معهد رسول التعليمي — أ.محمد رسول الصباغ — البحث: المتتابعة
علم – عمل – تفوق — رياضيات — الفقرة: شامل

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية (٦٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $K(0,6,5)$.

أ) بين أن النقاط A و B و C و K تقع في مستوٍ واحد.

ب) استنتج أن النقطة K هي مركز الدائرة المشتملة على النقاط المعطاة.

السؤال الثاني: نتأمل معلماً متجانساً $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لكرية G مركز ثقل المثلث ABC.

أوجد إحداثيات G، وتحقق أن (OG) عمودي على (ABC).

السؤال الثالث: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

أوجد معادلة للمجموعة (ح) المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$، وما طبيعة المجموعة (ح).

ثانياً: حل التمارين الثلاثة التالية (٨٠ دقيقة – ٧٠ للثاني والثالث)

التمرين الأول: لتكن النقاط $A(1,1,-1)$ و $B(-1,0,-1)$ و $C(6,3,-1)$ و $D(9,5,3)$.

أ) أثبت أن المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيينها.

ب) جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين (AB) و (CD).

التمرين الثاني: نتأمل رباعي وجوه ABCD، و K نقطة من $[AB]$ تحقق $\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AB}$، و L نقطة من $[CD]$ حيث $\vec{CL}=\frac{2}{3}\vec{CD}$.

$G=\text{م.ث}\{(A,2)(B,1)(C,1)(D,2)\}$

أثبت أن G و K و L تقع على استقامة واحدة.

التمرين الثالث: نتأمل المستويين $(P): x-2y+3z-5=0$ و $(\Phi): x+y+z+1=0$.

أثبت أن صورة المستوي (P) بالدوران R الذي مركزه Ω هي المستوي (Φ).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معهد رسول التعليمي — أ.محمد رسول الصباغ — البحث.....
علم – عمل – تفوق — رياضيات — الفقرة.....

ثالثاً: حل المسائل التالية (علامة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في المعلم المتجانس ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) النقطتين الآتيتين $A(1,-1,2)$ $B(2,0,4)$ والمستوي P الذي معادلته $x+3y-2z+5=0$

أ) جد معادلة المستوي Q الموازي للمستوي P والمار من B.

ب) جد بعد النقطة $(1,1,0)$ عن الخط المستقيم المحدد بالمستويين P و Q.

ج) جد احداثيات H المسقط القائم لـ D على P.

د) جد معادلة الكرة التي مركزها D وتمس المستوي P.

هـ) " " " " تقطع [AB].

المسألة الثانية: في معلم متجانس ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) نتأمل النقاط

$A(-1,2,3)$ $B(2,1,1)$ $C(-3,6,-1)$ $D(3,1,1)$

أ) جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

ب) اثبت أن المثلث ABC يحدد مستوي.

ج) اكتب معادلة المستوي ABC

د) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة D والعمودي على ABC

هـ) احسب مساحة المثلث ABC

و) احسب حجم الهرم ABCD

ز) بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)(B,-1)(C,2)$ اثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

انتهت الأسئلة ...

مع تمنياتي لكم بالتوفيق ...

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الأول

$\vec{AC}(3,-2,1)$ $\vec{AB}(9,-1,-1)$

$\vec{AD}(-1,-1,1)$ هل هو مرتبط $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

$(-1,-1,1) = \alpha(9,-1,-1) + \beta(3,-2,1)$

$= (9\alpha+3\beta, -\alpha-2\beta, -\alpha+\beta)$

$9\alpha+3\beta = -1$ (1)

$-\alpha-2\beta = -1$ (2)

$-\alpha+\beta = 1$ (3)

بطرح (2) و (3) نجد $\beta = \frac{2}{3}$

نعوض في (3) نجد $\alpha = -\frac{1}{3}$

نعوض α و β في (1)

$-1 \stackrel{?}{=} 9(-\frac{1}{3}) + 3(\frac{2}{3})$

$-1 = -3+2 = -1 \Rightarrow$

ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً إذن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.

$\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

أ) مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط

نجد $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

$(A, 3-(-1+2), 2)$ $(B,-1)$ $(C,2)$

$(A,2)$

السؤال الثاني

$(O;\vec{OA};\vec{OB},\vec{OC}) \Rightarrow$

$A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $(0,0,1)$

$O(0,0,0)$ $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\vec{OG}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

نكون مستقيم مرتبط بمستقيمين مستقلين

إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقلين خطياً

نجد $\vec{AB}(-1,1,0)$ و $\vec{AC}(-1,0,1)$

$\vec{OG}\cdot\vec{AB} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0$

$OG \perp AB$

$\vec{OG}\cdot\vec{AC} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0$

$OG \perp AC$ وبما

أن OG عامد على المستوي ABC

السؤال الثالث

$A(2,1,2)$ $B(-2,0,2)$

نفرض $M(x,y,z)$

$\vec{MA}(2-x, 1-y, 2-z)$

$\vec{MB}(-2-x, -y, 2-z)$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \Rightarrow$

$(2-x)(-2-x) - y(1-y) + (2-z)^2 = 0$

$-4-2x+2x+x^2-y+y^2+4-4z+z^2=0$

$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$

هي معادلة كرة مركزها $\Omega(0,\frac{1}{2},2)$

ونصف قطرها $R^2 = \frac{1}{4}+4 = \frac{17}{4}$

التمرين الأول: $A(-1,1,1)$ $B(-1,0,-1)$

$C(4,3,-1)$ $D(9,5,3)$

$\vec{AB}(0,-1,-2)$ و $\vec{CD}(5,2,-2)$ نجد معادلة وسيطية للمستقيم

ومنها معادلات وسيطية لمستقيم يشمل النقطة

$(AB)\begin{cases} x = x_A + at = -1 \\ y = y_A + bt = 1-t \\ z = z_A + ct = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$(CD)\begin{cases} x = x_C + a\lambda = 4+5\lambda \\ y = y_C + b\lambda = 3+2\lambda \\ z = z_C + c\lambda = -1-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

بالمطابقة:

$-1 = 4+5\lambda$ (1)

$1-t = 3+2\lambda$ (2)

$1-2t = -1-2\lambda$ (3)

(1) $\Rightarrow \lambda = -1$

$t = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معهد رسول التعليمي — أ.محمد رسول الصباغ — البحث.....
علم - عمل - تفوق — رياضيات — الفقرة.....

نعوض $\lambda=1$ و $t=0$ في ①

$1=1 \Leftarrow 1-0=3-2$

وهذا يدل على تقاطع المستقيم مع المستوي

نقطة التقاطع تعوض λ و t بالمعادلة

تعطي $I(-1,1,1)$

* لإيجاد معادلة المستوي

لدينا $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ شعاعين توجيه

ونعلم نقطة I من المستوي.

ناخذ المستوي $\vec{n}(a,b,c)$ بفرض

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -b-2c=0$ ④

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow -5a-2b+2c=0$ ⑤

بفرض $c=1 \rightarrow b=-2 \rightarrow a=\frac{6}{5}$

$\vec{n}\left(\frac{6}{5},-2,1\right)=(6,-10,5)$

ومعادلة المستوي

$6x-10y+5z+d=0$

نعوض I $\Leftarrow d=11$

$P: 6x-10y+5z+11=0$

التمرين الثاني

$\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow$

K و A و B و 2 و 1 بالترتيب

$\vec{CL}=\frac{2}{3}\vec{CD} \Leftrightarrow$

L و C و D و 2 و 1 بالترتيب

لدينا G مرجح A و B و C و D

(A,2)(B,1)(D,2)(C,1)

K L

ومنه

G مرجح (K,3)(L,3)

ومنه G منتصف [KL]

واضح.

$\vec{n_P}(1,-2,3)$ التمرين الثالث:

$\vec{n_Q}(1,1,1)$

بفرض $\vec{n_R}(a,b,c)$

$R\perp P \Rightarrow \vec{n_R}\cdot\vec{n_P}=0 \Leftrightarrow$

$a-2b+3c=0$ ③

$R\perp Q \Rightarrow \vec{n_R}\cdot\vec{n_Q}=0 \Leftrightarrow$

$a+b+c=0$ ④

بطرح (3) و (4)

$-3b+2c=0$

بفرض $c=3 \Rightarrow b=2 \quad a=-5$

$\vec{n_R}(-5,2,3)$

$R: -5x+2y+3z+d=0$

نعوض A $\Leftarrow d=6$

$R: -5x+2y+3z+6=0$

$\vec{n_P}(1,-1,3)$ المسألة الثانية:

بفرض $\vec{n_Q}(a,b,c)$

$Q\perp P \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{n_P}=0 \Leftrightarrow$

$a-b+3c=0$ ①

$AB\perp n_Q \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{n_Q}=0 \Leftrightarrow$

$(1,1,2)(a,b,c)=0 \Leftrightarrow$

$a+b+2c=0$ ②

② - ① $\Leftarrow 2a+5c=0$

بفرض $a=5 \rightarrow c=-2 \rightarrow b=-1$

$\vec{n_Q}(5,-1,-2)$

$Q: 5x-y-2z+d=0$

نعوض B $\Leftarrow d=-2$

$Q: 5x-y-2z-2=0$

ج) بما أن المستويين متعامدان

$dist(D,P)=d_1=\frac{|1-1+0-4|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{4}{\sqrt{11}}$

$dist(D,Q)=d_2=\frac{|5-1+0-2|}{\sqrt{25+1+4}}$

$=\frac{2}{\sqrt{30}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وجب نظرية فيثاغورث بالفضاء نجد
مربع المسافة الكبرى
$d^2 = d_1^2 + d_2^2$
$= \frac{16}{11} + \frac{4}{30} = \frac{262}{165}$ $d = \sqrt{\frac{262}{165}}$

ثم نوجد معادلة الوسطى
المستقيم $(D\Delta)$ المار بـ D والذي يقبل $\vec{n}(1,-1,3)$ شعاعا توجيها له
$x = 1+t$
$y = 1-t \quad t \in \mathbb{R}$
$z = 3t$

نعوض في معادلة المستوي P.
$1+t-1+t+9t-4=0 \Rightarrow \{t = \frac{4}{11}\}$
نعوض في معادلة الوسطى لإيجاد $D'(\frac{15}{11}, \frac{7}{11}, \frac{12}{11})$

ج) بما أن الكرة تمس المستوي (P) فإن
$R = dist(D,P) = \frac{4}{\sqrt{11}}$
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{16}{11}$

د) الكرة مقطرها AB أي مركزها منتصف AB
$\Omega(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$
$2R = AB = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$
$R = \frac{\sqrt{6}}{2}$
$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{6}{4}$

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = -4+8-4 = 0 \Rightarrow$
$\vec{n} \perp \vec{AC}$
$\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ ABC
$ABC: 2x+4y+z+d=0$
نعوض B $\Rightarrow d = -9$
$(ABC): 2x+4y+z-9=0$

ب) نحدد (d) المار بـ A والعمودي على (ABC)
$\vec{u} = \vec{n}$
$x = 3+2t \quad y = 1+4t$
$z = 1+t \quad t \in \mathbb{R}$

ج) $dist(D,ABC) = \frac{|16+4+1-9|}{\sqrt{4+16+1}}$
$= \frac{2}{\sqrt{21}}$

$V = \frac{1}{3} S_h$
$S = \frac{AB \cdot AC}{2}$ حيث ABC مثلث قائم في A.
$S = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+4}\sqrt{4+4+16}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{24}$ $\sqrt{2}$
$V = \frac{1}{3}\sqrt{14}\sqrt{24} \times \frac{2}{\sqrt{24}\sqrt{3}}$
$V = \frac{2\sqrt{48}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{16} = \frac{8}{3}$

ب) $A(1,1)$ $B(-1,0)$ $C(2,1)$ و G مركز الأبعاد المتناسبة
$\Rightarrow \vec{AG} - \vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$
$\vec{AB} = -2\vec{CG}$
ومنه حسب خاصية مرجح جملة نقطة
$AB \parallel CG$

التمرين الثاني: 1) $\vec{AB}(3,-1,-2)$
$\vec{AC}(-2,2,-1)$ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$
ب) يكفي أن نثبت أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) أي $\vec{n}$ مستقيم مستقيم ناظمي له
$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 6-4-2 = 0 \Rightarrow$
$\vec{n} \perp \vec{AB}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner