الحركة التوافقية البسيطة

النواس المرن

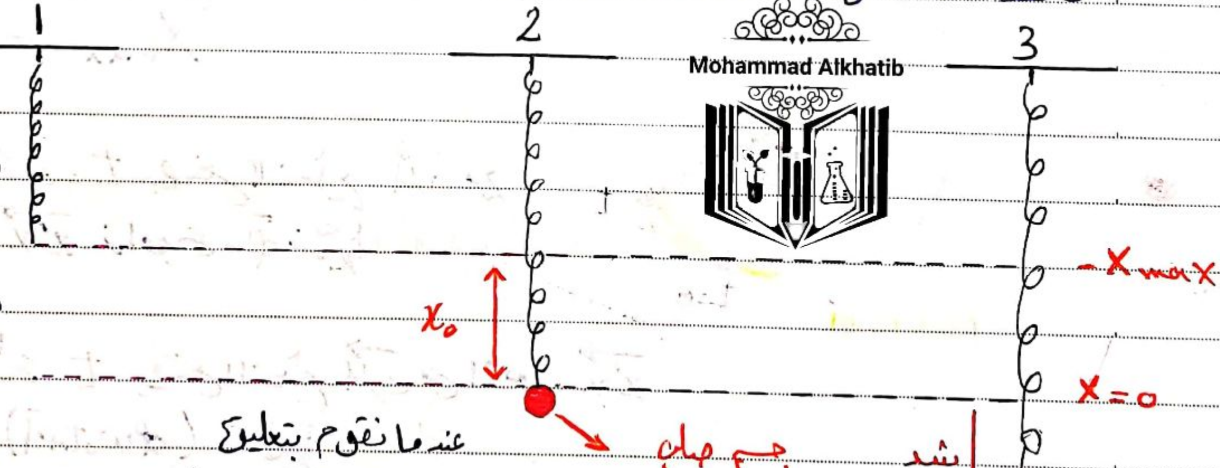
الحركة الاهتزازية: هي حركة جسم يهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز

الحركة الدورية: هي الحركة التي تكرر نفسها خلال فواصل زمنية متساوية
ونسمي الزمن اللازم لكي تكرر الحركة الدورية نفسها ب دور الحركة T_0
فإذا كانت الحركة الحركة الاهتزازية فإن زمن هزة واحدة هو T_0

الجسم المرن: هو كل جسم يتغير شكله تغيراً مؤقتاً بتأثير قوة خارجية ويزول هذا التغير بزوال القوة الخارجية المؤثرة

وكمثال على الجسم المرن سندرس **النواس المرن** وهو جسم صلب معلق بنابض مرن حلقاته متباعدة مهمل الكتلة يهتز حركة اهتزازية حول مركز الاهتزاز وهذا أوضح مثال على ما يعرف ب الحركة التوافقية البسيطة

في البداية يكون النابض بشكل مستقر دون ثقل معلق فيه ويكون طوله l



عندما نقوم بتعليق الجسم الصلب في النابض فإنه يستطيل بمقدار x_0 ونسمي هذا الوضع بوضع التوازن ونسمي هذه الاستطالة بالاستطالة السكونية x_0 حيث يستطيل النابض هنا بتأثير قوة ثقل الجسم الصلب فقط.

نقوم بشد الثقل نحو الأسفل ثم نتركه عند موضع معين دون سرعة ابتدائية فيهتز الجسم الصلب حركة اهتزازية إلى جانبي وضع التوازن $x=0$

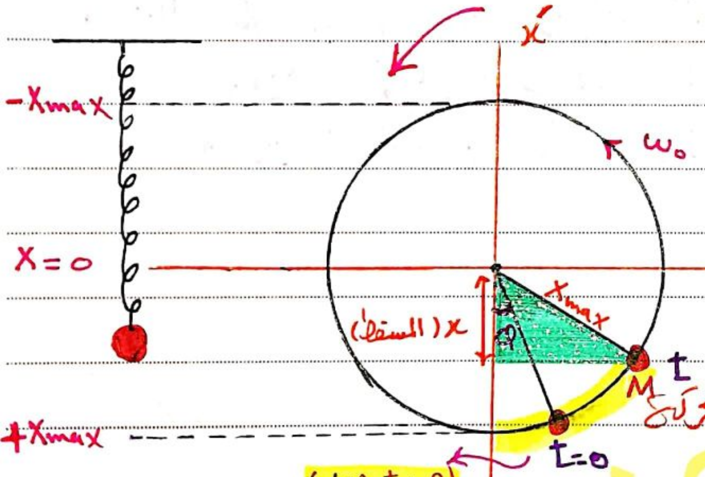
إن أقصى إزاحة يصنعها الجسم الصلب عن وضع التوازن هي عند الموضع الذي نتركه فيه دون سرعة ابتدائية ونسميه المطال الأعظمي الموجب $+X_{max}$ فيهتز نحو الأعلى إلى أن يصل إلى وضع التوازن ثم يتابع طريقه نحو الأعلى ليصنع نفس الإزاحة العظمى ولكن بالاتجاه السالب (نحو الأعلى) فنسمي ذلك الموضع المطال الأعظمي السالب $-X_{max}$

ويتابع الجسم الصلب الاهتزاز إلى جانبي وضع التوازن

ستكون دراستنا لحركة اهتزاز النواس المرن بإهمال القوى المبددة للطاقة مما يسمح للنواس الاستمرار بالاهتزاز دون تخامد أو توقف

ويكون ذلك في شروط مثالية

العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل):



في الشكل المجاور تدور نقطة مادية M حركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية ω_0 وشعاع الموضع (شعاع نصف القطر) $\vec{OM}$ طويلته X_{max}

في اللحظة $t=0$ يصنع الشعاع $\vec{OM}$ مع المحور $\vec{x'x}$ زاوية $\overline{\varphi}$ نسميها الطور الابتدائي للحركة

وفي اللحظة t يصنع الشعاع $\vec{OM}$ مع المحور $\vec{x'x}$ زاوية $(\omega_0 t+\overline{\varphi})$ نسميها طور الحركة

ونسمي ω_0 النبض الخاص للحركة وهو يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة M

وتكون سعة الحركة X_{max} هي طويلة الشعاع $\vec{OM}$ الثابتة عند الدوران

مطال الحركة x هو مسقط الشعاع $\vec{OM}$ على المحور $\vec{x'x}$ وهو متغير بتغير الزمن

نلاحظ من الرسم أنه في المثلث المرسوم يمكننا استنتاج أن

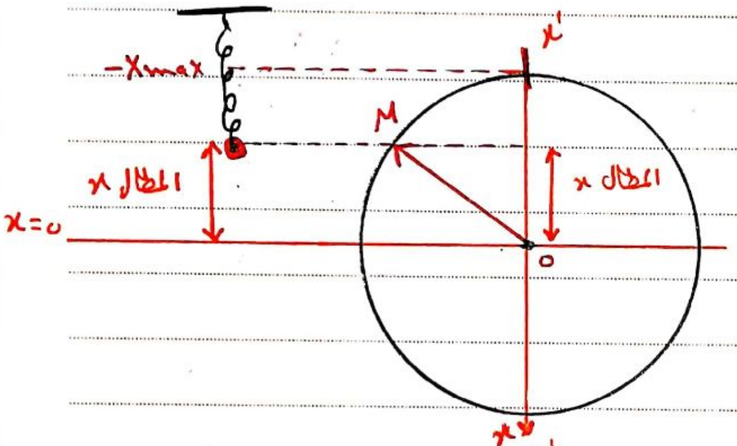
$$\cos(\omega_0 t+\overline{\varphi}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{X_{max}}$$

وبما أن $\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) = \dfrac{\bar{x}}{X_{max}}$

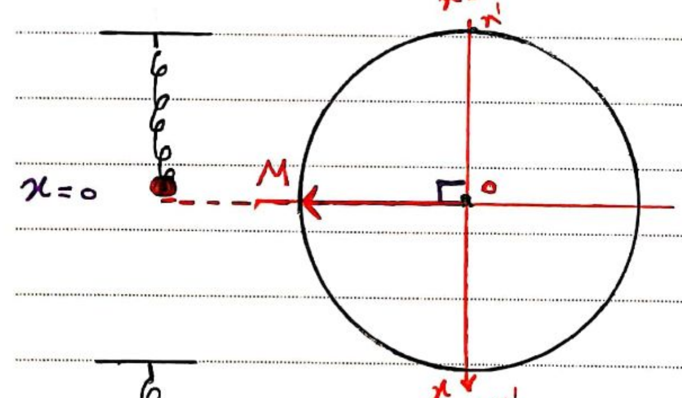
نكتب : $\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})}$

وهو التابع الزمني لحركة المسقط (المطال) وهو تابع جيبي

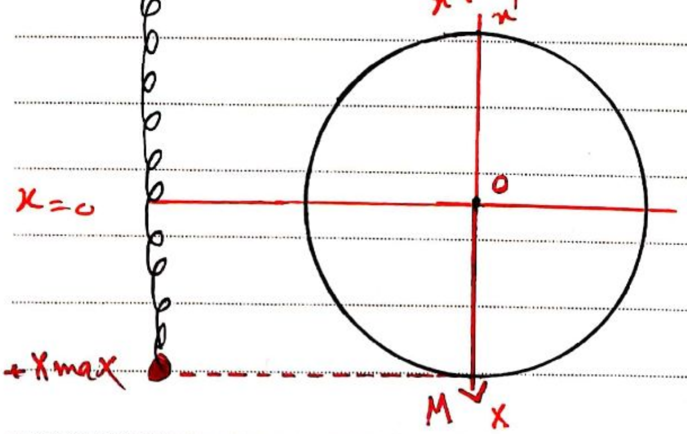
لذلك تسمى الحركة حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)



Mohammad Alkhatib



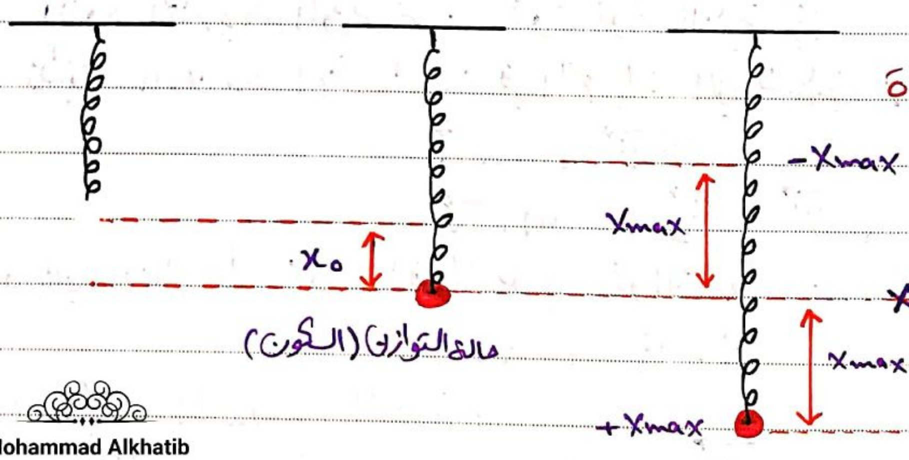
عندما يكون الجسم الصلب في وضع التوازن فإن الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكون في حالة تعامد مع المحور $\overrightarrow{x'x}$



عندما يكون الجسم الصلب عند الموضع $+X_{max}$ أو $-X_{max}$ فإن الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكون منطبقاً على المحور $\overrightarrow{x'x}$

/ /

قوة الإرجاع:



برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع وأوجد العلاقة المعبرة عنها !؟

/ دورة 2016 / 40 درجة

Mohammad Alkhatib

ندرس الجملة المؤلفة من نابض مرن وثقل معلق في حالتين

1) حالة السكون 2) حالة الحركة

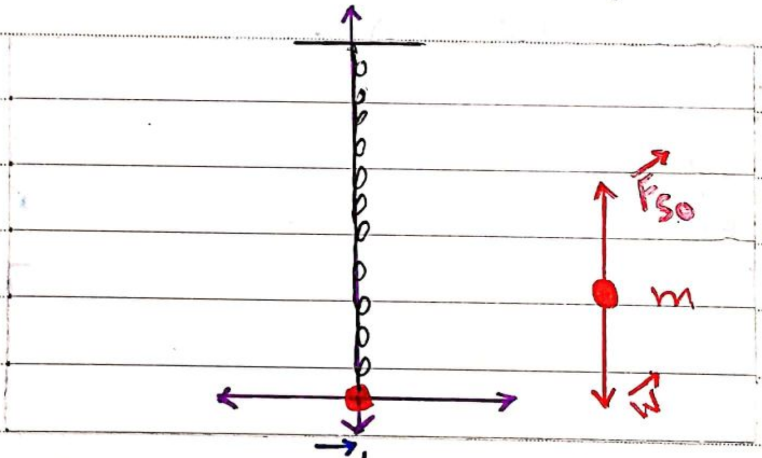
1) حالة السكون: سندرس الحركة لكل من النابض والجسم المعلق به

الجملة المدروسة أ) الجسم المعلق بالنابض

القوى الخارجية المؤثرة: 1) قوة ثقل الجسم $\vec{W}$ 2) قوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$

يتوازن الجسم بعد استطالته مسافة x_0

بتأثير القوتين $\vec{W}$ و $\vec{F}_{s_0}$ وبما أن الجسم ساكن نطبق شرط التوازن الانسحابي:



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

وبالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$W = F_{s_0}$$

ب) الجملة المدروسة: النابض القوى المؤثرة: قوة الشد $\vec{F}'_{s_0}$ (نفسها قوة الثقل)

تسبب قوة الشد استطالة سكونية x_0 وحسب قانون هوك $F'_{s_0} = K x_0$

ولكن $F'_{s_0} = W$ فيكون $F'_{s_0} = F_{s_0} = W$

وبالتالي $W = K x_0$ (1)

Alamal

2) حالة الحركة: أ) الجملة المدروسة: الجسم المعلق بالنابض

القوى الخارجية المؤثرة: قوة توتر النابض $\vec{F_s}$ وقوة الثقل $\vec{W}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي (قانون نيوتن الثاني):

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{F_s} = m.\vec{a}$$

وبالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_s = m.a \quad (2)$$

ب) الجملة المدروسة النابض:

القوى المؤثرة: قوة الشد $\vec{F'_s}$ التي تسبب استطالة للنابض مقدارها $(\bar{x} + x_0)$

وتكون قوة الشد $\vec{F'_s}$ مساوية لقوة توتر النابض $\vec{F_s}$

وبالتالي $F'_s = F_s = k(\bar{x}+x_0) \quad (3)$

وبتعويض (1) و (3) في (2) نجد

$$W - F_s = m.a$$

$\downarrow$

$$kx_0 - k(\bar{x}+x_0) = m.a$$

$$kx_0 - kx - kx_0 = ma$$

$$\Rightarrow -kx = m.a = F$$

$$\Leftarrow \quad F = -kx$$

نستنتج أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً وهي تتناسب طرداً مع المطال $\bar{x}$ وتعاكسه بالإشارة

حيث F قوة الإرجاع وتقدر ب N

k ثابت صلابة النابض يقدر ب $N.m^{-1}$

x المطال ويقدر ب m

استنتاج طبيعة حركة النواس المرن : هام جداً

انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(x)''_t = \frac{-k}{m} x$ برهن أن حركة الجسم الصلب المعلّق في النابض في النواس المرن غير المتخامد هي حركة جيبية توافقية بسيطة ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس دورة 2013 وشي 100 دورة غيرها

إن محصلة القوى الخارجية التي تخضع لها مركز عطالة الجسم المعلّق في النابض هي قوة إرجاع وتعطى بالعلاقة : $\vec{F} = m\,\vec{a} = -k\vec{x}$

ولكن نعلم أن التسارع هو المشتق الثاني للمطال بالنسبة للزمن $a = (x)''_t$

$$F = m\,(x)''_t = -kx$$

$$\Rightarrow (x)''_t = -\frac{k}{m}x \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad (2)$$

وللتأكد من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 \overbrace{X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}^{\bar{x}}$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \quad (3)$$

بالمقارنة بين (1) و (3) نجد أن

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وهذا محقق لأن k و m موجبان

نستنتج أن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية (هزازة توافقية بسيطة)

انتهى الاستنتاج الأول ويلي استنتاج الدور الخاص

الشكل العام للتابع الزمني للمطال (الموضح) يعطى بالعلاقة $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

x : المطال (موضع الجسم) في اللحظة t ويقدر بـ m ، ω_0 النبض الخاص للحركة يقدر بـ rad.s

X_{max} سعة الحركة (المطال الأعظمي) ويقدر بـ m ، $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ طور الحركة في اللحظة t

$\bar{\varphi}$ الطور الابتدائي في اللحظة $t=0$ ويقدر بـ rad

ندعو كلاً من X_{max} ، ω_0 ، $\bar{\varphi}$ ثوابت الحركة

استنتاج علاقة الدور الخاص T_0 :

بما أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ونعلم أنّ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد

نستنتج من العلاقة السابقة أن :

1) الدور الخاص لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} (هام)

أي مهما تغيرت X_{max} للنواس يبقى T_0 ثابتاً شرط m و k ثابتة (نفس النابض)

2) الدور الخاص يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m

3) الدور الخاص يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض K

كتابة تابع المطال بالشكل المختزل :

الشكل العام لتابع المطال هو :

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعتبر أنه في اللحظة $t=0$ كان الجسم
في وضع المطال الأعظمي الموجب X_{max} إذاً شروط البدء ($t=0$ $x=X_{max}$)
نعوض في الشكل العام لتابع المطال :

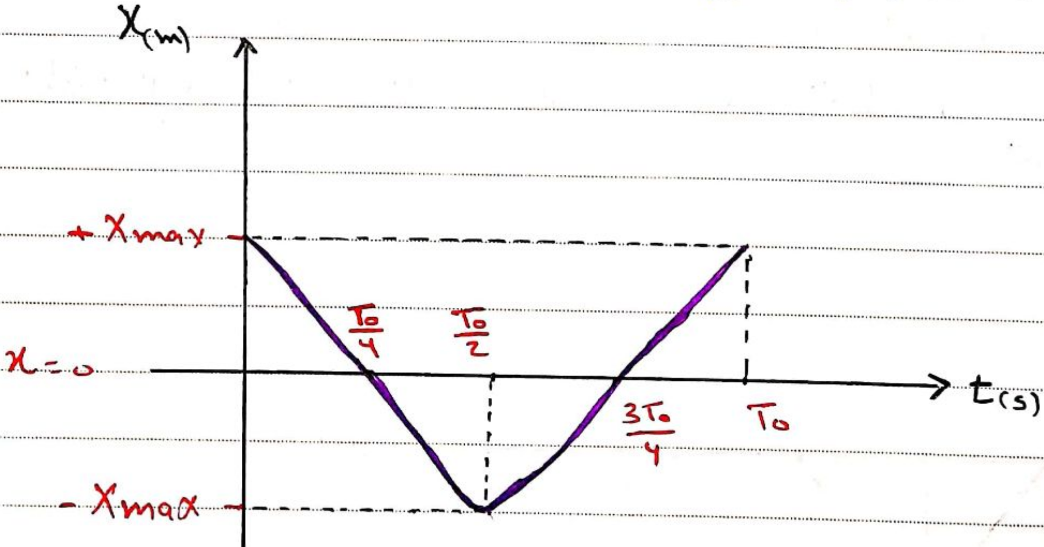
$$\cancel{X_{max}} = \cancel{X_{max}} \cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$1 = \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \varphi = 0\,rad$$

نعوض قيمة φ في الشكل العام لتابع المطال :

$$x = X_{max} \cos(\omega_0 t)$$ الشكل المختزل لتابع المطال

ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور
وحدد المواضع التي يأخذ فيها المطال a) قيمة عظمى (طويلة) b) معدومة



تابع السرعة:

انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن استنتج تابع السرعة ثم حدد الأوضاع التي تكون فيها السرعة 1) عظمى (طويلة) 2) معدومة

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

تابع السرعة هو المشتق الأول لتابع المطال

$$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$$

تكون السرعة عظمى عندما يكون $\sin(\omega_0 t)$ أكبر ما يمكن

أي عندما $\sin(\omega_0 t) = \pm 1$ (السرعة عظمى طويلة)

وبالتالي يكون $\cos(\omega_0 t) = 0$

نعوض بالتابع الزمني للمطال: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t) \Rightarrow x = X_{max} \times 0$

أي تكون السرعة عظمى في وضع التوازن $x = 0$

وبتعويض $\sin(\omega_0 t) = \pm 1$ في تابع السرعة نحصل على عبارة السرعة الأعظمية (طويلة)

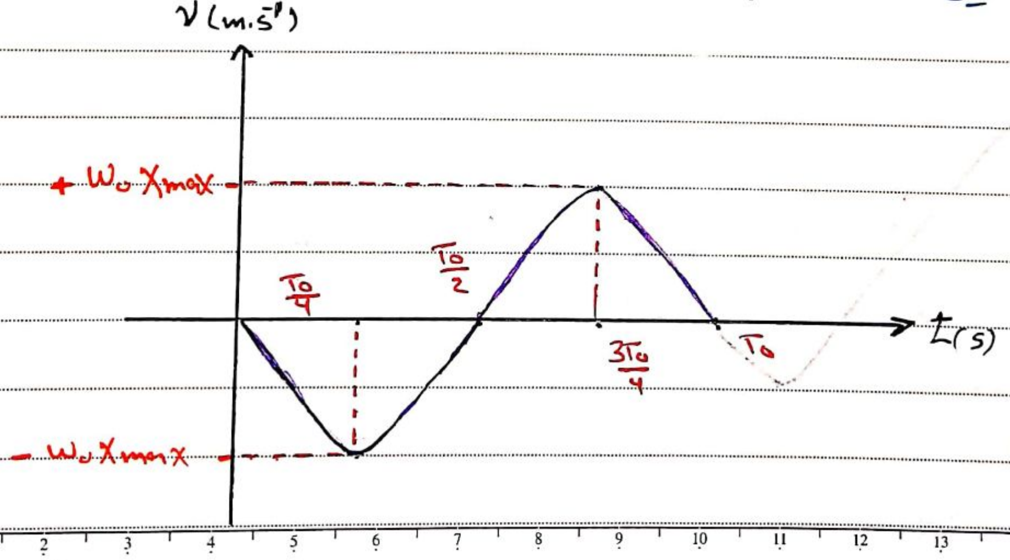
$$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$$

تكون السرعة معدومة عندما $\sin(\omega_0 t) = 0$ وبالتالي يكون $\cos(\omega_0 t) = \pm 1$

نعوض في تابع المطال: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t) \Rightarrow x = \pm X_{max}$

أي تكون السرعة معدومة في الوضعين الطرفين $\pm X_{max}$

ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور



تابع التسارع :

1. انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t)$ استنتج تابع تسارع الجسم بدلالة مطال الحركة $\bar{x}$ ثم حدد باستخدام العلاقات المناسبة الأوضاع التي يكون فيها التسارع 1) أعظمياً (طويلة") 2) معدوماً" الدورة الأولى 2015

أو انطلاقاً من التابع الزمني لسرعة الجسم المعلق بالنابض في النواس المرن $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$ استنتج تابع تسارع الجسم بدلالة مطال الحركة $\bar{x}$ ثم حدد الأوضاع التي يكون فيها تسارع الجسم 1) أعظمياً (طويلة") 2) معدوماً دورة 2014 الثانية

ثم ارسم المنحني البياني للتسارع خلال دور كامل + دورة 2020

تابع التسارع هو المشتق الثاني لتابع المطال (أو هو المشتق الأول لتابع السرعة) :

$$a = (x)''_t = (v)'_t = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t)$$

حسب السؤال

$$a = -\omega_0^2 x$$

(ω_0 ثابتة و x متغيرة)

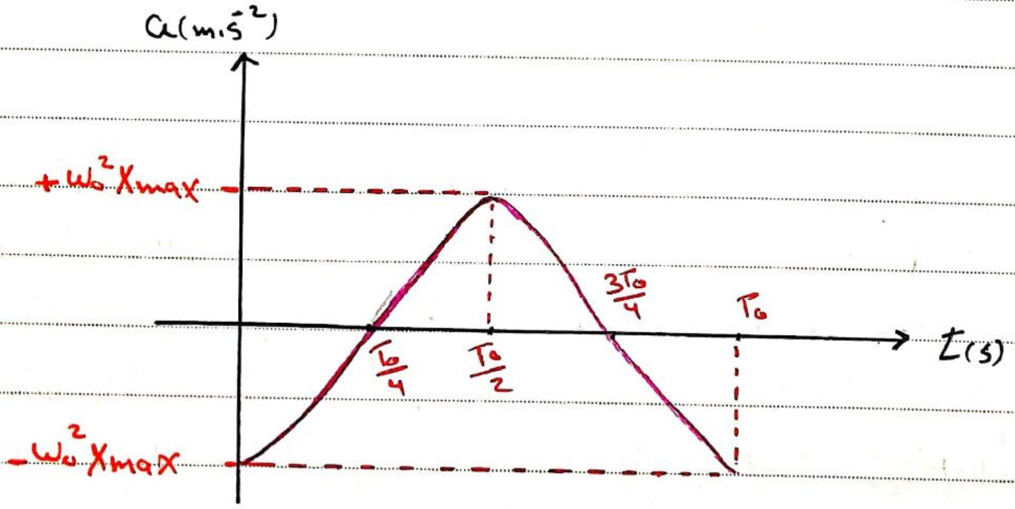
يكون التسارع أعظمياً عندما تكون x أكبر ما يمكن أي عندما $x = \pm X_{max}$

يكون التسارع أعظمي (طويلة") عندما $x = \pm X_{max}$ في وضع المطالين الأعظميين

يكون التسارع معدوماً عندما $x = 0$ أي يكون التسارع معدوماً في وضع التوازن $x = 0$

حساب التسارع الأعظمي (طويلة") : $a = |-\omega_0^2 X_{max}|$

ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور



Mohammad Alkhatib

حديث

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة :

استنتاج علاقة الطاقة الميكانيكية (الكلية) في النواس المرن دورة ٢٠٢٠

إن الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقتين الكامنة المرونية والحركية

$$E \text{ أو } E_{tot} = E_p + E_k \quad (1)$$

- الطاقة الكامنة المرونية للنابض : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

وبتعويض تابع المطال x : $E_p = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- الطاقة الحركية للجسم : $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

وبتعويض تابع السرعة v : $E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

بالتعويض في العلاقة (1)

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

ولكن $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftarrow m \cdot \omega_0^2 = k$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} k X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \underline{[\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})]}$$

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

★ تكون الطاقة الكامنة المرونية للنابض عظمى عندما تكون x أكبر ما يمكن أي عندما $x = \pm X_{max}$

وتكون الطاقة الكامنة المرونية معدومة عندما $x = 0$ أي يكون بوضع التوازن $E = E_k$ فقط

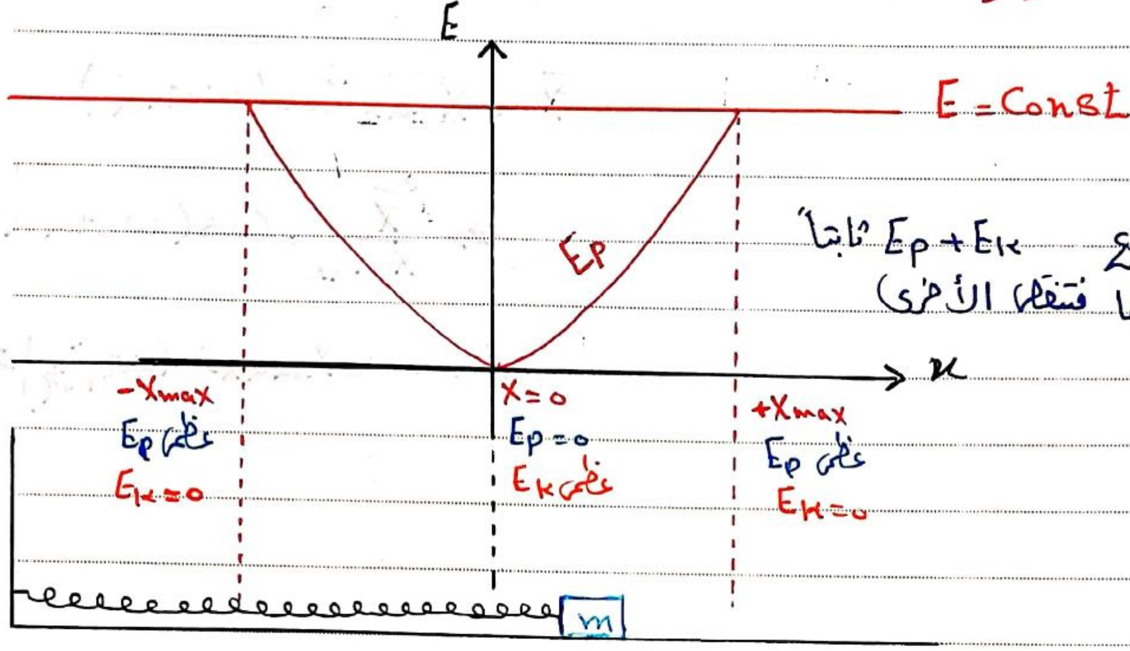
أي تكون E_p عظمى في المطالين الأعظميين وتنعدم في وضع التوازن

★ تكون الطاقة الحركية للجسم عظمى عندما تكون v أكبر ما يمكن أي في وضع التوازن

وتنعدم الطاقة الحركية عندما تنعدم v وذلك في المطالين الأعظميين $\pm X_{max}$

أي تكون في المطالين الأعظميين $E = E_p$ فقط

وتكون الطاقة الميكانيكية ثابتة بتغير المطال :



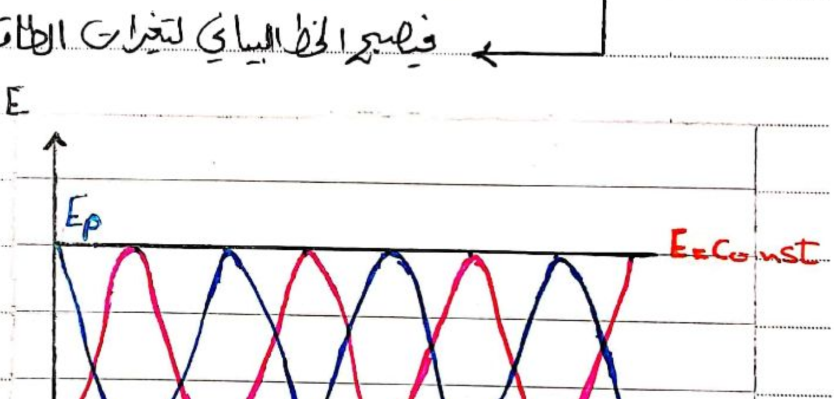
E = Const

حيث يبقى المجموع Ep + Ek ثابتاً

أي تزداد إحداهما فتنقص الأخرى

وبالعكس

فيصبح الخط البياني لتغيرات الطاقة وفق الشكل :



Mohammad Alkhatib

$\frac{1}{17}$

أثبت صحة العلاقة $V=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-X^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة :

طريقة 1 :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$\frac{\bar{x}}{X_{max}} = \cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) \Leftarrow$$

$$\bar{V} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$\frac{V}{-\omega_0 X_{max}} = \sin(\omega_0 t+\bar{\varphi}) \Leftarrow$$

ونعلم أن $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})+\cos^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})=1$$

$$\frac{V^2}{\omega_0^2 X_{max}^2}+\frac{x^2}{X_{max}^2}=1 \quad (\omega_0^2)$$

$$\frac{V^2}{\omega_0^2 X_{max}^2}+\frac{\omega_0^2 x^2}{\omega_0^2 X_{max}^2}=1$$

$$V^2+x^2\omega_0^2=\omega_0^2 X_{max}^2$$

$$V^2=X_{max}^2\omega_0^2-x^2\omega_0^2$$

$$V^2=\omega_0^2(X_{max}^2-x^2)$$

$$V=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$$

طريقة 2 :

$$E=E_p+E_k$$

$$\frac{1}{2}kX_{max}^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mV^2$$

ولدينا $\omega_0^2=\frac{k}{m} \Rightarrow m=\frac{k}{\omega_0^2}$

$$\cancel{\frac{1}{2}}kX_{max}^2=\cancel{\frac{1}{2}}kx^2+\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\cancel{k}}{\omega_0^2}V^2$$

$$X_{max}^2=x^2+\frac{V^2}{\omega_0^2}$$

$$X_{max}^2-x^2=\frac{V^2}{\omega_0^2}$$

$$V^2=\omega_0^2(X_{max}^2-x^2)$$

$$V=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$$

< ويوجد طرق أكثر ولكن سنكتفي بطريقتين >

حساب الزمن لحظة المرور في وضع التوازن (مرور أول - مرور ثاني - مرور ثالث - ...) :

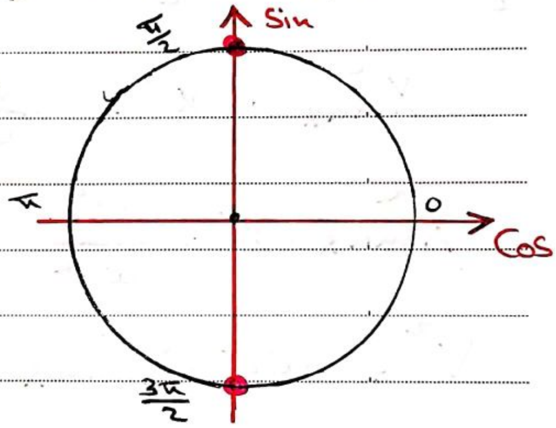
1) الطريقة العامة للحساب :

عند المرور بوضع التوازن يكون

$x = 0$ نعوض في تابع المطال

$0 = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\Rightarrow \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$



$\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k)$

$\Rightarrow \omega_0 t + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

ω_0 و $\bar{\varphi}$ معلومات

ولحساب t نعوض

$k = 0$ عند المرور الأول بوضع التوازن

$k = 1$ عند المرور الثاني بوضع التوازن

$k = 2$ عند المرور الثالث بوضع التوازن

وهكذا ...

2) حالة خاصة :

عندما تكون شروط البدء $x = +X_{max}$ ، $t = 0$ ، صفراً

إن دور الحركة T_0 هو زمن هزة كاملة

فيلزم لكي يتحرك الجسم من $x = +X_{max}$

إلى وضع التوازن زمناً قدره ربع الدور $\frac{T_0}{4}$

★ وهو زمن المرور الأول في وضع التوازن ★

ثم يلزم لكي يتحرك من وضع التوازن إلى

الموضع $x = -X_{max}$ زمناً قدره $\frac{T_0}{4}$

ثم يعود الجسم إلى وضع التوازن $x = 0$

فيلزم زمناً $\frac{T_0}{4}$ ويصبح الزمن الكلي $\frac{3T_0}{4}$

★ وهو زمن المرور الثاني في وضع التوازن ★

ثم يعود الجسم إلى الوضع $+X_{max}$

فيكون زمن المرور الأول $\frac{T_0}{4}$

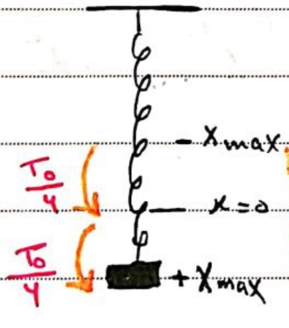
زمن المرور الثاني $\frac{3T_0}{4}$

زمن المرور الثالث $\frac{5T_0}{4}$

زمن المرور الرابع $\frac{7T_0}{4}$

أي أن زمن المرور في هذه الحالة

هو أعداد فردية من ربع الدور



Mohammad Alkhatib

/ /

الشكل العام للتابع الزمني للمطال : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

ثوابت

لاستنتاج التابع الزمني للمطال

ننطلق من شكله العام

نكتب الشكل العام ثم نوجد قيم الثوابت الثلاثة X_{max} ، ω_0 ، $\bar{\varphi}$

من أين نحصل على قيم الثوابت ؟!

1) X_{max} : من شروط البدء مثال إذا قال يهتز النابض بسعة اهتزاز $0.1\,m$

يكون $X_{max} = 0.1\,m$

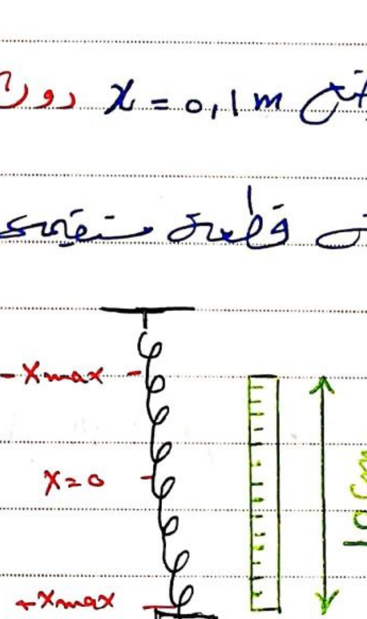
أو إذا قال نترك الجسم في اللحظة $t=0$ في الموضع $x = 0.1\,m$ دون

سرعة ابتدائية $\Leftarrow$ $x_{max} = 0.1\,m$

ملاحظة: قد يقول أن النواس يهتز فيرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة

طولها مثلاً $10\,cm$

فيكون $X_{max} = 5\,cm$



2) حساب النبض الخاص ω_0 $(rad.s^{-1})$:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad \text{أو} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{أو} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ التواتر (HZ)

3) حساب $\bar{\varphi}$ من شروط البدء بعد

التعويض في تابع المطال

كما فعلنا عند استنتاج

الشكل المختزل لتابع المطال

حساب الدور الخاص T_0 (s) :

$T_0 = \frac{t \text{ زمن الهزات}}{n \text{ عدد الهزات}}$ أو $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ أو $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

حساب السرعة عند موضع ما : $x = ?$

$V = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ أو $V = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - X^2}$

نعوض عن قيمة x في تابع المطال لكي نحسب الزمن t عند ذلك الموضع ثم نعوض عن قيمة t في تابع V

عندما يقال الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب $\Leftarrow$ $V > 0$

وعندما يقال الجسم يتحرك بالاتجاه السالب $\Leftarrow$ $V < 0$

حساب السرعة العظمى (طويلة) $V_{max} = \omega_0 X_{max}$ (موجبة)

حساب التسارع عند موضع ما : $\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{X}$

حساب التسارع الأعظمي (طويلة) $a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$ (موجب)

Mohammad Alkhatib

★ حساب الطاقة الميكانيكية (الكلية) :

$E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$

★ حساب الطاقة الكامنة عند موضع ما :

$E_p = \frac{1}{2} k X^2$

★ حساب الطاقة الحركية عند موضع ما :

نحسب الطاقة الكامنة عند ذلك الموضع ثم نعوض بالقانون

$E_k = E - E_p$

/ /

لحساب قوة الإرجاع $F = -kx$

لحساب شدة قوة الإرجاع $F = |-kx|$ (الشدة دوماً موجبة)

لحساب الاستطالة السكونية x_0 :

نعلم أن $F_0 = k x_0$ ← وعليه

ولكن $F_0 = W = m.g$

⇐ $k x_0 = mg$

⇐ $x_0 = \frac{m.g}{k}$

أو بما أن $k = m.\omega_0^2$
(حسب المعطيات)

$x_0 = \frac{m.g}{m\omega_0^2}$

$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$

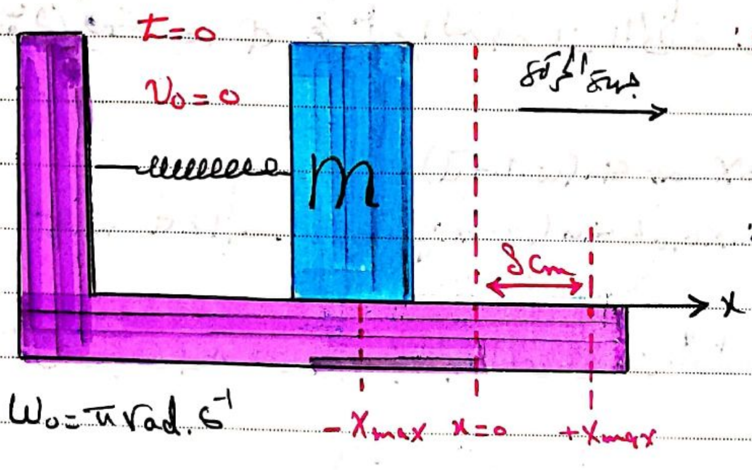
لحساب كمية الحركة : $P = m.V$
(عند موضع ما) ← السرعة في ذلك الموضع

لحساب كمية الحركة (العظمى) :

$P_{max} = m V_{max}$

/ /

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة:



1) تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجسم في الشكل المجاور هو:

$\bar{x} = 0,08\cos(\pi t+\pi)$

$\bar{x} = 8\cos(\pi t-\pi)$

$\bar{x} = 0,008\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

$\bar{x} = 0,8\cos\pi t$

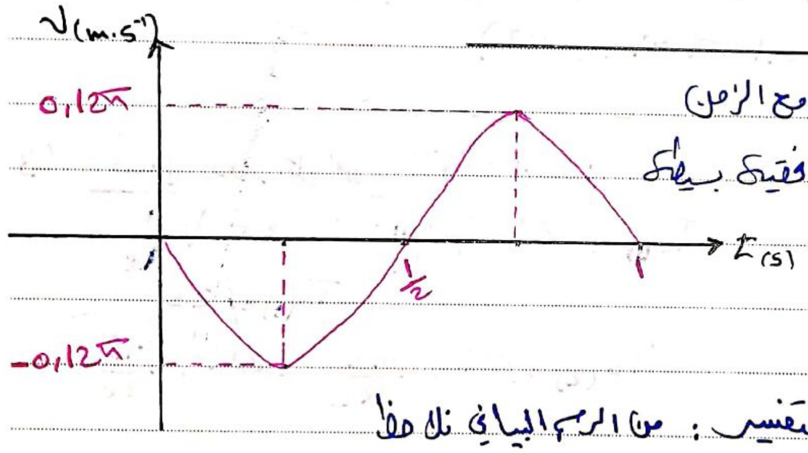
التفسير: $X_{max} = 8\times10^{-2}\ m$ وشروط البدء $(t=0 \quad x=-X_{max})$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

نعوض شروط البدء في تابع المطال لنجد φ: $-X_{max}=X_{max}\cos(\pi\times0+\varphi)$

$\Rightarrow \cos\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=\pi\ rad$

بتعويض الثوابت نحصل على تابع المطال $x=0,08\cos(\pi t+\pi)\ m$



2) الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك حركة توافقية بسيطة فيكون التابع الزمني للسرعة هو

$\bar{v}=0,06\pi\cos\pi t$

$\bar{v}=-0,06\pi\cos2\pi t$

$\bar{v}=-0,12\pi\sin2\pi t$

$\bar{v}=0,12\pi\sin\pi t$

التفسير: من الرسم البياني نلاحظ

$\omega_0X_{max}=0,12\pi \qquad T_0=1s$

ونعلم أن $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{1}=2\pi\ rad.s^{-1}$

$\Leftarrow X_{max}=\frac{0,12\pi}{2\pi}=0,6m$

ونلاحظ من شروط البدء $V=0 \quad t=0$

نعوض في تابع السرعة لنجد φ: $V=-\omega_0X_{max}\sin(\omega_0t+\bar{\varphi})$

$0=-2\pi\times6\times10^{-1}\sin(2\pi\times0+\bar{\varphi})$

$\Rightarrow \sin\bar{\varphi}=0 \Rightarrow \bar{\varphi}=$ إما $\varphi=0\ rad$ أو $\varphi=\pi\ rad$

نعوض قيمة $\varphi = 0$ في تابع السرعة عند اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s$ (هنا السرعة سالبة)

$$\bar{V} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{V} = -2\pi \times 0{,}06 \sin\left(2\pi \times \frac{1}{4} + 0\right) = -0{,}12\pi \ m.s^{-1}$$

وهو حل مقبول لأنه يجعل السرعة سالبة عند $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}$

نعوض قيمة $\varphi = \pi \ rad$ في تابع السرعة عند اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s$

$$\bar{V} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$V = -2\pi \times 0{,}06 \sin\left(2\pi \times \frac{1}{4} + \pi\right)$$

$$V = -2\pi \times 0{,}06 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +0{,}12\pi \ m.s^{-1}$$

وهو حل مرفوض لأنه يجعل السرعة موجبة عند $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s$

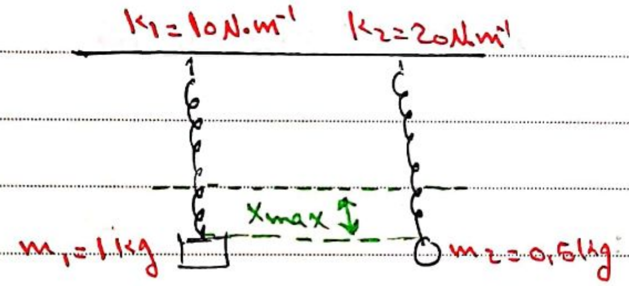
$\Leftarrow \varphi = 0 \ rad$

نعوض الثوابت $V = -2\pi \times 0{,}06 \sin(2\pi t + 0)$

$$V = -0{,}12\pi \sin(2\pi t)$$

---

3) نحسب دور كل من النواسين :



$$T_{0(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$T_{0(1)} = 2 s$$

$$T_{0(2)} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}5}{20}}$$

$$T_{0(2)} = 1 s$$

أي بعد 3 ثواني يكون النواس الأول قد أنجز هزة و نصف

$\Leftarrow$ يكون عند $-X_{max}$

و يكون النواس الثاني قد أنجز 3 هزات كاملة فيكون عند $+X_{max}$

$\Leftarrow$ الخيار d هو الصحيح لا يلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{max}$

و مطال الثاني $+X_{max}$

/ /

ثانياً: 1) تم الإثبات بطريقتين خلال شرح الدرس

2) a) تمت دراسة الحركة واستنتاج التابع الزمني للمطال خلال شرح الدرس ووجدنا أن حركة الجسم هي حركة جيبية انسحابية

Mohammad Alkhatib

b) $E_{tot} = E_k + E_p \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$

$E_k = \frac{1}{2} k x_{max}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} k (x_{max}^2 - x^2)$

$E_{k_A} = \frac{1}{2} k \left(x_{max}^2 - \frac{x_{max}^2}{4}\right) = \frac{1}{2} k \times \frac{3}{4} x_{max}^2 \Rightarrow E_{k_A} = \frac{3}{4} E_{tot}$

$E_{k_B} = \frac{1}{2} k \left(x_{max}^2 - \frac{x_{max}^2}{2}\right) = \frac{1}{2} k \times \frac{1}{2} x_{max}^2 \Rightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2} E_{tot}$

نستنتج: تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد مطاله

تزداد الطاقة الكامنة للجسم بازدياد مطاله

3) لحظة انفصال الجسم عن النابض يخضع لتأثير قوة ثقله فقط $\vec{W} = m.\vec{g}$

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{Const}$

عند الانفصال في مركز الاهتزاز: يكون الجسم مزود بسرعة ابتدائية والحركة مستقيمة متغيرة بانتظام طورها الأول صعود (متباطئة بانتظام) وطورها الثاني هبوط (متسارعة بانتظام) ⟸ قذف شاقولي نحو الأعلى

عند الانفصال في المطال الأعظمي الموجب: السرعة الابتدائية للجسم معدومة ⟸ سقوط حر

Mohammad Alkhatib

المسألة الأولى :

$K = 10\ N.m^{-1}$ $\qquad$ $m = ?\ kg$

$\bar{x} = 0,1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

1) بالمطابقة مع الشكل العام

$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

نجد أن: $X_{max} = 0,1\ m$ $\qquad$ $\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$ $\qquad$ $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} = 1\ kg$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ S$

3) حساب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6\ Cm$ $\underbrace{\text{والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور}}$

طريقة 1:

$V = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$V = \pi \sqrt{(0,1)^2 - (6 \times 10^{-2})^2}$

$V = \pi \sqrt{10^{-2} - 36 \times 10^{-4}}$

$V = \pi \sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}}$

$V = \pi \sqrt{64 \times 10^{-4}}$

$V = 8\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$

$V > 0$

طريقة 2: $E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0,1)^2$

$E_{tot} = 5 \times 10^{-2}\ J$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times (10) \times (6 \times 10^{-2})^2$

$E_p = 1,8 \times 10^{-2}\ J$

$E_k = E - E_p = 5 \times 10^{-2} - 1,8 \times 10^{-2}$

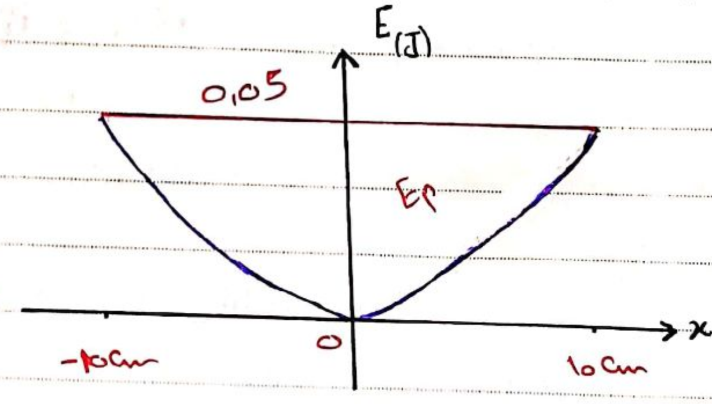
$E_k = 3,2 \times 10^{-2}\ J$

$E_k = \frac{1}{2} m.V^2 \Rightarrow 2E_k = m.V^2$

$V^2 = \frac{2E_k}{m} \Rightarrow V^2 = \frac{2 \times 3,2 \times 10^{-2}}{1}$

$V^2 = 64 \times 10^{-3} = \frac{64 \times 10^{-2}}{10} \Rightarrow V = \frac{8 \times 10^{-1}}{\pi} = \frac{8\pi \times 10^{-1}}{\pi^2} = \frac{8\pi \times 10^{-1}}{10} = 8\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$

/ /



المسألة الثانية:

$m = 0{,}4\ kg \qquad K = ?\ N.m^{-1}$

نلاحظ من الرسم البياني $X_{max} = 10\times10^{-2}\ m$

$E_{tot} = 5\times10^{-2}\ J$

1) $E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2$

$\Rightarrow 2E_{tot} = K X_{max}^2 \Rightarrow K = \dfrac{2E_{tot}}{X_{max}^2}$

$K = \dfrac{2\times5\times10^{-2}}{(10\times10^{-2})^2} = \dfrac{10^{-1}}{10^2\times10^{-4}} = 10\ N.m^{-1}$

2) $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4\times10^{-1}}{10}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4}{100}} = 2\pi\times\dfrac{2}{10}$

$T_0 = \dfrac{4\pi}{10} = \dfrac{12{,}5}{10} = 1{,}25\ s$

3) حساب السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز:

طريقة 1:

$E_{tot} = E_p + E_K$

وعند مركز الاهتزاز $x = 0 \Rightarrow E_p = 0$

$\Rightarrow E_{tot} = E_K$

$\frac{1}{2} K X_{max}^2 = \frac{1}{2} m V^2$

$V^2 = \dfrac{K X_{max}^2}{m}$

$V = \sqrt{\dfrac{K X_{max}^2}{m}} = \sqrt{\dfrac{10\times10^{-2}}{4\times10^{-1}}} = 0{,}5\ m.s^{-1}$

طريقة 2:

$E_{tot} = E_p + E_K$

عند مركز الاهتزاز $x = 0 \Rightarrow E_p = 0$

$E_{tot} = E_K$

$E_{tot} = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow 2E_{tot} = mV^2$

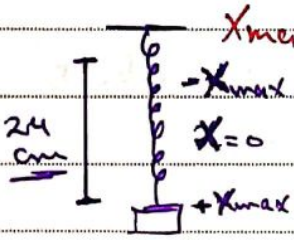
$V^2 = \dfrac{2E_{tot}}{m} \Rightarrow V = \sqrt{\dfrac{2E_{tot}}{m}}$

$V = \sqrt{\dfrac{2\times5\times10^{-2}}{4\times10^{-1}}} = 0{,}5\ m.s^{-1}$

المسألة الثالثة: $m = 1\,kg$

$n = 10$ هزات، في $t = 8$ ثواني $T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8\,s$

يرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $24\,cm \Leftarrow X_{max} = 12\,cm$



1) لاستنتاج الاستطالة السكونية ندرس حركة الجسم المعلق بالنابض خلال وضع السكون

جملة المقارنة: خارجية الجملة المدروسة: الجسم المعلق بالنابض

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{W}$ قوة ثقل الجسم $\vec{F}_{s0}$ قوة توتر النابض

بتطبيق شرط التوازن الانسحابي: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل: $W - F_{s0} = 0$

$$W = F_{s0}$$

$$m.g = k x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{m.g}{k}$$

وبما أن $k = \omega_0^2 . m \Leftarrow x_0 = \frac{m.g}{m.\omega_0^2}$

$$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$$

ونعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Leftarrow \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$

$$x_0 = \frac{g}{\frac{4\pi^2}{T_0^2}} \Rightarrow x_0^2 = \frac{T_0^2 \times g}{4\pi^2}$$

$$x_0 = \frac{(8\times10^{-1})^2 \times 10}{4\times10} = \frac{16}{100} = 16\times10^{-2}\,m$$

(2

$V_{max} = \omega_0 X_{max}$

$T_0 = 0{,}8 = \frac{4}{5} s$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4/5} = \frac{5\pi}{2} \ rad.s^{-1}$

$V_{max} = \frac{5\pi}{2} \times 12 \times 10^{-2} = 0{,}3\pi \ m.s^{-1}$

(3

$a = -\omega_0^2 \bar{x}$

$a = -\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 \times (10 \times 10^{-2})$

$a = -\frac{25\pi^2}{4} \times 10^{-1} = \frac{-25}{4} = -6{,}25 \ m.s^{-2}$

(4

$E_p = \frac{1}{2} K x^2$

$K = m.\omega_0^2 = 1 \times \frac{25\pi^2}{4} = \frac{250}{4} \ N.m^{-1}$

$E_p = \frac{1}{2} \times \frac{250}{4} \times (-4 \times 10^{-2})$

$E_p = \frac{1}{2} \times \frac{250}{4} \times 16 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-2} \ J$

Mohammad Alkhatib

حساب الطاقة الحركية نحسب أولاً الطاقة الكلية :

$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2$

$E_{tot} = \frac{1}{2} \times \frac{250}{4} \times (12 \times 10^{-2})^2$

$E_{tot} = 45 \times 10^{-2} \ J$

$E_K = E_{tot} - E_p = 45 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-2}$

$E_K = 40 \times 10^{-2} \ J$

/ /

المسألة الرابعة: $m = ?\,kg$ $K = 16\,N.m^{-1}$ $T_0 = 1\,s$

$X_{max} = 0{,}1\,m$

شروط البدء $t = 0\,s$ $x = \frac{X_{max}}{2}$ الجسم يتحرك بالاتجاه السالب ⟸ $V < 0$

1) $$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$X_{max} = 0{,}1\,m \quad ، \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad.s^{-1}$$

حساب φ: نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\frac{\cancel{X_{max}}}{2} = \cancel{X_{max}}\cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} +\frac{\pi}{3}\,rad \\ -\frac{\pi}{3}\,rad \end{cases}$$

نختار قيمة φ التي تجعل السرعة سالبة حيث: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

تابع السرعة: عندما $t = 0$ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$$V = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$V = -\omega_0 X_{max}\sin\bar{\varphi}$$

إذا أردنا أن تكون $V < 0$ وباعتبار $\omega_0 > 0$ و $X_{max} > 0$

يجب أن نختار قيمة $0 < \sin\varphi$

أي $\varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$ (لو كانت $\varphi = \frac{-\pi}{3}$ كان $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ وكانت $V > 0$

وهذا مخالف لشروط البدء)

نعوض قيم الثوابت في تابع المطال:

$$\bar{x} = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\,m$$

Mohammad Alkhatib

Alamal

2) عند المرور بوضع التوازن يكون $x=0$ ، نعوض في تابع المطال :

$$0 = 0{,}1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$$

إما $0{,}1 = 0$ (مستحيل) أو $\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$$\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$2\cancel{\pi} t = \frac{\cancel{\pi}}{6} + \cancel{\pi} k$$

$\div 2$

$$t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}$$

عند المرور الأول يكون $k=0 \Leftarrow t = \frac{1}{12}\,s$

عند المرور الثالث يكون $k=2 \Leftarrow t = \frac{1}{12} + \frac{2}{2} = \frac{13}{12}\,s$

حساب شدة قوة الإرجاع : $F = |-kx| = |-16 \times 0{,}1| = 1{,}6\,N$

3) حساب كتلة الكرة : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2}$

$$m = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40} = 0{,}4\,kg$$

المسألة العاشرة (1) ص 270 : $K = 10 N.m^{-1}$ $m = 0,1 kg$

شروط البدء $t = 0$ $x = 0 m$ والجسم يتحرك بالاتجاه السالب $V = -3 m.s^{-1}$

1) حساب ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{10^{-1}}} = \sqrt{10^{+2}} = 10 \, rad.s^{-1}$$

2) $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نقوم بتعيين الثوابت : $\omega_0 = 10 \, rad.s^{-1}$

حساب $\bar{\varphi}$ من شروط البدء : نعوض شروط البدء في تابع المطال :

$$0 = X_{max} \cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 0$$

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} \, rad \\ \bar{\varphi} = \frac{3\pi}{2} \, rad \end{cases}$$

نختار قيمة φ التي تجعل السرعة سالبة (الجسم يتحرك بالاتجاه السالب)

تابع السرعة عند البدء $V = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$

$$V = -\omega_0 X_{max} \sin\bar{\varphi}$$

كي تكون $V < 0$ يجب أن يكون $\sin\bar{\varphi} > 0$

مقبول $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ مرفوض $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$$\Leftarrow \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} \, rad$$

حساب X_{max} نعوض شروط البدء في تابع السرعة

$$-3 = -10 X_{max} \sin(10 \times 0 + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow X_{max} = 0,3 \, m$$

نعوض الثوابت في تابع المطال : $\bar{x} = 0,3 \cos(10t + \frac{\pi}{2}) \, m$

3) حساب شدة قوة الإرجاع : $F = |-kx|$

$$F = |-10 \times 3 \times 10^{-2}| = +0{,}3\,N$$

المسألة العاشرة (2) ص270 :

$m = 0{,}5\,kg$ $T_0 = 4\,s$ $X_{max} = 8 \times 10^{-2}\,m$

شروط البدء $t = 0$ $x = \frac{X_{max}}{2}$ الجسم متحرك بالاتجاه السالب $\Rightarrow$ $V < 0$

1) $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نقوم بتعيين الثوابت : $X_{max} = 8 \times 10^{-2}\,m$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,rad.s^{-1}$$

لحساب φ نعوض شروط البدء في تابع المطال :

$$\frac{\cancel{X_{max}}}{2} = \cancel{X_{max}} \cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3}\,rad \\ \varphi = -\frac{\pi}{3}\,rad \end{cases}$$

نختار قيمة φ التي تجعل $V < 0$

تابع السرعة عند شروط البدء $V = -\omega_0 X_{max} \sin\bar{\varphi}$

لكي تكون $V < 0$ يجب أن يكون $\sin\bar{\varphi} > 0$

مقبول $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ $\sin -\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$ مرفوض

$\Leftarrow$ $\varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$

نعوض من قيم الثوابت في تابع المطال $\bar{x} = 8 \times 10^{-2} \cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3})\,m$

2) عند المرور في وضع التوازن يكون $x=0$ ، نعوض في تابع المطال

$$0 = 8\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi K\right)$$

$$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi K$$

$$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi K$$

$$\frac{\cancel{\pi}}{2}t=\frac{\cancel{\pi}}{6}+\cancel{\pi}K$$

$\times 2$

$$t=\frac{1}{3}+2K$$

عند المرور الأول يكون $K=0$ ⇐ $t=\frac{1}{3}s$

عند المرور الثالث يكون $K=2$ ⇐ $t=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}s$

3) $F = m.a$ ← بشدة محصلة القوى

تكون F عظمى عندما يكون a أعظمي (باعتبار m ثابتة)

وتكون a أعظمية عندما $x=\pm X_{max}$ ⇐ F أعظمية عند $x=\pm X_{max}$

وتنعدم F عندما ينعدم a أي عندما $x=0$

لحساب F_{max} نحسب بدايةً a_{max} : $a_{max}=|\omega_0^2 X_{max}|$

$$\Rightarrow F_{max}=\omega_0^2 X_{max}\times m$$

$$F_{max}=\frac{\pi^2}{4}\times 8\times10^{-2}\times 0.5=0.1\,N$$

/ /

4) حساب k : $k = m.\omega_0^2$

$$k = 0,5 \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{5}{4} = 1,25\ N.m^{-1}$$

لا تتغيّر قيمة ثابت صلابة النابض بتغيّر الكتلة المعلّقة

5) حساب m كي يصبح $T_0' = 1s$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

بالتربيع

$$T_0'^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow m = \frac{T_0'^2 \cdot k}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{(1)^2 \times 1,25}{4 \times 10} = 0,03125\ kg$$

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نقطة مادية كتلتها $m=100g$ معلقة
بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي
تهتز بدور خاص $1s$ وبسعة الاهتزاز $16cm$
يفرض مبدأ الزمن عندما تكون النقطة المادية في مطالها الأعظمي الموجب، المطلوب:

الدورة الثانية عام 2013 — 85 درجات

1) استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقاً من شكله العام
2) عيّن لحظة المرور الأول للنقطة المادية في مركز الاهتزاز واحسب قيمة السرعة العظمى للنقطة المادية (طويلة")
3) احسب ثابت صلابة النابض
4) احسب تسارع النقطة المادية لحظة مرورها في وضع مطاله $x=5cm$
5) احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة
6) احسب الطاقة الحركية للنقطة المادية عندما يكون مطالها $x=10cm$

$X_{max} = 16\times10^{-2} m$ $\quad T_0 = 1s \quad m = 100g = 0.1kg$

شروط البدء: $t=0 \quad x=+X_{max}$

Mohammad Alkhatib

1) $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

نقوم بتعيين الثوابت: $X_{max} = 16\times10^{-2} m$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ rad.s^{-1}$$

لحساب φ نقوم بتعويض شروط البدء في تابع المطال:

$$X_{max} = X_{max}\cos(\omega_0\times 0 + \varphi)$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = 1$$
$$\varphi = 0 \ rad$$

نعوض قيم الثوابت في تابع المطال:

$$\bar{x} = 16\times10^{-2}\cos(2\pi t)\ m$$

$t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\ s \Leftarrow x = +X_{max}\quad t=0$ شروط البدء (2

زمن المرور الأول في مركز الاهتزاز

$$V_{max} = \omega_0 X_{max}$$

$$V_{max} = 2\pi \times 16 \times 10^{-2} = 32\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$$

(3

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نربع الطرفين

$$T_0^2 = 4\pi^2 \times \frac{m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 \times m}{T_0^2}$$

$$k = \frac{4 \times 10 \times 0{,}1}{(1)^2} = 4\ N.m^{-1}$$

أو

$$k = m.\omega_0^2$$

$$k = 0{,}1 \times (2\pi)^2$$

$$k = 0{,}1 \times 4\pi^2$$

$$k = 0{,}1 \times 4 \times 10$$

$$k = 4\ N.m^{-1}$$

Mohammad Alkhatib

(4

$$a = -\omega_0^2\, \bar{x}$$

$$a = -(2\pi)^2 \times (5 \times 10^{-2})$$

$$a = -4\pi^2 \times 5 \times 10^{-2}$$

$$a = -20 \times 10 \times 10^{-2}$$

$$a = -2\ m.s^{-2}$$

(5

$$E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

$$E = \frac{1}{2}(4)(16 \times 10^{-2})^2$$

$$E = 2 \times 256 \times 10^{-4} = 512 \times 10^{-4}\ J$$

16) نحسب الطاقة الحركية عندما $x = 10cm$ نحسب بداية E_p عند ذلك المطال؛

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}(4)(10\times10^{-2})^2$$

$$E_p = 2 \times 100\times10^{-4} = 2\times10^{-2} = 200\times10^{-4}\ J$$

$$E_k = E - E_p$$

$$E_k = 512\times10^{-4} - 200\times10^{-4}$$

$$E_k = 312\times10^{-4}\ J$$

/ /

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من جسم صلب كتلته $m = 2kg$
معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة
ثابت صلابته $K = 20 N.m^{-1}$ الدورة الأولى عام 2017
نزيح الجسم عن وضع توازنه شاقولياً نحو الأسفل بالاتجاه الموجب ضمن حدود
مرونة النابض مسافة قدرها $8cm$ و نتركه دون سرعة ابتدائية
في اللحظة $t = 0$ المطلوب :

1) احسب الدور الخاص لهذه الهزازة
2) استنتج التابع الزمني للمطال الحركي انطلاقاً من شكله العام
3) احسب سرعة الجسم لحظة مروره الأول في وضع التوازن
4) احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة .

$X_{max} = 8 \times 10^{-2} m$ ... $K = 20 N.m^{-1}$ $m = 2kg$

شروط البدء : $t = 0$ $X = +X_{max} = 8 \times 10^{-2} m$

1) $$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{20}}$$

$$T_0 = 2\cancel{\pi} \sqrt{\frac{2}{2 \times \cancel{10}}} \qquad \sqrt{10} = \pi$$

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{2}{2}} = 2\sqrt{1}$$

$$T_0 = 2 s$$

Mohammad Alkhatib

/ /

2) $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$:

نقوم بتعيين الثوابت : $X_{max} = 8 \times 10^{-2}\ m$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

لحساب φ نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$X_{max} = X_{max} \cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad$$

نعوض في قيم الثوابت في تابع المطال: $\bar{x} = 8 \times 10^{-2} \cos(\pi t)\ m$

3) حساب السرعة عند المرور الأول في وضع التوازن :

$$V = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$$

- يجب معرفة t لحساب السرعة ... بما أن شروط البدء $t = 0$ $x = +X_{max}$

⟸ زمن المرور الأول في مركز الاهتزاز $t = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} s$

نعوض في تابع السرعة :

$$V = -\pi \times 8 \times 10^{-2} \sin(\pi \times \tfrac{1}{2})$$

$$V = -8\pi \times 10^{-2} \sin(\tfrac{\pi}{2}) = -8\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$$

Mohammad Alkhatib

4) $E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$

$$E = \frac{1}{2} \times 20 \times (8 \times 10^{-2})^2$$

$$E = 10 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E = 64 \times 10^{-3}\ J$$

دورات (1)

هزاز توافقي بسيط سعة اهتزازها X_{max} دورها الخاص T_0 تضاعف سعة الاهتزاز فيصبح دورها الخاص T_0' يساوي:

$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ $T_0' = T_0$ $T_0' = \frac{1}{2}T_0$ $T_0' = 2T_0$

التفسير: الدور الخاص لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k النبض الخاص لحركته ω_0 (دورة أولى 2018)

نستبدل بالجسم جسماً آخر كتلته $m' = 2m$ وبالنابض نابضاً آخر ثابت صلابته $k' = \frac{1}{2}k$ فيصبح النبض الخاص الجديد ω_0':

$\omega_0' = \frac{\omega_0}{4}$ $\omega_0' = 2\omega_0$ $\omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$ $\omega_0' = 4\omega_0$

التفسير:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_0' = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{2m}}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{4m}}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0' = \frac{1}{2}\omega_0$$

Mohammad Alkhatib

Alamal

نواس الفتل غير المتخامد

هو عبارة عن ساق متجانسة معلقة من منتصفها (أو قرص متجانس معلق من مركزه) بسلك فتل شاقولي ثابت فتله K، يهتز في مستوٍ أفقي حول سلك الفتل بتأثير عزم مزدوجة الفتل

دراسة حركة نواس الفتل :

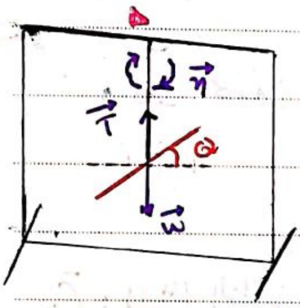
القوى الخارجية المؤثرة في الساق : 1) قوة ثقل الساق $\vec{W}$ 2) قوة توتر سلك التعليق $\vec{T}$

وعندما ندير الساق زاوية θ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي تنشأ في السلك مزدوجة فتل $\vec{\eta}$ (3

تقاوم عملية الفتل وتعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها

عزمها هو عزم إرجاع يتناسب طرداً مع زاوية الفتل θ ويعاكسها بالإشارة $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي) حول محور Δ ينطبق على سلك الفتل الشاقولي



$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

I_{Δ} : عزم عطالة الساق حول محور الدوران Δ $\bar{\alpha}$: التسارع الزاوي

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \quad (1)$$

إنّ عزم كل من قوة الثقل $\vec{W}$ وقوة التوتر $\vec{T}$ معدوم لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ

ولدينا عزم مزدوجة الفتل $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta}$

بالتعويض في العلاقة (1) :

$$0 + 0 - K\bar{\theta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

ونعلم أن $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$

$$-K\bar{\theta} = I_{\Delta} \cdot (\bar{\theta})''_t$$

$$\Leftarrow \quad (\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_{\Delta}}\bar{\theta} \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

و للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \underbrace{\theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\theta})}_{\theta}$$

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \quad (3)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (2) و (3) :

$$-\omega_0^2 \cancel{\theta} = -\frac{K}{I_\Delta} \cancel{\theta}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن K و I_Δ موجبان

نستنتج أن حركة نواس الفتل هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0

تابعها الزمني من الشكل : $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$

$\bar{\theta}$: المطال الزاوي في اللحظة t واحدته rad

ω_0 : النبض الخاص للحركة rad.s

θ_{max} : المطال الزاوي الأعظمي (السعة الزاوية) (rad)

$\bar{\theta}$: الطور الابتدائي للحركة (rad)

و لإيجاد علاقة الدور الخاص T_0 :

نعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

و وجدنا أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

سؤال دورة :

انطلاقاً من المعادلة التفاضلية

$$(\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta} \theta$$

برهن أن حركة نواس الفتل غير المتخامد هي حركة جيبية دورانية

ثم استنتج عبارة الدور T_0

40 درجة

Mohammad Alkhatib

ملاحظات هامة :

1) الدور الخاص يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم العطالة I_Δ .

2) الدور الخاص تناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل سلك التعليق K

3) الدور الخاص لا يتعلق بالسعة الزاوية θ_{max}

/ /

إيجاد التابع الزمني للمطال الزاوي يكون بإيجاد الثوابت θ_{max} و ω_0 و $\bar{\varphi}$

θ_{max} من شروط البدء ومن نص المسألة

$\bar{\varphi}$ من شروط البدء بعد تعويضها في الشكل العام لتابع المطال الزاوي

ω_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$ $\quad \omega_0 = 2\pi f_0$

حساب الدور الخاص : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad T_0 = \frac{1}{f_0}$ $\quad T_0 = \frac{t}{n}$ (t زمن النوسات، n عدد النوسات)

f_0 التواتر واحدته HZ

السرعة الزاوية ω : $\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ واحدتها $rad.s^{-1}$

لحساب السرعة الزاوية العظمى (طويلة"): $\omega_{max} = \omega_0 \theta_{max}$

التسارع الزاوي $\bar{\alpha}$: $\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta}$ واحدته $rad.s^{-2}$

لحساب التسارع الأعظمي (طويلة"): $\alpha_{max} = \omega_0^2 \theta_{max}$

الطاقات في نواس الفتل : واحدة الطاقات جول J

الطاقة الكامنة المرونية $E_p = \frac{1}{2} K \theta^2$

الطاقة الحركية $E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

أو $E_k = E_{tot} - E_p$

الطاقة الكلية (الميكانيكية") $E_{tot} = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$

أو $E_{tot} = E_p + E_k$

عزم قوة الارجاع : $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta}$

حساب K ثابت فتل سلك التعليق :

1) من القانون $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow K = \omega_0^2 I_\Delta$$

2) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_\Delta}{K}$$

$$K = \frac{4\pi^2 I_\Delta}{T_0^2}$$

3) من القانون : $K = K' \frac{(2r)^4}{l}$

K' ثابت خاص يتعلق بنوع السلك

r نصف قطر السلك l طول السلك

نلاحظ أن ثابت فتل سلك التعليق يتناسب طرداً مع نصف قطره وعكساً مع طوله

نستخدم القانون الأخير عند المقارنة بين ثابت الفتل الحالي وثابت الفتل الجديد بعد إجراء تغيير معين في l أو r

/ /

أختبر نفسي :

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة :

1) الإجابة الصحيحة هي الرسم البياني C

التعليل : عند ابتعاد الكتلتين عن محور الدوران يزداد عزم العطالة (بسبب زيادة r)
وبالتالي ستزداد قيمة الدور الخاص T_0 والذي بدوره يتناسب عكساً مع تواتر الاهتزاز f
فنستنتج أن تواتر الاهتزاز سوف ينقص (ينقص عدد الهزات خلال واحدة الزمن)
وهذا واضح في المنحني C .

2) الإجابة الصحيحة هي C

التعليل : تأخر حاصل في الوقت ⇐ الدور الخاص لنواس الفتل كبير ويجب إنقاصه
وإن إنقاص طول السلك يؤدي لزيادة قيمة ثابت فتل السلك k
وزيادة k تؤدي لنقصان الدور الخاص وبالتالي تصحيح التأخر الحاصل بالوقت

3) الإجابة الصحيحة هي d

التعليل : من الرسم نلاحظ أن $\omega_{max} = \frac{\pi^2}{8}$ ونلاحظ أن $2T_0 = 8s \Rightarrow T_0 = 4s$

وتابع السرعة من الشكل :

$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$

نعوض شروط البدء $\omega = 0$ ، $t = 0$ في التابع الزمني للسرعة الزاوية

$0 = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$

$\Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$

بقي حساب θ_{max} من ω_{max}

$\omega_{max} = \omega_0 . \theta_{max} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_0} = \frac{\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{8}\,4} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}$

$\theta_{max} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ومنه

نعوض الثوابت في تابع السرعة :

$\omega = \underbrace{-\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4}}_{-\frac{\pi^2}{8}} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

1) تمت الإجابة عليه خلال شرح النظري

12 ساقين متماثلتين $I_{D1} = I_{D2}$ ولدينا $T_{o1} = 2T_{o2}$

سلكي فتل متماثلين $\kappa_1 = \kappa_2$ و الاختلاف هنا ب l_1 و l_2 ($r_1 = r_2$)

$$T_{o1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{D1}}{\kappa_1}} \qquad T_{o2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{D2}}{\kappa_2}}$$

$$\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_{D1}}{\kappa_1}} = 2 \times \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_{D2}}{\kappa_2}}$$

نربع الطرفين

$$\frac{\cancel{I_{D1}}}{\kappa_1} = 4\,\frac{\cancel{I_{D2}}}{\kappa_2}$$

$$\frac{1}{\kappa_1} = 4\,\frac{1}{\kappa_2}$$

$$\frac{1}{\cancel{\kappa'}\,\frac{\cancel{(2r_1)^4}}{l_1}} = 4\,\frac{1}{\cancel{\kappa'}\,\frac{\cancel{(2r_2)^4}}{l_2}}$$

$$l_1 = 4l_2$$

بطريقة أخرى:

$$T_{o1} = 2T_{o2} \Rightarrow \frac{T_{o1}}{T_{o2}} = 2$$

$$\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{I_{D1}}}{\kappa_1}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{I_{D2}}}{\kappa_2}}} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} = 2$$

نربع الطرفين:

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 4$$

$$\frac{\cancel{\kappa'}\,\frac{\cancel{(2r_2)^4}}{l_2}}{\cancel{\kappa'}\,\frac{\cancel{(2r_1)^4}}{l_1}} = 4 \Rightarrow l_1 = 4l_2 \quad أي$$

/ /

المسألة الأولى : $M = 2kg$ كتلة القرص

$\theta_{max} = \frac{\pi}{4}\ rad$ $\quad k = 16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ $\quad r = 4\times10^{-2}\ m$

شروط البدء $(\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4}\ rad, t = 0)$

1) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$

$I_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$

$I_\Delta = \frac{1}{2}\times 2\times(4\times10^{-2})^2$

$I_\Delta = 16\times10^{-4}\ kg.m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}}$

$\pi \simeq \sqrt{10}$ $\quad T_0 = 2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{1}{\cancel{10}}} \Rightarrow T_0 = 2S$

2) $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

ولدينا $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}\ rad$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2}$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

نعوض شروط البدء في تابع المطال الزاوي لحساب $\bar{\varphi}$:

$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0\times 0 + \bar{\varphi})$

$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$

نعوض قيم الثوابت : $\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)\ rad$

3) $E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}(\frac{\pi}{8})^2$

$E_p = \frac{1}{8}\times10^{-2}\ J$

ولحساب E_k نحسب أولاً E_{tot} : $E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}(\frac{\pi}{4})^2 \Leftarrow E_{tot} = \frac{1}{2}\times10^{-2}\ J$

$E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2}\times10^{-2} - \frac{1}{8}\times10^{-2} = \frac{3}{8}\times10^{-2}\ J$

المسألة الثانية : ساق مهملة الكتلة ⇐ $I_\Delta = 0$

$K = 16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ $\quad m_1 = m_2 = 125\times10^{-3}\ kg$

$T_0 = 2,5\ s = \frac{5}{2}\ s$ $\quad \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$

شروط البدء ($t=0$ $\quad \theta = +\theta_{max}$)

1) $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = 2\pi\times\frac{2}{5} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$ $\quad \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$

نعوض شروط البدء في تابع المطال الزاوي لحساب $\bar{\varphi}$

$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0\times 0 + \bar{\varphi})$

$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$

نعوض قيم الثوابت : $\theta = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)\ rad$

2) لحظة المرور الأول في وضع التوازن نحسبها من $t = \frac{T_0}{4}$

(لأن شروط البدء $t=0$ $\theta = +\theta_{max}$) $\quad t = \frac{5}{8}\ s$

نعوض في تابع السرعة الزاوية : $\omega = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\pi^2 \simeq 10$ $\quad \omega = -\frac{4\pi}{5}\times\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\cancel{4}^{1}\pi}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{2\cancel{8}}\right)$

$\omega = -\frac{8}{3}\ rad.s^{-1}$

/ /

3) حساب طول الساق : (من علاقة I_Δ)

$$I_{\Delta\,جملة} = \cancel{I_{\Delta\,ساق}} + I_{\Delta\,m_1} + I_{\Delta\,m_2}$$

بما أن $m_1 = m_2$ ولهما نفس البعد عن محور الدوران $(r_1 = r_2) \Leftarrow I_{\Delta 1} = I_{\Delta 2}$

$$I_{\Delta\,جملة} = 2\,I_{\Delta 1}$$

$$I_{\Delta\,جملة} = 2 \times m_1 \times (r_1)^2$$

$$I_{\Delta\,جملة} = 2 \times m_1 \times \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta\,جملة} = \cancel{2}\, m_1 \times \frac{l^2}{\cancel{4}\,2}$$

$$I_{\Delta\,جملة} = \frac{1}{2} m_1 l^2$$

نعوض في عبارة T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta\,جملة}}{k}}$$

نربع الطرفين

$$T_0^2 = 4\pi^2 \times \frac{I_\Delta}{k}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \times \frac{\frac{1}{2} m_1 l^2}{k} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 l^2}{2k}$$

$$l^2 = \frac{2 T_0^2 k}{4\pi^2 m_1} = \frac{2 \times \frac{25}{\cancel{4}} \times \overset{4}{\cancel{16}} \times \cancel{10^{-3}}}{40 \times 125 \times \cancel{10^{-3}}}$$

$$l^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow l = \frac{1}{5} = 0{,}2\,m$$

Mohammad Alkhatib

Alamal

المسألة الثالثة : $l = ab = 40\times10^{-2}\,m$ طول الساق

a) $\theta_{max} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\,rad$ $I_{\Delta/c} = 2\times10^{-3}\,kg.m^2$ $T_0 = 1s$

شروط البدء : $t = 0$ $\theta = +\theta_{max}$:

Mohammad Alkhatib

1) $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad.s^{-1}$ ، $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad$

نعوض شروط البدء في تابع المطال الزاوي لحساب $\bar{\varphi}$:

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad$$

نعوض قيم الثوابت

$$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t)\ rad$$

2) نحسب زمن المرور الثاني في وضع التوازن (تذكر أن شروط البدء $\theta = +\theta_{max}$ $t = 0$)

$$t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3\times1}{4} = \frac{3}{4}\,s$$

نعوض في تابع السرعة الزاوية

$$\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = -2\pi\times\frac{\pi}{3}\sin\left(2\pi\times\frac{3}{4}\right) = \frac{20}{3}\ rad.s^{-1}$$

$(\sin\frac{3\pi}{2} = -1)$ الجسم يتجه بالاتجاه الموجب لذلك $\omega > 0$

3) $\bar{\alpha} = -\omega_0^2\,\theta$ $\theta = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}\,rad$

$$\bar{\alpha} = -(2\pi)^2\times\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\alpha = \frac{20\pi}{3}\ rad.s^{-2}$$

b) نثبت في طرفي الساق a و b كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2 = 75\times10^{-3}\,kg$

احسب قيمة T_0' ثم احسب k

عندما تتغير قيمة الكتل تتغير I_Δ مما يؤدي لتغير الدور T_0

$$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_{\Delta_1}}{\cancel{k}}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_\Delta'}{\cancel{k}}}}$$

$$\frac{T_0'}{T_0} = \sqrt{\frac{I_{\Delta_1}}{I_\Delta'}}$$

حساب I_Δ' :

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta\,m_1} + I_{\Delta\,m_2}$$

بما أن $m_1 = m_2$ ولهما نفس البعد عن محور الدوران $(r_1 = r_2)$ ⇐ $I_{\Delta\,m_1} = I_{\Delta\,m_2}$

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + 2I_{\Delta\,m_1} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + 2\times m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + \frac{1}{2}ml^2$$

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = 2\times10^{-3} + \frac{1}{2}(75\times10^{-3})(40\times10^{-2})^2$$

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = 8\times10^{-3}\ kg.m^2$$

$$\frac{T_0'}{T_0} = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} \Rightarrow \frac{T_0'}{T_0} = 2$$

$$T_0' = 2T_0 \Rightarrow T_0' = 2\,s$$

حساب K : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

أو من القانون $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow K = I_\Delta . \omega_0^2$$

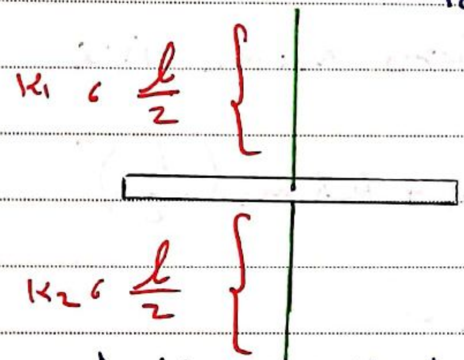
$\pi^2 \simeq 10$

$$K = (2\times10^{-3})(2\pi)^2 = 80\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$$

C) قسمنا سلك الفتل لقسمين متساويين $l_1 = l_2$ $K'_1 = K'_2$

ثابت فتل القسم الأول K_1
ثابت فتل القسم الثاني K_2 } القسمان متساويان بالطول ولهما نفس نوع المادة ⟸ $K_1 = K_2$

فيكون الدور الجديد $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{\underbrace{K_1+K_2}_{2K_1}}}$



$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{I_\Delta}}{2K_1}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{I_\Delta}}{K}}}$$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{2K_1}}$$

والآن نعبر عن K_1 بدلالة K بمقارنتهما

$$\frac{K_1}{K} = \frac{\cancel{K'}\,\frac{\cancel{(2r)^4}}{l'}}{\cancel{K'}\,\frac{\cancel{(2r)^4}}{l}}$$

من حالة K_1 يكون $l' = \frac{1}{2} l$ (قسمنا السلك)

$$\frac{K_1}{K} = \frac{l}{\frac{1}{2}l} \Rightarrow \frac{K_1}{K} = 2 \Rightarrow K_1 = 2K$$

نعوض :

$$\frac{T'_0}{T_0} = \sqrt{\frac{\cancel{K}}{2(2\cancel{K})}} \Rightarrow \frac{T'_0}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$T'_0 = \frac{1}{2} T_0 \Rightarrow T'_0 = \frac{1}{2}\ s$$

/ /

المسألة العاشرة (3) :

قرص نحاسي كتلته $M_1 = 0{,}12\,kg$ نصف قطره $R = 0{,}05\,m$

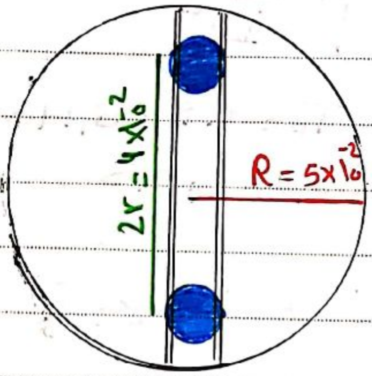
مثبت عليه ساق كتلتها $M_2 = 0{,}012\,kg$ طولها $L = 0{,}1\,m$

تحمل الساق في طرفيها كتلتين نعدهما نقطيتين

$m_1 = m_2 = 0{,}05\,kg$

تبعد الكتلتان عن بعضهما مسافة $2r = 0{,}04\,m$

ثابت فتل سلك التعليق $k = 8\times10^{-4}\,m.N.rad^{-1}$



1)
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta\,\text{جملة}}}{k}}$$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{قرص}} + I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta\,m_1} + I_{\Delta\,m_2}$$

بما أن $m_1 = m_2$ و $r_1 = r_2 \Leftarrow I_{\Delta\,m_1} = I_{\Delta\,m_2}$ أي $I_{\Delta\,m_1} + I_{\Delta\,m_2} = 2I_{\Delta\,m_1}$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta\,\text{قرص}} + 2I_{\Delta\,m_1}$$

$$I_{\Delta\,\text{قرص}} = \frac{1}{2}M_1R^2 = \frac{1}{2}(12\times10^{-2})(5\times10^{-2})^2 = 15\times10^{-5}\,kg.m^2$$

$$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{1}{12}M_2 l^2 = \frac{1}{12}(12\times10^{-3})(10^{-1})^2 = 1\times10^{-5}\,kg.m^2$$

$$I_{\Delta\,m_1} = m_1.r^2 = 5\times10^{-2}\times(2\times10^{-2})^2 = 2\times10^{-5}\,kg.m^2$$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = 1\times10^{-5} + 15\times10^{-5} + 4\times10^{-5} = 2\times10^{-4}\,kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}} = 2\pi\times\frac{1}{2} \Rightarrow T_0 = \pi\,s$$

2) المطلوب حساب البعد الجديد بين الكتلتين بعد أن كان $2r = 4\times10^{-2}\,m$

و بزيادة البعد بين الكتلتين يزداد I_Δ و بالتالي يزداد T_0

$$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_\Delta'}{\cancel{k}}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_\Delta}{\cancel{k}}}} \Longrightarrow \frac{T_0'}{T_0} = \sqrt{\frac{I_\Delta'}{I_\Delta}}$$

$$T_0 = \pi\, s = 3{,}14\, s$$

$I_\Delta = 2\times10^{-4}\, kg.m^2$ ولدينا $T_0' = T_0 + 0{,}86 = 4\, s$

بتربيع الطرفين ثم التعويض

$$\frac{(T_0')^2}{(T_0)^2} = \frac{I_\Delta'}{I_\Delta}$$

$\pi^2 \simeq 10$

$$\frac{16}{10} = \frac{I_\Delta'}{2\times10^{-4}} \Rightarrow I_\Delta' = 32\times10^{-5}\, kg.m^2$$

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{قرص}} + I_{\Delta\,\text{ساق}} + 2\, I'_{\Delta\, m_1}$$

تغيرت بتغير r

$$I'_{\Delta\,\text{جملة}} = 15\times10^{-5} + 1\times10^{-5} + 2\, m_1 (r')^2$$

$$32\times10^{-5} = 16\times10^{-5} + 2(5\times10^{-2})(r')^2$$

$$32\times10^{-5} = 16\times10^{-5} + 10^{-1}(r')^2$$

$$16\times10^{-5} = 10^{-1}(r')^2 \Rightarrow (r')^2 = 16\times10^{-4}$$

$$r' = 4\times10^{-2}\, m$$

و بالتالي البعد الجديد بين الكتلتين $2r' = 8\times10^{-2}\, m$

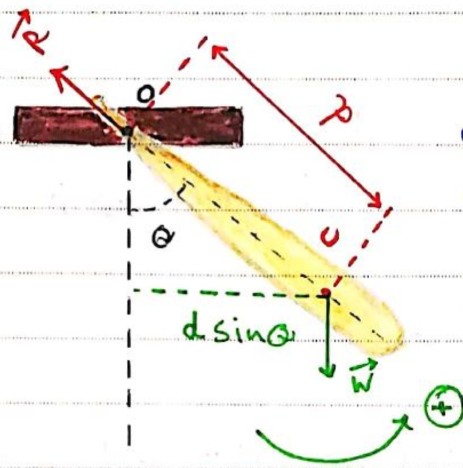
لكي يزداد الدور بمقدار $0{,}86\, s$

محمد

الاهتزازات غير التوافقية

النواس الثقلي غير المتخامد

النواس الثقلي المركب: هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته



الدراسة التحريكية:

نعلق جسماً صلباً كتلته m مركز عطالته c إلى محور دوران أفقي Δ مار من النقطة O من الجسم حيث البعد $d = OC$

نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوٍ شاقولي

القوى المؤثرة:

1) قوة ثقل الجسم $\vec{W}$ 2) قوة رد فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي):

العزم مقدار جبري قد يكون < موجب / سالب

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

وباختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد

$\bar{\Gamma}_{R/\Delta} = 0$ لأن حامل القوة R يمر من محور الدوران

عزم القوة = القوة × الذراع

ذراع القوة هو البعد العمودي بين حامل القوة و محور الدوران

ذراع قوة الثقل هو $d\sin\theta$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -(d\sin\theta)\,\overbrace{\overline{W}}^{m.g}$$

أي $-m.g.d\sin\theta = I_{\Delta} . \bar{\alpha}$

ولكن $-m.g.d\sin\theta = I_\Delta.(\theta)''_t \Leftarrow \bar{\alpha} = (\theta)''_t$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحوي $\sin\theta$ بدل θ حلّها ليس جيبياً وبالتالي فإنّ حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة $\theta \le 0.24\,rad$

في هذه الحالة يكون $\sin\theta \simeq \theta$ نعوض في العلاقة (1)

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\theta \qquad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$\omega = (\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (3)$$

بالمطابقة بين (2) و (3) :

$$-\frac{mgd}{I_\Delta}\theta = -\omega_0^2\theta$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0}$$

وهذا محقق لأن المقادير I_Δ و m و g و d موجبة

وبالتالي فإن حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0

استنتاج علاقة الدور الخاص: وجدنا أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

ونعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Mohammad Alkhatib

بالمطابقة: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$$

وهي العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السعة

T_0: دور النواس الثقلي الخاص بسعة زاوية صغيرة واحدته s ثانية

I_Δ: عزم عطالة الجسم الصلب واحدته $kg.m^2$

m: كتلة النواس (كتلة النواس كاملاً أي كتلة الساق أو القرص + الكتل المضافة) واحدتها kg

d: بعد محور الدوران عن مركز عطالة النواس واحدته m

يمكننا حساب d إما من الشكل مباشرة إن أمكن

أو بتطبيق علاقة التوازن الدوراني $\sum \Gamma_{\Delta/c} = 0$ حول محور دوران مار من مركز عطالة النواس:

أو بتطبيق العلاقة: $\boxed{OC = d = \frac{m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}}$

$\bar{r}$ مقدار جبري نعتبره موجب إذا كان مركز عطالة الكتلة تحت محور الدوران وسالباً إذا كان فوقه

ملاحظة هامة : كل أجزاء النواس الثقلي المركب لها نفس السرعة الزاوية ω
ولكنها تختلف بالسرعة الخطية v
ويمكن حساب السرعة الخطية لأي نقطة من العلاقة $v = r\,\omega$
حيث r بعد النقطة عن محور الدوران

ملاحظة:
عند حساب السعة الزاوية θ_{max} أو السرعة الزاوية ω
أو الطاقة الحركية E_k أو عمل القوة
نطبق نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_\Delta \omega_1^2$$

انتبه! في النواس المركب

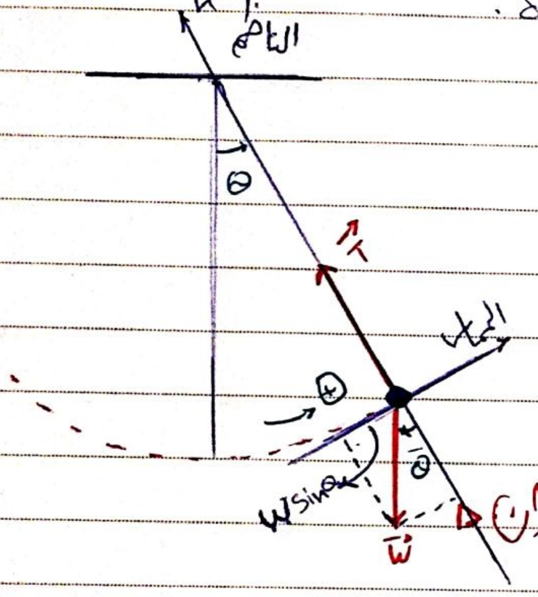
/ /

النواس الثقلي البسيط

تعريف النواس الثقلي البسيط:

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.



الدراسة التحريكية:

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W} = m\vec{g}$ ثقل الكرة $\vec{T}$ توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \alpha$$

$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \alpha$$

ولكن $\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل T يمر من محور الدوران

$$-\cancel{m}g \cdot \underbrace{l\sin\theta}_{\text{ذراع } W} = \underbrace{\cancel{m}l^2}_{I_\Delta}\alpha$$

$$-g\sin\theta = l\,(\theta)''_t$$

بالتعويض والاختصار: $(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا تقبل حلاً جيبياً لأنها تحوي $\sin\theta$ بدل θ

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة $\theta \leq 0,24\ rad$

يكون $\sin\theta \simeq \theta$

بالتعويض نجد: $(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}$ (1)

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن :

$$v = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$a = (\bar{\theta})'' = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \qquad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد : $-\omega_0^2 \theta = -\frac{g}{L}\theta$

ومنه $\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Leftarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} > 0}$

وهذا محقق لأن L و g مقادير موجبة

نستنتج أن حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية توافقية بسيطة نبضها الخاص ω_0

استنتاج علاقة الدور الخاص T_0 :

نعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ووجدنا أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\Leftarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Leftarrow T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

وبالتالي $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ واحدته s

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة.

ملاحظة : يمكن الوصول لعلاقة الدور الخاص للنواس البسيط انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

في حالة كرة النواس البسيط يكون $I_\Delta = mL^2$ ولدينا $d = L$ نعوض

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

/ /

نلاحظ أن: 1) لا يتعلق دور النواس البسيط بكتلته ولا بنوع مادة كرته

2) النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه (متواقتة فيما بينها)

3) يتناسب الدور الخاص للنواس البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط L وعكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية

كيف نحسب الدور الخاص للنواس الثقلي في حالة السعات الزاوية الكبيرة $\theta > 0{,}24\,rad$ ؟

يعطى دور النواس الثقلي في حالة السعات الزاوية الكبيرة بالعلاقة:

$$T_0' \simeq T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

T_0' ← الدور الخاص في حالة السعات الزاوية الكبيرة

T_0 ← الدور الخاص في حالة السعات الزاوية الصغيرة

خلال دراستنا لحركة النواس الثقلي البسيط (حركة خطية منحنية) سنستخدم رموز خطية ورموز زاوية ← مثال زاوي θ

سرعة خطية v

كتلة m

تسارع بقسميه a_t a_c

كما أننا نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي وليس العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

يمكننا الربط بين القيم الخطية والقيم الزاوية من خلال العلاقات:

$$v = r \cdot \omega = l \cdot \omega$$

Mohammad Alkhatib

$$a_t = r \cdot \alpha = l \cdot \alpha$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{l^2 \cdot \omega^2}{l} = l \cdot \omega^2$$

أو $\frac{v^2}{l}$

Alamal

/ /

سؤال هام ومتكرر : حساب طول النواس البسيط المواقت للنواس المركب

نواس بسيط مواقت للنواس المركب ← $T_{0\,بسيط} = T_{0\,مركب}$

نكون قد حسبنا $T_{0\,مركب}$ من علاقته ثم نعوض قيمة T_0 في علاقة $T_{0\,بسيط}$

ونقوم بعزل l ونحسبه

ملاحظة :

عند حساب السعة الزاوية θ_{max} أو السرعة الخطية v

او الطاقة الحركية E_K أو عمل القوة

نستخدم نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_K = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1 \to 2)}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

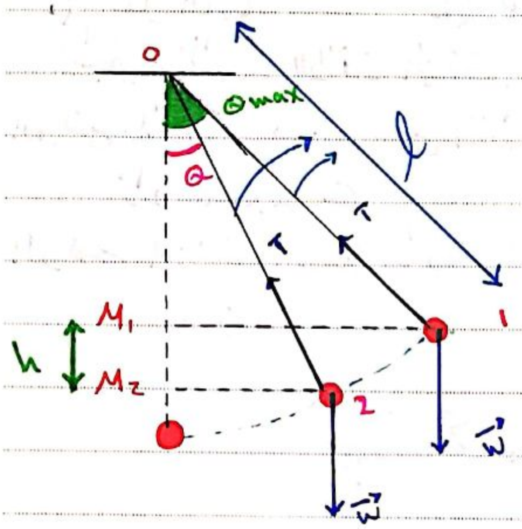
استخدمها في النواس البسيط

Mohammad Alkhatib

Alamal

استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس في نقطة من مسارها :

نزيح كرة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max}
ونتركها دون سرعة ابتدائية



القوى الخارجية المؤثرة :

ثقل الكرة $\vec{w}$ توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين :

الوضع الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ_{max} $v_1 = 0$

الوضع الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ $v_2 = ?$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة كما أن $E_{k_1} = 0$ حيث $v_1 = 0$

ولدينا $W_{\vec{w}} = +mgh$

من الشكل نجد أن $h = OM_2 - OM_1$

$OM_1 = l\cos\theta_{max}$ $OM_2 = l\cos\theta$

$$h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max} = l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

بالتعويض في نظرية الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 - 0 = \cancel{m}g\,l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

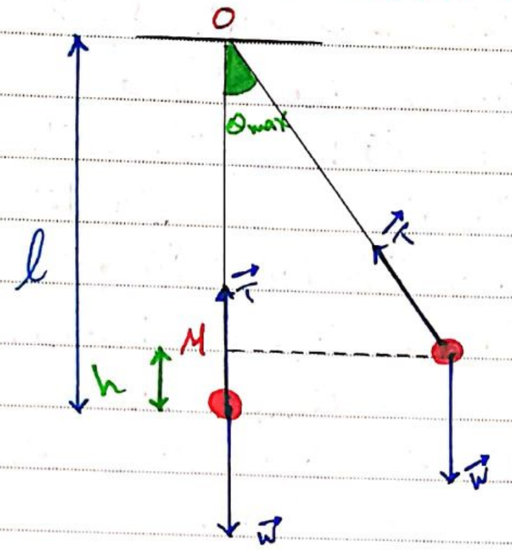
$$v_2^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v_2 = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

العلاقة المعبرة عن سرعة كرة النواس عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ

حالة خاصة: عند المرور في الشاقول $\theta = 0$ $(\cos\theta = 1)$

استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس عند المرور بالشاقول:



القوى الخارجية المؤثرة:

1) ثقل الكرة $\vec{W}$ 2) توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الوضع الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ_{max} $v_1 = 0$

الوضع الثاني: حيث يكون الخيط على الشاقول $\theta = 0$ $v_2 = ?$

$$\Delta E_{12} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة كما أن $E_{k1} = 0$ لأن $v_1 = 0$

ولدينا $\bar{W}_{\vec{W}} = +mgh$

من الشكل نجد أن $h = l - OM$

$$OM = l\cos\theta_{max} \Rightarrow h = l - l\cos\theta_{max}$$

$$h = l(1 - \cos\theta_{max})$$

بالتعويض في نظرية الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 - 0 = +\cancel{m}gl(1 - \cos\theta_{max})$$

$$v_2^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$$

العلاقة المعبرة عن سرعة كرة النواس عند المرور بالشاقول

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}}$$

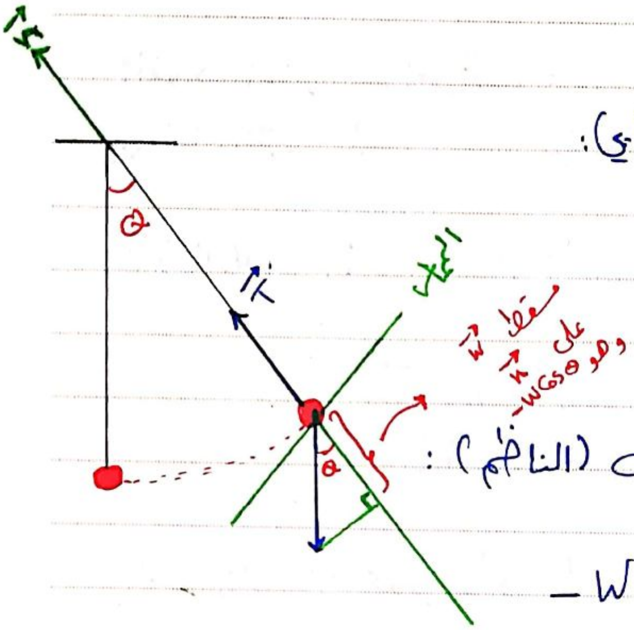
استنتاج علاقة قوة توتر الخيط في نقطة ما :

نزيح كرة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ ونتركها دون سرعة ابتدائية

القوى الخارجية المؤثرة :

١) ثقل الكرة $\vec{W}$ ٢) قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:



$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (الناظم) :

$$-W\cos\theta + T = m.a_c$$

ولكن $a_c = \dfrac{v^2}{l}$

$$-W\cos\theta + T = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\frac{v^2}{l} + W\cos\theta$$

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg\cos\theta$$

ولدينا $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \Leftarrow v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

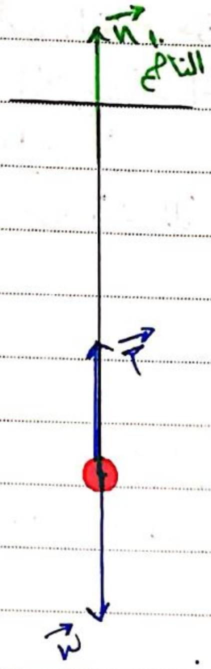
$$T = m\frac{2g\cancel{l}(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{\cancel{l}} + mg\cos\theta$$

$$T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

حالة خاصة عند المرور في الشاقول $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$)

استنتاج علاقة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول :



القوى الخارجية المؤثرة :

1) ثقل الجسم $\vec{W}$ 2) قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (الناظم) :

$$-W + T = m.a_c$$

ولكن $a_c = \frac{v^2}{l}$

$$\Rightarrow T = m\frac{v^2}{l} + W$$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg$$ ← في حال أعطاني قيمة v في نص المسألة نكتفي بالاستنتاج هنا ونعوض

وعند الشاقول $v^2 = 2gl(1-\cos\theta_{max})$

$$T = m\frac{2g\cancel{l}(1-\cos\theta_{max})}{\cancel{l}} + mg$$

$$T = 2mg - 2mg\cos\theta_{max} + mg$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

Alamal

اختبر نفسي / /

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة :

1)

الميقاتية متقدمة بالوقت ← الدور صغير ويجب أن نجعل الدور أكبر

الخيار الصحيح هو : a) إيقاف الميقاتية وخفض القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها

لأن ذلك يؤدي لزيادة بعد القرص عن محور الدوران وبالتالي تزداد I_Δ ويزداد T_0

2) الميقاتية التي في الطابق الأخير يكون عندها تسارع الجاذبية أقل
مما يؤدي لزيادة T_0 لها وبالتالي سوف تتأخر الميقاتية ويجب تعديلها
فالجواب الصحيح هو c

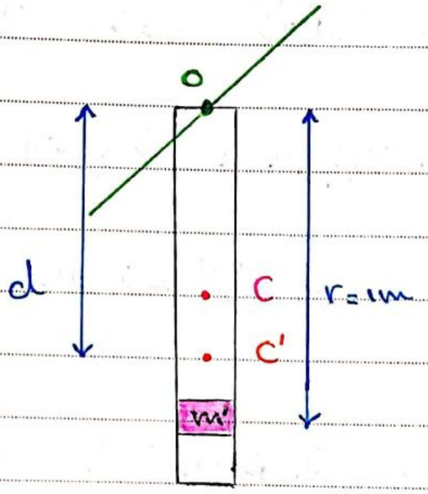
3) الشخص B ستكون سرعته الخطية هي الأكبر
لأنه عند المرور بوضع الشاقول تكون v عظمى والشخص B سيكون واقعاً على الشاقول
لأنه يقع في مركز الأرجوحة وبالتالي ستكون سرعته العظمى

Mohammad Alkhatib

ثانياً: المسألة الأولى :

كتلة الساق $M = 0,5kg$ طول الساق $l = 1,5m$

الكتلة المثبتة $m' = 0,5kg$ بعدها $r = 1m$ عن Δ



1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta\,m'}$$

بعد مركز عطالة الساق c عن محور الدوران

$$I_{\Delta\,\text{ساق}} = I_{\Delta,c} + Md^2$$

حسب نظرية هايغن

$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

نوحد المقامات ونجمع ثم نبسط الكسر

$$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}\times 0,5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{3}{8}\,kg.m^2$$

$$I_{\Delta\,m'} = m'.r^2$$

$$I_{\Delta\,m'} = 0,5\times(1)^2 = 0,5\,kg.m^2$$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = 0,5 + \frac{3}{8} = \underset{(4)}{\frac{1}{2}} + \underset{(1)}{\frac{3}{8}}$$

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}\,kg.m^2$$

$$m = M + m'$$

$$m = 0,5 + 0,5 = 1kg$$

بعد مركز عطالة الساق عن محور الدوران — بعد m' عن المحور

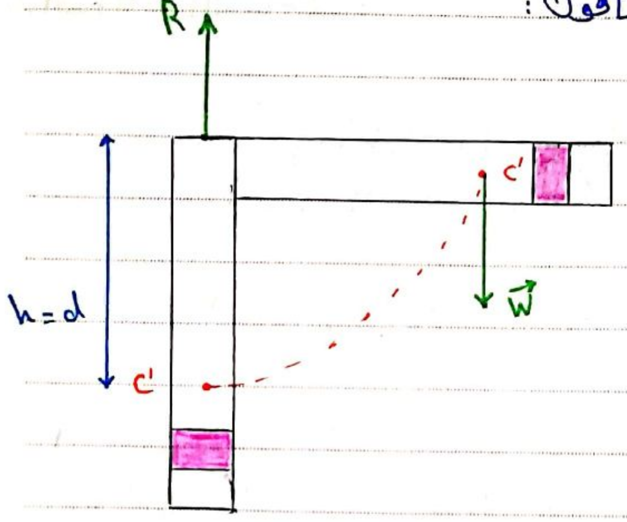
$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{M\times d + m' r'}{m' + M}$$

$$d = \frac{(0,5\times\frac{3}{4}) + (0,5\times 1)}{1}$$

$$d = \frac{7}{8}m$$

$$T_0 = \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{7/8}}{1\times\cancel{10}\times\cancel{7/8}}}$$

$$T_0 = 2s$$



2) حساب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول:

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الوضع الأول: $\theta = \theta_{max}$ $\quad \omega = 0$

الوضع الثاني: عند المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$\Delta E_k = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = \bar{W}_{\vec{w}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

حيث $E_{k1} = 0$ $\omega = 0$ (ترك دون سرعة ابتدائية)

$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\bar{W}_{\vec{w}} = +(m+m')gh$$

$$h = d \Rightarrow \qquad E_{k2} = (m+m')\,g\,d$$

$$= 1 \times 10 \times \frac{7}{8} = \frac{70}{8}\ \text{J}$$

حساب السرعة الخطية للكتلة m' عندئذٍ:

تمتلك النواس الثقلي نفس السرعة الزاوية لأي نقطة من نقاطه ولكن تختلف هذه النقاط بالسرعة الخطية

ويمكن الربط بينهما من العلاقة: $v = r \cdot \omega$ $\quad r$: بعد النقطة عن المحور

نحسب أولاً ω من علاقة E_k: $\quad E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2E_k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}}$$

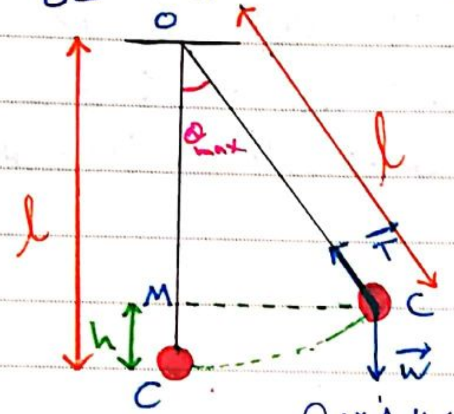
$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times \frac{70}{8}}{7/8}} = \sqrt{20}\ \text{rad}\,s^{-1}$$

حساب $v_{m'}$: $\quad v_{m'} = \omega \times r$

$$= \sqrt{20} \times 1 = \sqrt{20}\ \text{m}\,s^{-1}$$

/ /

المسألة الثانية: $L = 1\,m$ لـ $I_{\Delta/O} = 0\,kg.m^2$ ⇐ مهملة الكتلة



$m_1 = 100g = 0,1\,kg$

$l = 40\,cm = 40 \times 10^{-2}\,m$

$V_2 = 2\,m.s^{-1}$ سرعة الكرة لحظة المرور بالشاقول

1) لحساب السعة العظمى θ_{max} نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الوضع الأول: عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ_{max} $\quad V_1 = 0\,m.s^{-1}$

الوضع الثاني: عندما يكون الخيط على الشاقول $\theta = 0$ $\quad V_2 = 2\,m.s^{-1}$

$$\Delta E_{K} = \Sigma \bar{W}_{\vec{F}} \Rightarrow E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأن السرعة بالوضع الأول معدومة ولدينا $\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\bar{W}_{\vec{W}} = m_1 g h$$

$$h = OC - OM$$

$$h = l - l\cos\theta_{max} \Rightarrow h = l(1 - \cos\theta_{max})$$

نعوض في نظرية الطاقة الحركية $\frac{1}{2}\cancel{m_1} V_2^2 = \cancel{m_1} g\, l(1 - \cos\theta_{max})$

$$V_2^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{V_2^2}{2gl}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{V_2^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{4}{2 \times 10 \times 40 \times 10^{-2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad$$

Mohammad Alkhatib

Alamal

2) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي :

القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{W}$ قوة ثقل الكرة $\vec{T}$ قوة توتر الخيط

$$\sum \vec{F} = m_1 . \vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m_1 . \vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته :

$$-W + T = m_1 . a_c$$

ولكن $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m_1 g + m_1 \frac{v^2}{l} = m_1 \left(g + \frac{v^2}{l} \right)$$

$$T = 0{,}1 \left(10 + \frac{4}{40 \times 10^{-2}} \right)$$

$$T = 2\ N$$

أو بطريقة أخرى :

$$-W + T = m_1 . a_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{L}$$

ولدينا $v^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$

عند الشاقول

في حال لم تعطى قيمة السرعة الخطية نطبق هذه الطريقة

بالتعويض :

$$T = m_1 \frac{2gL(1 - \cos\theta_{max})}{L} + m_1 g$$

$$T = 2m_1 g(1 - \cos\theta_{max}) + m_1 g$$

$$T = 3m_1 g - 2m_1 g \cos\theta_{max} \Rightarrow T = m_1 g(3 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = 0{,}1 \times 10 \left(3 - (2 \times 0{,}5)\right) = 2N$$

Mohammad Alkhatib

Alamal

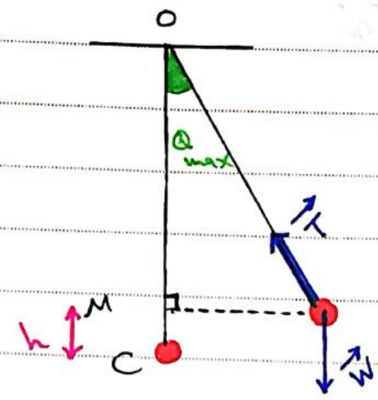
/ /

$L = 1.6\,m$ $m = 0.5\,kg$ $h = 0.8\,m$ المسألة الثالثة :

1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين :

الوضع الأول : عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ_{max} $v = 0\,m.s^{-1}$

الوضع الثاني : عندما يكون الخيط على الشاقول $\theta = 0\,rad$ $v = ?$



$$\Delta E_K = \sum W_{\vec F}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec W} + W_{\vec T}$$

$E_{K_1} = 0$ لأن السرعة عند الوضع الأول معدومة ولدينا $W_{\vec T} = 0$ لأن حامل $\vec T$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$W_{\vec W} = +mgh$

Mohammad Alkhatib

نعوض في نظرية الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - 0 = \cancel{m}gh + 0$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

وهي العلاقة المعبرة عن سرعة كرة النواس لحظة المرور بالشاقول

$$v = \sqrt{2\times10\times0.8} = \sqrt{16} = 4\,m.s^{-1}$$

2) يمكننا استنتاج قيمة θ_{max} من عبارة h حيث : $h = OC - OM$

$$h = l - l\cos\theta_{max} \Rightarrow h = l(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta_{max} = \frac{h}{l} \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{h}{l}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{0.8}{1.6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad$$

/ /

3) حساب الدور الخاص: انتبه $0.24\,rad < \theta_{max}$

Mohammad Alkhatib

$$T_0' \simeq T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-1}}{10}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{16\times10^{-2}} = 8\pi\times10^{-1} = \frac{8\pi}{10}\,s$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{4\pi}{5}\,s$$

$$T_0' = \frac{4\pi}{5}\left[1 + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{16}\right]$$

$$T_0' \simeq \frac{4\pi}{5}\left[1 + \frac{\pi^2}{9\times16}\right] = \frac{4\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\times\frac{\pi^2}{9\times16}$$

$$T_0' = \frac{77\pi}{90}\,s$$

4) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{W}$ قوة توتر الخيط $\vec{T}$

$$\sum\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = m.a_c$$

وبما أن $a_c = \frac{v^2}{l}$ ⇐

$$T = mg + m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

وهي العلاقة المطلوبة

$$T = 0.1\left(10 + \frac{16}{1.6}\right) = 10\,N$$

المسألة الرابعة : $L = 1m$ ساق مهملة الكتلة

$m_1 = 0{,}4\,kg$ $\quad m_2 = 0{,}2\,kg$

1) $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{mgd}}$

$T_0 = 2\pi$

$I_\Delta = \cancel{I_{\Delta}}_{\text{ساق}} + I_{\Delta_{m_1}} + I_{\Delta_{m_2}}$

مهملة الكتلة

$I_{\Delta_{m_1}} = m_1 \cdot r_1^2 = 0{,}4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 0{,}1\ kg.m^2$

$I_{\Delta_{m_2}} = m_2 \cdot r_2^2 = 0{,}2(1)^2 = 0{,}2\,kg.m^2$

$\Rightarrow I_{\Delta_{\text{ساق}}} = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3\,kg.m^2$

ساق مهملة الكتلة $\quad m = m_1 + m_2 = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6\,kg$

$$d = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}4 \times 0{,}5) + (0{,}2 \times 1)}{0{,}6}$$

$$d = \frac{2}{3}\,m$$

$$T_0 = 2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{0{,}3}{0{,}6 \times \cancel{10} \times \frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$T_0 = \sqrt{3}\ s$$

$$V_{c'} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \, m.s^{-1} \quad (a/2$$

من خلال السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس يمكننا حساب السرعة الزاوية للنواس لحظة مروره بالشاقول ω ومن ثم نحسب V_{m_2} باعتبار ω هي ذاتها

$$V_{c'} = \omega \times r_{c'} \quad (r_{c'} \to d)$$

$$\omega = \frac{V_{c'}}{d} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$\omega = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \, rad.s^{-1}$$

$$V_{m_2} = \omega \times r_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \, m.s^{-1}$$

b) نحسب السعة العظمى θ_{max} نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الوضع الأول: $\theta = \theta_{max}$ حيث $\omega = 0$

الوضع الثاني: $\theta = 0$ حيث $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \, rad.s^{-1}$

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$E_{k_1} = 0$ حيث $\omega = 0$ ولدينا $\overline{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لم تنتقل

$$\overline{W}_{\vec{W}} = mgh \longrightarrow h = OC' - OM$$

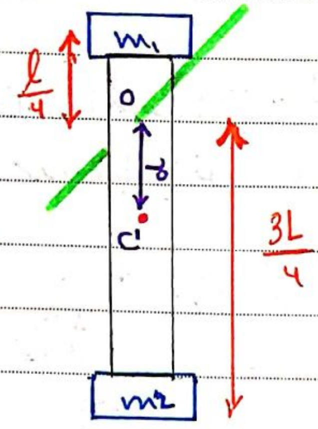
$$h = d - d\cos\theta_{max} = d(1 - \cos\theta_{max})$$

نعوض في نظرية الطاقة الحركية: $\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgd(1 - \cos\theta_{max})$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{mgd}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}3 \times \frac{4\pi^2}{3}}{0{,}6 \times 10 \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} \, rad$$

المسألة الخامسة:



$$\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}\ rad$$

$$T_0 = 2.5\,s = \frac{5}{2}\,s$$

1) $$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}\ rad$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = 2\pi \times \frac{2}{5} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال الزاوي لحساب $\bar{\varphi}$:

$$\cancel{\theta_{max}} = \cancel{\theta_{max}}\cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$$

نعوض الثوابت في تابع المطال الزاوي $\theta = \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)\ rad$

2) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

ساق مهملة الكتلة

$$I_{\Delta\,جملة} = \cancel{I_{\Delta\,ساق}} + I_{\Delta\,m_1} + I_{\Delta\,m_2} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I_{\Delta\,جملة} = m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_2\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}m_1 l^2 + \frac{9}{16}m_2 l^2$$

$$m' = m_1 = m_2 \Rightarrow I_{\Delta\,جملة} = \frac{5}{8}m' l^2$$

$$m = m_1 + m_2 = m' + m' = 2m'$$

$$d=\frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}=\frac{m_1 r_1+m_2 r_2}{m_1+m_2}=\frac{m'\times\left(-\frac{l}{4}\right)+m'\left(\frac{3l}{4}\right)}{2m'}$$

$$d=\frac{\frac{1}{2}m' l}{2m'}=\frac{l}{4}$$

نعوض في علاقة T_0 :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}\cancel{m'}\, l^{\cancel{2}}}{2\cancel{m'}\times g\times\frac{\cancel{l}}{4}}}$$

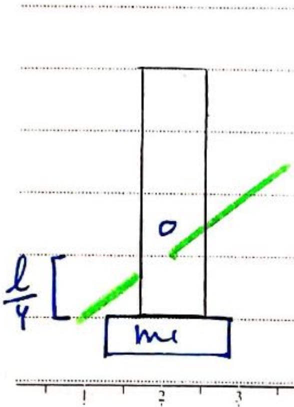
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{5\,l\times\cancel{4}}{\cancel{8}\times 2\times g}}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{5\,l}{4\,g}}$$

$$T_0^2=\cancel{4}\pi^2\,\frac{5l}{\cancel{4}g}=\frac{5\pi^2 l}{g}$$ نربع الطرفين

$$\Rightarrow l=\frac{T_0^2\times g}{5\pi^2}=\frac{\frac{25}{4}\times 10}{5\times 10}=\frac{5}{4}=1{,}25\,m$$

$$\omega_{max}=\omega_0\,\theta_{max}=\frac{4\cancel{\pi}}{5}\times\frac{1}{2\cancel{\pi}}=\frac{2}{5}=0{,}4\ rad.s^{-1}$$ (3)

4) عندما تنفصل الكتلة m_2 العلوية عن الساق ستدور الساق وتجعل الكتلة m_1
في الأسفل حتى تتوازن فيصبح شكل النواس كما يلي:



وبالتالي :

$$T_0'=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta'}{m' g d'}}$$

$$I_O = I_{O_{m_1}} = m'\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} m' l^2$$

أصبح r_1 موجب

$m = m'$ لأن $\quad d = \dfrac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} = \dfrac{m'\left(+\frac{l}{4}\right)}{m'} = \dfrac{l}{4}$

$$T_O' = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{16}\cancel{m'} l^{2}}{\cancel{m'}\, g\, \frac{\cancel{l}}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{4}\, l}{\cancel{16}\,4\, g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}}$$

$$T_O' = 2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{4\times\cancel{10}}} = 2\sqrt{\frac{5}{16}}$$

$$T_O' = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,s$$