عقدية:

السؤال الأول: هامة

ليكن العددين العقديين $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 1+i$

① أكتب z_1 ، z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الأسي.

$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$z_1 = 2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_2 = 1+i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

---

② أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i} \times \frac{(1-i)}{(1-i)}$ مرافق

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i - i - \sqrt{3}\,i^2}{1+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,i$

a b

③ استنتج النسب المثلثية $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}$

بالمساواة بين الشكل الجبري والأسي

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

السؤال الثاني: 45

ليكن لدينا $w = -3+4i$ ، ولنفرض z عدد عقدي

$z^2 = w$ حل المعادلة

الحل: لنجد $z = x+iy$ حيث $a = -3$ ، $b = 4$

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \longrightarrow x^2+y^2 = 5$ --- ①

$x^2-y^2 = a \longrightarrow x^2-y^2 = -3$ --- ②

$x\cdot y = \frac{b}{2} \longrightarrow x\cdot y = 2$ --- ③

بالجمع ① ، ② نجد

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

نلاحظ من ③ أن x ، y من نفس الإشارة

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z_1 = 1+2i$

$x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow z_2 = -1-2i$

السؤال الثالث:

ليكن العدد العقدي $z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

① احسب z^2 ، واكتبه بالشكل الأسي $r_\theta >$

الحل:

$z^2 = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right)^2$

$z^2 = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)^2 + 2i\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right) - \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right)^2$

$z^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + 2i\left(\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4}}\right) - \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$z^2 = \frac{2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{2} + 2i\left(\frac{\sqrt{4-2}}{2}\right)$

$z^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$z^2 = 2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

② أوجد z بالشكل الأسي ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{8}$

Scanned by CamScanner

الحل: لدينا $z^2 = 2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \longrightarrow z = \sqrt{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}}$

$z = \sqrt{2}\cdot\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{\frac{1}{2}}$

$z = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{8}i}$

لإيجاد $\cos\frac{\pi}{8}$ نساوي بين الشكل الجبري والمثلثي

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\, i$

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

السؤال الرابع: ليكن w ، z عددين عقديين يحققان $|z|=1$ ، $|w|=1$ وأن $z\cdot w \neq -1$

أثبت أن العدد العقدي $U = \frac{z-w}{1+w\cdot z}$ عدد تخيلي بحت

الحل:

$|z|=1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

$|w|=1 \Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

$\bar{U} = \overline{\left(\frac{z-w}{1+w\cdot z}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{w}}{1+\bar{w}\cdot\bar{z}}$

$\bar{U} = \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{w}\frac{1}{z}} = \frac{\frac{w-z}{z\cdot w}}{1+\frac{1}{w\cdot z}}$

$\bar{U} = \frac{\frac{w-z}{z\cdot w}}{\frac{wz+1}{wz}} = \frac{w-z}{wz+1}$

$\bar{U} = -\left(\frac{z-w}{1+wz}\right) = -U$

ومنه U عدد تخيلي بحت.

السؤال الخامس: في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

① أنشر $(1+5i)^2$ مختارة

② استنتج حلول المعادلة

$2iz^2 + (3+7i)z + 4+2i = 0$

الحل: ①

$(1+5i)^2 = 1+10i+25i^2$

$(1+5i)^2 = -24+10i$

② حل المعادلة $2iz^2 + (3+7i)z + 4+2i = 0$

$\Delta = b^2-4ac = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$

$\Delta = 9+42i-49-8i(4+2i)$

$\Delta = 9+42i-49-32i-16i^2$

نلاحظ $\Delta = -24+10i$

من الطلب الأول $\Delta = (1+5i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1+5i$

$z_1 = \frac{-3-7i-1-5i}{2(2i)} = \frac{-4-12i}{4i}$

نضرب البسط والمقام بـ $-4i$

$z_1 = \frac{+16i-48}{16}$

$z_1 = -3+i$

$z_2 = \frac{-3-7i+1+5i}{2(2i)} = \frac{-2-2i}{4i}$

نضرب البسط والمقام بـ $(-4i)$

$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

السؤال السادس: حل في C المعادلة

المعرفة: $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$

إذا علمت أن لتقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل: لنكتب المعادلة بالشكل $z = ai$

$(z-ai)(1z^2+bz+c) = 0$

$z^3+bz^2+cz-aiz^2-abzi-aci = 0$

$z^3+(b-ai)z^2+(c-abi)z-aci = 0$

بالمطابقة مع الفرض

أمثال z^2 $\quad b-ai = -3-4i$

$\boxed{b=-3}$ $\quad \boxed{a=4}$

أمثال z $\quad c-abi = -18+12i$

حقيقة $\boxed{c=-18}$ $\quad$ تخيلية $-ab = 12$

الثابت $\quad$ تخيلية $-aci = 72i$

$(z-4i)(z^2-3z-18) = 0$

Scanned by CamScanner

(أ) $Z-4i=0 \Rightarrow Z_1=4i$

(ب) $Z^2-4Z-12=0$

ومنه $(Z-6)(Z+2)=0$

$Z_2=6$ $\quad$ $Z_3=-2$

السؤال السابع: ليكن

$P(Z)=Z^4-19Z^2+52Z-40$

① عين عددين a, b حقيقيين بحيث

$P(Z)=(Z^2+aZ+b)(Z^2+4Z+2a)$

② حل المعادلة $P(Z)=0$ في C.

الحل:

$P(Z)=(Z^2+aZ+b)(Z^2+4Z+2a)$

$P(Z)=Z^4+4Z^3+2aZ^2+aZ^3+4aZ^2+2a^2Z+bZ^2+4bZ+2ab$

$P(Z)=Z^4+(4+a)Z^3+(6a+b)Z^2+(2a^2+4b)Z+2ab$

بالمطابقة مع المعطى

أمثال Z^3: $4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

أمثال Z^2: $6a+b=-19 \Rightarrow -24+b=-19$ $\quad \boxed{b=5}$

أمثال Z: $2a^2+4b=52$

تحقق $32+20=52$

الحد الثابت: $2ab=-40$

تحقق $2(-4)(5)=-40$

$P(Z)=(Z^2-4Z+5)(Z^2+4Z-8)$

(أ) $P(Z)=0 \Rightarrow Z^2-4Z+5=0$

$\Delta=16-4(1)(5)=16-20=-4$

$\Delta=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$

$Z_1=\frac{4+2i}{2}=2+i$

$Z_2=\frac{4-2i}{2}=2-i$

(ب) $Z^2+4Z-8=0$

$\Delta=16-4(1)(-8)=16-32=-16$

$\Delta=16i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4i$

$Z_4=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$

السؤال الثامن: $P(Z)=Z^3-3Z^2+3Z+7$

المطلوب:

① أثبت أن $P(-1)=0$

② عين Q كثير حدود من الدرجة الثانية بحيث

$P(Z)=(Z+1)Q(Z)$

③ حل المعادلة $P(Z)=0$

④ لتكن A, B, C حلول المعادلة أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع.

الحل:

$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7$

$=-1-3-3+7=0$ محققة

$P(Z)=(Z+1)Q(Z)$

$P(Z)=(Z+1)(Z^2+aZ+b)$

بطريقة القسمة الإقليدية

$Z^3-3Z^2+3Z+7 \div (Z+1) = Z^2-4Z+7$

Z^3+Z^2

$0-4Z^2+3Z$

$-4Z^2-4Z$

$0+7Z+7$

$7Z+7$

0

$P(Z)=(Z+1)(Z^2-4Z+7)$

③ $P(Z)=0 \Rightarrow Z=-1$

أو $Z^2-4Z+7=0$

$\Delta=b^2-4ac=-12 \Rightarrow \sqrt{-\Delta}=2\sqrt{3}$

$Z_2=2+\sqrt{3}i$ $\quad$ $Z_3=2-\sqrt{3}i$

$A(-1,0)$ $\quad$ $B(2,\sqrt{3})$ $\quad$ $C(2,-\sqrt{3})$

$AB=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

$AC=2\sqrt{3}$

$BC=2\sqrt{3}$

المثلث متساوي الأضلاع.

Scanned by CamScanner

حل المعادلة التالية: في المركبات

$$Z^2 - 2(1-\sqrt{3})Z + 8 = 0$$

$\boxed{a=1}$ $\quad b = -2(1-\sqrt{3})$ $\quad \boxed{c=8}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4(1-\sqrt{3})^2 - 4(1)(8)$

$\Delta = 4(1-2\sqrt{3}+3) - 32$

$\Delta = -16 - 8\sqrt{3}$

تصحيح

انتبه

$\Delta = -4(4+2\sqrt{3})$

$\Delta = -4(3+2\sqrt{3}+1)$

$\Delta = -4(\sqrt{3}+1)^2 = 4i^2(\sqrt{3}+1)^2$

$\sqrt{-\Delta} = 2(\sqrt{3}+1)$

$Z_1 = \dfrac{2(1-\sqrt{3})+2(\sqrt{3}+1)i}{2} = (1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}+1)i$

$\cancel{Z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2}{2} = 2 \Rightarrow Z_1 = 2}$

$Z_2 = \dfrac{2(1-\sqrt{3})-2(\sqrt{3}+1)i}{2} = (1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)i$

$Z_2 = \dfrac{2-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{2}$

$Z_2 = \dfrac{-4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z_2 = -2\sqrt{3}$

مثال: بين طبيعة التحويل الهندسي الذي يربط بين a ، b الممثلات للنقطتين A ، B

① $b = a - 1 + 3i$

B تنتج عن A بانسحاب شعاعه $\vec{u} = -1 + 3i$

② $b = 2a$

B تنتج عن A بتحاكي مركزه (O) ونسبته $k = 2$

③ $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

B صورة A وفق دوران مركزه $(-1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

مسألة: لتكن $a = 1 + \frac{5}{4}i \quad b = 2 - \frac{3}{4}i$

$c = 3 + \frac{7}{4}i$

① وضع النقاط A ، B ، C في الشكل

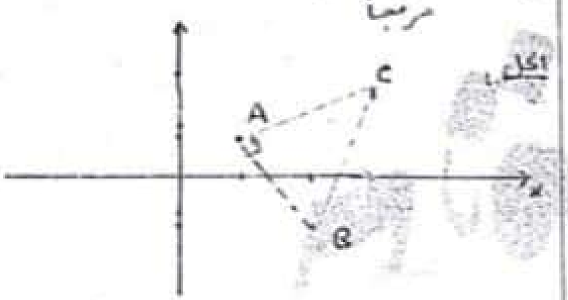
② ما العلاقات التي تربط الشعاعين $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$

③ استنتج أن (ABC) قائم ومتساوي الساقين

④ أثبت أن النقطة A تقع على محيط الدائرة قطرها $[BC]$ نفسر مستنتج أن المثلث قائم

⑤ أحسب العدد العقدي للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً

الحل:



$Z_{\vec{AB}} = 1 - 2i$

$Z_{\vec{AC}} = 2 + i$

$\dfrac{Z_{\vec{AC}}}{Z_{\vec{AB}}} = \dfrac{2+i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{5i}{5} = i$

$\dfrac{AC}{AB} = |i| = 1$

$AC = AB$

المثلث متساوي الساقين

$\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(i)$

نستنتج تعامد بين (AB) (AC)

المثلث قائم ومتساوي الساقين في A

طريقة ثانية:

القطر $2R = BC = \sqrt{(3-2)^2 + (\frac{7}{4}+\frac{5}{4})^2}$

$2R = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ نصف القطر

المركز $M = \dfrac{b+c}{2} \Rightarrow M = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{4}i$

$AM = \sqrt{(\frac{5}{2}-1)^2 + (\frac{1}{4}-\frac{3}{4})^2}$

$AM = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

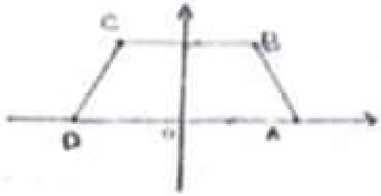
ومنه النقطة A تقع على محيط الدائرة ومنه فالزاوية تحصر قوس هو نصف دائرة إذا هي قائمة

Scanned by CamScanner

السؤال التاسع: في الشكل المجاور (مستوى مركب) شكل ABCD مركزه (O) والنقاط A, B, C, D تمثل الأعداد المركبة a, b, c, d على الترتيب

① إذا علمت أن $a=2$ أوجد الأعداد b, c, d

② أثبت أن $CD \perp AC$



الحل: D نظيرة A بالنسبة لـ O ومنه $\boxed{d=-2}$

B تنتج عن A بدوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$(b-0)=e^{\frac{\pi}{3}i}(a-0)$

$b=e^{\frac{\pi}{3}i}a=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$b=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) \Rightarrow \boxed{b=1+\sqrt{3}i}$

C تنتج عن A بدوران مركزه (O) وزاويته $(\frac{2\pi}{3})$

$(c-0)=e^{\frac{2\pi}{3}i}(a-0)$

$c=e^{\frac{2\pi}{3}i}(2)$

$c=2[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}]$

$c=2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) \Rightarrow \boxed{c=-1+\sqrt{3}i}$

② $\arg(\frac{d-c}{a-c})=\arg(\frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i})$

$=\arg(\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i})$

$=\arg(\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\times\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i})$

$=\arg(\frac{-4\sqrt{3}i}{12})=\arg(-\frac{\sqrt{3}}{3}i)$

$\arg(\frac{d-c}{a-c})=-\frac{\pi}{2}$

إذاً ADC قائم في C.

السؤال العاشر: في المستوي العقدي لتكن

$Z_Q=-1+2i \quad Z_B=1+2i \quad Z_A=3$

① مثل هذه الأعداد في المستوي العقدي.

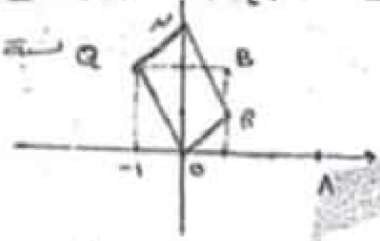
② جد Z_N حيث N صورة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $(\frac{\pi}{2})$

③ جد Z_R ليكون الرباعي OQNR متوازي أضلاع

④ أوجد مركز ثقل المثلث ABQ

⑤ أثبت تعامد المستقيمين (AB) (OR) ... وأثبت $OR=\frac{1}{2}AB$ ... علاقة بين طولي

الحل: ①



② N صورة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$(Z_N-Z_O)=e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A-Z_O)$

$\boxed{Z_N=3i}$

③ الرباعي متوازي أضلاع

$Z_{\overrightarrow{OR}}=Z_{\overrightarrow{QN}}$

$r-0=n-q$

$r=3i-(-1+2i) \Rightarrow r=3i+1-2i$

$\boxed{r=1+i}$

④ $Z_G=(\frac{Z_A+Z_B+Z_Q}{3})$

$Z_G=(\frac{3+1+2i-1+2i}{3})=1+\frac{4}{3}i$

⑤ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OR})=\arg(\frac{r-0}{b-a})$

$=\arg(\frac{1+i}{1+2i-3})=\arg(\frac{1+i}{-2+2i})$

$=\arg(\frac{(1+i)}{(-2+2i)}\times\frac{(-2-2i)}{(-2-2i)})=\arg(-\frac{1}{2}i)$

$=-\frac{\pi}{2}$

منه OR , AB متعامدين وكذلك $|\frac{OR}{AB}|=|-\frac{1}{2}i|$

$\frac{OR}{AB}=|-\frac{1}{2}i|=\frac{1}{2} \Rightarrow OR=\frac{1}{2}AB$

Scanned by CamScanner

السؤال الحادي عشر: في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي المركب لدينا النقاط A, B, C تمثلها الأعداد المركبة

$a = -1+2i \qquad b = -2 \qquad c = 1-i$

1. أكتب العدد $c = 1-i$ بالشكل الأسي
2. احسب العدد المركب $\frac{a-b}{c-b}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين
3. جد العدد المركب d الممثل للنقطة D بحيث يكون $ABCD$ مربع.

الحل:

1. $c = 1-i$

$r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$c = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4} i}$

2. $\frac{a-b}{c-b} = \frac{-1+2i+2}{1-i+2} = \frac{1+2i}{3-i}$

نضرب ونقسم بالمرافق

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{10i}{10} = i$

تخيلي بحت

$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1$

$BA = BC$

المثلث قائم في B ومتساوي الساقين.

3. 

$\vec{AB} = \vec{BC}$

$d - a = c - b$

$d + 1 - 3i = 1 - i + 2$

$d = 2 + 2i$

السؤال الثاني عشر: في المستوي المركب المنسوب لمعلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ لدينا النقاط A, B, C تمثلها الأعداد المركبة

$a = \sqrt{3}+i \qquad b = \sqrt{3}-i \qquad c = 3\sqrt{3}+i$

المطلوب: 1. احسب العدد $\frac{c-a}{b-a}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

2. جد العدد المركب n الممثل للنقطة N منتصف $[AC]$
3. جد العدد المركب s الممثل للنقطة S صورة B وفق دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ما طبيعة المثلث (SAB)

الحل:

1. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = \frac{\sqrt{3}}{-i}$

نضرب ونقسم بـ i

$\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{3}\, i$

تخيلي بحت إذا

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$

(AB) و (AC) متعامدان.

2. $n = \frac{a+c}{2} = \frac{\sqrt{3}+i+3\sqrt{3}+i}{2} = \frac{4\sqrt{3}+2i}{2}$

$\boxed{n = 2\sqrt{3}+i}$

3. $R_{(A, \frac{\pi}{3})}(B) = S$

$s - a = e^{\frac{\pi}{3} i}(b-a)$

$s - (\sqrt{3}+i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i)$

$s = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-2i) + \sqrt{3}+i$

$s = -i + \sqrt{3} + \sqrt{3} + i$

$s = 2\sqrt{3}$

المثلث (SAB) متساوي الأضلاع لأن الدوران يحافظ على الأطوال.

أي دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فالمثلث قائم ومتساوي الساقين

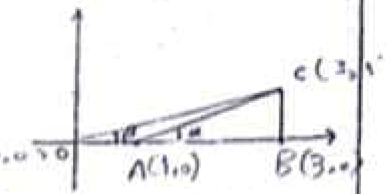
أي دوران زاويته $\mp\frac{\pi}{3}$ فالمثلث متساوي الأضلاع

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث عشر: في مستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ($O, \vec{u}, \vec{v}$)

$\arg(Z_{\vec{AC}}) = \alpha$

$\arg(Z_{\vec{OC}}) = \beta$



① اكتب كلاً من $Z_{\vec{OC}}, Z_{\vec{AC}}, Z_{\vec{OC}} \cdot Z_{\vec{AC}}$ بالشكل الجبري

② اكتب كلاً من $Z_{\vec{AC}}, Z_{\vec{OC}}, Z_{\vec{AC}} \cdot Z_{\vec{OC}}$ بالشكل الأسي واستنتج قيمة $(\alpha+\beta)$

الحل: $a=1$, $c=3+i$, $b=3$

$Z_{\vec{AC}} = c - a = 3+i-1$

$Z_{\vec{AC}} = 2+i$

$Z_{\vec{OC}} = 3+i$

$Z = Z_{\vec{AC}} \cdot Z_{\vec{OC}} = (2+i)(3+i)$

$Z = 6+2i+3i+i^2$

$Z = 5+5i = 5(1+i)$

$Z_{\vec{AC}} = 2+i = \sqrt{5} \cdot e^{i\alpha}$

$Z_{\vec{OC}} = 3+i = \sqrt{10} \cdot e^{i\beta}$

$Z = Z_{\vec{AC}} \cdot Z_{\vec{OC}} = \sqrt{50} \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$

$Z = 5\sqrt{2} \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$ ...①

$Z = 5(1+i) \xrightarrow[\text{الأسي}]{\text{تحويل}} \begin{cases} r = 5\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$Z = 5\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}$ ...②

من ①، ② نجد $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$

السؤال الرابع عشر: $\frac{2}{122}$

لتكن المعادلة $(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$

① حل في C المعادلة السابقة

② لتكن الحلول السابقة النقاط A, B, C, D

أثبت أن الشكل (ABDC) مستطيل

---

[1] (1) $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$

$\Delta = b^2-4a.c = 27-4(1)(9) = -9$

$\Delta < 0$ فلدينا عقديان مترافقان

A: $Z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}+3i}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

B: $Z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}-3i}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

(2) $z^2-3\sqrt{3}z+9=0$

$\Delta = -9 \rightarrow \Delta < 0$

فلدينا عقديان مترافقان

C: $Z_3 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{3}+3i}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

D: $Z_4 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

$A(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ $B(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

$C(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ $D(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

[2] بما أن Z_1, Z_2 مترافقان فالنقطتان B, A متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

بما أن Z_4, Z_3 مترافقان فالنقطتان D, C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

(AB , CD متوازيان ومتساويان)

Z_1, Z_2 متعاكسان فالنقطتان C, B متناظرتان بالنسبة للمبدأ وبالمثل A, D متناظرتان بالنسبة للمبدأ

(القطران AD , BC متساويان ومتناصفان)

السؤال الخامس عشر:

يفرض $U \neq 1$ وأن $\frac{Z - U\bar{Z}}{1-U}$ عدد حقيقي اثبت أنه إما أن يكون Z حقيقي أو أن يكون $|U|=1$

الحل: الفرض: $\left(\frac{Z - U\bar{Z}}{1-U}\right)$ عدد حقيقي

الطلب: أثبت أن Z حقيقي أي $\bar{Z} = Z$ اثبت أن $|U|=1$

البرهان: انطلاقاً من الفرض

$$\overline{\left(\frac{Z - U\bar{Z}}{1-U}\right)} = \frac{Z - U\bar{Z}}{1-U}$$

$$\frac{\bar{Z} - \bar{U}Z}{1-\bar{U}} = \frac{Z - U\bar{Z}}{1-U}$$

$$(\bar{Z} - \bar{U}Z)(1-U) = (Z - U\bar{Z})(1-\bar{U})$$

$$Z + U\bar{U}\bar{Z} - \bar{Z} - U\bar{U}Z = 0$$

$$(Z - \bar{Z}) - U\bar{U}(Z - \bar{Z}) = 0$$

$$(Z - \bar{Z})(1 - U\bar{U}) = 0$$

إما $Z = \bar{Z}$ Z عدد حقيقي

أو $1 - U\bar{U} = 0 \Rightarrow \bar{U} = \frac{1}{U}$

$\Rightarrow |U| = 1$

115

السؤال السادس عشر:

لتكن B ، A النقاط الممثلة للأعداد العقدية $(1+i)$ و $(3-i)$ مثل هندسياً مجموعة

① $|z-3+i| = |z+2i|$

الحل: $|z-a| = |z-b|$

هي مجموعة نقاط تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

② $|z-3i| = 5$

تمثل دائرة مركزها نقطة $(0,-3)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{5}$

السؤال السابع عشر: $\frac{3}{152}$

يفرض D ، C ، B ، A تمثل الأعداد العقدية

$c = 4+2i$ ، $b = -1+7i$ ، $a = 2-2i$

$d = -4-2i$

① لتكن Ω نقطة تمثل العدد العقدي $w = -1+2i$

اثبت وقوع النقاط D ، C ، B ، A على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5 .

الحل: $\Omega A = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

بنفس الطريقة $\Omega B = \Omega C = \Omega D = 5$

② لتكن e منتصف $[AB]$ ، فحقق $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

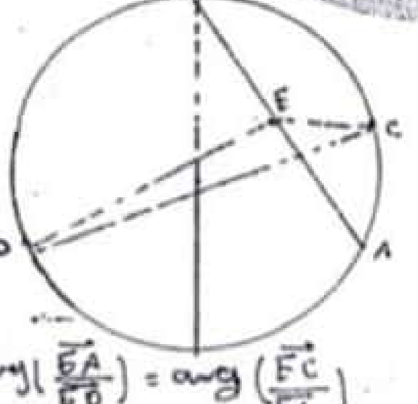
ماذا يمثل المستقيم (EA) بالمثلث (DEC) .

الحل:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

بعد تساوي المستقيمين نلاحظ تساوي الزوايا



ومنه $\arg\left(\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{ED}}\right) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}}\right)$

(EA) منصف داخلي للزاوية DEC

حل المعادلة التالية

$$2iz+\bar z = 3+3i$$

نفرض $z = x+iy$

$$2i(x+iy)+(x-iy)=3+3i$$

$$2ix+2yi^2+x-iy=3+3i$$

$$x-2y+i(2x-y)=3+3i$$

$x-2y=3 \quad \cdots (1)$

$2x-y=3 \quad \cdots (2)$

من (1) نجد $x=2y+3$ نعوض في (2)

$$2(2y+3)-y=3$$

$$4y+6-y=3 \Rightarrow 3y=-3$$

$$\boxed{y=-1} \Rightarrow x=-2+3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\boxed{z=1-i}$$

حل جملة المعادلتين

$$3z+z'=2-5i$$

$$z-z'=-2+i$$

بجمع المعادلتين

$$4z=-4i$$

$$\boxed{z=-i}$$

نعوض في إحدى المعادلتين

$$-i-z'=-2+i$$

$$\boxed{z'=2-2i}$$

مثال: ليكن $z=1+i$ جد العدد العقدي z' صورة z وفق

(a) انسحاب T شعاعه $\vec w=-2\vec u+3\vec v$

$$z'=z+(-2+3i)$$

$$z'=1+i-2+3i$$

$$z'=-1+4i$$

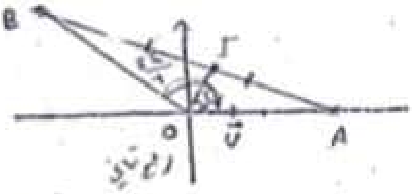
(b) تحاكي مركزه (o) ونسبته (3)

$$z'=k\cdot z$$

$$z'=3(1+i)=3+3i$$

مثال: لتكن النقطتان A، B اللتين تمثلان العددين $a=2$ ، $b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ ولتكن I منتصف $[AB]$

(1) ارسم شكلاً مناسباً وبين نوع المثلث OAB



$$b=2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$b=2\left[-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right]=-\sqrt2+\sqrt2 i$$

المثلث متساوي الساقين $OB=OA=2$

---

(2) استنتج قياس $(\vec u,\vec{OI})$

OI متوسط بالمثلث المتساوي الساقين فهو ارتفاع ومنصف

$$\arg(\vec u,\vec{OI})=\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{3\pi}{8}$$

---

(3) احسب العدد العقدي z_I الممثل بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج

$$z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{2-\sqrt2+\sqrt2 i}{2}=\frac{2-\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt2}$$

$$\theta=\frac{3\pi}{8} \Rightarrow \boxed{z_I=\sqrt{2-\sqrt2}\,e^{\frac{3\pi}{8}i}}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{2-\sqrt2}{2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\frac{2-\sqrt2}{2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}$$

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}$$

حل معادلات من الدرجة الأولى في حالتين:

- إذا كانت المعادلة تحتوي على z أو $\bar z$ نضع المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف
- عندما تحتوي معادلة من الدرجة الأولى على z و $\bar z$ نفرض $z=x+yi$ ، $\bar z=x-yi$ ثم نعوض

Scanned by CamScanner

مثال ① يحتوي صف [خمسة طلاب] وثلاث طالبات نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 طلاب لتزيين الصف ① بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة بحيث تحتوي طالبتين على الأقل

② بكم طريقة نستطيع تشكيل اللجنة بحيث تحتوي طالب واحد فقط

الحل:

① $A = \{G, G, B\}, \{G, G, G\}$

$n(A) = \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{3}{3} = 16$

② $B = \{G, G, B\}$

$n(B) = \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30$

مثال ② يتألف مجلس ادارة نادي من خمسة أعضاء ① بكم طريقة نستطيع تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس ونائب وامين سر.

② بكم طريقة نستطيع تشكيل لجنة مؤلفة من نائب ورئيس وامين سر علماً ان هناك شخصان متخاصمان لا يجتمعان في اللجنة؟

الحل: ①

$n(A) = P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

②

3m $\qquad$ 1m ; 2m

(m.m.m) $\qquad$ (m.m.m) × 3

$n(B) = P_5^3 + P_2^1 \cdot P_3^2 \times 3$

$= 42$

مثال ③ لتكن لدينا مجموعة $S = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

① بكم طريقة نستطيع تشكيل عدد مؤلف من 3 مراتب ارقامه مختلفة.

② بكم طريقة نستطيع تشكيل عدد مؤلف من 3 مراتب وزوجي.

الحل ① مختلفة بدون تكرار :

$n(A) = 5 \times 4 \times 3$

احاد ، عشرات ، مئات

② مئات عشرات احاد (2,4,6 : زوجي)

$n(B) = 3 \times 5 \times 5 = 75$

مثال ④ ليكن لدينا مجموعة

$S = \{2, 4, 6, 7, 8\}$

تشكيل عدد مؤلف من ثلاث خانات

① ان يكون العدد فردي. ② ان يكون اصغر من 600 وارقامه مختلفة

الحل:

① $n(A) = 1 \times 5 \times 5 = 25$

مئات عشرات (فردي احاد)

② $n(B) = 2 \times 4 \times 3$

مئات (2,4) عشرات مئات

مثال ⑤: ليكن لدينا مجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

① بكم طريقة نستطيع تشكيل عدد مؤلف من مرتبتين فردي

② بكم طريقة نستطيع تشكيل عدد مؤلف من 3 منازل مختلفة من مضاعفات الـ ⑤ واصغر من 200

الحل:

① $n(A) = 3 \times 5 = 15$

احاد (1,3,5) عشرات

② $n(B) = 1 \times 1 \times 3 = 3$

احاد (5) مئات (1)

مثال 6: لدينا اربعة جوائز.

① بكم طريقة نستطيع توزيعهم على 4 طلاب.

② بكم طريقة نستطيع توزيعهم على 5 طلاب.

الحل:

① $n(A) = P_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

② $n(B) = P_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

مثال 7: لدينا ستة اقلام

① بكم طريقة يمكن توزيعهم على ستة طلاب.

② بكم طريقة يمكن توزيعهم على خمسة طلاب بحيث يحصل كل طالب على قلم على الاقل.

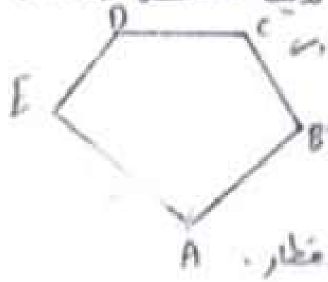
الحل.

① $n(A) = P_6^6 = 6! = 720$

② $n(B) = \binom{6}{2} \times 5! = 1800$

Scanned by CamScanner

مثال 8: يمكن لدينا المخمس ABCDE: نصل بين ثلاث رؤوس لتشكيل مثلث ما هو عدد المثلثات المشكلة بهذه الطريقة.



② ما هو عدد الأقطار.

الحل:

① $n(A) = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

② $n(B) = \binom{5}{2} - 5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} - 5 = 5$

مثال 9: يلتقي n شخص في حفل ويصافح كل منهما الآخر

① احسب بدلالة n عدد المصافحات.

② إذا علمت أن عدد المصافحات 15 احسب n

الحل:

① $n(A) = \binom{n}{2} = \frac{(n)(n-1)}{2 \times 1} = \frac{n^2 - n}{2}$

② $n(A) = 15$

$\frac{n^2-n}{2} = 15 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$

$(n-6)(n+5) = 0$

إما $n = 6$ (مقبول) أو $n = -5$ (مرفوض)

مثال 10: يحوي صندوق 5 كرات 3 حمراء و 2 بيضاء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً.

① بكم طريقة يمكن اختيار كرتين حمراوين على الأقل.

② بكم طريقة يمكن اختيار كرتين بيضاويين على الأكثر.

الحل:

① $A = \{(R,R,W), (R,R,R)\}$

$n(A) = \binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{3}{3}$

$= 3 \cdot 2 + 1 = 7$

② $B = \{(W,W,R)(W,R,R)(R,R,R)\}$

$n(B) = \binom{2}{2}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1$

$= 3 + 6 + 1 = 10$

مثال 11: يحوي مغلف 5 بطاقات متماثلة مرقمة كما يلي 1, 1, 2, 2, 3

نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة.

① بكم طريقة يمكن الحصول على بطاقتين متماثلتين.

② بكم طريقة يمكن الحصول على بطاقتين الأولى ① الثانية ②.

الحل:

① $A = \{(1,1), (2,2)\}$

$n(A) = P_2^2 + P_2^2 = 2 \times 1 + 2 \times 1 = 4$

② $B = \{(1,2)\}$

$n(B) = P_2^1 \cdot P_2^1 = 2 \times 2 = 4$

مثال 12: يحوي مغلف 4 بطاقات مرقمة كما يلي: 1, 2, 2, 4 نسحب بطاقتين مع إعادة.

① بكم طريقة نستطيع الحصول على بطاقتين مختلفتين.

② بكم طريقة نستطيع الحصول على بطاقتين متساويتين.

الحل:

① $A = \{(1,2) \times 2, (1,4) \times 2, (2,4) \times 2\}$

$n(A) = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2$

$= 2 + 2 + 4 = 8$

② $B = \{(2,2), (1,1), (4,4)\}$

$n(B) = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

مثال 13: لدينا خمسة طلاب

① بكم طريقة يمكن ترتيب الطلاب بنسق أحادي

② بكم طريقة يمكن ترتيب الطلاب بنسق أحادي على أن يكون طالب معين في بداية النسق.

الحل:

① $n(A) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

② $n(B) = 1! \times 4! = 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Scanned by CamScanner

مثال 14: جد n إذا علمت أن:

$$5P_n^2 = 6\binom{n}{4}$$

شرط 1: $n \geq 2$

شرط 2: $n \geq 4$

من الشرط العام $n \geq 4$

$$5(n)(n-1) = 6\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$$

$$5 = \frac{(n-2)(n-3)}{4}$$

$$n^2-3n-2n+6 = 20$$

$$n^2-5n-14=0$$

$$(n-7)(n+2)=0$$

إما $n=7$ مقبول

أو $n=-2$ مرفوض

مثال 15: في منشور $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$

① هل يوجد حد مستقل عن x.

② اوجد الحد الذي يحوي x^4.

الحل: ① حد مستقل عن x يعني x^0.

نوجد الحد العام:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} . b^r$$

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} . \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} . x^{-2r}$$

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-3r}$$

بمقارنة x^{10-3r} مع x^0:

$$10-3r=0 \rightarrow -3r=-10 \rightarrow r=\frac{10}{3}$$

حد مستقل لا يوجد لأن r عدد طبيعي.

②

$$10-3r=4$$

$$-3r=4-10$$

$$-3r=-6 \rightarrow r=\frac{-6}{-3}=2$$

$$\Rightarrow T_2 = \binom{10}{2} x^{10-3(2)}$$

$$= 45 . x^4$$

مثال 16: باستخدام منشور ذي الحدين:

① اوجد: $(e^{ix}-e^{-ix})^4$

② اكتب $\cos^4 x$ على شكل عبارة خطية

الاحتمالات:

مثال 1: يحتوي مغلف خمس بطاقات متماثلة ومرقمة كالآتي: 1، 1، 2، 2، 3

نسحب من المغلف بطاقتين على التوالي دون إعادة

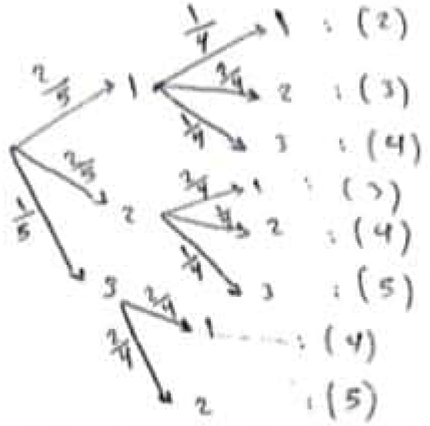
① ارسم مخطط شجري

② إذا علمت أن المجموع 4 ما احتمال أن أحدها ①.

③ نفرض X متغير يدل على مجموع رقمي البطاقتين احسب E(x)

الحل:

①



② A: حدث أن يكون المجموع 4 . B: حدث أن يكون أحدها 1

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{1}{5}.\frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

$$P(B\cap A) = \frac{1}{4}.\frac{2}{5} + \frac{2}{4}.\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{6}{20}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

③

$$x(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$P(x=2) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

$$P(x=3) = \frac{2}{5}.\frac{2}{4} + \frac{2}{5}.\frac{2}{4} = \frac{8}{20}$$

$$P(x=4) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{1}{5}.\frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

$$P(x=5) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{1}{5}.\frac{2}{4} = \frac{4}{20}$$

x_i	2	3	4	5	Total
$P(x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(x_i) = \frac{4+24+24+20}{20} = \frac{72}{20}$$

Scanned by CamScanner

مسألة 2: يحوي مغلف 5 بطاقات متماثلة ومرقمة كالتالي: 0، 0، 1، 1، 2

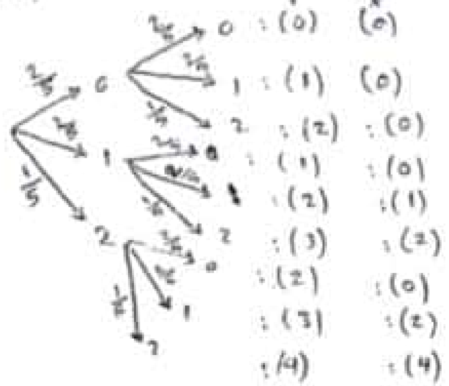
نسحب من المغلف بطاقتين على التوالي مع الإعادة

① ارسم مخطط شجري

② احسب احتمال سحب بطاقتين مجموعهما فردي.

③ X متغير يدل على جداء رقمي البطاقتين احسب $E(X)$

الحل:



② A: حدث الحصول على بطاقتين مجموعهما فردي:

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}$$
$$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}$$

③ X متغير يدل على جداء رقمي البطاقتين:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}$$
$$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25}$$
$$= \frac{16}{25}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{25} + \frac{2}{25} = \frac{4}{25}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = 0\left(\frac{16}{25}\right) + 1\left(\frac{4}{25}\right) + 2\left(\frac{4}{25}\right) + 4\left(\frac{1}{25}\right)$$
$$= 0 + \frac{4}{25} + \frac{8}{25} + \frac{4}{25} = \frac{16}{25}$$

مسألة 3: صندوقان يحوي الصندوق الأول كرتين حمراوين وكرة سوداء ويحوي الصندوق الثاني كرتين سوداوين وكرة حمراء، نختار صندوق ونسحب منه كرة واحدة

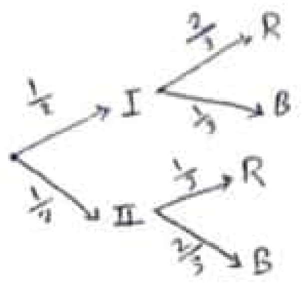
① ارسم مخطط شجري

② احسب احتمال سحب كرة حمراء

③ إذا علمت أنها حمراء ما احتمال أنها من الصندوق الأول.

الحل:

①



② A: حدث الحصول على كرة حمراء.

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

③ A: حدث الحصول على كرة حمراء (الشرط)

B: حدث أن تكون من الصندوق الأول.

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$P(B\cap A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(B/A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

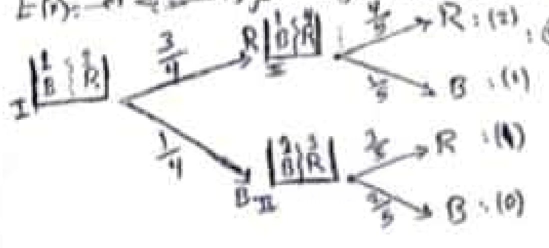
مسألة 4: صندوقان يحوي الصندوق الأول 3 كرات حمراء وكرة سوداء ويحوي الصندوق الثاني كرتين حمراوين وواحدة سوداء. نسحب كرة من الصندوق I ونضعها في II ثم نسحب كرة من II

① ارسم مخطط شجري

② إذا علمت أن الثانية حمراء، ما الاحتمال أن الأولى حمراء.

③ X متغير يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب $E(X)$

الحل: ①



Scanned by CamScanner

⑤ A: حدث أن تكون الثانية حمراء (الحمراء)
B: حدث أن تكون الأولى حمراء.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{15}{20}$$

$$P(B\cap A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{20}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{12}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{12}{20}\times\frac{20}{15} = \frac{12}{15}$$

③ X متغير يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{20}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{6}{20}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{20}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$

$$E(X) = 0\left(\frac{2}{20}\right) + 1\left(\frac{6}{20}\right) + 2\left(\frac{12}{20}\right)$$

$$= 0 + \frac{6}{20} + \frac{24}{20} = \frac{30}{20} = 1$$

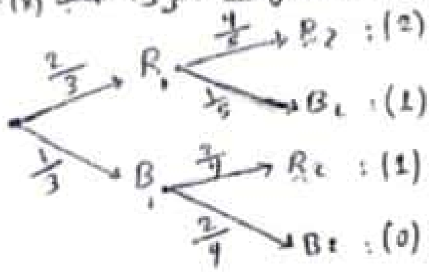
مسألة 5: يحتوي صندوق كرتين حمراوين وكرة سوداء نسحب كرة نشاهدها ونسجل لونها ونعيدها ونضاعف عدد الكرات من لونها

① ارسم مخطط شجري

② إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء.

③ X متغير يدل على عدد الكرات الحمراء. احسب $E(X)$

الحل:



② A: حدث أن تكون الكرة الثانية حمراء (سحب)
B: حدث أن تكون الأولى حمراء.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{8}{15} + \frac{2}{12}$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{1}{6} = \frac{16}{30} + \frac{5}{30} = \frac{21}{30}$$

$$P(B\cap A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{16}{30}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{\frac{16}{30}}{\frac{21}{30}} = \frac{16}{30}\times\frac{30}{21} = \frac{16}{21}$$

③ X متغير يدل على عدد الكرات الحمراء.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{15} + \frac{2}{12}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{6} = \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{9}{30}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{16}{30}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{16}{30}$

$$E(X) = 0\left(\frac{5}{30}\right) + 1\left(\frac{9}{30}\right) + 2\left(\frac{16}{30}\right)$$

$$= 0 + \frac{9}{30} + \frac{32}{30} = \frac{41}{30}$$

مسألة 6: صندوقان يحتوي الصندوق الأول ثلاث كرات مرقمة بالأرقام 1,2,3 ويحتوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأرقام 2,3,4,5 نسحب كرة من كل صندوق والمطلوب:

① اكتب فضاء العينة.

② A: حدث إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم 3
B: حدث مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5
هل A و B مستقلان احتمالياً.

③ X متغير يدل على مجموع رقمي الكرتين احسب $E(X)$.

الحل:

Scanned by CamScanner

الحل: ①

	2	3	4	5
1	(1,2) 3	(1,3) 4	(1,4) 5	(1,5) 6
2	(2,2) 4	(2,3) 5	(2,4) 6	(2,5) 7
3	(3,2) 5	(3,3) 6	(3,4) 7	(3,5) 8

②

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

ليكون الحدثان مستقلان تحقق من الشرط:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ومنه الحدثان مستقلان احتماليا.

③

$X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$P(X=3) = \frac{1}{12}$ $\quad P(X=6) = \frac{3}{12}$

$P(X=4) = \frac{2}{12}$ $\quad P(X=7) = \frac{2}{12}$

$P(X=5) = \frac{3}{12}$ $\quad P(X=8) = \frac{1}{12}$

x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

مسألة 7: يحتوي صندوق كرات حمراء وكرات بيضاء عدد الحمراء يساوي ضعفي عدد البيضاء

① نسحب من الصندوق كرة ما احتمال أن تكون حمراء.

② نسحب ③ كرات على التوالي مع الاعادة.

X متغير يدل على عدد الكرات الحمراء احسب $E(X)$

الحل: ① نفرض أن عدد البيضاء n

فيكون عدد الحمراء $2n$

A: حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء،

$P(A) = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$

②

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

احتمال الحمراء: $P(A) = \frac{2}{3}$

احتمال البيضاء: $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(X=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$P(X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{6}{27}$

$P(X=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{12}{27}$

$P(X=3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

مسألة 8: يحتوي صندوق 5 بطاقات متماثلة ومرقمة كالتالي 1,2,3,4,5

نسحب من الصندوق بطاقتين على التوالي دون اعادة

① احسب احتمال الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما زوجي.

② X متغير يدل على الرقم الأصغر بين رقمي البطاقتين المسحوبتين. احسب $E(X)$ و $V(X)$

الحل:

① نلاحظ أن ف 3 ، ز 2

ليكن الحدث A مجموع رقمي البطاقتين زوجي: (ز,ز) أو (ف,ف)

$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} \Rightarrow P(A) = \frac{8}{20}$

②

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$X=1$ $\quad 2 \times (1, 1')$ حيث $1' > 1 \Rightarrow P(X=1) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{20}$

$X=2$ $\quad 2 \times (2, 2')$ حيث $2' > 2 \Rightarrow P(X=2) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

$X=3$ $\quad 2 \times (3, 3')$ حيث $3' > 3 \Rightarrow P(X=3) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{20}$

$X=4$ $\quad 2 \times (4, 4')$ حيث $4' > 4 \Rightarrow P(X=4) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

②

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	1

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i) = \frac{(1)(8)+(2)(6)+(3)(4)+(4)(2)}{20}$

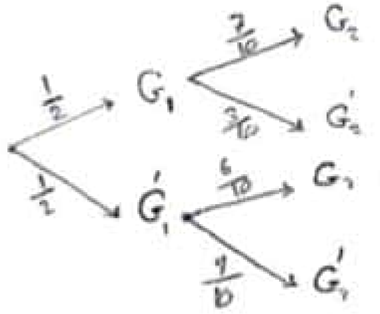
$= \frac{8+12+12+8}{20} = \frac{40}{20} = 2$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(1)(8)+(4)(6)+(9)(4)+(16)(2)}{20} - (2)^2$

$= \frac{8+24+36+32}{20} - 4 = 5 - 4 = 1$

مسألة 9 : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء
إذا سجل الأولى احتمال أن يسجل الثانية $\frac{7}{10}$
إذا أخفق بالأولى احتمال أن يخفق بالثانية $\frac{4}{10}$
إذا علمنا أن احتمال تسجيل الأولى يساوي احتمال الاخفاق
① ارسم مخطط شجري .
② احسب احتمال أن يسجل الثانية .
③ إذا علمت انه سجل الثانية ما احتمال أن يخفق بالأولى

الحل:
①



② G_2 : حدث أن يسجل الثانية

$$P(G_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{13}{20}$$

③ G_2 : حدث أن يسجل الثانية (شرط)
G_1' : حدث أن يخفق بالأولى .

$$P(G_1'|G_2)=\frac{P(G_1'\cap G_2)}{P(G_2)}$$

$$P(G_2)=\frac{13}{20}$$

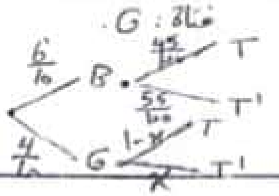
$$P(G_1'\cap G_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{6}{20}$$

$$\Rightarrow P(G_1'|G_2)=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{13}{20}}=\frac{6}{13}$$

مسألة 10 : في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب كرة المضرب
تحتوي مدرستنا 60% ذكور . 55% منهم لا يمارسون كرة المضرب
نختار عشوائيا فتاة . ما احتمال أن تمارس لعبة كرة المضرب .

الحل:
$P(T|G)=x$

نرمز للأحداث: T يمارس كرة المضرب ، T' لا يمارس كرة المضرب
G : فتاة ، B : ذكور



$P(T)=\frac{3}{10}$

$$\Rightarrow P(B\cap T)+P(G\cap T)=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{10}\times\frac{45}{100}+\frac{4}{10}\times(1-x)=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 270+400-400x=300 \Rightarrow 400x=370$$

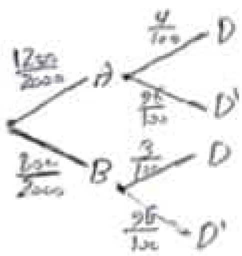
$$\Rightarrow x=\frac{37}{40}$$

$$\Rightarrow P(T'|G)=\frac{37}{40}$$

مسألة 11 : يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية
عند ورود طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح . صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة . نسحب عشوائيا مصباح من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث " المصباح مصنوع في A "
بالرمز B إلى الحدث " المصباح مصنوع في B "
بالرمز D إلى الحدث " المصباح معطوب "

① نظم مخططاً شجرياً للتجربة .
② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب .
③ إذا كان المصباح معطوب . ما احتمال أن يكون مصنوع في A .

الحل
①



②
$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=\frac{1200}{2000}\times\frac{4}{100}+\frac{800}{2000}\times\frac{3}{100}$$

$$=\frac{24}{1000}+\frac{12}{1000}=\frac{36}{1000}=\frac{9}{250}$$

③
$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1200}{2000}\times\frac{4}{100}}{\frac{9}{250}}=\frac{\frac{6}{250}}{\frac{9}{250}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

مسألة 12 : صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب من الصندوق كرتين معاً .
① إذا علمت أن الكرتين من نفس اللون . ما احتمال أن تكون الكرتين حمراوين .
② لتكن لدينا متحول عشوائي X يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة
اكتب قيم المتحول X وجد دل قانونه الاحتمالي . ولحسب $E(X)$

الحل
السحب كرتين معاً
لا نهتم بالترتيب ولا التبديل

2 B	3 R

5 كرات

Scanned by CamScanner

لتكن الحدث A: الكرتين من نفس اللون: $\{RR\}, \{BB\}$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10}$$

ليكن الحدث C: الكرتين حمراوين: $\{RR\}$

$$P(C \cap A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow P(C|A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

②

$$\Omega = [\underbrace{\{RR\}}_{②}, \underbrace{\{RB\}}_{①}, \underbrace{\{BB\}}_{⓪}]$$

$$X = [0,1,2]$$

$$X=0 \quad \{BB\} \Rightarrow P(X=0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$X=1 \quad \{RB\} \Rightarrow P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$X=2 \quad \{RR\} \Rightarrow P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

x_i	0	1	2	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(x_i) = \frac{(0)(1)+(1)(6)+(2)(3)}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$$

المسألة (13): قطعة نقود غير متوازنة، احتمال ظهور الشعار يساوي ضعفي احتمال ظهور الكتابة.

① احسب احتمال ظهور الشعار واحتمال ظهور الكتابة.

② نرمي قطعة النقود 5 مرات متتالية وبالتوالي

a) احسب احتمال ظهور الشعار مرتين على الأقل

b) X متغير عشوائي يدل على عدد الشعارات. احسب $E(X)$

الحل

① لدينا $P(H) = 2P(T)$ ونعلم أن:

$$P(H)+P(T)=1 \Rightarrow 2P(T)+P(T)=1$$

$$\Rightarrow 3P(T)=1 \Rightarrow P(T)=\frac{1}{3}$$

$$\text{ومنه} \Rightarrow P(H)=\frac{2}{3}$$

② a) ليكن الحدث A: ظهور الشعار مرتين على الأقل

$n=5, \quad K=[2,3,4,5]$

$P=P(H)=\frac{2}{3} \Rightarrow q=\frac{1}{3}$

$$P(A) = 1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$= 1-\left[\binom{5}{0}\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\left(\tfrac{1}{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\right]$$

$$= 1-\left[\frac{1}{243}+\frac{10}{243}\right] = 1-\frac{11}{243} = \frac{232}{243}$$

b)

$$X = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\left(\tfrac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\left(\tfrac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\left(\tfrac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\left(\tfrac{2}{3}\right)^4\left(\tfrac{1}{3}\right)^1=\frac{80}{243}$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\tfrac{2}{3}\right)^5\left(\tfrac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$	1

$$E(X) = n \cdot p = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = \frac{10}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

المسألة (14): لاعبان A و B يلعبان في لعبة مكونة من (5) أشواط. احتمال فوز اللاعب A في الشوط يساوي $\frac{2}{3}$. يعتبر فائزاً اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط. احسب احتمال فوز B.

الحل

يفوز اللاعب B في اللعبة إذا كسب (3) أشواط على الأقل أي:

$n=5, \quad K=[3,4,5], \quad P=\frac{1}{3} \Rightarrow q=\frac{2}{3}$

$$P(B) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$= \binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\left(\tfrac{2}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\left(\tfrac{2}{3}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5\left(\tfrac{2}{3}\right)^0$$

$$= \frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243} = \frac{51}{243}$$

المسألة (15): نلقي حجر نرد متوازن (5) مرات.

① احسب احتمال الحصول على الوجه 5 أو 6 ثلاث مرات على الأقل.

② X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور 5 أو 6 احسب $E(X)$

الحل

① $n=5, \quad K=[3,4,5], \quad P=P(5)+P(6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow q=\frac{2}{3}$$

$$P(A)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\square$$

②

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

نطلب من الطلاب برنامج حل كل قيمة من قيم X ثم ننظم جدول ونحسب التوقع الرياضي.

Scanned by CamScanner