \frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)}$$
$$f'(x) = 0 \implies x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$

إما $\quad x = 0 \implies f(0) = 1 + 2\ln 2$

أو $\quad x = -3 \implies f(-3) = -2 + 2\ln\left(\frac{-1}{-2}\right) = -2 - 2\ln 2$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | $-1$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | | | $0$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $-2-2\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ $1+2\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2) أثبت أن $\Delta: y = x + 1$ مقارب لـ $C$ وادرس الوضع النسبي**

$$f(x) - y_\Delta = 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0\end{array}\right\}\Delta:\ y = x + 1$$ مقارب مائل لـ $C$ بجوار $\pm\infty$

$$x + 2 > x + 1$$

$\div\ (x+1) < 0$

$x \in ]-\infty, -2[$

$\frac{x+2}{x+1} < 1$

$\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < \ln 1$

$2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 0$

$f(x) - y_\Delta < 0$

$C$ تحت $\Delta$ بجوار $-\infty$

$\div\ (x+1) > 0$

$x \in ]-1, +\infty[$

$\frac{x+2}{x+1} > 1$

$\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > \ln 1$

$2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > 0$

$f(x) - y_\Delta > 0$

$C$ تحت $\Delta$ بجوار $+\infty$

**3) أثبت أن $A\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $C$**

$x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[$

$-x \in ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

$-3 - x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[$ $\quad$ الشرط الأول محقق