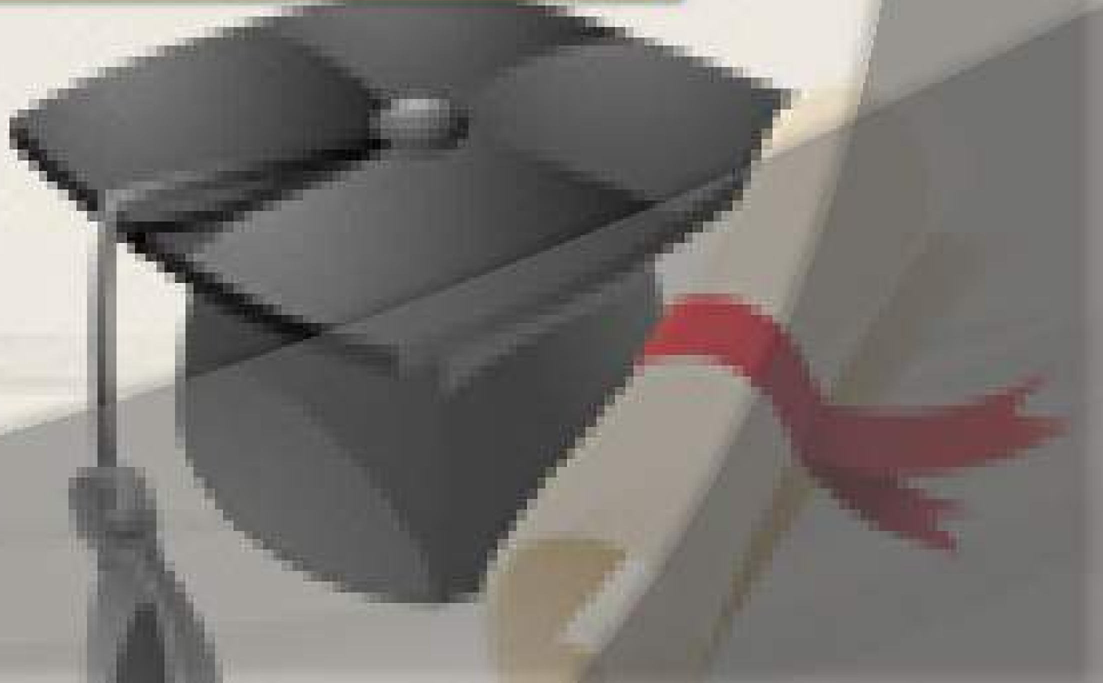
الرياضيات
للصف الأول الثانوي
الفصل الدراسى الأول



الفصل الرابع

العلاقات فى المثلث

الرئيسية

المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:
درستُ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن:
- أتعرّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:
العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث
circumcenter

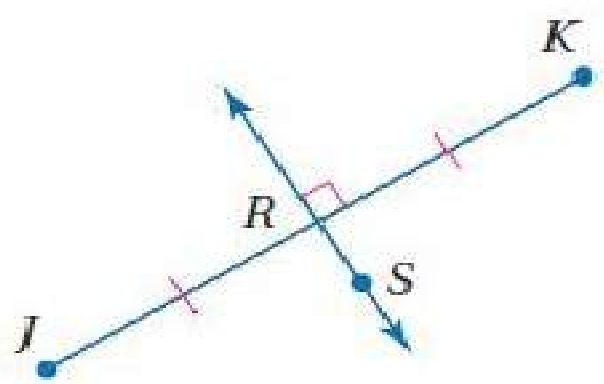
مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

www.obeikaneducation.com

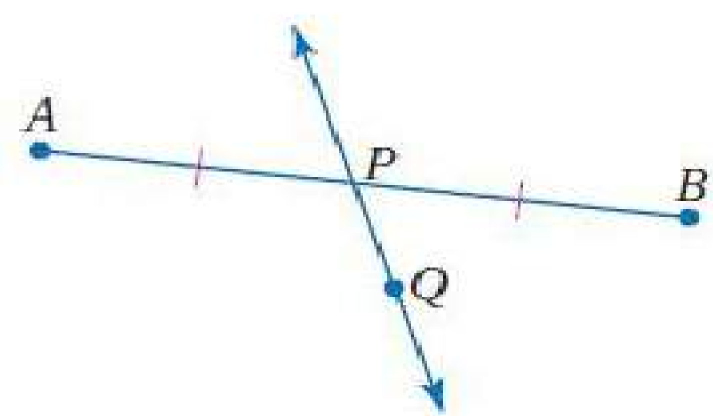
لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كل من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها. وإذا كان المنصّف عموديًا على القطعة سُمّي **عمودًا منصّفًا**.



$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـ $\overline{JK}$



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـ $\overline{AB}$

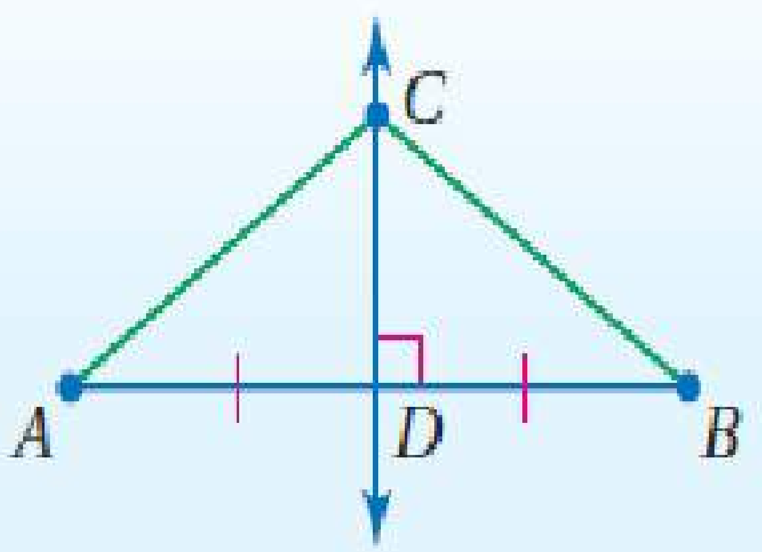
تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط في المستوى تقع كل منها على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة. وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

نظريتان

أضف إلى مطويتك

الأعمدة المنصّفة

4.1 نظريّة العمود المنصّف

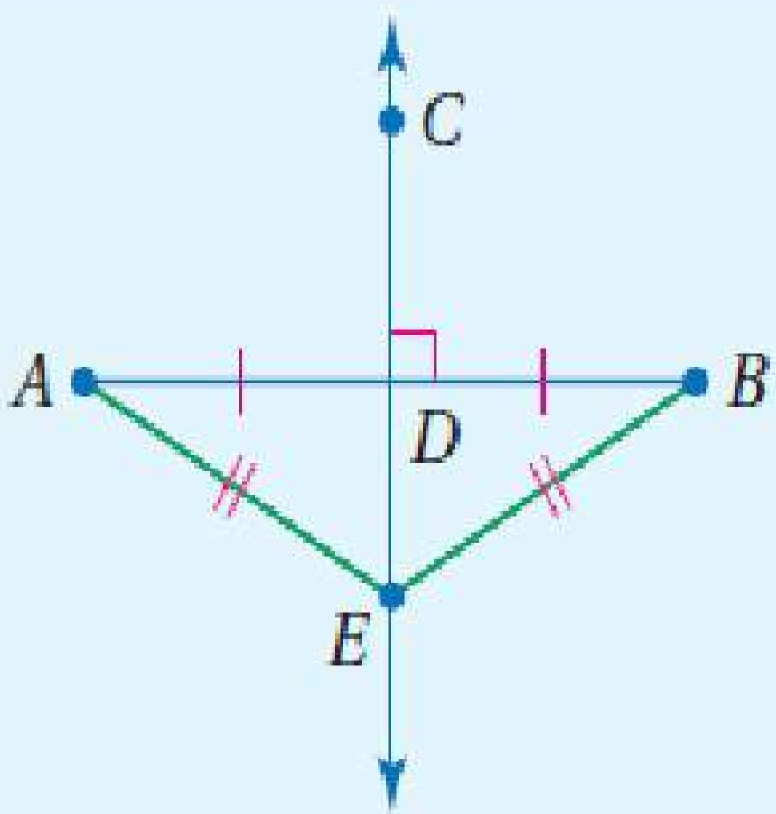


كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.

مثال: إذا كانت $\overline{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$ ،

فإن $AC = BC$.

4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف



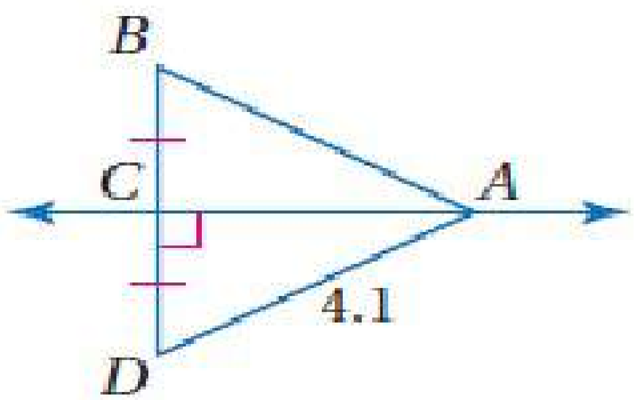
كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، فإنّ E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$ ، وهو العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$.

مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصَف

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

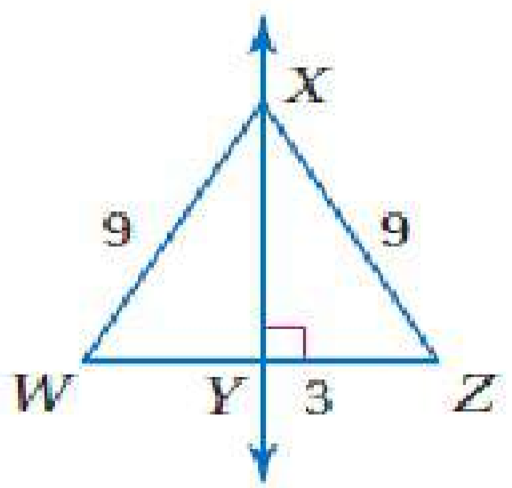
AB (a



من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لِـ $\overline{BD}$.

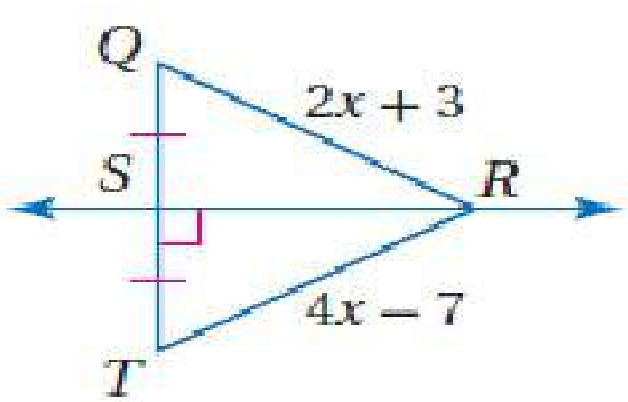
$AB = AD$	نظريّة العمود المنصَف
$AB = 4.1$	بالتعويض

WY (b



بما أنّ $\overline{WZ} \perp \overleftrightarrow{XY}$ ، $WX = ZX$ فإن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$ بحسب عكس نظرية العمود المنصّف. ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة ينتج أن $WY = YZ$. وبما أن $YZ = 3$، فإن $WY = 3$.

RT (c



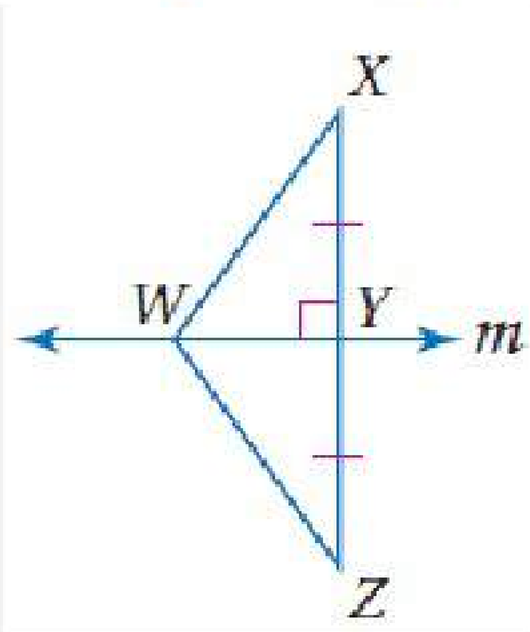
$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$	نظريّة العمود المنصَف
$4x - 7 = 2x + 3$	بالتعويض
$2x - 7 = 3$	بطرح $2x$ من الطرفين
$2x = 10$	بإضافة 7 إلى الطرفين
$x = 5$	بقسمة الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $WX = 25.3 , YZ = 22.4 , WZ = 25.3$ ، فأوجد طول XY.



22.4

1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول WX.

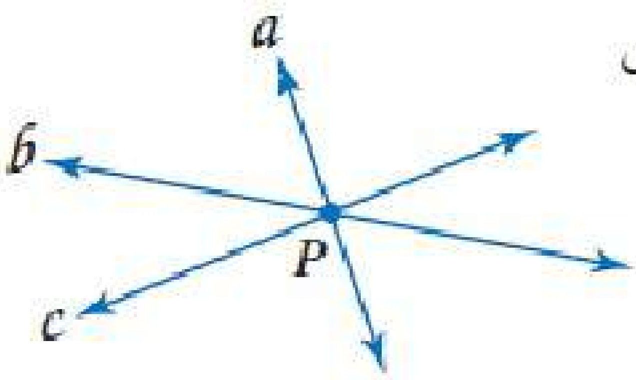
14.9

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15 , WZ = a + 12$

فأوجد طول $\overline{WX}$.

21

عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة فإنّ هذه المستقيمات تُسمى **مستقيمات متلاقية**. وتسمّى النقطة التي تلتقي فيها المستقيمات **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **بمركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث**.



تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

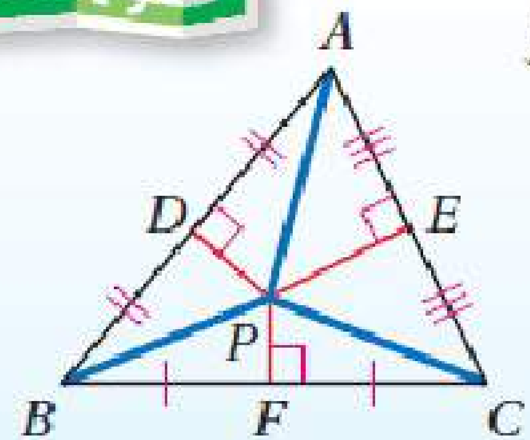
نظرية 4.3

أضف إلى مطويتك

نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعادٍ متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$.

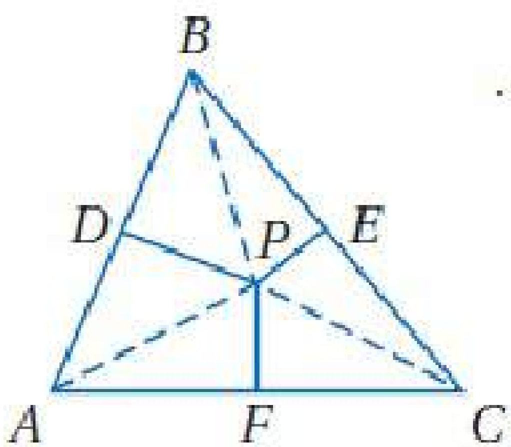


برهان

نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$



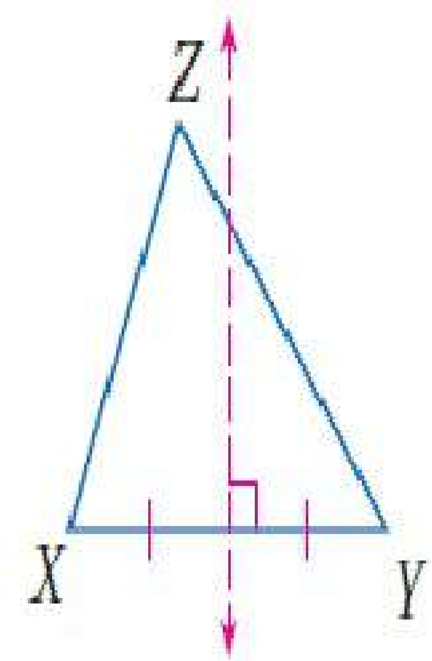
برهان حرّ:

بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لِـ $\overline{AC}$ فإنها متساوية البُعد عن A , C . وبحسب تعريف تساوي البعد يكون $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

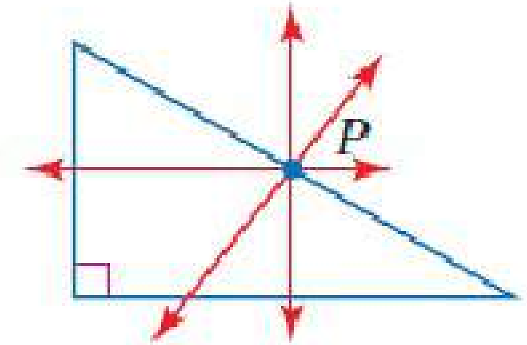
إرشادات للدراسة

العمود المنصّف

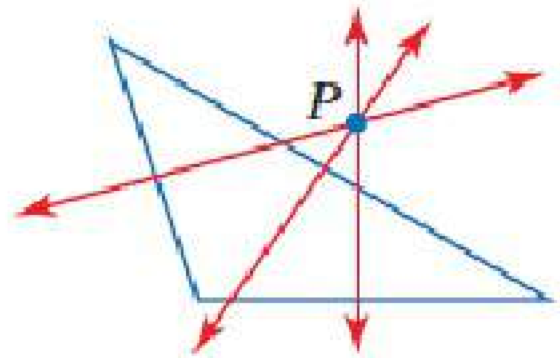
ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل . فمثلًا في ΔXYZ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمرّ بالرأس Z.



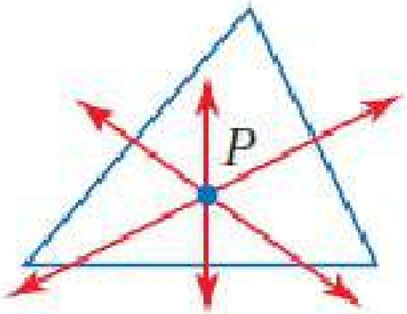
يمكن أن يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



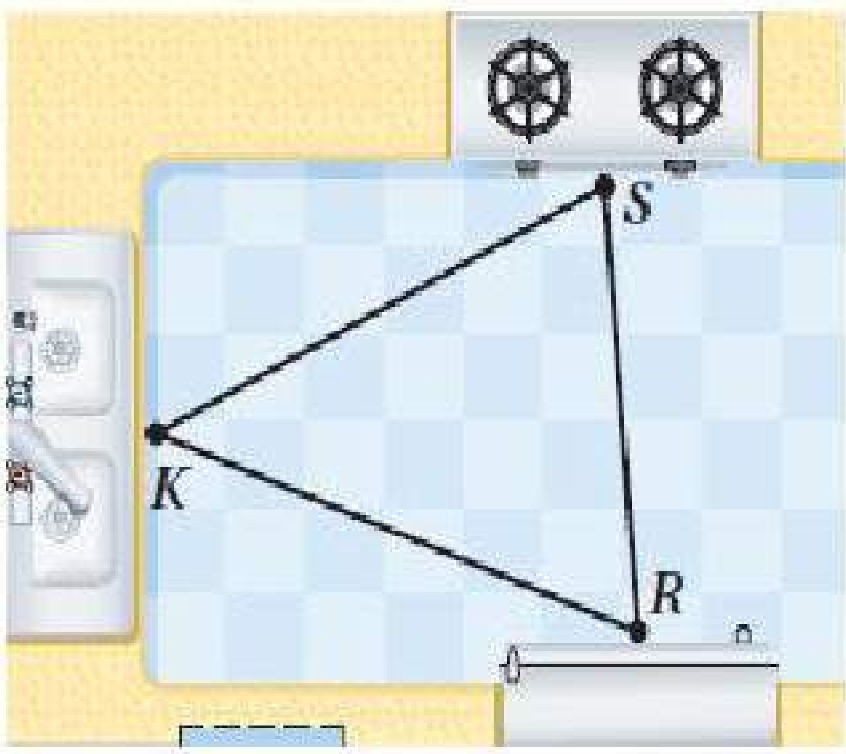
مثلث منفرج الزاوية



مثلث حاد الزوايا

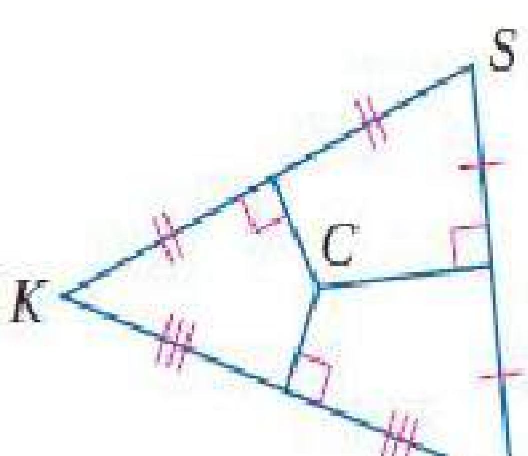
مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظريّة مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

تصميم داخلي: وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.



بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.

انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle SKR$. وهي النقطة المطلوبة.



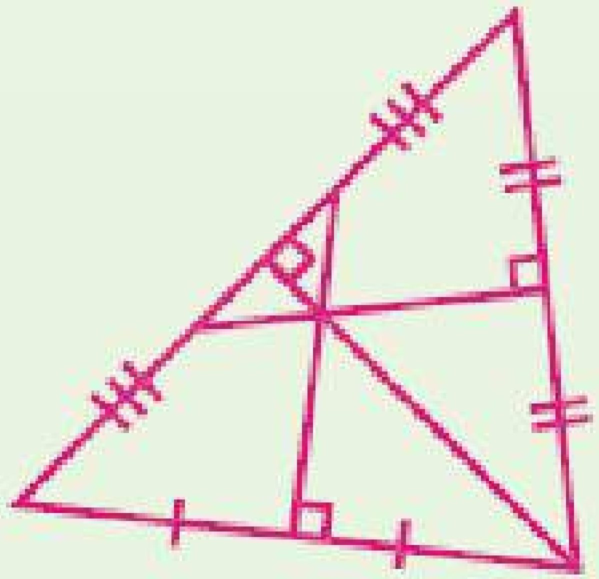
الربط مع الحياة

يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب أن لا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

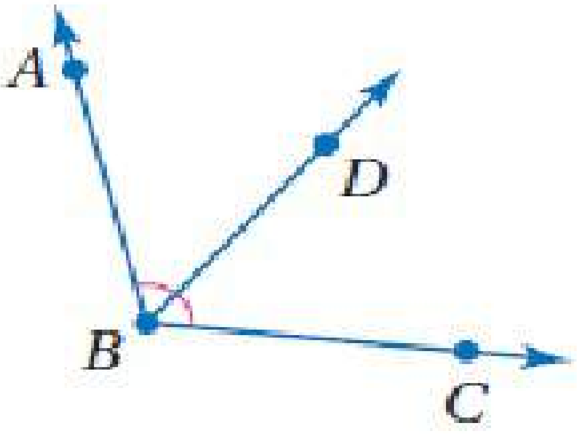
تحقق من فهمك

2) يريد عليّ أن يضع مرشّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل .
فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

2) يتعيَّن على عليٍّ وضعُ المرشِّ عند مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي يمثل شكل الحديقة.



منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. ويمكن أن يكون منصّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم. كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين.



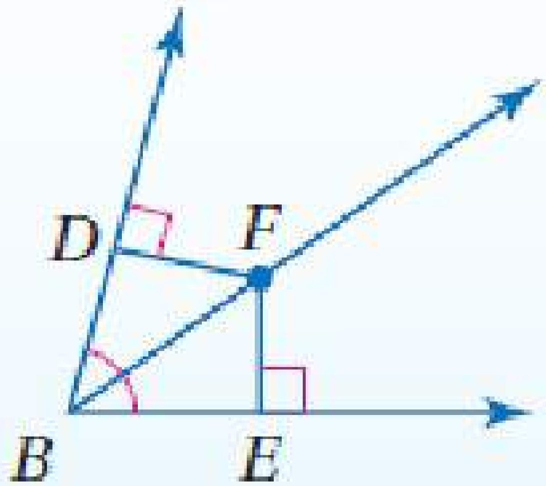
$\overrightarrow{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$.

نظريتان

منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

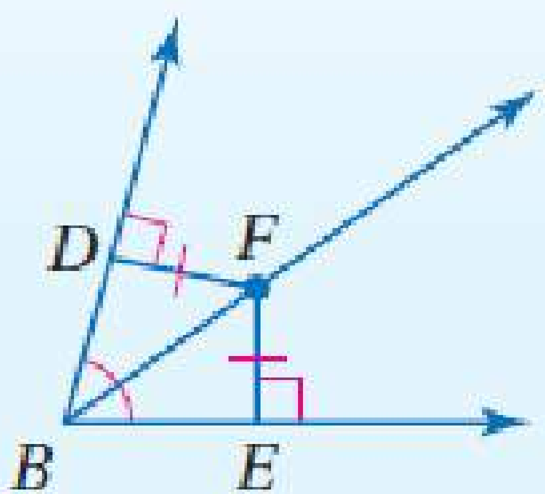
4.4 نظرية منصّف الزاوية



كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لِـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$
فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية

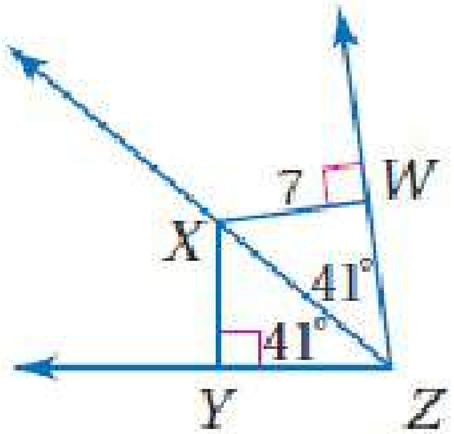


كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$،
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$.

مثال 3 استعمال نظريتي منصّفات الزاوايا

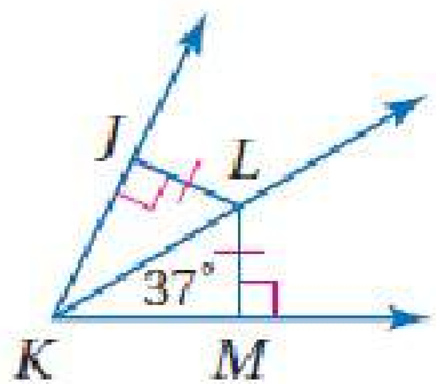
أوجد كل قياس مما يأتي :



a) XY

$XY = XW$ نظريّة منصّف الزاوية

$XY = 7$ بالتعويض



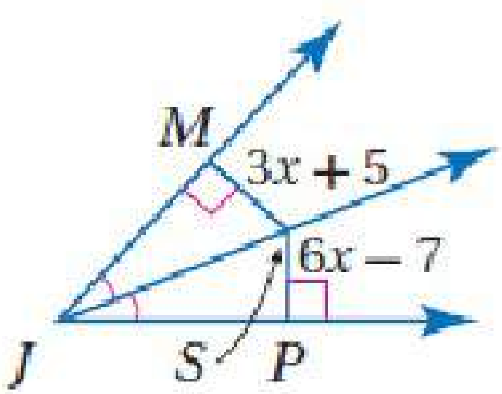
b) $m\angle JKL$

بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}, \overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}, \overline{LJ} = \overline{LM}$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف منصّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ بالتعويض



c) SP

$SP = SM$ نظريّة منصّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ بالتعويض

$3x - 7 = 5$ نطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ بإضافة 7 إلى الطرفين

$x = 4$ بقسمة الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

تحقق من فهمك

3A) إذا كان: $DC = 5$, $BC = 5$, $m\angle BAC = 38°$ ، فأوجد $m\angle DAC$

38°

3B) إذا كان: $DC = 10$, $m\angle DAC = 40°$, $m\angle BAC = 40°$ ، فأوجد BC

10

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $DC = 9x - 7$, $BC = 4x + 8$ فأوجد BC

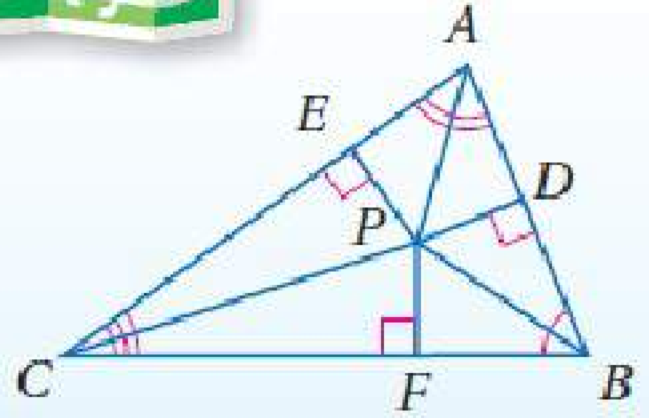
20

نظريّة 4.6

أضف إلى مطويتك

نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

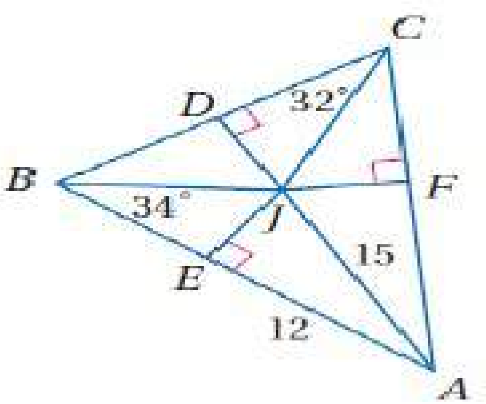
التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.



مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC،
فإنّ $PD = PE = PF$.

مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.



a) JF

بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظريّة فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144,\ 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	بطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ لذا تأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$.

b) $\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$؛ إذن $m\angle CBE = 2(34°) = 68°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$؛ إذن $m\angle DCF = 2(32°) = 64°$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$68° + 64° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 68°;\ m\angle DCF = 64°$
$132° + m\angle FAE = 180°$	بالتبسيط.
$m\angle FAE = 48°$	بطرح 132 من الطرفين.

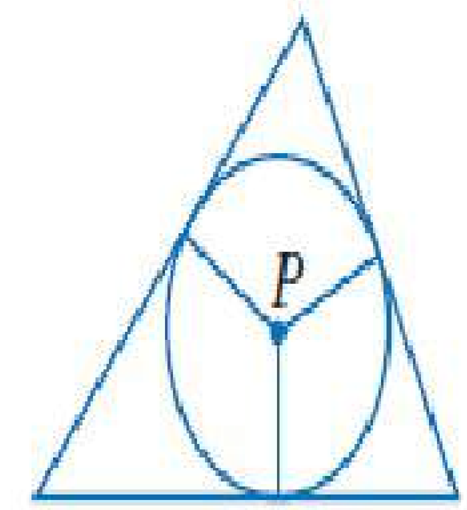
وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48°) = 24°$.

X

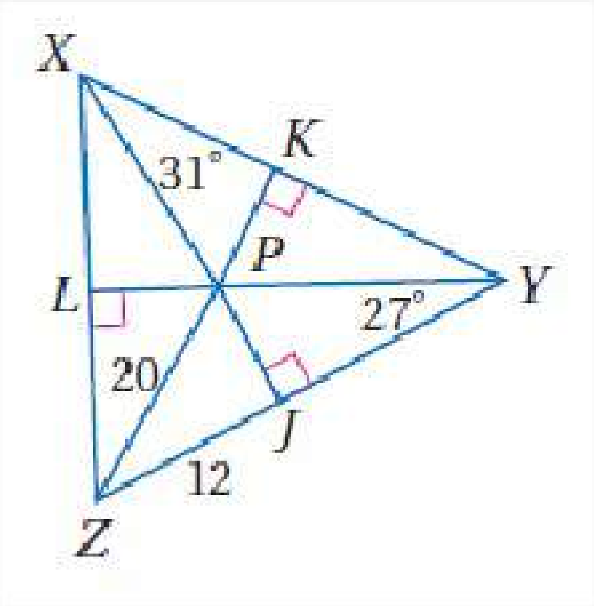
قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة، ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع دائمًا داخل المثلث.



تحقق من فهمك



إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

(4A PK

18

(4B $\angle LZP$

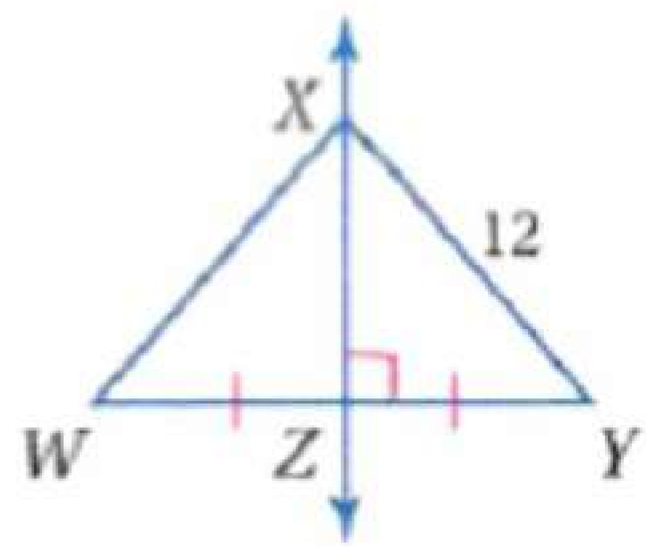
37°

√ تأكد

المثال1

أوجد قياس كل مما يأتي :

XW (1



الحل

بما أن ZX عمود منصف لـ WY

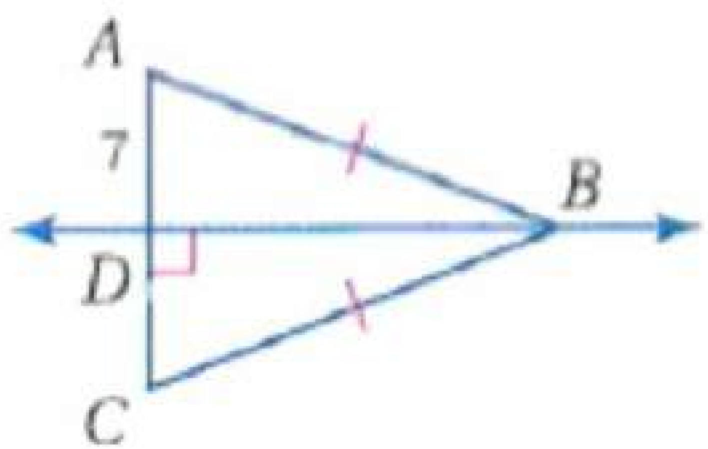
إذن $XY = WX = 12$ (حسب نظرية العمود المنصف)

√ تأكد

المثال ١

أوجد قياس كل مما يأتي :

2) AC



الحل

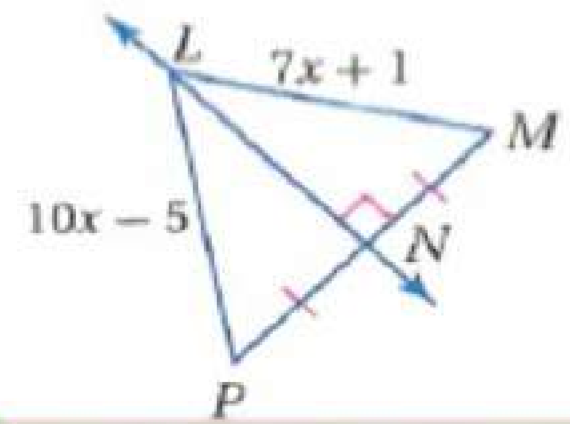
بما أن $AB = BC$ و $BD \perp AC$ إذن BD عمود منصف لـ AC

إذن $DC = AD = 7$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف)

$AC = AD + DC = 7 + 7 = 14$

المثال 1 أوجد قياس كل مما يأتي :

3) LP



الحل

بما أن LN عمود منصف لـ PM إذن LP = LM (نظرية العمود المنصف)

$10X - 5 = 7X + 1$

$10X - 7X = 1 + 5$

$3X = 6$

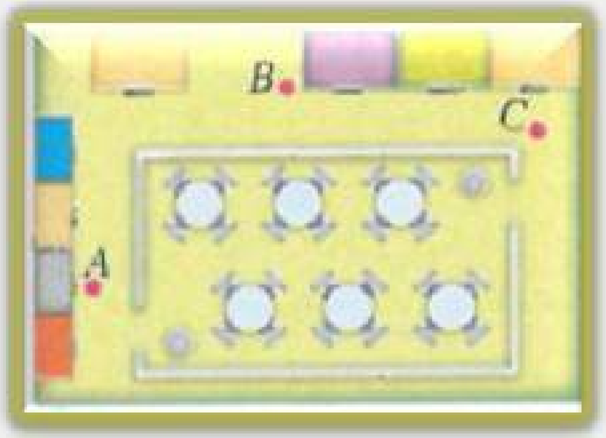
$X = 2$

$LP = 10 \times 2 - 5$

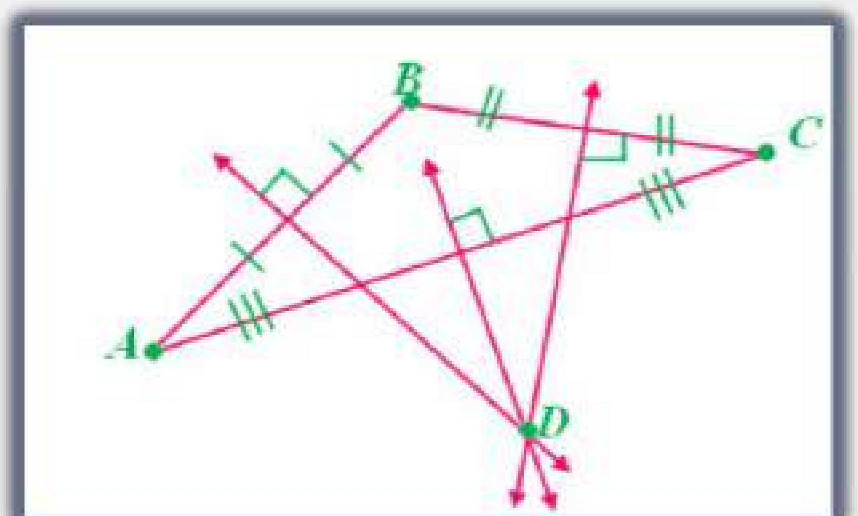
$LP = 15$

المثال ٢

4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فكان يزوّدهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة.

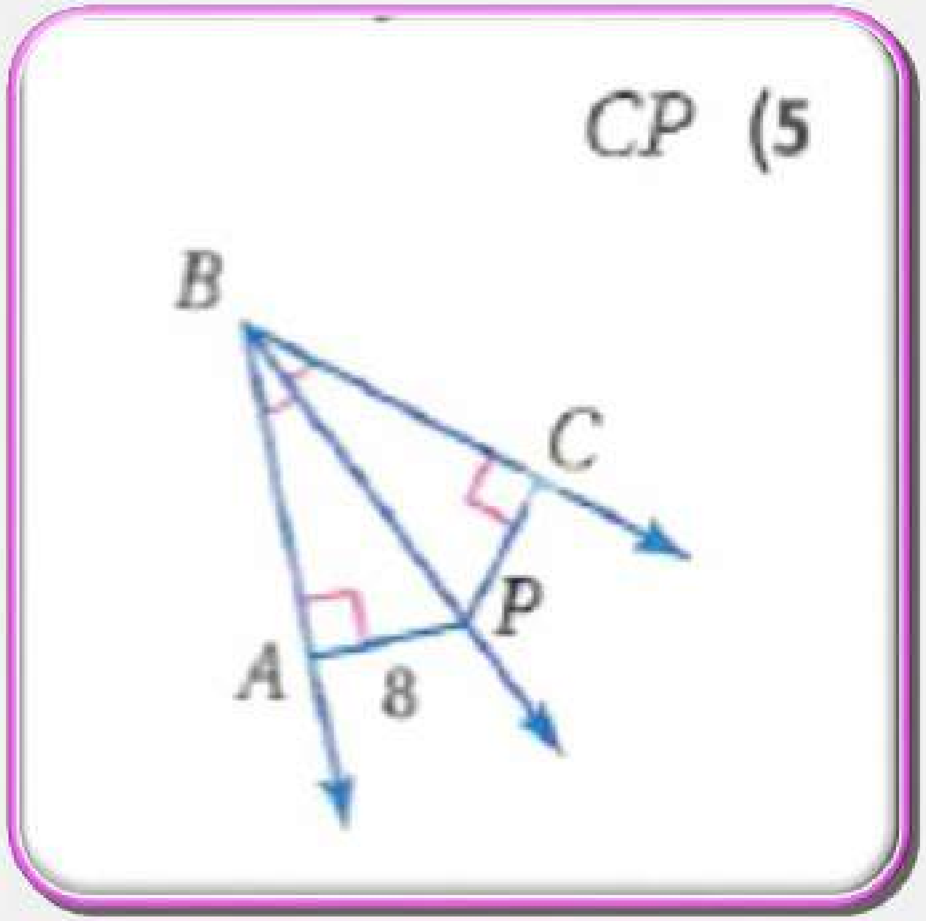


الحل



المثال ٣

أوجد كل قياس مما يأتي



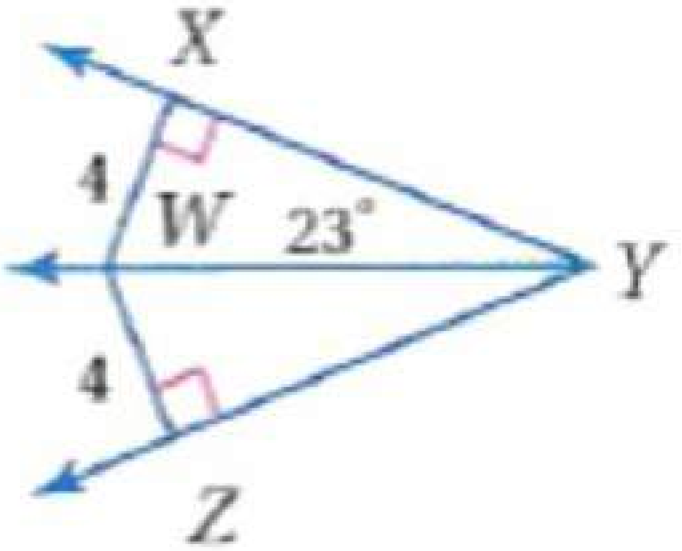
بما أن $\overrightarrow{PB}$ منصفاً لـ $\angle CBA$ و $PA \perp BA$, $PC \perp BC$ (نظرية منصف الزاوية)

فإن $PA = PC = 8$

المثال ٣

أوجد كل قياس مما يأتي

6) $\angle WYZ$



الحل

بما أن $WX \perp XY$ و $WZ \perp ZY$ و $WZ = WX$

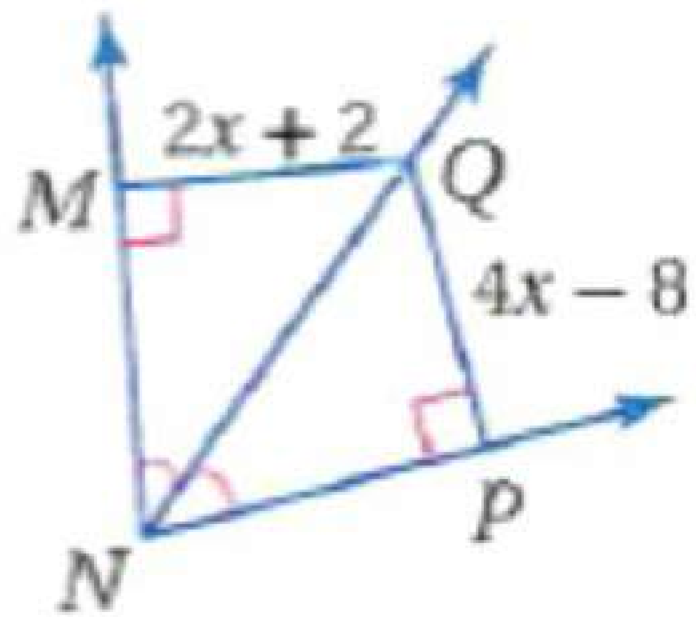
فإن $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ (حسب عكس نظرية منصف الزاوية)

إذن $\angle WYZ = 23^\circ$

المثال٣

أوجد كل قياس مما يأتي

7) QM



الحل

بما أن $\overrightarrow{NQ}$ منصفاً لـ $\angle MNP$ و $QP \perp PN$ ، $QM \perp MN$ (حسب نظرية منصف الزاوية)

فإن $QP = QM$

$$4x - 8 = 2x + 2$$

$$4x - 2x = 2 + 8$$

$$2x = 10$$

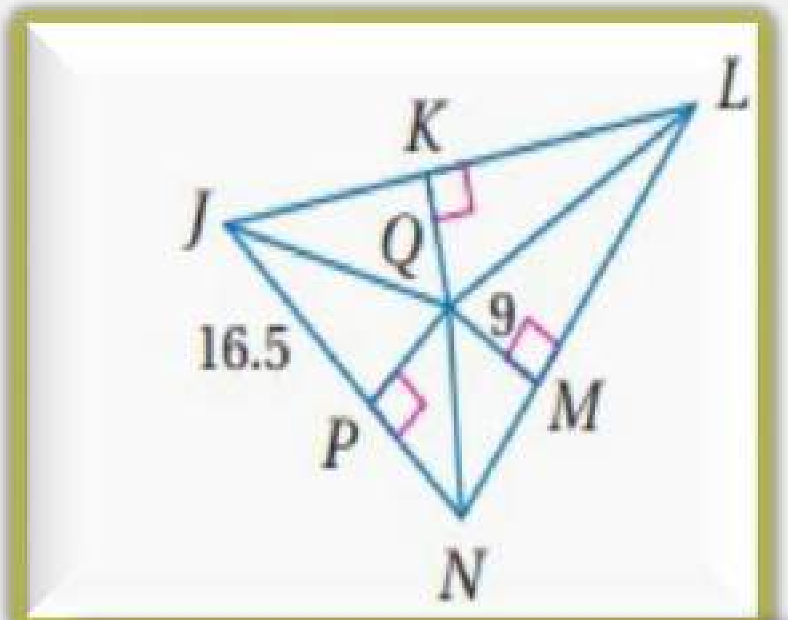
$$x = 5$$

$$QM = 2x + 2 = 2 \times 5 + 2$$

$$QM = 12$$

المثال٤

8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



الحل

بما أن Q مركز الدائرة الداخلية لـ ΔJLN

إذن $QK = QM = QP = 9$ وبالتالي يمكن حساب JQ بنظرية فيثاغورث.

$$(QJ)^2 = (QP)^2 + (PJ)^2$$

$$(QJ)^2 = (9)^2 \quad (16.5)^2$$

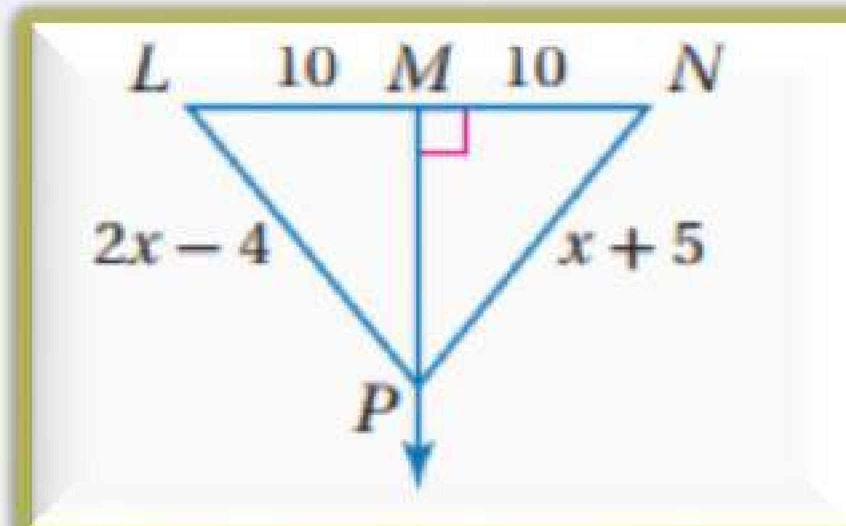
$$QJ \approx 18.8$$

√ تدرب وحل المسائل

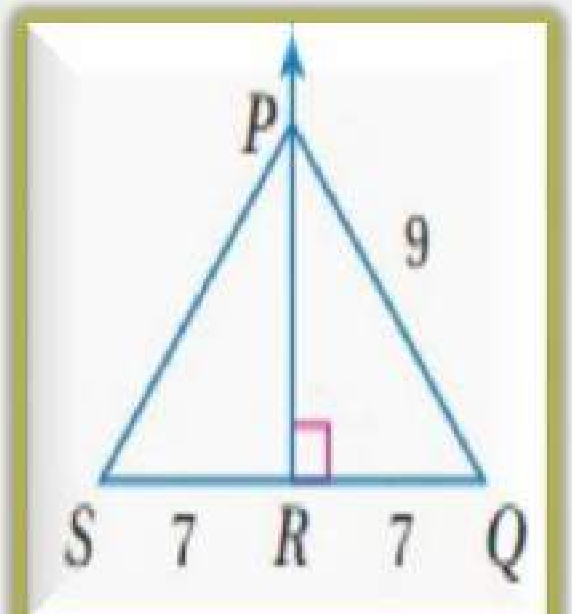
المثال 1

أوجد كل قياس مما يأتي

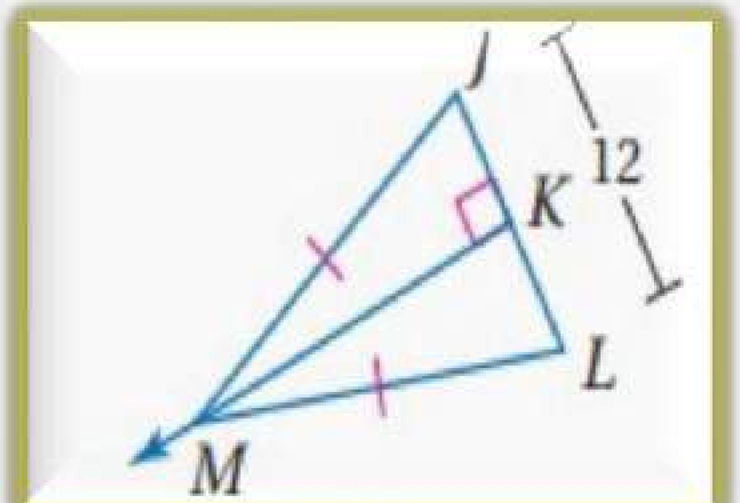
9) NP	10) PS	11) KL



14



9

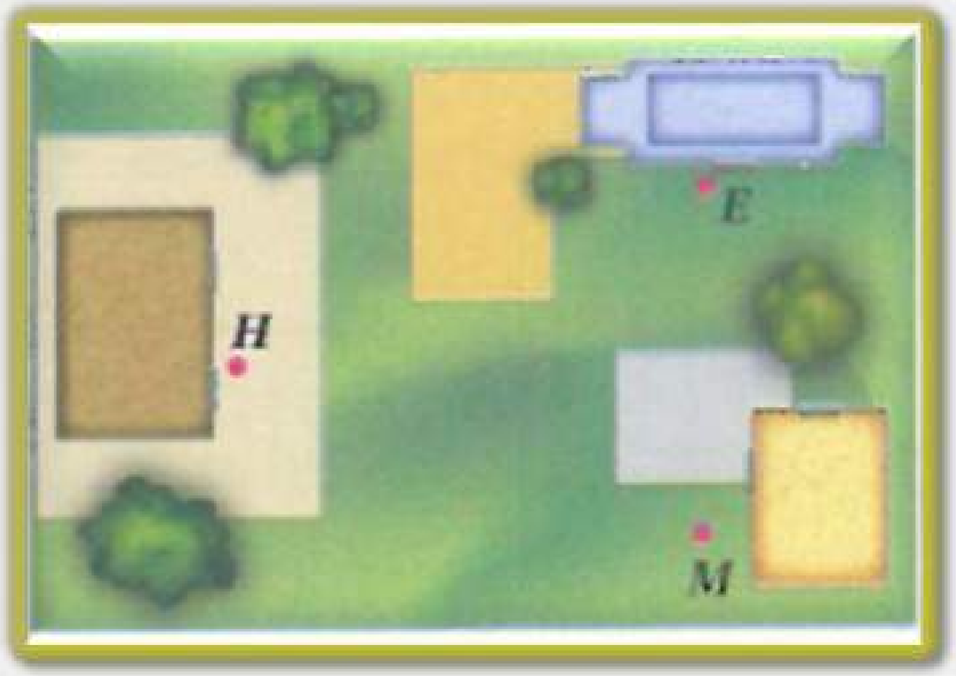


6

الحل

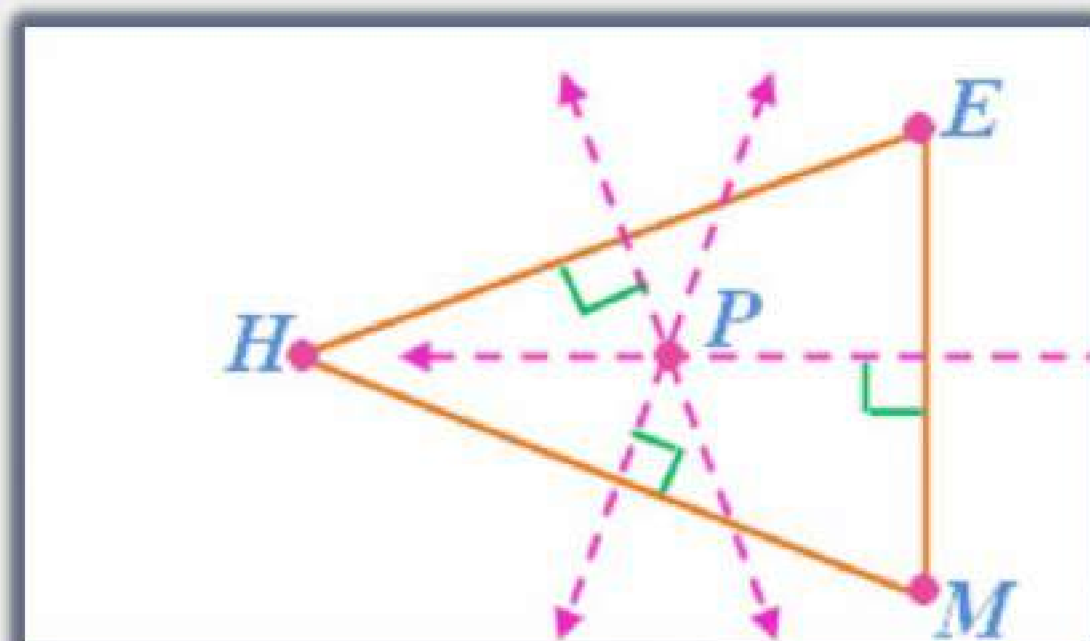
المثال ٢

12) **مدرسة:** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



الحل

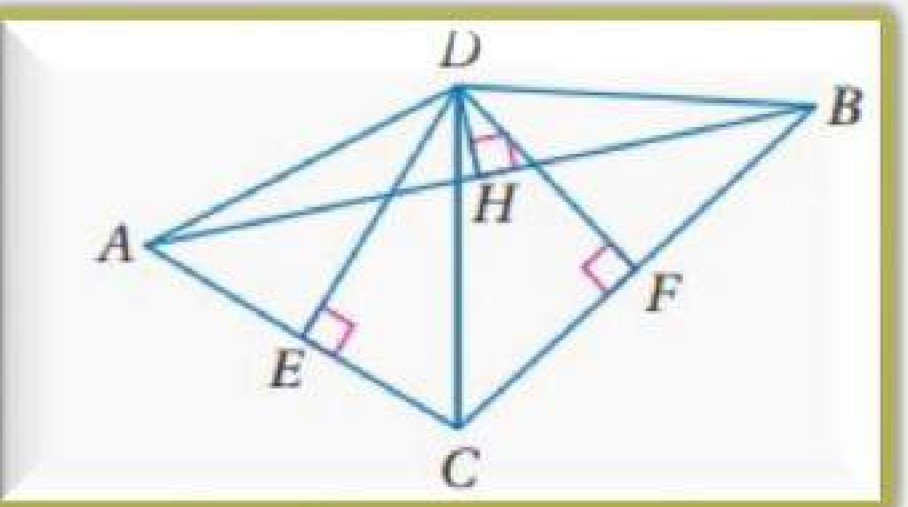
وضع نقطة تعبر عن الحافلة ولتكن P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔHEM (حسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث)إذن سيكون بعد النقطة عن كل ضلع من أضلاع المثلث متساوي



المثال ٦

النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

13) $\overline{AD}$ 14) $\overline{AH}$



الحل

13) بما أن D هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ إذن حسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث:

$\overline{BD}, \overline{DC} \cong \overline{AD}$

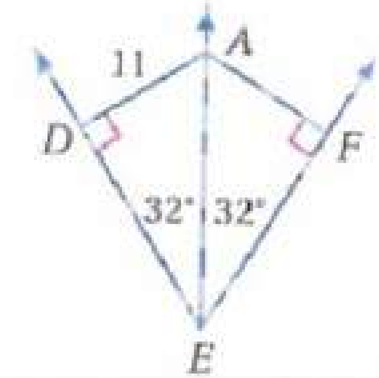
14) $\overline{DH}$ عمودي وينصف $\overline{AB}$

$\overline{HB} \cong \overline{AH}$

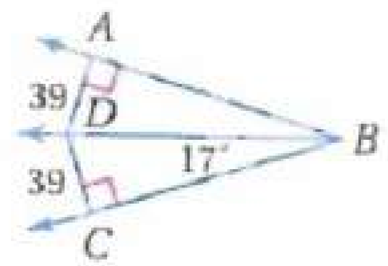
المثال ٣

أوجد قياس كل مما يأتي

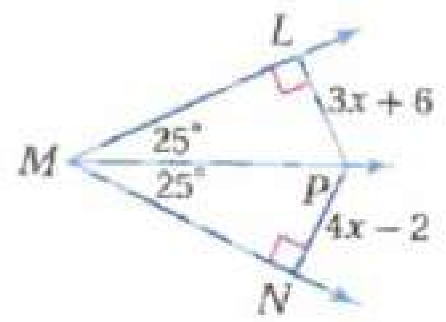
AF (15



$\angle DBA$ (16



PN (17



الحل

بما أن $\overline{AF} \perp \overline{EF}$ و $\angle AEF = \angle AED$ إذن $AD = AF$

إذن $AF = 11$.

بما أن $\overline{DC} \perp \overline{CB}$، $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ و $DC = AD$ إذن $\angle DBC = \angle ABD$

حسب عكس نظرية منصف الزاوية .

إذن $\angle ABD = 17^\circ$

بما أن $\overline{PN} \perp \overline{MN}$، $\overline{PL} \perp \overline{LM}$ و $\angle PMN = \angle LMP$ إذن $PN = LP$

حسب نظرية منصف الزاوية .

$$4x - 2 = 3x + 6$$

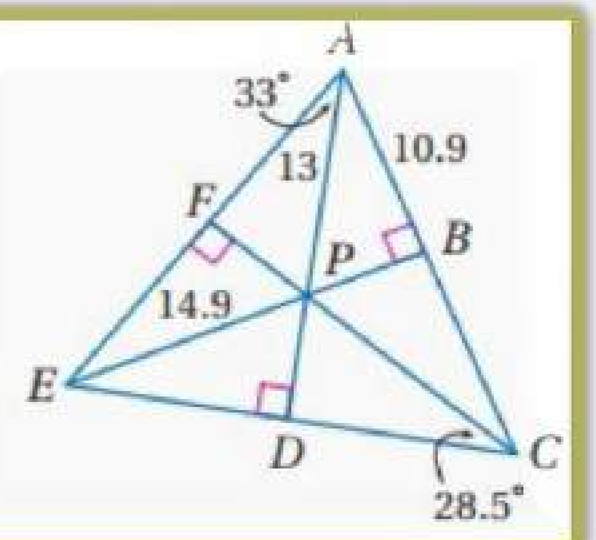
$$4x - 3x = 6 + 2$$

$$x = 8$$

$$PN = 4 \times 8 - 2$$

$$PN = 30$$

المثال٤



إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :

18) PB

19) DE

الحل

18)

بما أن النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، إذن $PB = PD = PF$

يمكن إيجاد PB حسب نظرية فيثاغورث:

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (PB)^2$$

$$(13)^2 = (10.9)^2 + (PB)^2$$

$$PB \approx 7.1$$

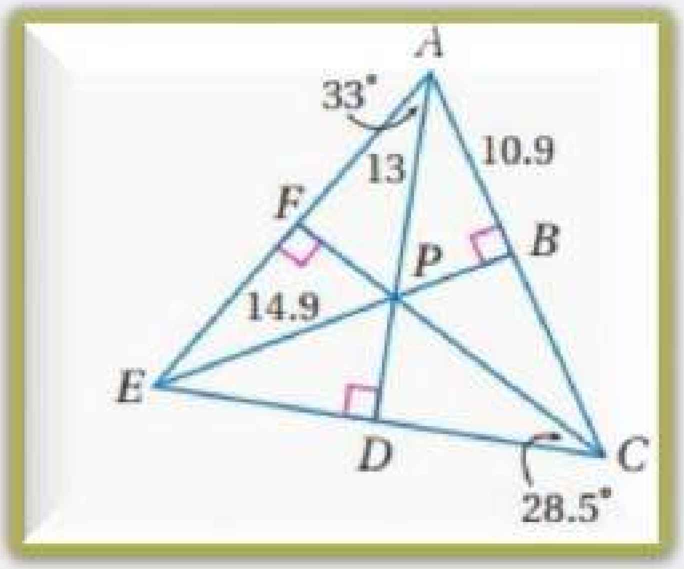
19)

بما أن $PB = PD$ إذن باستعمال فيثاغورث:

$$(EP)^2 = (PD)^2 + (ED)^2$$

$$(14.9)^2 = (7.1)^2 + (ED)^2$$

$$ED \approx 13.1$$



المثال٤

20) $\angle DAC$

21) $\angle DEP$

الحل

20)

بما أن $\overline{AD} \perp \overline{EC}$ وينصف $\angle CAE$ إذن $\angle DAC = 33^\circ$

21)

بما أن $\overline{FC} \perp \overline{AE}$ وينصف $\angle ACE$ إذن $\angle ACE = 28.5 \times 2 = 57^\circ$

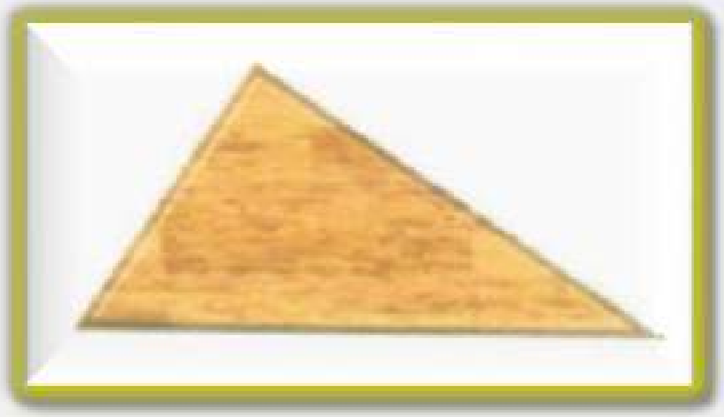
$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$26 + 57 + \angle AEC = 180^\circ$

$\angle AEC = 97^\circ$

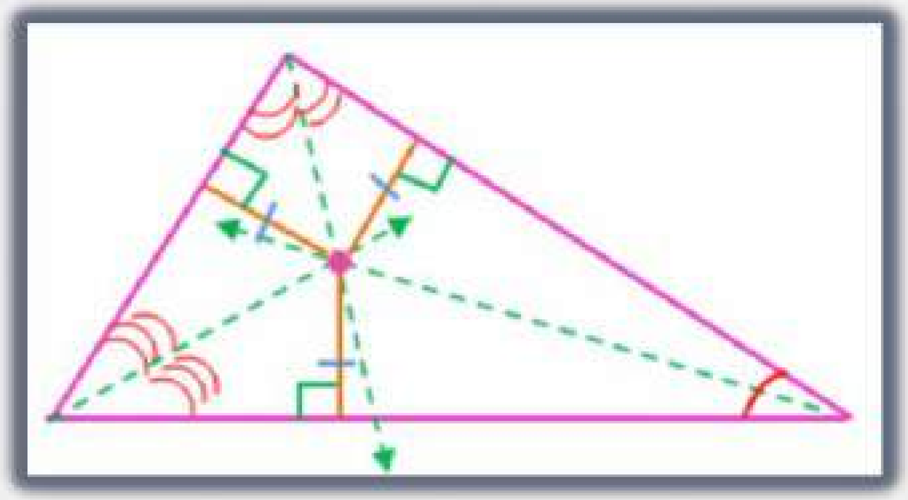
بما أن $\overline{EP} \perp \overline{AC}$ وينصف $\angle AEC$ إذن $\angle DEB \frac{97}{2} = 48.5^\circ$

22) تصميم داخلي: توضع زهرية فضيّة عند مركز سطح الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



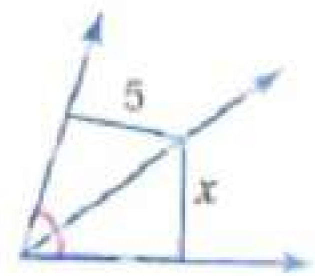
الحل

أجد نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث وتبعد أبعادا متساوية عن أضلاع المثلث.

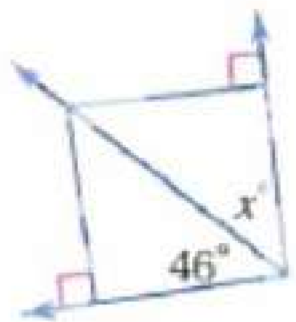


حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضّح إجابتك.

(23

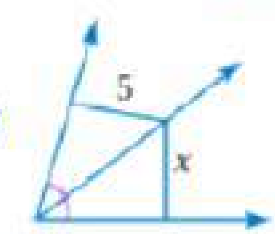


(24



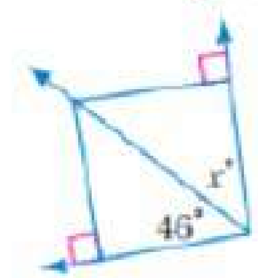
الحل

(23



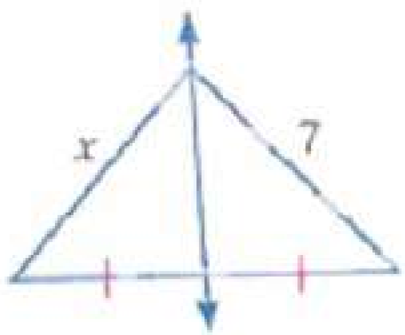
لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان عموديتين على ضلعي الزاوية.

(24

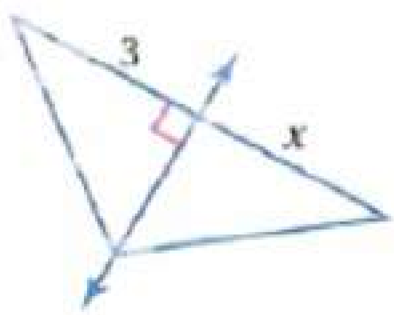


لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتان أم لا.

(25



(26

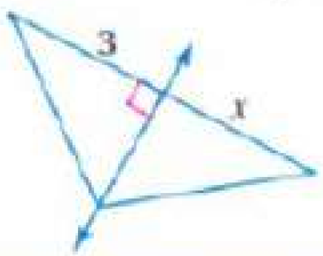


الحل

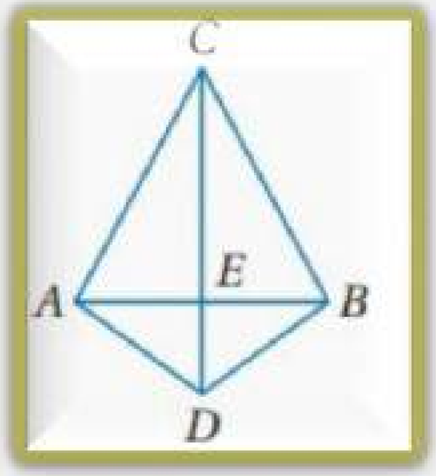
(25

لا، يجب أن تعرف إن كان منصف القاعدة عموديا عليها.

(26



لا، يجب أن تعرف إن كان الوتران متساويين أم لا.



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: النقطتان C, D تقعان على العمود المنصّف لِـ $\overline{AB}$

الحل

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{CA} \cong \overline{CB} . \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)

2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة).

3) $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (SSS)

4) $\angle ACD \cong \angle BCD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

6) $\Delta CEA \cong \Delta CEB$ (SAS)

7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (تعريف نقطة المنتصف)

9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

10) $\angle CEB . \angle CEA$ متجاورتان على مستقيم

11) $\angle CEB$ ، $\angle CEA$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيم)

12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180^\circ$ (تعريف التكامل)

13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

14) $2m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

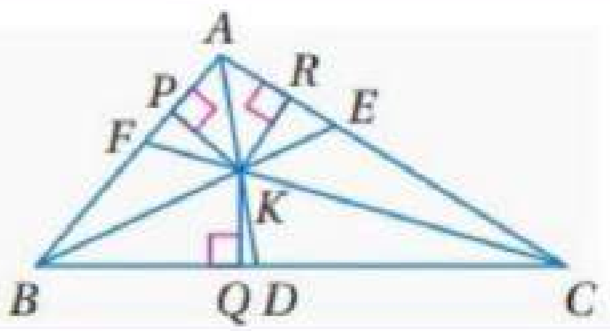
15) $m\angle CEA = 90^\circ$(خاصية القسمة)

16) $\angle CEB$ ، $\angle CEA$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

18) $\overline{CD}$ عمود منصف $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصف)

19) D ، C واقعتان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ (تعريف النقطة الواقعة على مستقيم).



28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$،
$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC}$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$

الحل

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AD}$، $\overline{BE}$، $\overline{CF}$ منصفات لزاويا $\triangle ABC$،
$\overline{KQ} \perp \overline{BC}$، $\overline{KP} \perp \overline{AB}$، $\overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطيات)

2) $KP = KR$، $KQ = KR$، $KP = KQ$ (كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية)

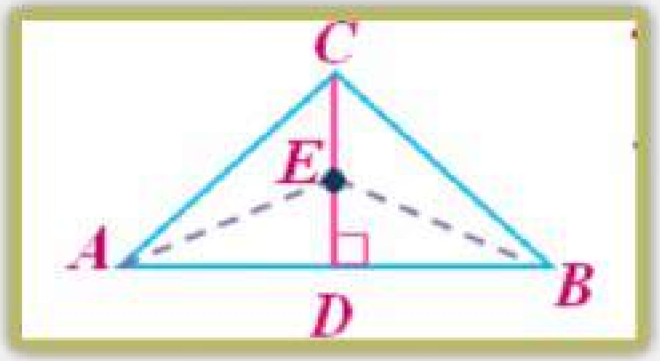
3) $KP = KQ = KR$ (خاصية التعدي)

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

29) النظرية 4.1

30) النظرية 4.5

الحل



(29

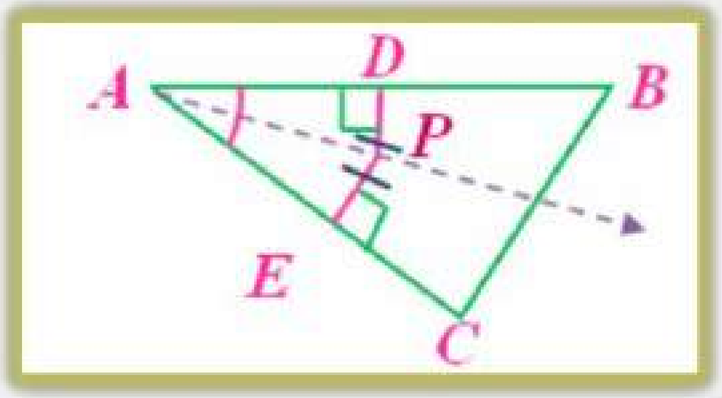
المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$.

E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$ ومن تعريف المنصف فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$ لذلك $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف.

$\angle CDA , \angle CDB$ قائمتان حسب تعريف العمود. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة فإن $\angle CDA \cong \angle CDB$. وبما أن E نقطة على $\overline{CD}$ فإن $\angle EDA , \angle EDB$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{ED} \cong \overline{ED}$ إذن $\Delta EDA \cong \Delta EDB$ حسب SAS.. وتكون $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$.



(30

المعطيات:

P نقطة داخل $\angle BAC$.

بعد النقطة P عن $\overline{AB}$ يساوي بعدها عن $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع في داخل الزاوية $\angle BAC$، و $PD = PE$. ومن تعريف التطابق $\overline{PD} \cong \overline{EP}$ ، $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ لأن المسافة من نقطة إلى مستقيم تقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة.

$\angle ADP$، $\angle AEP$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين

والمثلثان ADP، AEP قائما الزاوية حسب تعريف المثلث قائم الزاوية. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{AP} \cong \overline{AP}$

. إذن، ΔADP، ΔAEP متطابقان حسب LL.

$\angle EAP \cong \angle DAP$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة و $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيًا نقطتَي طرفَيها هما $B(4, 3)$, $A(-3, 1)$. ووضِّح إجابتك.

الحل

$$A(-3.1).B(4.3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{4+3} = \frac{2}{7}$$

إذن ميل القطعة المستقيمة $= \frac{2}{7}$ لذلك فميل العمود المنصف $= \frac{-7}{2}$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-3+4}{2}.\frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}.2\right)$

$$y = mx + b$$

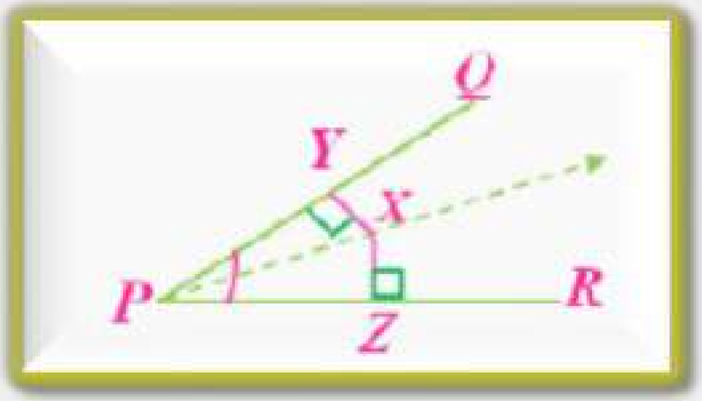
$$2 = \frac{-7}{2} \times \frac{1}{2} + b$$

$$b = 2 - \frac{-7}{4} = \frac{15}{4}$$

إذن معادلة المستقيم هي: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$

32) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4.

الحل



المعطيات: PX تنصف $\angle QPR$.

$\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) PX تنصف $\angle QPR$ ، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)

3) $\angle PYX$ ، $\angle PZX$ قائمتان (تعريف التعامد)

4) $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزاويا القائمة متطابقة)

5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)

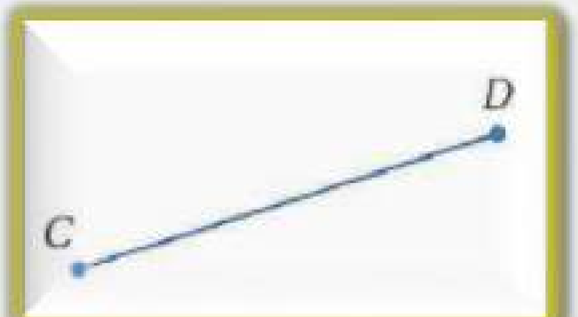
6) $\Delta PYX \cong \Delta PZX$ (AAS)

7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

33) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيَّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.

الحل

معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $y = 3$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = 5$.. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة (5.3) لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة (5.3)



34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ ، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C, D

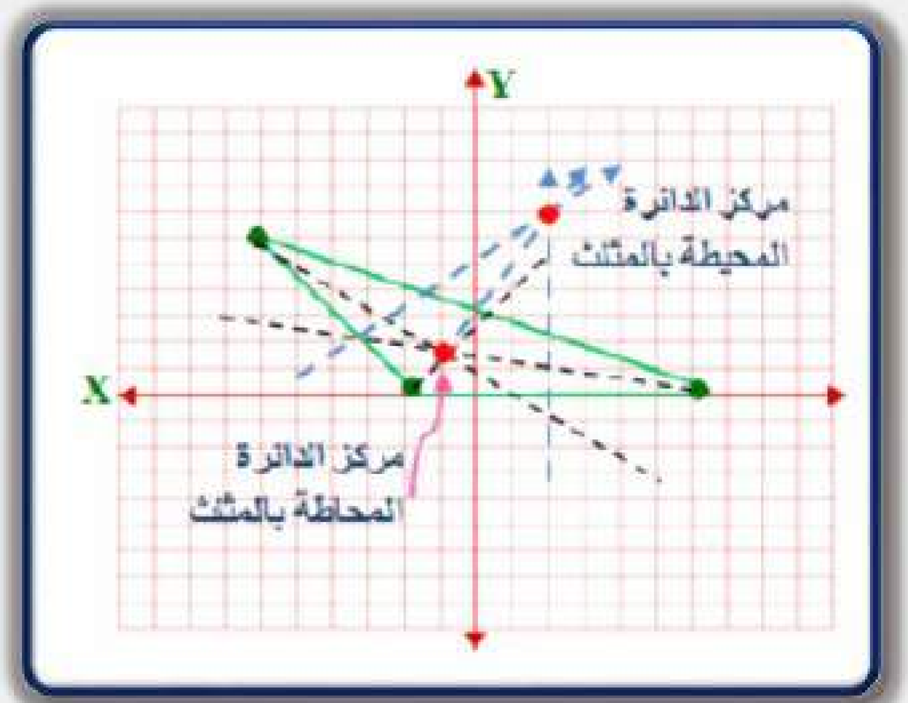
الحل

مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصف $\overline{CD}$.

√ مهارات التفكير العليا

(35 **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتَي التلاقي.

الحل

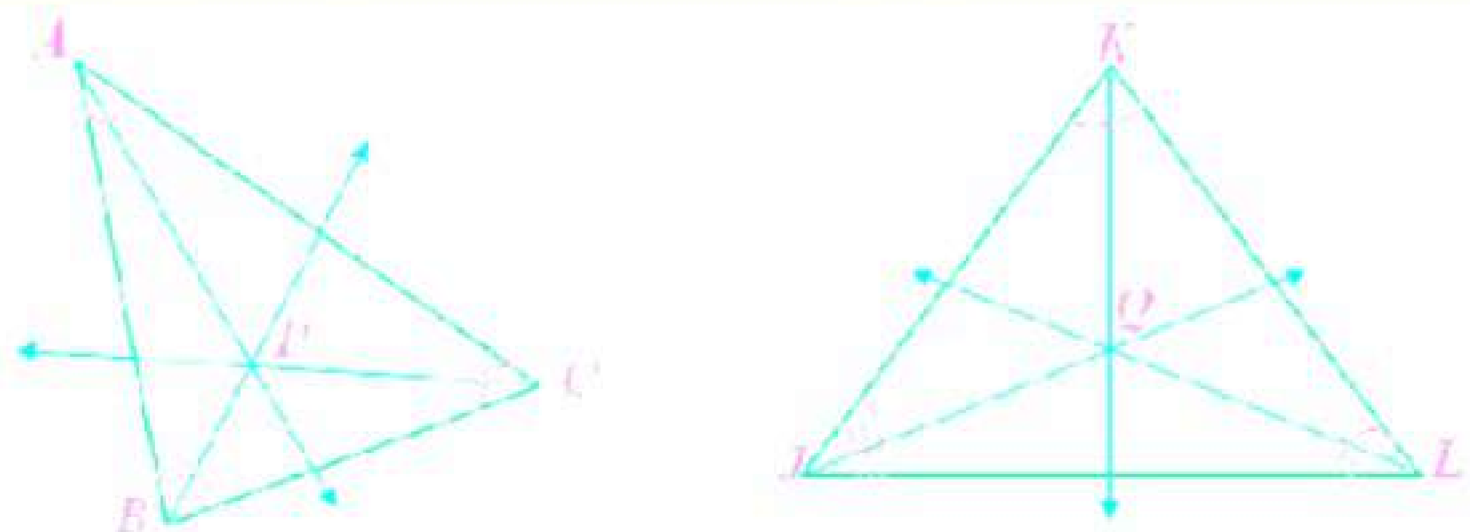


تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.

36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

الحل

36) صحيحة أحيانا إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن هذه العبارة تكون صحيحة ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإن العبارة خاطئة.

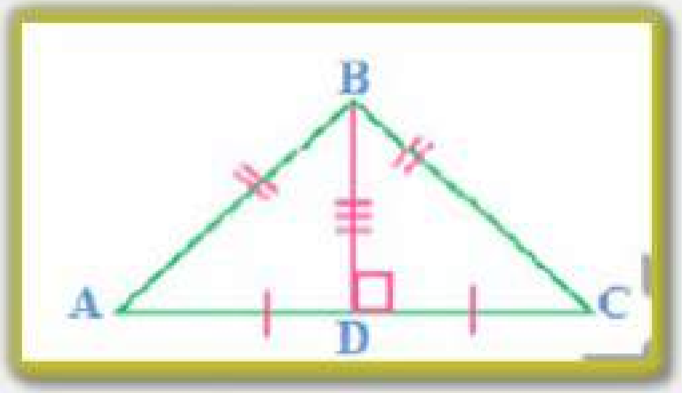


$JQ = KQ = LQ$ $\quad$ $AP \neq BP \neq CP$

37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصّف للقاعدة منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

الحل

37) صحيحة دائما.



المعطيات: ΔABC متطابق الضلعين فيه

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$..

المطلوب: $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔABC متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (معطى)

2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (تعريف المثلث متطابق الضلعين)

3) $\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$

4) D نقطة منتصف AC. (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

6) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS)

8) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

9) BD منصف لـ $\angle ABC$ (تعريف منصف الزاوية)

38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي.

الحل

(38

ينصف كل منهما شيئا ما ولكن الأعمدة المنصفة تنصف القطع المستقيمة في حين تنصف منصفات الزوايا. وتتقاطع كل منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصفة هي مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث والتي تقع دائما داخل المثلث. أما مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.

فيما سبق:

درستُ الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:

- أتعرّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

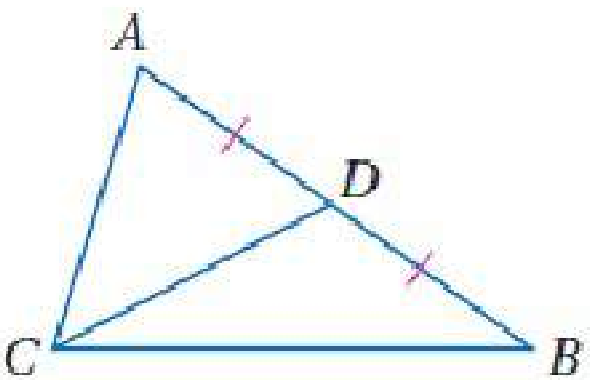
المفردات:

القطعة المتوسطة
median
مركز المثلث
centroid
الارتفاع
altitude
ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يتزن على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو يحتاج إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها. ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.



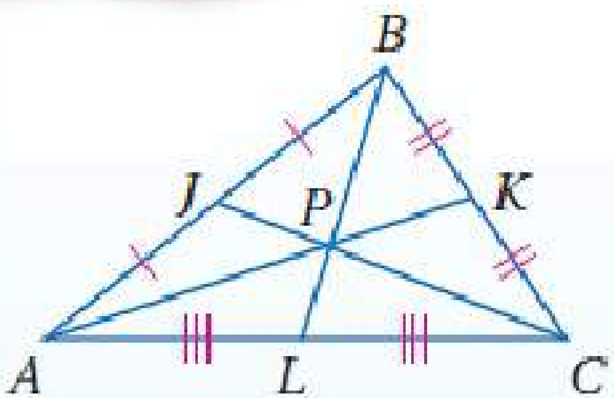
القطع المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع دائمًا بداخله.

نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

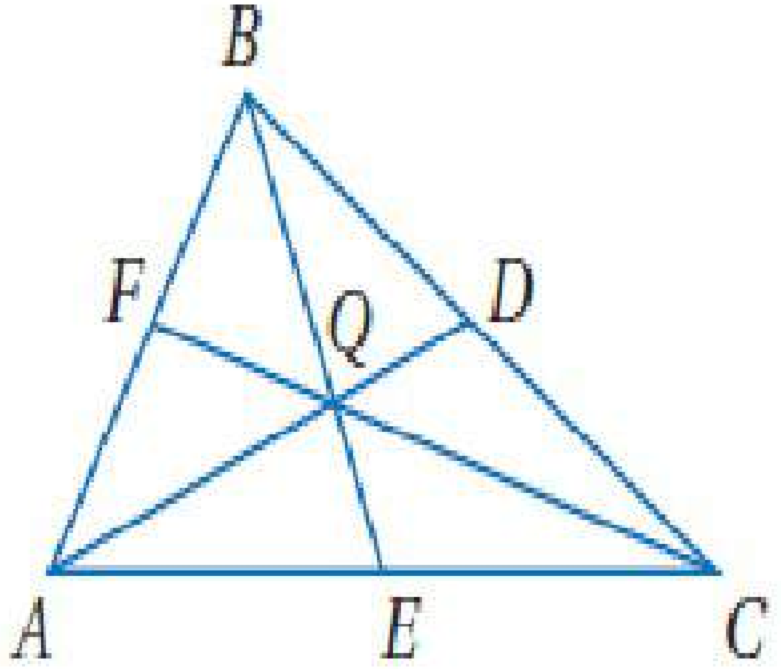


مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$

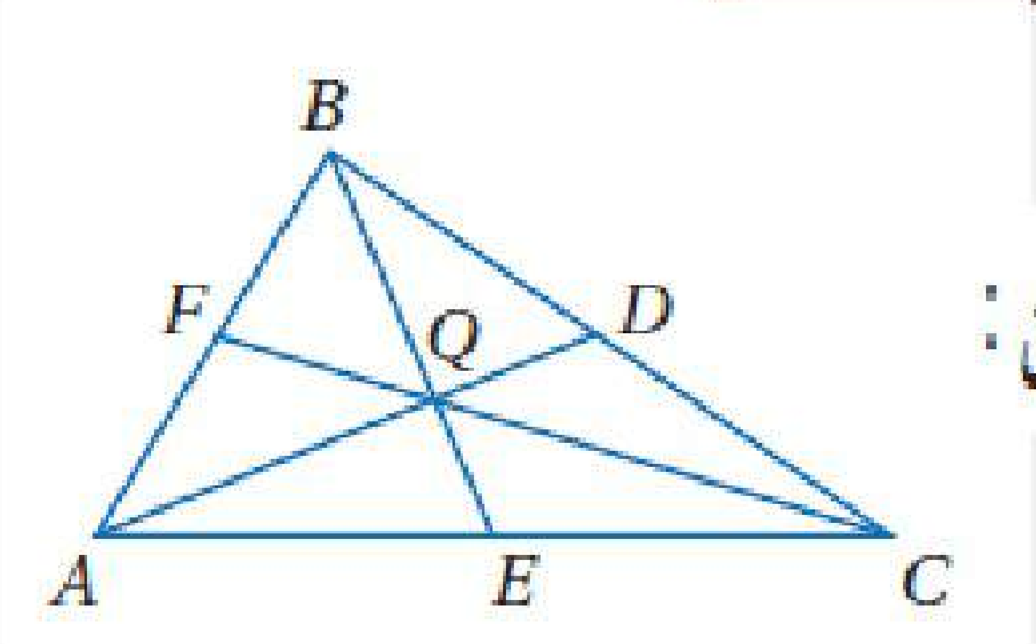
مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز ΔABC، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من BQ , QE .



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	بطرح 6 من الطرفين

تحقق من فهمك



في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

1A) FQ

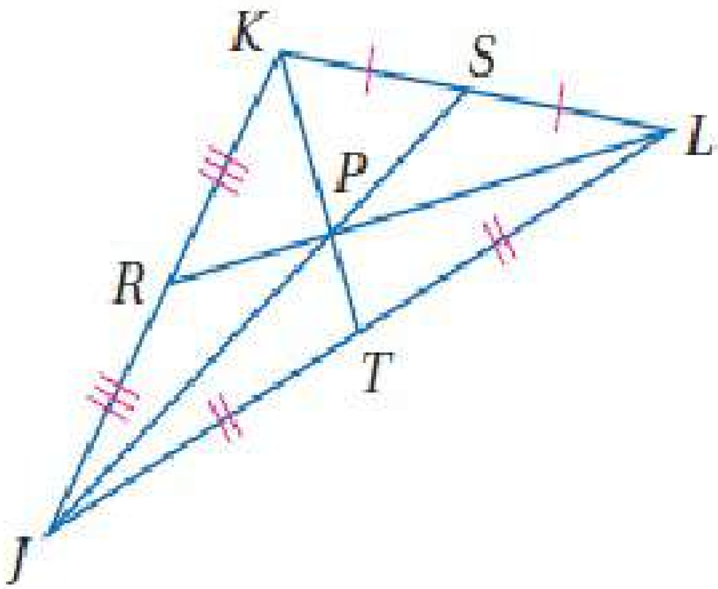
5

1B) QC

10

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث

في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP.



بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$. وبالمثل نستنتج أن S, T نقطتا منتصفي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{JS}, \overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$. لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

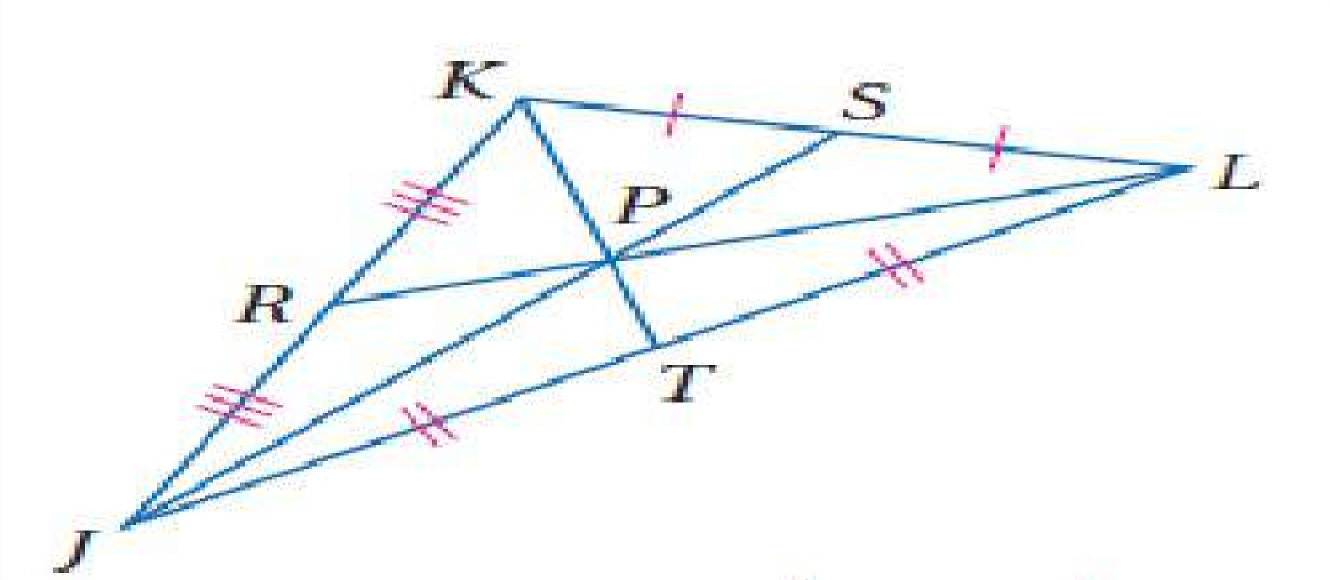
$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	بطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	بضرب الطرفين في 3

إرشادات للدراسة

استعمال الحسّ العددي

في المثال 2 ، يمكنك أيضًا استعمال الحس العددي لإيجاد KT . بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$ ؛ لذا فإذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

تحقق من فهمك



في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $JP = 9$, $RP = 3.5$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

PL (2A

7

PS (2B

4.5

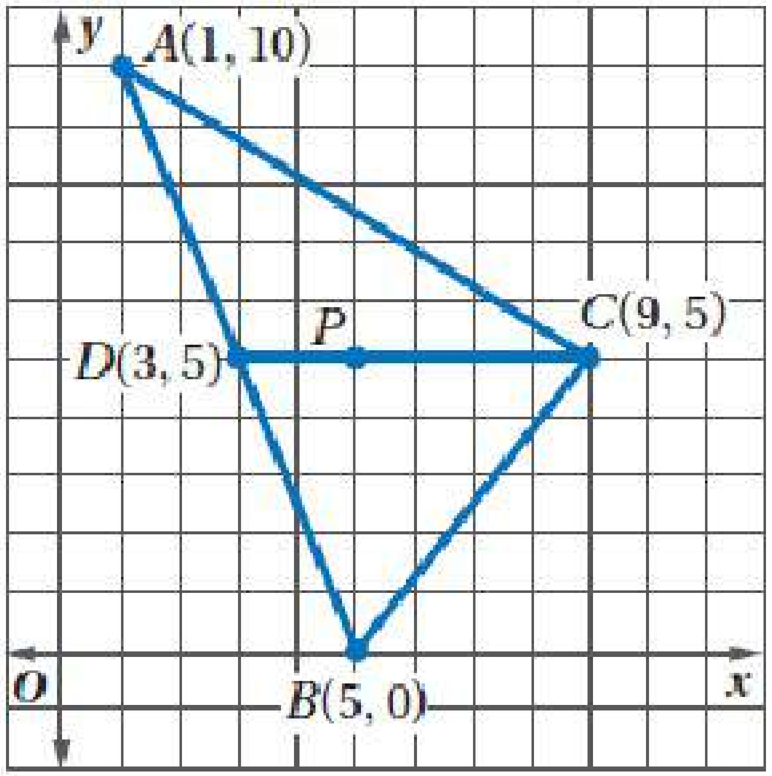
مثال 3 من واقع الحياة **إيجاد المركز في المستوى الإحداثي**

فن الأداء: يُخطط عبدالعزيز في مهرجان رياضي لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور. وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
فما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة. وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$. وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ لذا استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثلثي طول القطعة المتوسطة.

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



أوجد نقطة المتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة. والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحدات.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3} DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C. وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$ ، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ ، أيْ 7.5 وحدات. وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5 ، إذن P تقع على بعد 5 وحدات إلى الأعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

قراءة الرياضيات

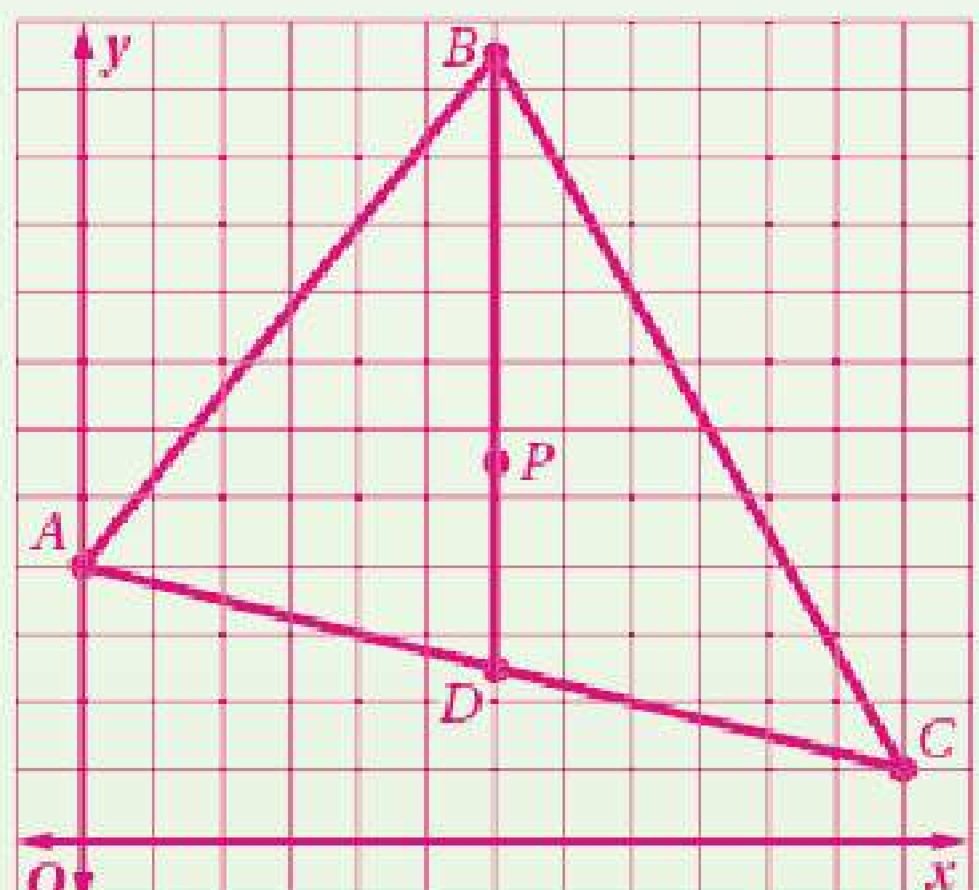
ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

تحقق من فهمك

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(12, 1)$, $(6, 11.5)$, $(0, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عنده هذا المثلث؟ وضِّح إجابتك.

3) $(6, 5.5)$



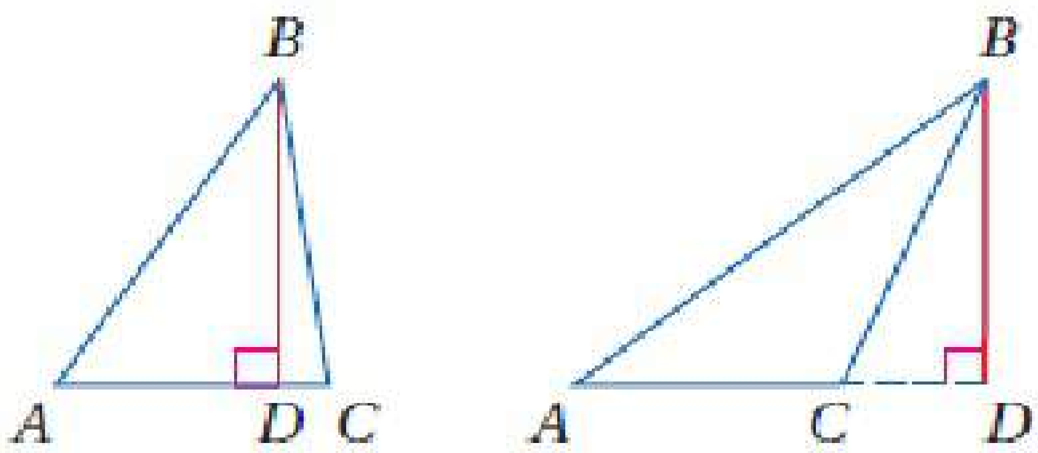
نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$ أو $D(6, 2.5)$.

وبما أنّ $\overline{BD}$ رأسيّة، فإن المسافة من B إلى D تساوي $11.5 - 2.5 = 9$،

وبما أنّ $PB = \frac{2}{3}(9) = 6$ ، فإن P تبعد 6 وحداتٍ أسفل B؛ إذن إحداثيات النقطة P هي $(6, 11.5 - 6)$ أو $(6, 5.5)$.

٢-٤ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Medians and Altitudes of triangle

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

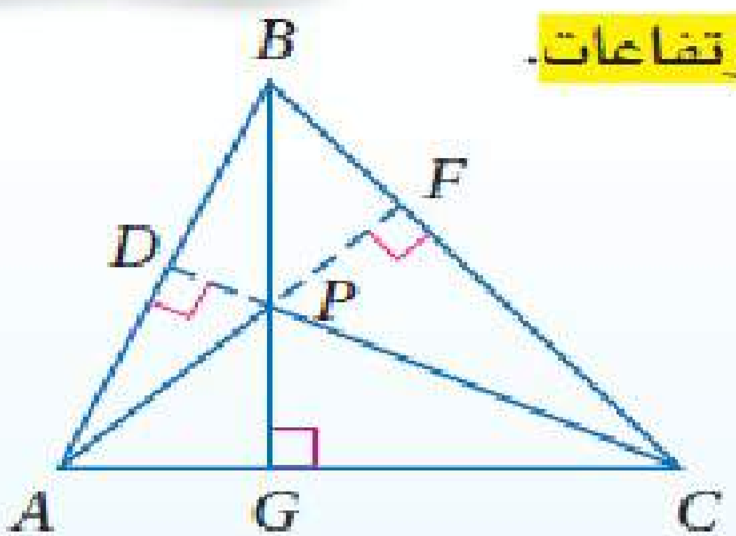
ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحتويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ملتقى الارتفاعات

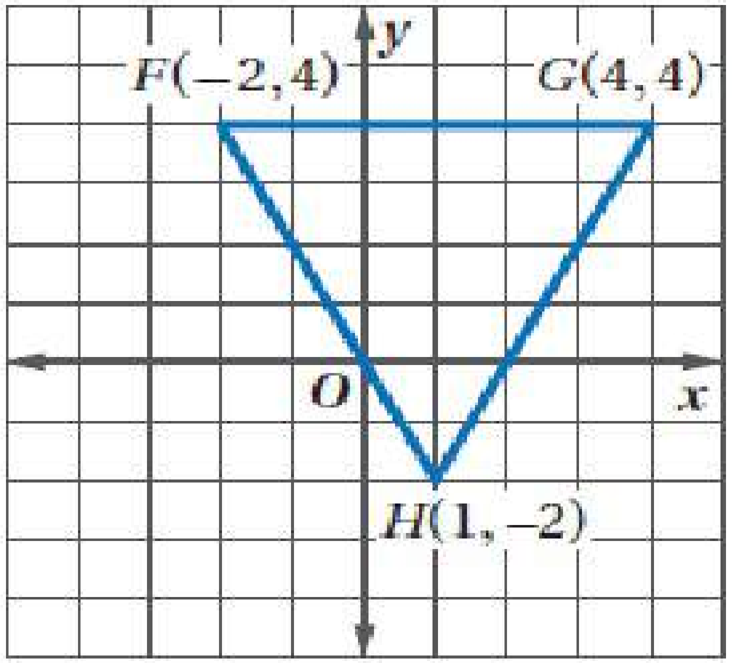
تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيِّ مثلث في نقطة تُسمَّى **ملتقى الارتفاعات**.



مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC.

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثيّة: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$.

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $2 = \frac{4-(-2)}{4-1}$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$	$(x_1, y_1) = F(-2, 4)$, $m = -\frac{1}{2}$
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$	بالتبسيط
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$	خاصية التوزيع
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	بإضافة 4 إلى الطرفين

الفصل الرابع

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $-2 = \frac{-2-4}{1-(-2)}$ ، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$	$(x_1, y_1) = G(4, 4)$, $m = \frac{1}{2}$
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$	خاصية التوزيع
$y = \frac{1}{2}x + 2$	بإضافة 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x ، فينتج أن $2y = 5$ ، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	بطرح $\frac{4}{2}$ ، أو 2 من الطرفين
$1 = x$	بضرب الطرفين في 2

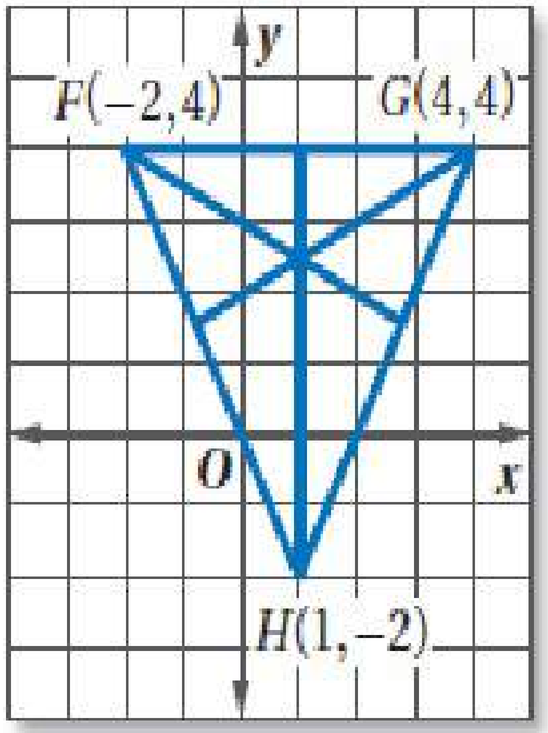
الفصل الرابع

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle JKL$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

إرشادات للدراسة

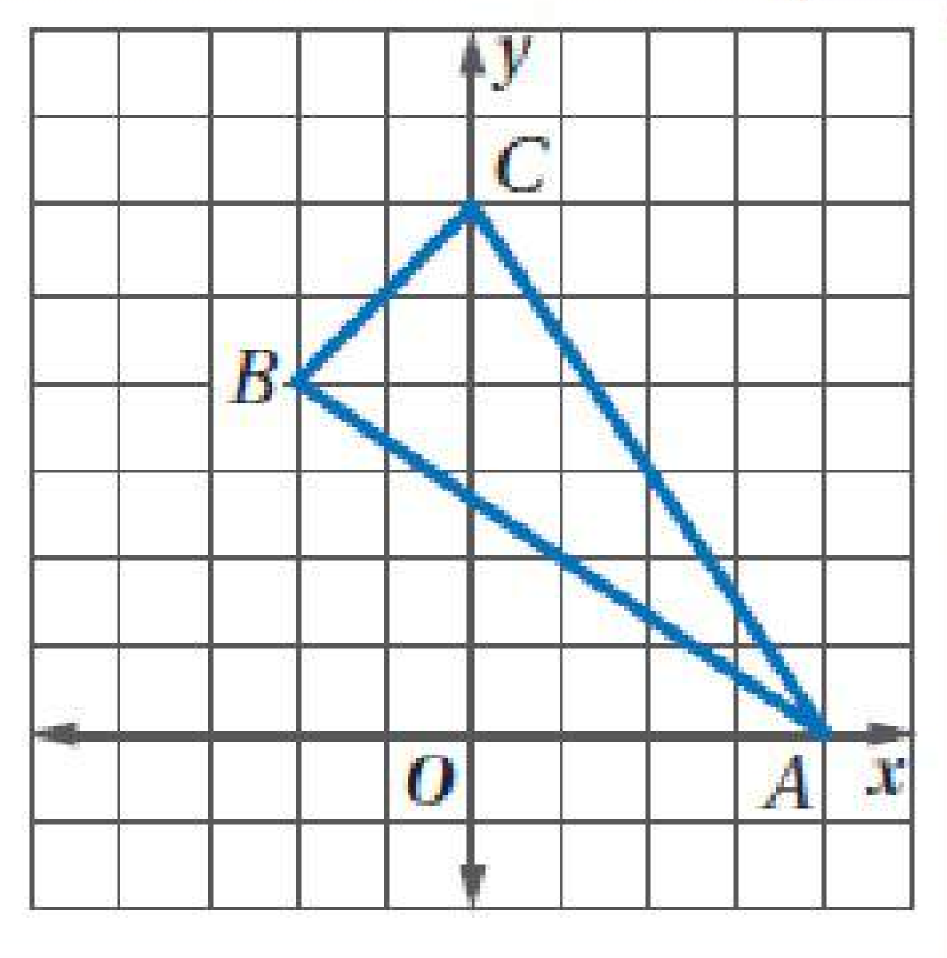
التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم الارتفاع لكل ضلع من أضلاع المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريباً عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.

تحقق من فهمك



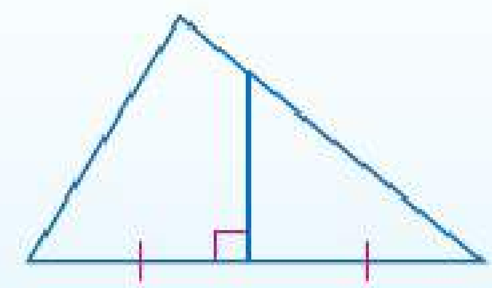
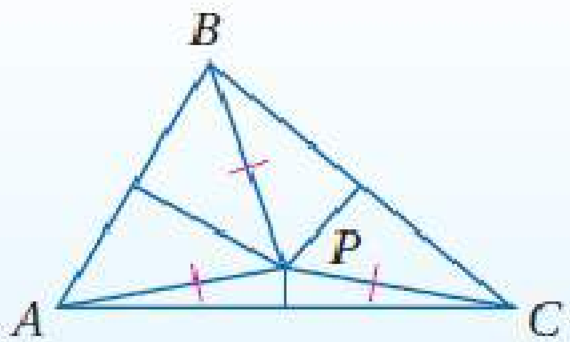
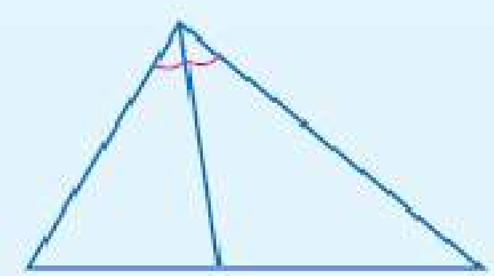
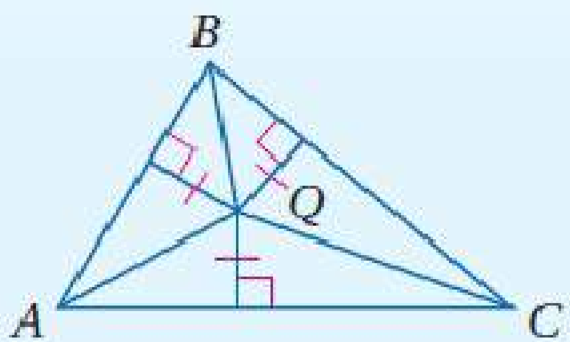
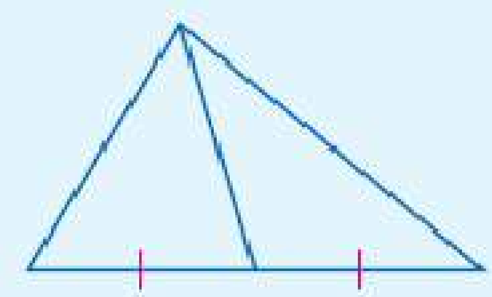
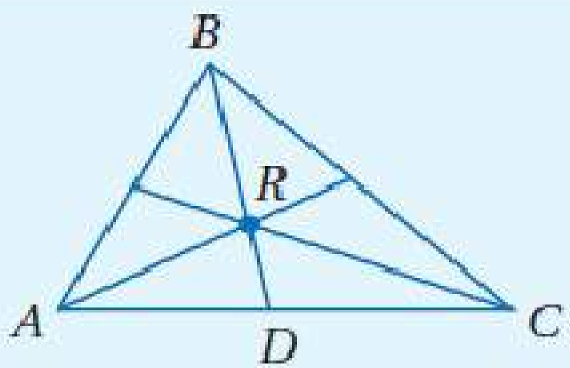
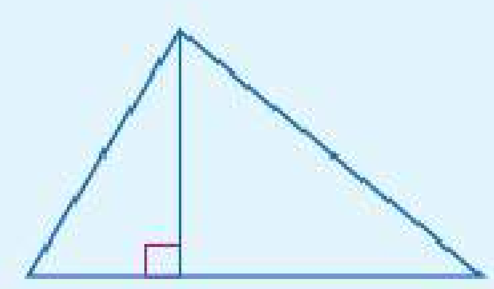
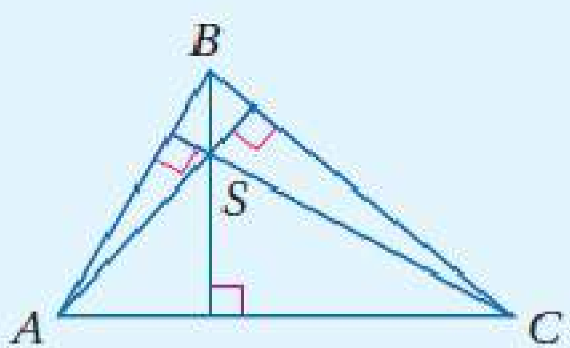
4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

$$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$$

ملخص المفاهيم

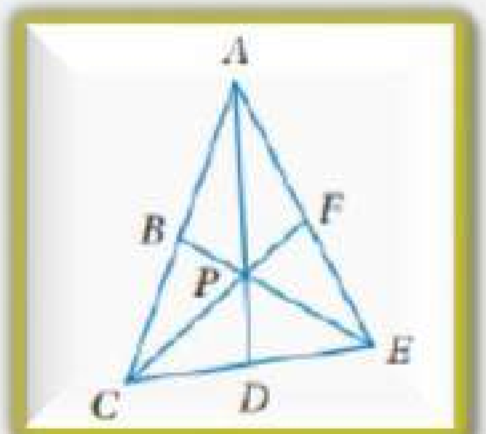
قطع مستقيمة ونقاط خاصة في المثلث

أضف إلى مطويتك

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصية	مثال
العمود المنصّف		مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ،وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

√ تأكد

المثالان ١، ٢



إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $PF = 6, AD = 15$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:

1) PC

2) AP

الحل

بما أن P هي مركز $\triangle ACE$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC = \frac{2}{3}CF$$

$$PC = \frac{2}{3}(PF + CP)$$

$$PC = \frac{2}{3}(6 + CP)$$

$$PC = 4 + \frac{2}{3}CP$$

$$PC - \frac{2}{3}CP = 4$$

$$\frac{1}{3}CP = 4$$

$$CP = 12$$

$$AP = \frac{2}{3}AD$$

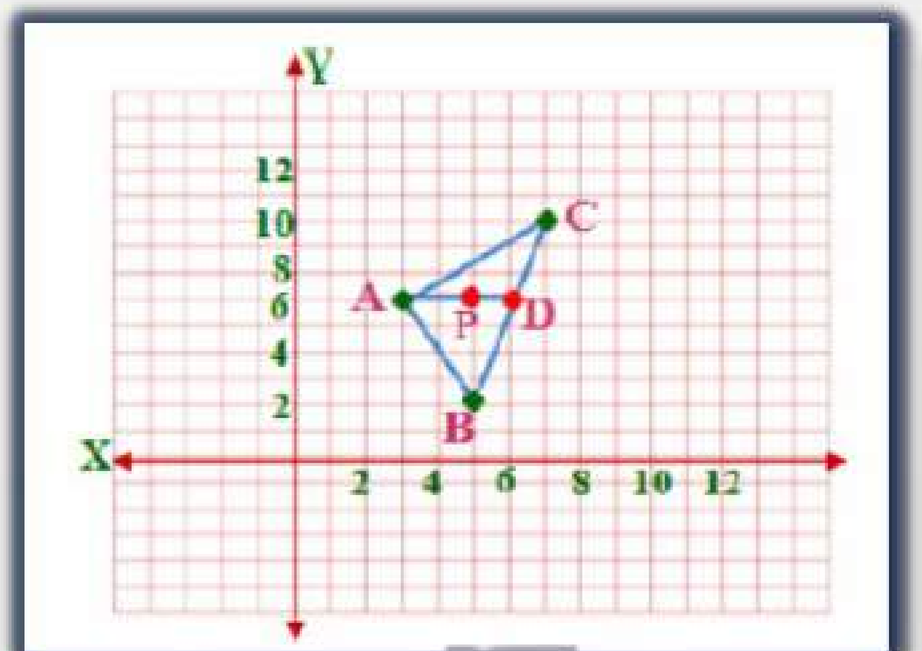
$$AP = \frac{2}{3} \times 15$$

AP = 10

المثال ٣

3) **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3,6), (5,2), (7,10)$ فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟

الحل



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC.

$A(3.6).B(5.2).C(7.10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{BC}$

$B(5.2).C(7.10)$

$$D\left(\frac{5+7}{2}.\frac{10+2}{2}\right)=D(6.6)$$

المسافة من $D(6.6)$ إلى $A(3.6)$ تساوي $6-3$ أي ٣ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $AP=\frac{2}{3}AD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$3\times\frac{2}{3}$ أو ٢ وحدة إلى اليمين من A وتكون احداثيات P هي (5.6)

إذن يتوازن المثلث عند النقطة (5.6)

المثال٤

4) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$،

الحل

$A(-3,3), B(-1,7), C(3,3)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي 2 $= \frac{4}{2} = \frac{7-3}{-1+3} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$C(3,3),\ m = -\frac{1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 $= \frac{-4}{4} = \frac{3-7}{3+1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العموديِ على $\overline{BC}$ يساوي 1

صيغة الميل ونقطة $y-y_1=m(x-x_1)$

$$A(-3,3),\ m=1$$

$$y-3=1(x+3)$$

$$y-3=x+3$$

$$y=x+6 \rightarrow 2$$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

$$y=x+6$$

$$0=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}x=-\frac{3}{2}$$

$$x=-1$$

$$y=x+6$$

$$y=-1+6$$

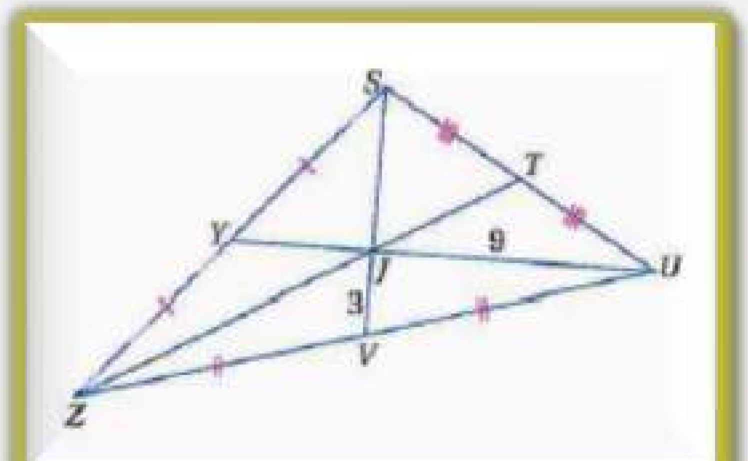
$$y=5$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1,5)$

√ تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢

في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كلّ طول مما يأتي:



5) YJ 6) SJ

7) YU 8) SV

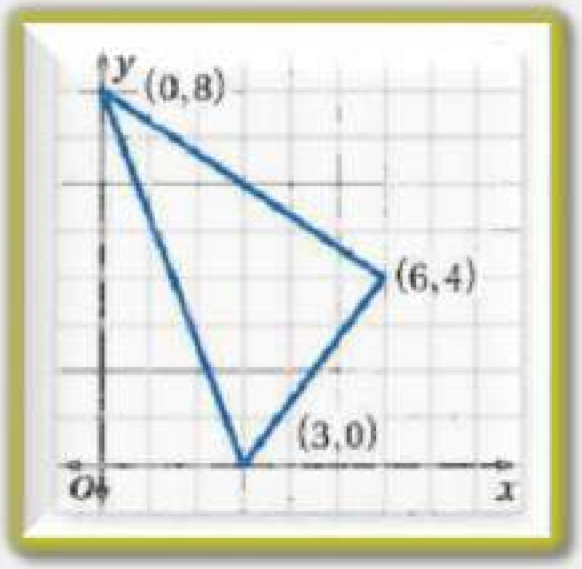
9) JT 10) ZJ

الحل

4.5	6
13.5	9
6	12

المثال ٣

11) تصميم داخلي: صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟



الحل

(3,4)

12) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:

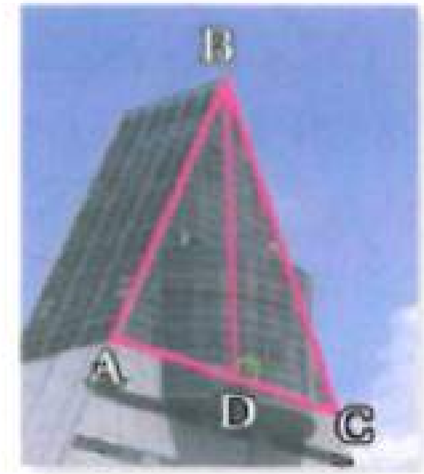
$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

الحل

(5,-1)

صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13)



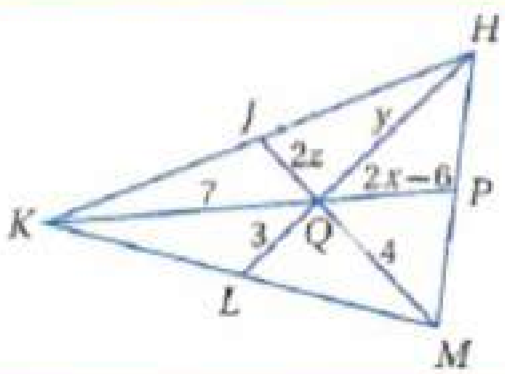
14)

15)

الحل

ارتفاع **قطعة متوسطة** **عمود منصف**

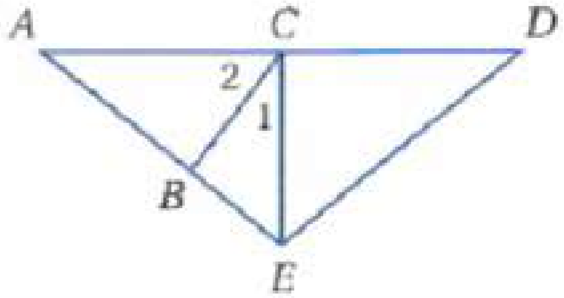
16) جبر: في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$ ، $\overline{HM}$ ، $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z .



الحل

X= 4.75,
Y= 6 ,
Z=1

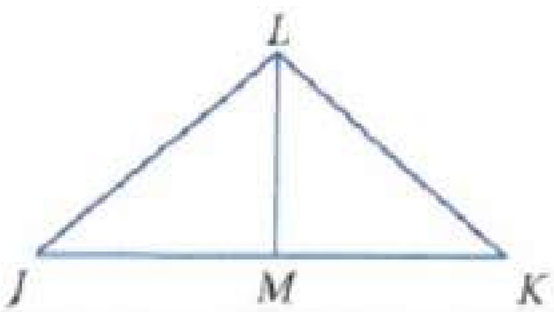
17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لـ $\triangle AED$، $m\angle 1 = (2x+7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x+13)^\circ$، فأوجد كلًّا من $m\angle 1$, $m\angle 2$.



الحل

$$m\angle 1 = 35^\circ,\ m\angle 2 = 55^\circ$$

في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصِّفًا، أو قطعة متوسطة، أو ارتفاعًا لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$, $\overline{JL} \cong \overline{KL}$

الحل

ارتفاع

عمود منصف وقطعة متوسطة وارتفاع

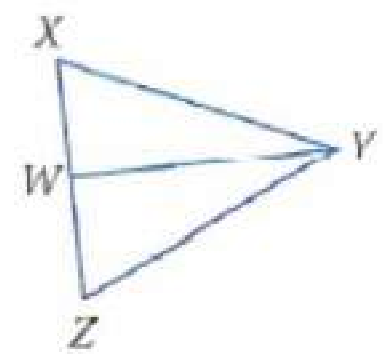
قطعة متوسطة

عمود منصف وقطعة متوسطة وارتفاع

22) **برهان:** اكتب برهانا حرًا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$، $\overline{WY}$ تنصّف $\angle Y$

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



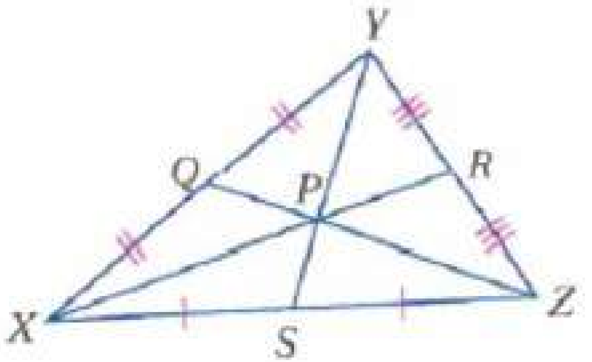
الحل

البرهان: بما أن ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ومن تعريف منصف الزاوية نعلم أن $\angle XYW \cong \angle ZYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\Delta XYW \cong \Delta ZYW$.
إذن $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

23) **برهان:** اكتب برهانا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



الحل

العبارات (المبررات)

1) $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ (معطيات)

2) $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية مركز المثلث)

3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (بالتعويض)

5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

7) $XP = 2RP$ (خاصية الضرب)

8) $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

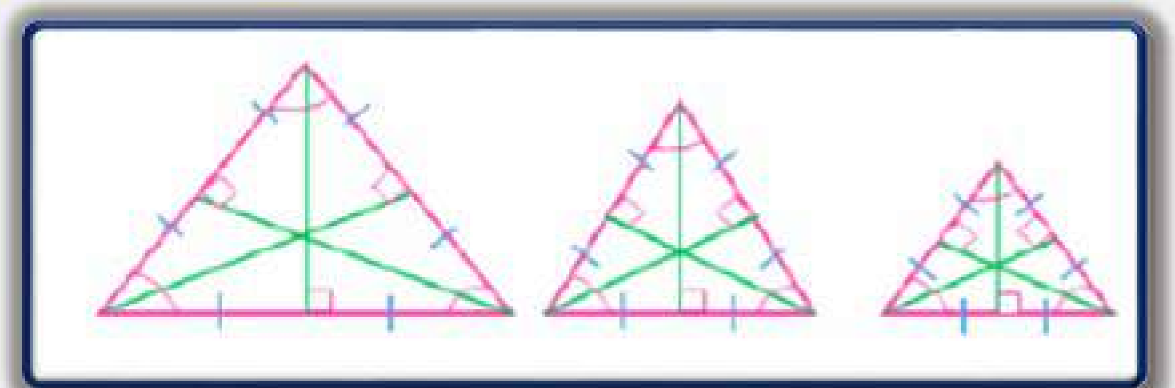
24) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) عمليًا: أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفةً بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

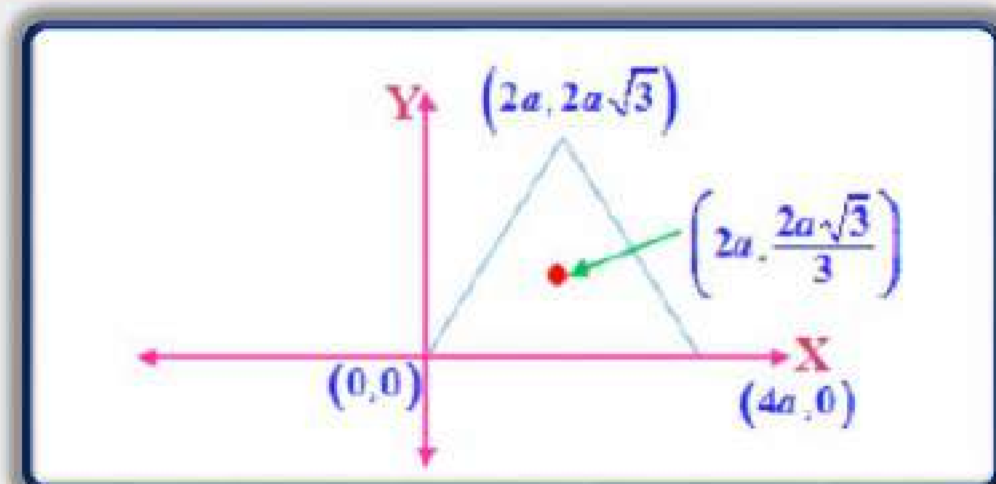
b) لفظيًا: خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

c) بيانيًا: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطةٍ منها.

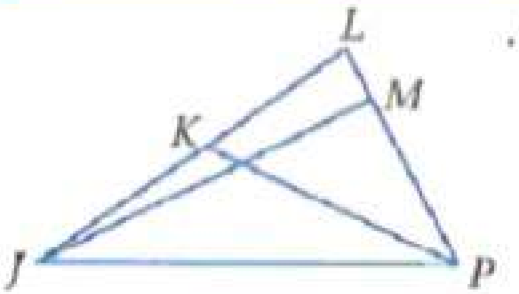
الحل



نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.



جبر، في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x-6)^\circ$, $JK = 3y-2$, $LK = 5y-8$.



25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

الحل

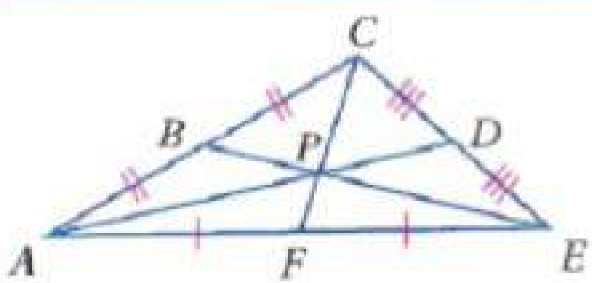
32

7

√ مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ، قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.

ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



الحل

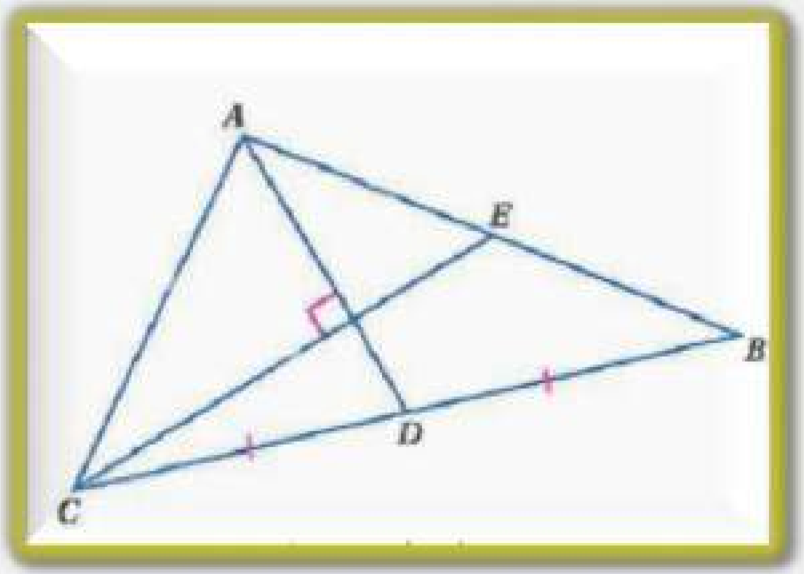
إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت أطوال القطع المستقيمة.

28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًا.
"ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة".

الحل

صحيحة؛ إجابة ممكنة: في المثلث قائم الزاوية، يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقي المثلث اللذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة.

وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فرأس الزاوية القائمة هو دائماً ملتقى الارتفاعات.



29) **تحدَّ:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$، فأوجد CA

الحل

$$2\sqrt{13}$$

30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

الحل

إجابة ممكنة: بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متساويين في المساحة، فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولموازنة مثلث على نقطة، عليك أن تجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة.

ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفي ضلعين متقابلين فيه، لأن كل قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.