مسألة امتحانية (التابع اللوغاريتمي)

أ- ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق : $g(x) = x - \ln x$ و **المطلوب** :

1- ادرس تغيّرات التابع g ونظّم جدولاً بها .

2- استنتج أنّ $g(x) > 0$ أيّاً تكن x من $\mathbb{R}_+^*$.

ب- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف وفق : $f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$ و $f(0) = -1$ و **المطلوب** :

1- تحقّق أنّ $D_f = [0,+\infty[$.

2- ادرس استمراريّة التابع عند الصفر .

3- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ و فسّر النتيجة هندسيّاً .

4- ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند $x = 0$ و فسّر النتيجة هندسيّاً .

5- ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

6- عيّن إحداثيّات نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 1$.

7- أثبت أنّ C يقطع محور الفواصل بنقطة وحيدة فاصلتها α .

8- أثبت أنّ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

9- في معلم متجانس ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

الحل : أ : الطلب الأوّل :

g معرّف و مستمر و اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty - \infty$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$$

لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \ \leftrightarrow \ 1 = \frac{1}{x}$$

$$x = 1$$

$$g(1) = 1 - \ln 1 = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$g(x)$		$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	

الطلب الثاني :

من جدول التغيّرات : $g(]0,+\infty[) = [1,+\infty[$

و منه $g(x) > 0$ أيّاً تكن x من $\mathbb{R}_+^*$.

ب : الطلب الأوّل :

$$D_f = D\left(\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\right) \cup \{0\}$$

$x \to \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$ معرف بشرطين :

$$x > 0 \quad , \quad x - \ln x \neq 0$$

لكن $g(x) > 0$ أي إنّ $x - \ln x > 0$

و منه $D_f =]0,+\infty[\cup \{0\} = [0,+\infty[$.

الطلب الثاني :

يجب تحقّق الشرط $\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x+\ln x}{x-\ln x} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2x+\ln x - x}{x-\ln x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{x-\ln x} + \frac{\ln x - x}{x-\ln x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{x-\ln x} - 1\right) = \frac{0}{\infty} - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = -1$$

فالتابع f مستمر عند الصفر .

الطلب الثالث :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فالمستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب أفقي ل C في جوار $+\infty$.

الطلب الرابع :

معدّل التغيّر :

$$t(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (a = 0)$$

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+\ln x}{x-\ln x} - (-1)}{x}$$

$$= \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x-\ln x)} = \frac{2x}{x(x-\ln x)}$$

$$= \frac{2}{x-\ln x}$$

$$\lim_{x\to0} t(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند الصفر و لدينا : $f'(0)=0$

التفسير الهندسي : C يقبل مماساً أفقيّاً عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الطلب الخامس :

f معرّف و مستمر و اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x+1-\frac{\ln x}{x}-x-\ln x+1+\frac{\ln x}{x}}{(x-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=0 \leftrightarrow 2-2\ln x=0$$

$$\leftrightarrow \ln x=1 \rightarrow x=e$$

$$f(e)=\frac{e+1}{e-1}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

الطلب السادس :

$$f(x)=1 \leftrightarrow x+\ln x=x-\ln x$$

$$2\ln x=0 \rightarrow x=1$$

و منه إحداثيّات نقطة التقاطع بين C و المستقيم Δ ذو المعادلة $y=1$ هي

$(1,1)$

الطلب السابع :

من جدول التغيّرات : $f([e,+\infty[)=\left]1,\frac{e+1}{e-1}\right]$ لا يحوي الصفر .

f معرّف و مستمر و مطّرد تماماً على المجال $]0,e[$ كما أنّ:

$f(]0,e[)=\left]-1,\frac{e+1}{e-1}\right[$ يحوي الصفر .

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[0,+\infty[$.

الطلب الثامن :

f معرّف و مستمر و مطّرد تماماً على المجال $]0,e[$ فهو معرّف و مستمر و مطّرد تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

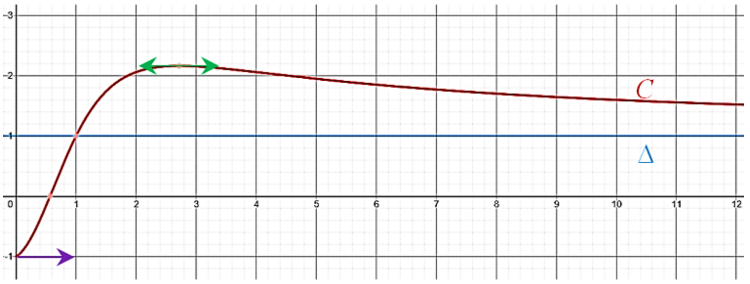
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}}=\frac{1-2\ln 2}{1+2\ln 2}<0$$

$$f(1)=\frac{1+\ln 1}{1-\ln 1}=1>0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$$

و بالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ $\alpha\in$.

الطلب التاسع :



الطلب العاشر :

ابتسم ابتسامة النصر عزيزي الطالب ☻

إلى هنا نصل و إياكم إلى نهاية حل المسألة ♥
نأمل أن تكونوا قد استفدتم منها على أكمل وجه
ترقبوا نماذجنا الشاملة و الكثير من النماذج الجزئيّة الأخرى ☻

لا تنسوا الاشتراك بقناتنا ليصلكم كل جديد
https://telegram.me/BAC_MATHS_1

صفحتنا على فيسبوك : NERD Academy