« المتتاليات »

* وهي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أي مجموعة جزئية منها.

* رمزها: $(U_n)_{n \geq n_0}$

الحد العام ، الدليل ، م.ت

* التصريح عن متتالية:

1] التصريح المباشر.
U_n بدلالة n.

2] متتالية المجاميع.
سلسلة على شكل مجموع.

3] التصريح بالتدريج.
- حد بدء.
- U_{n+1} بدلالة U_n.

بيّن تصريح المتتالية:

• $U_1 = 2$
$U_{n+1} = e^{U_n}$
(تدريجي)

• $U_n = e^n$
(مباشر)

• $U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$
(مجاميع)

• $U_n = \sqrt{n+1}$
(مباشر)

• $U_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
(مجاميع)

• $U_0 = 2$
$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1}$
(تدريجي)

« إطراد متتالية »

تصريح مباشر	مجاميع	تصريح بالتدريج
1) بالمشتق $f'(x)$	1) فرق	1) بالاستقراء
2) بالفرق $U_{n+1} - U_n$	$U_{n+1} - U_n$	2) حالة خاصة: "فرق" بشرط المتتالية محدودة
3) بالنسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n} \gtrless 1$ "حدود موجبة"		

[عادي - قوي - مجهول في الأس]

* ادرس جهة إطراد المتتالية:

1] $U_n = \frac{3}{n^2}$

$f(x) = \frac{3}{x^2} \quad : \quad x > 0$

$f'(x) = \frac{-3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-6}{x^3} < 0$

f متناقصة تماماً

U_n متناقصة تماماً.

2] $U_n = \sqrt{3n+1}$

$f(x) = \sqrt{3x+1} \quad : \quad x \geq 0$

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$

f متزايدة تماماً

U_n متزايدة تماماً

3] $U_n = \frac{3n+1}{n+2}$

$f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$; $x \geq 0$

$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$

f متزايدة تماماً

U_n متزايدة تماماً

4] $U_n = \frac{n}{10^n}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{10^n(n+1)}{10^{n+1} \cdot n}$

$= \frac{\cancel{10^n}(n+1)}{\cancel{10^n} \cdot 10 \cdot n}$

$= \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{10n} < 1$

U_n متناقصة تماماً

5] $\frac{1}{n^2+1}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $x \geq 0$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0$

f متناقصة تماماً

$\Leftarrow$ U_n متناقصة تماماً

6] $U_n = -3n+1$

$U_{n+1} - U_n = -3(n+1)+1+3n-1$

$= -3n-3+1+3n-1$

$= -3 < 0$

U_n متناقصة تماماً

7] $U_n = \frac{n+1}{n+2}$

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$; $x \geq 0$

$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

f متزايدة تماماً

$\Leftarrow$ U_n متزايدة تماماً

8] $U_n = 2^n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}}$

$= 2 > 1$

U_n متزايدة تماماً

9] $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$; $x > 0$

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$

f متناقصة تماماً

$\Leftarrow$ U_n متناقصة تماماً

10] $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{n! \cdot (n+1)^2}{(n+1)! \cdot n^2}$

$= \frac{\cancel{n!}\,(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$

U_n متناقصة تماماً

11] $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

U_n متزايدة تماماً

12] $U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$

$U_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

U_n متزايدة تماماً

13] $U_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

U_n متزايدة تماماً

المتتالية الحسابية »

- كل حد ناتج عن الحد الذي قبله بإضافة عدد حقيقي r : أساس المتتالية.
- لإثبات متتالية حسابية :

$$U_{n+1} - U_n = r \text{ (عدد)}$$

- القانون العام :

$$U_n = U_m + (n-m)r$$

يستخدم لأجل :

a- لحساب الأساس.

b- لحساب أحد الحدود.

c- لحساب الحد العام U_n بدلالة n.

- حساب مجموع حدود متعاقبة :

$$S = \frac{P}{2}(a+l)$$

l : الحد الأخير — a : الحد الأول في المجموع

P : عدد الحدود «دليل الأخير - دليل الأول + 1»

- ميزة ثلاث حدود متعاقبة a، b، c.

$$2b = a + c$$

المتتالية الهندسية »

- كل حد ناتج عن الحد الذي قبله بضربه بعدد حقيقي q : أساس المتتالية.
- لإثبات متتالية هندسية :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \text{ (عدد)}$$

- القانون العام :

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$$

- حساب مجموع حدود متعاقبة :

$$S = \frac{a}{1-q}(1-q^P)$$

ميزة ثلاث حدود a، b، c متعاقبة :

$$b^2 = a \cdot c$$

---

14) $$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}_{\times 2n+2} + \frac{-1}{2n+2}_{\times 2n+1} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

U_n متزايدة تماماً.

15) $$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n}_{\times 1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}_{\times 2}$$

$$= \frac{1}{2n+1}_{\times 2n} + \frac{-1}{2n}_{\times 2n+1}$$

$$= \frac{2n-2n-1}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

U_n متناقصة.

★ مسألة 5، ص22 :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$V_n = U_{2n} - U_n$$

- أثبت أن V_n متزايدة تماماً.

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

/ /

★ تمرين ص 18 :

1) $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

أثبت أن U_n هندسية ؟ ثم عين أساسها

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{3^n} \cdot 3^2}$

$= \frac{2}{3} = q$

2) $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية فيها $U_5 = -13$

و $U_2 = 41$، أحسب U_{20}

$U_n = U_m + (n-m)r$

$U_5 = U_2 + (5-2)r$

$-13 = 41 + 3r$

$3r = -54 \Rightarrow r = -18$

$U_{20} = U_5 + (n-m)r$

$U_{20} = -13 + (20-5)(-18)$

$U_{20} = -13 + (15)(-18) = -13 - 270$

$U_{20} = -283$

• أحسب U_n بدلالة n.

$U_n = U_5 + (n-5)(-18)$

$U_n = -13 - 18n + 90$

$U_n = -18n + 77$

3) $(U_n)_{n \geq 0}$ هندسية وفيها :

$U_5 = 81$ ، $U_2 = 3$

a - احسب U_8.

$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$

$U_5 = U_2 \cdot q^{5-2} \Rightarrow 81 = 3 \cdot q^3$

$\Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$

$U_8 = U_5 \cdot q^3 = 81 \cdot 27$

$U_8 = 2187$

b - عبارة U_n بدلالة n.

$U_n = U_2 \cdot 3^{n-2}$

$U_n = 3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1}$

4) $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية وفيها :

أساسها 3 و $U_1 = -2$

a - أحسب U_n بدلالة n.

$U_n = U_1 + (n-1) \cdot 3$

$U_n = -2 + 3n - 3$

$U_n = 3n - 5$

b - أحسب كل من المجاميع

• $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{20}$

$S = \frac{P}{2}(a + \ell)$

$\ell = U_{20} = 55$

$a = U_1 = -2$

$P = 20 - 1 + 1 = 20$

$\Rightarrow S = \frac{20}{2}(-2 + 55) = 530$

• $U_{30} + U_{31} + U_{32}$

$U_{30} = 85$, $U_{31} = 85 + 3 = 88$

$U_{32} = 88 + 3 = 91$

$U_{30} + U_{31} + U_{32} = 264$

• $\underset{1}{U_3} + \underset{2}{U_6} + \underset{3}{U_9} + \dots + \underset{10}{U_{30}}$

$a = U_3 = 4$

$r = U_6 - U_3 = 13 - 4 = 9$

$\ell = U_{30} = 85$

$P = 10 - 1 + 1 = 10$

$\Rightarrow S = \frac{10}{2}(4 + 85) = 445$

6- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 ومنها $U_1=-2$ والمطلوب:

a- أكتب عبارة U_n بدلالة n .

$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} = -2\cdot 3^{n-1}$

b- احسب كل من المجموعين.

• $U_1+U_2+\dots+U_7$

$S = \frac{a}{1-q}(1-q^p)$

$a = U_1 = -2$,

$q = 3$, $p = 7-1+1 = 7$

$\Rightarrow S = \frac{-2}{-2}(1-3^7) = 1-3^7$

• $U_2+U_4+U_6+\dots+U_{2n}$

$q = \frac{U_4}{U_2} = \frac{-54}{-6} = 9$

$p = n-1+1 = n$

$a = U_2 = -6$

$\Rightarrow S = \frac{-6}{-8}(1-9^n) = \frac{3}{4}(1-9^n)$

7- $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها -2 ومنها $U_0=-3$

a- اكتب عبارة U_n بدلالة n .

$U_n = U_m + (n-m)r$

$U_n = U_0 + (n-0)(-2) = -3 - 2n$

b- احسب كل من المجاميع:

• $U_{25}+U_{26}+\dots U_{125}$

$S = \frac{p}{2}(a+l)$

$p = 125-25+1 = 101$

$a = U_{25} = -53$, $l = U_{125} = -253$

$\Rightarrow S = \frac{101}{2}(-53-253)$

8- $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 2 ومنها $U_0 = 1$

a- احسب U_3 ثم جد

$U_3+U_4+\dots+U_7$

$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$

$U_3 = U_0\cdot q^{3-0} = 1\cdot 2^3 = 8$

$p = 7-3+1 = 5$

$\Rightarrow S = \frac{8}{1-2}(1-2^5) = -8(-31)$

$S = 248$

9- أحسب المجموع:

• $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+\dots+10$

حدود متتالية حسابية

أساسها $r = \frac{1}{2}$

حدها الأول $a = \frac{1}{2}$

حدها الأخير $l = 10$

عدد حدودها $p = 20-1+1 = 20$

$[1+2+3+\dots+20] \times 2$

$\Rightarrow S = \frac{20}{2}(\frac{1}{2}+10) = 105$

10- a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق:

$a+b+c = 13$ (1)

$a\cdot b\cdot c = 27$ (2)

عين a و b و c .

• الحل في الصفحة التالية

حسب تعريف الهندسية

$b^2 = a \cdot c$ ③

نعوض 3 في 2 :

$b^2 \cdot b = 27$

$b^3 = 27 \Rightarrow b = 3$

نعوض في 1 و 3 :

$a + c = 10$

$a \cdot c = 9$

اما : $c = 9$ $a = 1$

او : $c = 1$ $a = 9$

11- نفس السؤال السابق :

$a + b + c = 3$ ①

$a \cdot b \cdot c = -27$ ②

حسب تعريف الهندسية :

$b^2 = a \cdot c$ ③

نعوض 3 في 2 :

$b^2 \cdot b = -27$

$b^3 = -27 \Rightarrow b = -3$

نعوض في 1 و 3 :

$a + c = 6$

$a \cdot c = 9$

$a = 3$ $c = 3$

★ مسألة 6 ، ص22 :

a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية اساسها q و $a \neq 0$

3a و 2b و c ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية ، والمطلوب :

a- احسب q

- حسب تعريف الحسابية :

$4b = 3a + c$ ......①

- حسب تعريف الهندسية :

$b = a \cdot q$ ......②

$c = b \cdot q = a \cdot q \cdot q = aq^2$ ....③

نعوض 2 و 3 في 1

$4 \cdot a \cdot q = 3a + aq^2$ $\div a$

$4q = 3 + q^2 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$

$(q-1)(q-3) = 0$

$q = 1$

$q = 3$

≡ الاستقراء الرياضي »الاثبات بالتدريج«

• نرمز للقضية $E(n)$

1) نبرهن ان $E(n)$ صحيحة من اجل اصغر عدد في مجموعة التعريف .

2) نفرض أن $E(n)$ صحيحة .

3) نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة .

▪ أثبت بالتدريج أن :

$E(n) = 1 + 2 + 3 \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \geq 1$

- نبرهن أن $E(1)$ صحيحة :

$\ell_1 = 1 \quad = \ell_2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة :

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة :

أي : $1+2+3+\dots+n+(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$l_1 = \underbrace{1+2+3+\dots+n}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = l_2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow$ $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq1$

• أثبت أن بالتدريج :

$E(n) = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} ; n\geq1$

- نبرهن أن $E(1)$ صحيحة :

$l_1 = 1^3 = 1$ ، $l_2 = \frac{1.4}{4} = 1$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

أي : $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$l_1 = \underbrace{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4n+4]}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow$ $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq1$

• $S_n = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$

1) احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_{n+1} بدلالة S_n.

$S_1 = 1^2 = 1$, $S_2 = 1^2+2^2 = 5$

$S_3 = 1^2+2^2+3^2 = 14$, $S_4 = S_3+4^2 = 30$

$S_5 = S_4+5^2 = 55$

$S_{n+1} = S_n+(n+1)^2$

2) أثبت بالتدريج

$E_n: S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; n\geq 1$

- نبرهن $E(1)$ صحيحة :

$l_1 = S_1 = 1$ ، $l_2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة :

أي : $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$l_1 = S_{n+1} = S_n+(n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6$

$= 2n^2+7n+6$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow$ $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq1$

• أثبت بالتدريج :

$E(n): 1+2.2!+3.3!+\dots+n.n! = (n+1)!-1$

$n\geq1$

- نبرهن أن $E(1)$ صحيحة

$l_1 = 1$ ، $l_2 = 1$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$1+2.2!+3.3!+\dots+n.n! = (n+1)!-1$

ـ نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

ـ: $\underbrace{1+2.2!+3.3!+\dots+n.n!}+(n+1)(n+1)! = (n+2)!-1$

$\ell_1 = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$=(n+1)!+(n+1)(n+1)!-1$

$=(1+n+1)(n+1)!-1$

$=(n+2)(n+1)!-1$

$=(n+2)!-1$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 1$

• مسألة ١٧/ ص ٢٦:

$U_0 = 2\cos\theta \qquad \theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$

1) أحسب U_1 و U_2.

دستور: $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$U_1=\sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$=\sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2(2\cos^2\frac{\theta}{2})}$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

• $U_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$U_2=\sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})}$

$=\sqrt{2(2\cos^2\frac{\theta}{4})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}$

$=2\left|\cos\frac{\theta}{4}\right|$

• $U_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$

2) أثبت بالتدريج أن

$E_n: U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n} \quad ; n\geq 0$

ـ نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$\ell_1 = U_0 = 2\cos\theta = \ell_2 = 2\cos\theta$

$E(0)$ صحيحة

ـ نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

ـ نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$\ell_1 = U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}$

$=\sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}$

$=2\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$ ف $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$

$=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 0$

• تدريب ص ١٨:

$v_0=1 \quad , \quad v_{n+1}=\frac{v_n}{1+v_n}$

$u_n = \frac{1}{v_n}$

1) أثبت أن $v_n>0$ أياً كانت n.

$E(n): v_n>0 \quad ; n\geq 0$

ـ نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$\ell_1 = v_0 = 1 > 0$

$E(0)$ صحيحة

ـ نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$v_n > 0$

ـ نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$v_{n+1} > 0$

$v_{n+1}=\frac{v_n}{1+v_n} > 0$

$\Leftarrow E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 0$

2) أثبت أن U_n حسابية وعين أساسها.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{\frac{V_n}{V_n+1}} - \frac{1}{V_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1+V_n}{V_n} - \frac{1}{V_n} = \frac{1+V_n-1}{V_n}$

$U_{n+1} - U_n = 1 = r$

حسابية أساسها 1.

3) اكتب عبارة U_n و V_n بدلالة n.

عبارة U_n: $U_n = U_m + (n-m)r$

* $U_0 = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow U_n = U_0 + (n-0)(1)$

$U_n = 1+n$

عبارة V_n:

$U_n = \frac{1}{V_n} \Rightarrow V_n = \frac{1}{U_n}$

$\Rightarrow V_n = \frac{1}{1+n}$

» في المتراجحات يحق لنا:

1) حذف مقدار موجب من الطرف الصغير.

2) حذف مقدار سالب من الطرف الكبير.

3) تبديل مقدار بمقدار أصغر منه في الطرف الصغير.

• تدريب ص 21:

- استنتج بالتدريج:

$E(n): (1+x)^n \geq 1+nx$; $x > -1$

$n \geq 1$

- نبرهن أن $E(1)$ صحيحة

$1+x \geq 1+x$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$(1+x)^n \geq 1+nx$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$

$(1+x)^{n+1} = (1+x)\boxed{(1+x)^n}$ من الفرض

$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$

$\geq 1+(n+1)x+nx^2$; $nx^2>0$

$\geq 1+(n+1)x$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة إذا كانت $n \geq 1$

• أثبت بالتدريج:

$E(n): n! \geq 2^{n-1}$; $n \geq 1$

- نبرهن أن $E(1)$ صحيحة

$1 \geq 1$

$E(1)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$n! \geq 2^{n-1}$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$(n+1)! \geq 2^n$

$(n+1)! = (n+1).n!$

$\geq (n+1).2^{n-1}$; $n \geq 1$

$\geq (1+1).2^{n-1}$

$\geq 2.2^{n-1}$

$\geq 2^n$

/ /

• مسألة 11 ، ص 25 :

- أثبت بالتدريج أياً كانت $n \geq 2$ أن :

$E(n): 3n^2 \geq (n+1)^2$

- نبرهن أن $E(2)$ صحيحة

$12 \geq 9$

$E(2)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$3n^2 \geq (n+1)^2$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$3(n+1)^2 \overset{?}{\geq} (n+2)^2 : n^2+4n+4$

$3(n+1)^2 = \boxed{3n^2} + 6n + 3$

فرض

$\geq (n+1)^2 + 6n + 3$

$\geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$

$\geq n^2 + 4n + 4 + 4n \quad : 4n > 0$

$\geq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 2$

• مسألة 12 ، ص 25 :

$E(n): 3^n \geq (n+2)^2$

- ما أصغر عدد غير معدوم تكون عنده $E(n)$ صحيحة.

$n = 1$	$3 \geq 9$	خاطئة
$n = 2$	$9 \geq 16$	خاطئة
$n = 3$	$27 \geq 25$	صحيحة

أصغر عدد هو 3

2) أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 3$

- نبرهن أن $E(3)$ صحيحة

$27 \geq 25$

$E(3)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$3^n \geq (n+2)^2$

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$3^{n+1} \overset{?}{\geq} (n+3)^2$

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

$3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$

$3^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$

$3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 \quad + \underbrace{2n^2+6n+3}$

$3^{n+1} \geq (n+3)^2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 3$

• تذكرة :

① مجموع مضاعفين لـ a هو مضاعف لـ a

② a ، K مضاعف لكل من a fK

③

• مسألة 13 :

- أثبت بالتدريج صحة القضية

$E(n):$ $4^n + 5$ مضاعف لـ 3

أياً كانت n

- نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$4^0 + 5 = 6$ مضاعف لـ 3

$E(0)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$4^n + 5$ مضاعف لـ 3

Farah Notebook

/ /

نفلك

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$4^{n+1}+5$ مضاعف لـ 3

$4^{n+1}+5=\boxed{4\cdot4^{n}}+5$

$=4^{n}+5+3\cdot4^{n}$

$4^{n}+5$ مضاعف لـ 3 من الفرض

$3\cdot4^{n}$ مضاعف لـ 3

مجموع مضاعفين هو مضاعف لـ 3

• أثبت بالتدريج صحة القضية:

1) $E(n)$: $2^{3n}-1$ مضاعف لـ 7

أياً كانت n.

- نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$2^{0}-1=0$ مضاعف لـ 7

$E(0)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$2^{3n}-1$ مضاعف لـ 7

- نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$2^{3n+3}-1$ مضاعف لـ 7

$2^{3n+3}-1=2^{3}\cdot2^{3n}-1$

$=8\cdot2^{3n}-1$

$=\underbrace{\underbrace{7\cdot2^{3n}}_{\text{مضروب}}+\underbrace{2^{3n}-1}_{\text{فرض}}}_{\text{مجموع}}$

2^{3n-1} مضاعف لـ 3 من الفرض

$7\cdot2^{3n}$ مضاعف لـ 3

مجموع مضاعفين هو مضاعف لـ 7

2) $E(n)$: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف لـ 7

أياً كانت n.

- نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$3^{1}+2^{2}=7$ مضاعف لـ 7

$E(0)$ صحيحة

- نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف لـ 7

- نبرهن $E(n+1)$ صحيحة

$3^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعف لـ 7

$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2}\cdot3^{2n+1}+2^{1}\cdot2^{n+2}$

$=9\cdot3^{2n+1}+2\cdot2^{n+2}$

$=7\cdot3^{2n+1}+2\cdot3^{2n+1}+2\cdot2^{n+2}$

$=\underbrace{\underbrace{7\cdot3^{2n+1}}_{\text{فرض}}+\underbrace{2(3^{2n+1}+2^{n+2})}_{\text{مضروب}}}_{\text{مجموع}}$ عكس

$3^{2n+1}+2^{n+1}$ مضاعف لـ 3 من الفرض

$7\cdot3^{2n+1}$ مضاعف لـ 3

مجموع مضاعفين هو مضاعف لـ 7

★ مسألة 16 »

(9) ونقسم العدد $E(n): 10^{n}+1$

- إذا علمت أن $E(n)$ صحيحة عند قيمة محددة لـ n أثبت أن $E(n+1)$ صحيحة.

$E(n)$: $10^{n}+1$ مضاعف لـ 9

$10^{n+1}+1=10\cdot10^{n}+1$

$=9\cdot10^{n}+10^{n}+1$

$10^{n}+1$ مضاعف لـ 9 فرضاً

$9\cdot10^{n}$ مضاعف لـ 9

$\Leftarrow 10^{n+1}+1$ مضاعف لـ 9

$E(n+1)$ صحيحة

2) هل $E(n)$ صحيحة؟ برر إجابتك.

لا، لأن:

10^n مجموع أرقامه 1.

10^n+1 مجموع أرقامه 2.

وهو ليس مضاعف لـ 9.

★ ادرس جهة إطراد المتتالية:

1) $U_0=2$, $U_{n+1}=U_n-3$

$U_0=2$

$U_1=U_0-3=2-3=-1$

$U_2=U_1-3=-1-3=-4$

$E(n): U_{n+1}-U_n\leqslant 0 \quad : n\geqslant 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$U_1-U_0=-1-2=-3\leqslant 0$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_{n+1}-U_n\leqslant 0$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+2}-U_{n+1}\overset{?}{\leqslant} 0$

$U_{n+2}-U_{n+1}=U_{n+1}-3-U_n+3$

$=U_{n+1}-U_n\leqslant 0$

$E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة أياً كانت n.

• U_n متناقصة

2) $U_0=2$, $U_{n+1}=\frac{3}{4}U_n+2$

$U_0=2$

$U_1=\frac{3}{4}\cdot U_0+2=\frac{3}{4}\cdot 2+2=\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}$

$U_2=\frac{3}{4}\cdot U_1+2=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}+2=\frac{21}{8}+2=\frac{37}{8}$

$E(n): U_{n+1}-U_n\geqslant 0 \quad : n\geqslant 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$U_1-U_0=\frac{7}{2}-2=\frac{7}{2}-\frac{4}{2}=\frac{3}{2}\geqslant 0$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_{n+1}-U_n\geqslant 0$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+2}-U_{n+1}\overset{?}{\geqslant} 0$

$U_{n+2}-U_{n+1}=\frac{3}{4}U_{n+1}+2-\frac{3}{4}U_n-2$

$=\frac{3}{4}(U_{n+1}-U_n)\geqslant 0$

$E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة أياً كانت n

• U_n متزايدة

3) $U_0=8$, $U_{n+1}=\frac{3}{4}U_n+2 \quad : n\geqslant 0$

a) أثبت أن $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ تابع متزايد تماماً.

$f'(x)=\frac{3}{4}\geqslant 0$

f متزايد تماماً

b) ادرس جهة إطراد المتتالية.

$U_0=8$, $U_1=\frac{3}{4}U_0+2=\frac{3}{4}\cdot 8+2=8$

$U_2=\frac{3}{4}\cdot U_1+2=\frac{3}{4}\cdot 8+2=8$

$E(n): U_{n+1}=U_n \quad n\geqslant 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$U_1=U_0$

$8=8$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_{n+1}=U_n$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+2} \overset{?}{=} U_{n+1}$

$U_{n+1} = U_n$

f متزايدة

$f(U_{n+1}) = f(U_n)$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geqslant 0$

★ كتابة عبارة U_n بدلالة n من الشكل:

$$\begin{cases} U_0 = \_\_ \\ U_{n+1} = \alpha U_n + \beta \end{cases}$$

• $U_n = a\alpha^n + b$

- نفرض n عددين

★ مسألة 2، ص 22:

$U_0 = 2 \quad , U_{n+1} = 2U_n - 3$

1) اكتب عبارة U_n بدلالة n.

$U_n = a\,2^n + b$

نفرض: $n=0$ $\quad U_0 = a + b$

$a + b = 2 \quad ---- \boxed{1}$

$n=1 \quad U_1 = 2a + b$

$2a + b = 1 \quad ---- \boxed{2}$

$-L_1 + L_2$

$-a - b + 2a + b = -2 + 1$

$a = -1 \xRightarrow{1} b = 3$

$\Rightarrow U_n = -2^n + 3$

$E(n): U_n = -2^n + 3 \quad ; n \geqslant 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$\ell_1 = U_0 = 2 = \ell_2 = -2^0 + 3 = 2$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_n = -2^n + 3$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

(من المسألة) $U_{n+1} \overset{?}{=} -2^{n+1} + 3$

$\boxed{U_{n+1} = 2U_n - 3} = 2(-2^n + 3) - 3$

$U_{n+1} = -2^{n+1} + 3$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت n

★ مسألة 7/ ص 23:

$U_0 = 7 \quad , U_{n+1} = 10U_n - 18$

1) عبر عن U_n بدلالة n.

$U_n = a(10)^n + b$

$n=0 \quad U_0 = a + b$

$a + b = 7 \quad ---- \boxed{1}$

$n=1 \quad U_1 = 10a + b$

$10a + b = 52 \quad ---- \boxed{2}$

$-L_1 + L_2$

$-a - b + 10a + b = -7 + 52$

$9a = 45 \Rightarrow a = 5 \xRightarrow{1} b = 2$

$U_n = 5 \cdot 10^n + 2$

• التكملة في الصفحة التالية

$E(n): U_n = (-1)^n + 2 \quad ; n \geq 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$l_1 = U_0 = 3 = l_2 = (-1)^0 + 2 = 3$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_n = (-1)^n + 2$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+1} \overset{?}{=} (-1)^{n+1} + 2$

$U_{n+1} = -U_n + 4$

$= -((-1)^n + 2) + 4$

$= (-1)^{n+1} + 2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$

$E(n): U_n = 5 \cdot 10^n + 2 \quad ; n \geq 0$

• نبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$l_1 = U_0 = 7 = l_2 = 5 \cdot 10^0 + 2 = 7$

$E(0)$ صحيحة

• نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$U_n = 5 \cdot 10^n + 2$

• نبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

$U_{n+1} \overset{?}{=} 5 \cdot 10^{n+1} + 2$

$U_{n+1} = 10U_n - 18 = 10(5 \cdot 10^n + 2) - 18$

$= 5 \cdot 10^{n+1} + 2$

$E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة أياً كانت n.

* مسألة 3 / ص 22 :

$U_0 = 3 \quad , U_{n+1} = -U_n + 4$

1) عبري عن U_n بدلالة n.

$U_n = a\alpha^n + b$

$U_n = a(-1)^n + b$

$U_0 = a + b \qquad n = 0$

$a + b = 3 \quad \ldots\ldots \boxed{1}$

$U_1 = -a + b \qquad n = 1$

$-a + b = 1 \quad \ldots\ldots \boxed{2}$

$-l_1 + l_2$

$-a - b - a + b = -3 + 1$

$-2a = -2 \Rightarrow a = 1 \overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow} b = 2$

$U_n = (-1)^n + 2$

المتتاليات، الجزء (2)

- ملخص هذا الجزء من قوانين مكتوب في ورقة خارجية.

• أوجد نهاية كل من المتتاليات «ادرس تقاربها»

1) $U_n = \dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ $\quad +\infty$

$-1 \leqslant \cos 2n \leqslant 1$

$\sqrt{n} > 0$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- حسب مبرهنة الإحاطة.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $U_n = n + 1 - \cos n$ $\quad +\infty$

$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

$1 \geqslant -\cos n \geqslant -1$

$n+2 \geqslant n+1-\cos n \geqslant n$

$n+2 \geqslant U_n \geqslant n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+2) = \lim\limits_{n \to +\infty} (n) = +\infty$

- حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3) $U_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{4} = 2$

4) $U_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+1}}$ $\quad +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{+\infty} = +\infty$

5) $U_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

6) $U_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

7) $U_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$

$U_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3n} & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{2n-1}{3n} & n \text{ فردي} \end{cases}$

$\lim\left(\dfrac{2n+1}{3n}\right) = \lim\left(\dfrac{2n-1}{3n}\right) = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{2}{3}$

8) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$ $\quad +\infty$

$+\infty \quad -\infty$ ع.ت

$= \sqrt{n^2+n} - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{n^2+n-n^2-n-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$

9) $U_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

عدم تعيين

12) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$

نوحد المقامات :

$$\Rightarrow U_n = \frac{n\sqrt{n+2} - n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$$

$$= \frac{\cancel{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}$$

$$= \frac{n+2-n-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

13) $U_n = \sqrt{2n^2-5} - \sqrt{2}\,n$

عدم تعيين $\infty - \infty$

نضرب ونقسم بالمرافق :

$$\Rightarrow U_n = \frac{2n^2-5-2n^2}{\sqrt{2n^2-5}+\sqrt{2}\,n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

14) $U_n = \frac{n!-2}{n!}$

$$U_n = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 1 - 0 = 1$$

$$U_n = \frac{9n^2 - 9n^2 - 1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

15) $U_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$

$+\infty \cdot 0$ عدم

$$U_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n} - 2\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{+\infty}{2\sqrt{2}} = +\infty$$

11) $U_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$