الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم اللجنة العليا للاختبارات لجنة المطبعة السرية المركزية	بسم الله الرحمن الرحيم اختبار مادة :التفاضل والتكامل لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي) العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م	اليوم : السبت التاريخ : ٢٣/ ٧/ ٢٠١٧م الزمن : ثلاث ساعات الفترة : واحدة النموذج الأول

اختبار مادة : **التفاضل والتكامل** الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

السؤال الأول

أ) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل مما يأتي :

١) إذا كانت د(س) = جتا٤س ؛ فإن د‴ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = − ١٦ (×) ✓

التصحيح : د‴ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ١٦

٢) إذا كانت د(س)= ٨ س−٤(م − ٣) س^{٢}، فإن بيان الدالة مقعراً نحو الأسفل عندما م ∈ [٣، ∞ [(×) ٦

التصحيح : عندما م ∈] ٣ ، ∞ [

٣) $\frac{ء}{ء س}$ $\int_{-١}^{٢}$ (هـ^{س} + س) ء س = صفر (√)

توضيح مشتقة العدد الثابت = صفر

ب) بين أن الدالة د(س) = $\sqrt{س - ١}$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [١، ٣]، ثم أوجد قيمة جـ الناتجة من المبرهنة .

الحل ⇓

١) م . ت = [١ ، ∞ [

∵ [١ ، ٣] ⊂ [١ ، ∞ [

∴ الدالة متصلة على [١ ، ٣]

٢) دَ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

م . ت =] ١ ، ∞ [

∵] ١ ، ٣ [⊂] ١ ، ∞ [

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على] ١ ، ٣ [

∴ د(س) تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة

وبالتالي ∃ جـ ∈] ١ ، ٣ [:

دَ (جـ) = $\frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١}$

∴ $\frac{١}{\cancel{٢}\sqrt{جـ - ١}}$ = $\frac{\sqrt{٣ - ١} - \sqrt{١ - ١}}{\cancel{٢}}$ (×٢) ٤

⇐ $\frac{١}{\sqrt{جـ - ١}}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{١}$ ⇐ $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{جـ - ١}$ = ١ (بالتربيع)

⇐ ٢(جـ − ١) =١ (÷٢)

⇐ جـ − ١ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ جـ = $\frac{٣}{٢}$ ∈] ١ ، ٣ [

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١) إذا كانت: دَ(س) =٣س^{٢} − م س، وكانت (٢ ، ٥) نقطة حرجة للدالة د(س) فإن النقطة قيمة = صغرى محلية .

٢) إذا كانت د(س) = ٣ س ، ق (س) = س^{٢} + ١ ، فإن (د ∘ ق)َ (− ٢) = −١٢ .

٣) $\int$ س جا س^{٢} (جتا س^{٢}) ء س = $\frac{-١}{٤}$ جتا^{٢} س^{٢} + ث أو $\frac{١}{٤}$ جا^{٢} س^{٢} + ث ٦

للأسئلة بقية في الصفحة الثانية ⟸

تابع السؤال الثاني

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، د (س) = { ظا٤س قتا أ س ، $\frac{-\pi}{9}$ < س < ٠ ؛ $\frac{1}{9}$ (س + ٤) ، س ≥ ٠ }

الحل : ∵ د(س) متصلة

∴ د(٠) = نهـا (س ← ٠) د(س)

∴ $\frac{1}{9}$ (س+٤) = نهـا (س ← ٠) ظا ٤ س قتا أ س

⇐ $\frac{1}{9}$ (٠+٤) = نهـا (س ← ٠) ظا٤س × $\frac{1}{\text{جاأس}}$ (÷ع.ت)

⇐ $\frac{4}{9}$ = نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{ظا٤س} \times \frac{\text{٤س}}{\text{٤س}}}{\text{جاأس} \frac{\text{أس}}{\text{أس}}}$

⇐ $\frac{4}{9}$ = $\frac{4}{\text{أ}}$ ⇐ ٤أ = ٤ × ٩ (÷٤) ⇐ $\boxed{\text{أ} = 9}$

أ) إذا كان : جا ٣ س = (١ − ص²)² ؛ فأثبت أن : ص صَ = $\frac{-3}{4}$ ظتا ٣س (١ − ص²) .

الحل :

∵ جا (٣ س) = (١ − ص²)² (نشتق العلاقة الضمنية)

∴ ٣جتا٣ س = ٢ (١ − ص²) × −٢ص صَ [÷ −٤(١ − ص²)]

∴ ص صَ = $\frac{\text{٣جتا ٣س}}{-4(1-\text{ص}^2)}$ × $\frac{(1-\text{ص}^2)}{(1-\text{ص}^2)}$

⇐ ص صَ = $\frac{-3}{4}$ $\frac{\text{جتا٣س}}{[(1-\text{ص}^2)^2]}$ × (١ − ص²)

⇐ ص صَ = $\frac{-3}{4}$ $\frac{\text{جتا٣س}}{\text{جا ٣ س}}$ × (١ − ص²)

⇐ ص صَ = $\frac{-3}{4}$ ظتا ٣ س × (١ − ص²)

السؤال الثالث

ب) ادرس تغيرات الدالة : د (س) = س − $\frac{1}{\text{٢س}^2}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل :

ص = س − $\frac{1}{\text{٢س}^2}$ = $\frac{\text{٢س}^3 - 1}{\text{٢س}^2}$

(١) م.ت = ح / {٠} =]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

نهـا (س ← −∞) د(س) = −∞ ، نهـا (س ← ∞) د(س) = +∞

نهـا (س ← ٠⁺) د(س) = −∞ ، نهـا (س ← ٠⁻) د(س) = −∞

(٣) المقارب الرأسي $\boxed{\text{س} = 0}$

س	٠	١
ص	٠	١

المقارب المائل ص = س

(٤) صَ = $\frac{(\text{٦س}^2)(\text{٢س}^2) - (\text{٤س})(\text{٢س}^3 - 1)}{\text{٤س}^4}$

= $\frac{\text{٤س}(\text{س}^3+1)}{\text{٤س}^4}$ = $\frac{\text{س}^3+1}{\text{س}^3}$ ، صَ = ٠

$\frac{\text{س}^3+1}{\text{س}^3}$ = ٠ ⇐ س³ + ١ = ٠ ⇐ س³ = −١ ⇐ $\boxed{\text{س} = -1}$

صَ	+	٠ −	‖	+
ص	↗	↘	‖	↗

(−١ ، $\frac{-3}{2}$) قيمة عظمى

(٥) صً = $\frac{(\text{٣س}^2)(\text{س}^3) - (\text{٣س}^2)(\text{س}^3+1)}{\text{س}^6}$

= $\frac{\text{٣س}^5 - \text{٣س}^5 - \text{٣س}^2}{\text{س}^6}$ = $\frac{-3}{\text{س}^4}$

صً = ٠ ⇐ −٣ ≠ ٠

صً	−	‖	−
ص	∩	‖	∩

لا توجد نقطة انعطاف

(٦) النقاط المساعدة ص = $\frac{\text{٢س}^3 - 1}{\text{٢س}^2}$

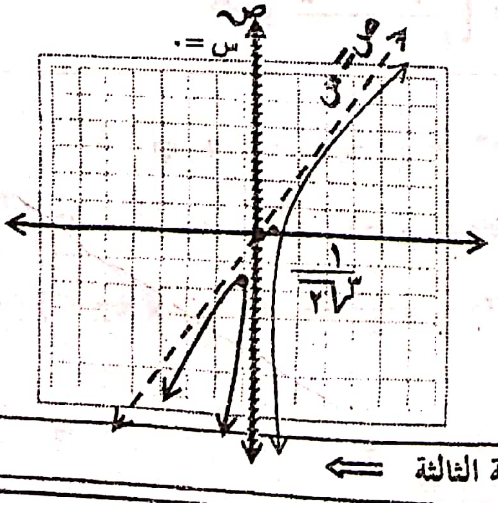
عندما س = ٠ ⇐ ص = $\frac{-1}{0}$ كمية غير معرفة

عندما ص = ٠ ⇐ $\frac{\text{٢س}^3 - 1}{\text{٢س}^2}$ = ٠

⇐ ٢س³ − ١ = ٠ ⇐ س = $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ⇐ ($\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ، ٠)

(٧) الجدول

س	+∞		٠		−١		−∞
صَ		+	‖	−	٠	+	
صً		(−)	‖		(−)		
ص	+∞	↗	−∞ ‖ −∞	↘	$\frac{-3}{2}$ (ع.م)	↗	−∞



٧

للأسئلة بقية في الصفحة الثالثة ⇐

د 7 ل

السؤال الرابع

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت د(س) = ظتا π س فإن دَ($\frac{1}{2}$) = ... [$\boxed{-\pi}$ ، $-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π].

٢) إذا كانت د(س) = هـ$^{جا\frac{\pi}{4}}$ + لو (١- جتا^{2} س) ؛ فإن دَ ($\frac{\pi}{4}$)=.... [−٢ ، −$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\boxed{٢}$].

٣) إذا كانت معادلة العمودي للمنحنى د(س) عند (١، ١) هي: س+ ٢ص=٣ فإن دَ(١)= ... [−٢ ، −١ ، ١ ، $\boxed{٢}$].

٤) $\int$ $\frac{هـ^{ظاس}}{جتا^{2} س}$ ء س = ... [$\boxed{هـ^{ظاس} + ث}$ ، $\frac{1}{2}$ هـ^{ظاس} + ث ، قاس هـ^{ظاس} + ث ، ٢قاس هـ^{ظاس} + ث].

٥) إذا كان د(٠) = ٢ ، د (١) = ٦ فإن قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا س دَ (جاس) ء س= ... [−٤ ، ٣ ، $\boxed{٤}$ ، ٦].

توضيح : نفرض أن ع = جا س ∴ ء ع = جتاس ء س ⇐ ء س = $\frac{ءع}{جتاس}$

س	٠	$\frac{\pi}{2}$
ع	٠	١

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا س دَ (جاس) ء س = $\int_{0}^{1}$ جتا س دَ (ع) × $\frac{ءع}{جتاس}$ = $\int_{0}^{1}$ دَ (ع) ء ع = د(ع) $\Big|_{0}^{1}$

= د(١) − د(٠)

= ٦ − ٢ = ٤

ب) **مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب** $\int_{0}^{3}$ (س^{2} + ٢) ء س .

الحل : نقسم الفترة [٠ ، ٣] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول

(١) Δ س$_{ر}$ = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٣ - ٠}{ن}$ = $\frac{٣}{ن}$

(٢) س$^{*}_{ر}$ = أ + Δ س$_{ر}$ × ر

= ٠ + $\frac{٣}{ن}$ ر = $\frac{٣}{ن}$ ر

(٣) د (س$^{*}_{ر}$) = (س$^{*}_{ر}$)^{2} + ٢

= $\frac{٩}{ن^{2}}$ ر^{2} + ٢

(٤) Δ س$_{ر}$ × د(س$^{*}_{ر}$)

= ($\frac{٣}{ن}$) × [$\frac{٩}{ن^{2}}$ ر^{2} + ٢] = $\frac{٢٧}{ن^{3}}$ ر^{2} + $\frac{٦}{ن}$

(٥) مجـ$_{ر=١}^{ن}$ $\frac{٢٧}{ن^{3}}$ ر^{2} + مجـ$_{ر=١}^{ن}$ $\frac{٦}{ن}$

= $\frac{\cancel{٢٧}}{ن^{3}}$ $\frac{ن (٢ن^{2} + ٣ن + ١)}{\cancel{٦}\ ٢}$ + $\frac{٦}{\cancel{ن}}$ × $\cancel{ن}$

(٦) $\int_{0}^{3}$ (س^{2} + ٢) ء س

= نهـا$_{ن \to \infty}$ ($\frac{١٨ن^{2} + ٢٧ن + ٩}{٢ ن^{2}}$ + ٦)

= $\frac{١٨}{٢}$ + ٦ = ٩ + ٦ = ١٥

السؤال الخامس

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١) إذا كانت نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{ظا^{2} أس}{س جاس}$ = ٤ ؛ فإن قيمة أ الموجبة = ...٢....	١
٢) إذا كانت للدالة دَ(س) = $\frac{١}{١ + س^{2}}$ ، هـ(س)= ظاس ، فإن (د ∘ هـ)َ(س)= ...١...	٢
٣) للدالة د(س) = $\frac{س}{س + ٢هـ}$ مقارب رأسي معادلته س = −٦ ؛ فإن قيمة هـ = ...٣....	٣
٤) $\int_{1}^{3}$ (هـ^{لوس} +١) ء س = ...٦....	٤
٥) إذا كان $\int$ ق(س) ء س = هـ^{٢س} + لو (جتا س + ٢س) ؛ فإن ق (٠) = ...٤...	٥
	٦
	٧

للأسئلة بقية في الصفحة الرابعة ⟸

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١- $\int (\text{٣قاس جتاس} - \text{٢قا}^{٢}\text{س})\ \text{ء س}$

الحل ⇓

$\int (\text{٣} \frac{\text{١}}{\text{جتاس}} \times \cancel{\text{جتاس}} - \text{٢قا}^{٢}\text{س})\ \text{ء س}$

$= \int \text{٣ ء س} - \int \text{٢قا}^{٢}\text{س ء س}$

$= \text{٣ س} - \text{٢ ظا س} + \text{ث}$

٢- $\int \text{جاس} (\text{ظتا س} + \frac{\text{١}}{\text{قاس}})\ \text{ء س} =$

الحل :

$\int (\cancel{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\cancel{\text{جاس}}} + \text{جاس} \times \text{جتا س})\ \text{ء س}$

$= \int \text{جتا س ء س} + \int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{جا ٢س ء س}$

$= \text{جا س} - \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{جتا ٢ س} + \text{ث}$

السؤال السادس

أ) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{١}}{\text{٢ س} - \text{٣}}\ \text{ء س}$.

الحل ⇓

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} = \text{د(جـ)} (\text{ب} - \text{أ})$

∴ $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{١}}{\text{٢س} - \text{٣}}\ \text{ء س} = \frac{\text{١}}{\text{٢جـ} - \text{٣}} (\text{٤} - \text{٢})$

⇐ $\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو} |\text{٢ س} - \text{٣}|]_{\text{٢}}^{\text{٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{٢جـ} - \text{٣}}$

⇐ $\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو} |\text{٨} - \text{٣}| - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو} |\text{٤} - \text{٣}| = \frac{\text{٢}}{\text{٢جـ} - \text{٣}}$

⇐ $\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو ٥} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{صفر} = \frac{\text{٢}}{\text{٢جـ} - \text{٣}}$

⇐ $\text{لو}\sqrt{\text{٥}} = \frac{\text{٢}}{\text{٢جـ} - \text{٣}}$

⇐ $\text{٢(لو}\sqrt{\text{٥}}\text{) جـ} - \text{٣ لو}\sqrt{\text{٥}} = \text{٢}$

$(\text{٢ لو}\sqrt{\text{٥}}) \text{ جـ} = \text{٢} + \text{٣ لو}\sqrt{\text{٥}}$ $(\div \text{٢ لو}\sqrt{\text{٥}})$

⇐ $\text{جـ} = \frac{\text{٢} + \text{٣ لو}\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢لو}\sqrt{\text{٥}}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{٢لو}\sqrt{\text{٥}}} + \frac{\text{٣ لو}\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢لو}\sqrt{\text{٥}}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{لو}\sqrt{\text{٥}}} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{لو هـ}}{\text{لو}\sqrt{\text{٥}}} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

$= \text{لو}_{\sqrt{\text{٥}}}\text{هـ} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

ب) احسب التكاملين التاليين :

١] $\int \text{س(س} + \text{١)}^{\text{٥}}\ \text{ء س}$.

الحل :

نفرض ع = س+١ ⇐ ع − ١ = س

∴ ء ع = ء س

∴ $\int (\text{ع} - \text{١}) \text{ع}^{\text{٥}} \text{ء ع} = \int (\text{ع}^{\text{٦}} - \text{ع}^{\text{٥}})\ \text{ء ع}$

$= \frac{\text{ع}^{\text{٧}}}{\text{٧}} - \frac{\text{ع}^{\text{٦}}}{\text{٦}} + \text{ث}$

$= \frac{(\text{س}+\text{١})^{\text{٧}}}{\text{٧}} - \frac{(\text{س}+\text{١})^{\text{٦}}}{\text{٦}} + \text{ث}$

٢] $\int (\text{٢س} + \text{٣}) \times \frac{\text{ء س}}{\text{قا ٢ س}}$

$= \int (\text{٢س} + \text{٣}) \times \text{جتا ٢ س ء س}$

ف = ٢س + ٣ ء ن = جتا ٢س ء س

ء ف = ٢ ء س ن = $\frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}}$

$\int (\text{٢س}+\text{٣}) \text{ جتا٢س ء س} = \text{ف ن} - \int \text{ن ء ف}$

$= (\text{٢س} + \text{٣}) \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}} - \int \frac{\text{جا٢س}}{\cancel{\text{٢}}} \times \cancel{\text{٢}}\ \text{ء س}$

$= (\text{٢س}+\text{٣}) \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}} + \frac{\text{جتا٢س}}{\text{٢}} + \text{ث}$

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية

بسم الله الرحمن الرحيم

اختبار مادة :التفاضل والتكامل
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

اليوم : الخميس
التاريخ : ٢٣/ ٧/ ٢٠١٧م
الزمن : ثلاث ساعات
الفترة : واحدة
النموذج الثالث

اختبار مادة : **التفاضل والتكامل** — الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) — العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل ما يأتي :

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ جا \frac{\pi}{س}}{(س-١)} = \pi$ (√)

٢) إذا كانت د(س)= ٢لوظاس ؛ فإن دَ(س) = ٢ قاس قتا س (√)

٣) إذا كان $\int_{م}^{٣م} ٢م^٢ \, ءس = ٣٢$ ؛ فإن م = −٢ (×) ٦

ب) بين أن الدالة د(س) = $\sqrt{س+١}$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [−١ ، ٣] ، ثم أوجد قيمة جـ الناتجة من المبرهنة .

الحل :

١) م . ت = [−١ ، ∞[

∵ [−١ ، ٣] ⊂ [−١ ، ∞[

∴ الدالة متصلة على [−١ ، ٣]

٢) $دَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

م . ت =]−١ ، ∞[

∵]−١ ، ٣[⊂]−١ ، ∞[

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على]−١ ، ∞[

∴ د(س) تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على [−١ ، ٣]

وبالتالي ∃ جـ ∈]−١ ، ٣[:

$دَ(جـ) = \frac{د(٣) - د(١)}{٣ - (-١)}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ+١}} = \frac{\sqrt{٣+١} - \sqrt{-١+١}}{٤}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ+١}} = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٤}} \Leftarrow \frac{١}{\sqrt{جـ+١}} = ١$

$\Leftarrow \sqrt{جـ+١} = ١$ (بالتربيع) ٤

جـ + ١ = ١ ⇐ $\boxed{جـ = ٠}$ ∈]−١ ، ٣[

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١) إذا كانت ص = $\sqrt{ع-١}$ ، ع = ٥ س ، $\frac{ءص}{ءس} = ١٠م^٣$ عند ع = ٥ ، فإن قيمة م = $\frac{١}{٢}$.......

٢) إذا كانت ق(س) = س^٢ ، د(س) = ٣س + ١ ، فإن (ق ∘ د)َ(١) = ...٢٤.......

٣) إذا كان $\int [د(س)]^ن \times دَ(س) \, ءس = \frac{٢}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + ث$ ؛ فإن قيمة ن = $\frac{٣}{٢}$........ ٦

توضيح : ∵ $\int [د(س)]^ن \times دَ(س) \, ءس = \frac{٢}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

∴ $[د(س)]^ن \times دَ(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + ث\right)$

$\Leftarrow [د(س)]^ن \times دَ(س) = (س+٢)^{\frac{٣}{٢}} \times ١ \xleftarrow{\text{بالمقارنة}} ن = \frac{٣}{٢}$

السؤال الأول — السؤال الثاني

نسم الله التحيل ... لنشا ... ح

للأسئلة بقية في الصفحة الثانية ⇐

تابع السؤال الثاني

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا}(1-\text{جتا}4\text{س})}{\text{س جا س}} & ، \text{س} \neq 0 \\ \sqrt{\text{أ}} + 6\,\text{جتا س} & ، \text{س} = 0 \end{cases}$

الحل ∵ د(س) متصلة ∴ د(٠) = $\lim_{\text{س}\to 0}$ د(س)

٤

∴ $\sqrt{\text{أ}} + 6\,\text{جتا}\,0 = \lim_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}(1-\text{جتا}4\text{س})}{\text{جا س}}$ (ب . ع . ت)

⇐ $\sqrt{\text{أ}} + 6 = \lim_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}(2\text{جا}^2 2\text{س}) \times \frac{2\text{جا}^2 2\text{س}}{2\text{جا}^2 2\text{س}} \times \frac{4\text{س}^2}{4\text{س}^2}}{\text{جا س} \times \frac{\text{س}}{\text{س}}}$

⇐ $\sqrt{\text{أ}} + 6 = 8$

١٠ ⇐ $\sqrt{\text{أ}} + 6 = 8$ ⇐ $\sqrt{\text{أ}} = 8 - 6$ ⇐ $\sqrt{\text{أ}} = 2$ ⇐ (نربع) $\boxed{\text{أ} = 4}$

أ) إذا كانت ص = لو قتاس وكانت ص'' + ٢ ص' = ٠ اوجد قيمة ظتا س

الحل

∵ ص = لو قتا س ∴ ص' = $\dfrac{-\,\text{قتا س} \times \text{ظتا س}}{\text{قتا س}}$ = − ظتا س ⇐ ص'' = + قتا² س

∵ ص'' + ٢ ص' = ٠ ⇐ قتا² س − ٢ ظتا س = ٠

٣ ⇐ ١ + ظتا² س − ٢ ظتا س = ٠ ⇐ ظتا² س − ٢ ظتا س + ١ = صفر

⇐ (ظتا س − ١)² = ٠ (بأخذ √)

⇐ ظتا س − ١ = ٠ ⇐ ظتا س = ١

السؤال الثالث

ب) ادرس تغيرات الدالة : د (س) = س − $\dfrac{1}{2\text{س}^2}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل

ص = س − $\dfrac{1}{2\text{س}^2}$ = $\dfrac{2\text{س}^3 - 1}{2\text{س}^2}$

(١) م.ت = ح / {٠} =]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

$\lim_{\text{س}\to -\infty}$ د(س) = −∞ ، $\lim_{\text{س}\to +\infty}$ د(س) = +∞

$\lim_{\text{س}\to 0^+}$ د(س) = −∞ ، $\lim_{\text{س}\to 0^-}$ د(س) = −∞

(٣) المقاربة الرأسي $\boxed{\text{س} = 0}$

س	٠	١
ص	٠	١

المقارب المائل ص = س

(٤) ص' = $\dfrac{(6\text{س}^2)(2\text{س}^2) - (4\text{س})(2\text{س}^3 - 1)}{4\text{س}^4}$

= $\dfrac{4\text{س}(\text{س}^3 + 1)}{4\text{س}^4}$ = $\dfrac{\text{س}^3 + 1}{\text{س}^3}$ ، ص' = ٠

$\dfrac{\text{س}^3 + 1}{\text{س}^3}$ = ٠ ⇐ س³ + ١ = ٠ ⇐ س³ = −١ ⇐ $\boxed{\text{س} = -1}$

س		−١		٠	
ص'	+	٠	−		+
ص	↗	$-\frac{3}{2}$	↘		↗

(−١ ، $-\frac{3}{2}$) قيمة عظمى

(٥) ص'' = $\dfrac{(3\text{س}^2)(\text{س}^3) - (3\text{س}^2)(\text{س}^3 + 1)}{\text{س}^6}$

= $\dfrac{3\text{س}^5 - 3\text{س}^5 - 3\text{س}^2}{\text{س}^6}$ = $\dfrac{-3}{\text{س}^4}$

ص'' = ٠ ⇐ −٣ ≠ ٠

ص''	−	٠	−

لا توجد نقطة انعطاف

(٦) النقاط المساعدة ص = $\dfrac{2\text{س}^3 - 1}{2\text{س}^2}$

عندما س = ٠ ⇐ ص = $\dfrac{-1}{0}$ كمية غير معرفة

عندما ص = ٠ ⇐ ٠ = $\dfrac{2\text{س}^3 - 1}{2\text{س}^2}$

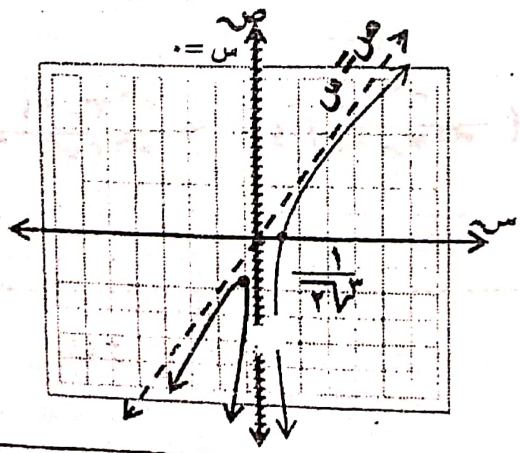
⇐ ٠ = ٢س³ − ١ ⇐ س = $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ($\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ، ٠)

(٧) الجدول

س	+∞		٠		−١		−∞
ص'		+		−	٠	+	
ص''		−		−		−	
ص	+∞	↗	−∞ ‖ −∞	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	−∞

٧

(ع. ت)



١٠

للأسئلة بقية في الصفحة الثالثة ⟸

السؤال الرابع

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت د(س) = ٢لو $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ؛ فإن دَ(س)= ...[$\boxed{\text{−٢ جا س}}$ ، $-\frac{١}{٢}$ جا٢س ، ٢ جاس ، $\frac{١}{٢}$ جا٢س].

٢) إذا كان $\text{هـ}^{\text{س}}$ = $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ؛ فإن دَ(س) = ... [$\text{هـ}^{\text{ص − س}}$ ، $\boxed{\text{هـ}^{\text{س − ص}}}$ ، $\text{هـ}^{\text{٢س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{٢ص}}$].

٥ ٣) إذا كان للدالة ذ(س) = $\frac{\text{٥س − ٤}}{\text{٣ − أ س}}$ مقارب أفقي معادلة ص= $\frac{٧}{\text{٢ − أ}}$ ، فإن أ .... [$\boxed{-٥}$ ، −٢ ، ٢ ، ٥].

٤) إذا كان $\int_{٢}^{\text{ب}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{ء س}$ = لو ٣ ، فإن قيمة ب = ... [−٣ ، $\boxed{٦}$ ، −٦ ، ٣] .

توضيح : ∵ $\int_{٢}^{\text{ب}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ = لو ٣ ⇐ $\text{لو س}\Big|_{٢}^{\text{ب}}$ = لو٣ ⇐ لو ب − لو٢ = لو٣ ⇐ لو $\frac{\text{ب}}{٢}$ = لو٣

⇐ $\frac{\text{ب}}{٢}$ = ٣ ⇐ $\boxed{\text{ب = ٦}}$

٥) $\int$ ظتا س ء س=....[- لو|جتاس| +٣ ، $\boxed{\text{لو|جاس| + ث}}$ ، جا|جاس| + ث، جتا|لوس| + ث].

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^٢ + ٢)\,\text{ء س}$.

الحل : نقسم الفترة [٠ ، ٣] إلى ن

٥ فترة جزئية متساوية في الطول

(١) $\Delta\,\text{س}_\text{ر} = \frac{\text{ب − أ}}{\text{ن}} = \frac{٣ − ٠}{\text{ن}} = \frac{٣}{\text{ن}}$

(٢) $\text{س}^*_\text{ر} = \text{أ} + \Delta\,\text{س}_\text{ر} \times \text{ر}$

$= ٠ + \frac{٣}{\text{ن}}\,\text{ر} = \frac{٣}{\text{ن}}\,\text{ر}$

(٣) $\text{د}(\text{س}^*_\text{ر}) = (\text{س}^*_\text{ر})^٢ + ٢$

$= \frac{٩}{\text{ن}^٢}\,\text{ر}^٢ + ٢$

(٤) $\Delta\,\text{س}_\text{ر} \times \text{د}(\text{س}^*_\text{ر})$

$= (\frac{٣}{\text{ن}}) \times [\frac{٩}{\text{ن}^٢}\,\text{ر}^٢ + ٢] = \frac{٢٧}{\text{ن}^٣}\,\text{ر}^٢ + \frac{٦}{\text{ن}}$

(٥) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٢٧}{\text{ن}^٣}\,\text{ر}^٢ + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٦}{\text{ن}}$

$= \frac{\cancel{٢٧}^{\,٩}}{\cancel{\text{ن}^٣}_{\,\text{ن}^٢}} \times \frac{\text{ن}(\text{٢ن}^٢ + \text{٣ن} + ١)}{\cancel{٦}_{\,٢}} + \frac{٦}{\cancel{\text{ن}}} \times \cancel{\text{ن}}$

(٦) $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^٢ + ٢)\,\text{ء س}$

$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{\text{١٨ن}^٢ + \text{٢٧ن} + ٩}{\text{٢ ن}^٢} + ٦ \right)$

١٠ $= \frac{١٨}{٢} + ٦ = ٩ + ٦ = ١٥$

السؤال الخامس

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{ظا}\frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{قتا}\,\pi\,\text{س}}$ = ...٢.......	١
٢) إذا كانت للدالة د(س) = $\frac{\text{٤س + ١}}{\text{أ س − ٤}}$ مقارب رأسي عند س = ١ ، فإن قيمة أ = ...٤...	٢
٣) إذا كان للدالة د(س) = $\text{س}^٣ - ٢\text{أ س}^٢$ نقطة انعطاف عند س =٢ فإن أ = ...٣.......	٣
٤) إذا كانت ٢ ≤ د(س) ≤ ٨ ، ل ≤ $\int_{-١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ء س}$ ≤ ٤٠ ؛ فإن ل = ...٥.......	٤
٥) إذا كان $\int_{-١}^{٤} \text{د(س)}\,\text{ء س} = -\int_{٤}^{\text{ب}-٧} \text{د(س)}\,\text{ء س}$ ؛ فإن ب = ...٦.......	٥
	٦

٥

د 5 ل

للأسئلة بقية في الصفحة الرابعة ⟸

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١) $\int (\text{ظا س قا س هـ}^{\text{قا س}})\ \text{ء س}$.

الحل : $\int \text{ظا س قا س هـ}^{\text{قا س}}\ \text{ء س} = \text{هـ}^{\text{قا س}} + \text{ث}$

---

٢) $\int \dfrac{1+\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{لو س})}\ \text{ء س}$.

الحل : نفرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو س}$

$\therefore \text{ء ص} = (\text{هـ}^{\text{س}} + \dfrac{1}{\text{س}})\ \text{ء س} \Leftarrow \text{ء ص} = \left(\dfrac{\text{س هـ}^{\text{س}}+1}{\text{س}}\right) \text{ء س} \Leftarrow \text{ء س} = \dfrac{\text{س ء ص}}{\text{س هـ}^{\text{س}}+1}$

$\therefore \int \dfrac{1+\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{لو س})}\ \text{ء س}$

$= \int \dfrac{\cancel{(1+\text{س هـ}^{\text{س}})}}{\cancel{\text{س}} \times \text{ص}} \times \dfrac{\cancel{\text{س}}\ \text{ء ص}}{\cancel{(\text{س هـ}^{\text{س}}+1)}} = \int \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ص}} = \text{لو} \left|\text{ص}\right| + \text{ث}$ 5

$= \text{لو} \left|\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لوس}\right| + \text{ث}$

لاحظ :-

$\int \dfrac{1+\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{لوس})}\ \text{ء س} = \int \dfrac{\left(\dfrac{1+\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right)}{(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{لوس})}\ \text{ء س} = \int \dfrac{\text{د}'}{\text{د}}$ (البسط مشتقة للمقام)

$= \text{لو} \left|\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو س}\right| + \text{ث}$

العدد — السؤال السادس

أ) أوجد معادلة المنحني الذي ميل المماس هو $\dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٥}}{\text{جا ٢ ص}}$ ويمر بالنقطة (٢ ، ٠)

الحل :

$\therefore \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٥}}{\text{جا ٢ ص}} \Leftarrow \text{جا٢ ص ء ص} = \sqrt{٢\text{س}+٥}\ \text{ء س}$ (ندخل $\int$)

$\Leftarrow \int \text{جا ٢ص ءص} = \int (٢\text{س}+٥)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$ 4

$\Leftarrow -\dfrac{1}{2}\ \text{جتا ٢ص} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(٢\text{س}+٥)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$\boxed{-\dfrac{1}{2}\ \text{جتا ٢ ص} = \dfrac{1}{3}(٢\text{س}+٥)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}}$

$-\dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{3}(٤+٥)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$\Leftarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{9})^3 + \text{ث}$

$\Leftarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{27}^{\,9} + \text{ث}$

$\Leftarrow -\dfrac{1}{2} = ٩ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = -٩ - \dfrac{1}{2} \Leftarrow \text{ث} = -\dfrac{١٩}{2}$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\ \text{جتا ٢ص} = \dfrac{1}{3}(٢\text{س}+٥)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{١٩}{2}$

ب) احسب التكاملين التاليين :

١] $\int \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2 - 1}\ \text{ء س}$.

الحل نفرض $\text{ع} = \text{س}^2 - 1 \Leftarrow \text{ع} + 1 = \text{س}^2$

$\therefore \text{ء ع} = ٢\ \text{س ء س} \Leftarrow \dfrac{\text{ء ع}}{٢\text{س}} = \text{ء س}$

$\therefore \int \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2-1}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{\cancel{3}}\ \text{ع}^{\frac{1}{2}}\ \dfrac{\text{ء ع}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$= \dfrac{1}{2}\int \text{س}^2\ \text{ع}^{\frac{1}{2}}\ \text{ء ع}$

$= \dfrac{1}{2}\int (\text{ع}+1)\ \text{ع}^{\frac{1}{2}}\ \text{ء ع} = \dfrac{1}{2}\int (\text{ع}^{\frac{3}{2}} + \text{ع}^{\frac{1}{2}})\ \text{ء ع}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\text{ع}^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}\text{ع}^{\frac{3}{2}}\right) + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{5}\sqrt{(\text{س}^2-1)^5} + \dfrac{1}{3}\sqrt{(\text{س}^2-1)^3} + \text{ث}$

٢] $\int ٢\ \text{س جتا س ء س}$. 6

الحل :

$\text{ف} = ٢\text{س} \qquad \text{ء ق} = \text{جتا س ء س}$

$\text{ء ف} = ٢\ \text{ء س} \qquad \text{ق} = \text{جا س}$

$\int \text{ف ء ق} = \text{ف ق} - \int \text{ق ء ف}$

$\int ٢\text{س جتا س ء س} = ٢\text{س جا س} - \int ٢\text{جا س ء س}$

$= ٢\ \text{س جا س} + ٢\ \text{جتا س} + \text{ث}.$

10

بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية

اختبار مادة: التفاضل والتكامل
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

اليوم : السبت
التاريخ : ٢٣/ ٧/ ٢٠١٧م
الزمن : ثلاث ساعات
الفترة : واحدة
النموذج الرابع

اختبار مادة : **التفاضل والتكامل** — الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) — العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة ـ فقط ـ من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

السؤال الأول

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل ما يأتي :

١) $\lim_{س \to ١}$ جتا (لو س) جا $\frac{\pi}{س - ١} = \pi$ (×)

٢) ص = س مقارب مائل للدالة د(س) = س + $\frac{س}{س + ١}$ (×)

٣) $\int$ قا^{2}س هـ^{ظاس} ء س = هـ^{ظاس} + ث (√) — ٦

ب) بين أن الدالة د(س) = لو(س^2 +١) تحقق شروط مبرهنة رول على [−٢ ، ٢] ، ثم أوجد قيمة جـ الناتجة من المبرهنة .

الحل :

(١) م . ت = ح
∵ [−٢ ، ٢] ⊂ ح
∴ الدالة متصلة على [−٢ ، ٢]

(٢) د َ(س) = $\frac{٢ س}{س^2 + ١}$
م . ت = ح
]−٢ ، ٢[⊂ ح
∴ الدالة قابلة للاشتقاق على]−٢، ٢ [

(٣) د(−٢) = لو ٥
د (٢) = لو ٥
∴ د (−٢) = د(٢) — ٤

∴ د (س) تحقق شروط مبرهنة رول على [−٢ ، ٢]

وبالتالي ∃ جـ ∈]−٢ ، ٢ [: د َ(جـ) = ٠

⇐ $\frac{٢ جـ}{جـ^2 + ١}$ = ٠ ⇐ ٢جـ = ٠ (÷٢) ⇐ جـ = ٠ ∈]−٢ ، ٢ [

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١)إذا كانت $\lim_{س \to ٠}$ (د(س) − جا ٣س قتا س) = ٥ ؛ فإن $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ...٨.......

٢)إذا كانت (٣ ، ٢) نقطة تقاطع المقاربين للدالة د(س)= $\frac{م س + أ}{س − ن}$ ؛ فإن م + ن = ...٥....... — ٦

توضيح :- ∵ (٣ ، ٢) نقطة تقاطع المستقيم المقارب الرأس والمستقيم المقارب الأفقي
∴ س = ٣ ، ص = ٢
، ∵ س = ن ⇐ ن = ٣
، ∵ ص = م ⇐ م = ٢ ∴ م + ن = ٢ + ٣ = ٥

٣) $\int$ لو$_٢$ س × لو$_س$ ١٦ ء س = ...٤ س+ ث.......

توضيح :- $\int$ لو$_٢$س × لو$_س$ ١٦ ء س = $\int \frac{\cancel{لوس}}{لو٢} \times \frac{لو٢^٤}{\cancel{لوس}}$ ءس = $\int \frac{٤\times\cancel{لو٢}}{\cancel{لو٢}}$ ء س
= ٤ س + ث

للأسئلة بقية في الصفحة الثانية ⟸

٤

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، د (س) = $\begin{cases} \dfrac{٦س^٢ + س \ جا \ أ \ س}{س^٢} & ، \ س \neq ٠ \\ أ^٢ & ، \ س = ٠ \end{cases}$

الحل :- ∵ د(س) متصلة

∴ د (٠) = $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

⟸ $أ^٢ = \lim_{س \to ٠} \dfrac{٦س^٢ + س \ جا \ أ \ س}{س^٢}$ (÷ ع . ت)

⟸ $أ^٢ = \lim_{س \to ٠} \dfrac{٦\cancel{س^٢}}{\cancel{س^٢}} + \lim_{س \to ٠} \dfrac{\cancel{س} \ جا \ أ \ س \times أ}{\cancel{س^٢} \ أ}$

⟸ $أ^٢ = ٦ + أ$ ⟸ $أ^٢ - أ - ٦ = ٠$ ⟸ $(أ - ٣) (أ + ٢) = ٠$

إما $أ - ٣ = ٠$ ⟸ $\boxed{أ = ٣}$

أو $أ + ٢ = ٠$ ⟸ $\boxed{أ = -٢}$

١٠

أ) إذا كانت س ص = لو س ؛ فأثبت أن : ص + ٣ س ص′ + س² ص″ = صفر

الحل :

∵ س ص = لو س ⟸ ١ × ص + س ص′ = $\dfrac{١}{س}$ ⟸ $\dfrac{ص + س ص'}{١} = \dfrac{١}{س}$

⟸ س ص + س² ص′ = ١   نشتق مرة أخرى .

⟸ ١ × ص + س × ص′ + ٢ س ص′ + س² ص″ = ٠

⟸ ص + ٣ س ص′ + س² ص″ = ٠   #

٣

ب) ادرس تغيرات الدالة : د (س) = س + $\dfrac{٤}{س^٢}$ ، ثم ارسم بيانها .

٧

الحل :

ص = $\dfrac{س^٣ + ٤}{س^٢}$

(١) م.ت = ح / {٠} =] −∞ ، ∞ [/ { ٠ }

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

$\lim_{س \to -\infty}$ د(س) = −∞ ، $\lim_{س \to +\infty}$ د(س) = +∞

$\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = +∞ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = +∞

(٣) المقاربة الرأسي $\boxed{س = ٠}$

المقارب المائل   ص = س

س	٠	١
ص	٠	١

(٤) ص′ = $\dfrac{س^٣ - ٨}{س^٣}$ ، ص′ = ٠

س³ − ٨ = ٠ ⟸ س³ = ٨ ⟸ $\boxed{س = ٢}$ نقطة حرجة

(٢ ، ٣) قيمة صغرى

ص′	+	٢	−	||	+
ص	↗	٣ ق.ص	↘	||	↗

(٥) ص″ = $\dfrac{٢٤}{س^٤}$ ، ص″ = ٠ ⟸ ٢٤ ≠ ٠

لا توجد نقطة انعطاف

ص″	+	||	+
ص	∪	||	∪

(٦) النقاط المساعدة   ص = $\dfrac{س^٣ + ٤}{س^٢}$

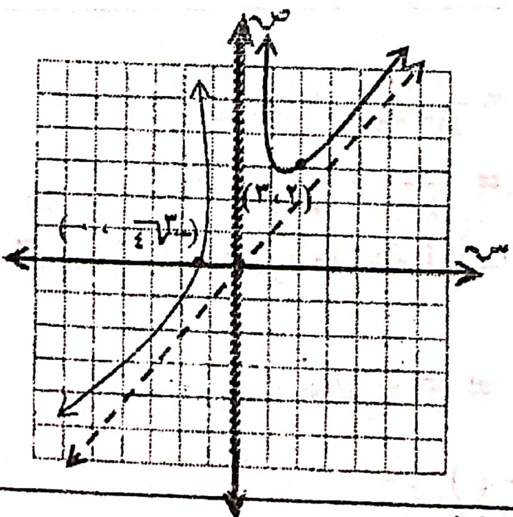
عندما ص = ٠ ⟸ س³ = −٤ ⟸ س = $\sqrt[٣]{-٤}$

($\sqrt[٣]{-٤}$ ، ٠)

عندماس = ٠ ⟸ ص = كمية غير معرفة

(٧) الجدول

س	+∞		٢		٠		−∞
ص′		+	٠	−		+	
ص″		+		+		+	
ص	+∞	↗	٣	↘	+∞ || +∞	↗	−∞



للأسئلة بقية في الصفحة الثالثة ⟸

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت ص = أ هـ^{٣س} ؛ فإن قيمة أ التي تجعل ص$''$ = ١٨ هـ^{٣س} ... [١ ، $\boxed{٢}$ ، ٣ ، ٤].

٢) إذا كانت س = ظا ص ؛ فإن صَ = ... [جا^{٢} ص ، $\boxed{\text{جتا}^{٢}\text{ ص}}$ ، قا^{٢} ص ، قتا^{٢} ص].

٥ ٣) إذا كانت د(س) = ٣ هـ^{س} ، ق(س) = لو س ؛ فإن (د ∘ ق)$'$(١) = ... [١ ، ٢ ، $\boxed{٣}$ ، ٤].

٤) إذا كانت ٢ ءص = ٣ ءس ؛ فإن ص= .... [$\frac{-٣}{٢}$ س + ث ، $\frac{-٢}{٣}$ س + ث ، $\boxed{\frac{٣}{٢}\text{ س + ث}}$ ، $\frac{٢}{٣}$ س + ث].

٥) $\int_{١}^{٣}$ لو ٣ س^{٢} ءس + $\int_{٣}^{١}$ لو س^{٢} ءس = ... [٠ ، لو ٣ ، لو ٦ ، $\boxed{\text{لو ٩}}$].

توضيح: $\int_{١}^{٣}$ (لو ٣ + لوس^{٢}) ءس − $\int_{١}^{٣}$ لو س^{٢} ءس = $\int_{١}^{٣}$ لو ٣ ءس + $\int_{١}^{٣}$ ~~لوس^{٢}~~ ءس − $\int_{١}^{٣}$ ~~لوس^{٢}~~ ءس

= (لو ٣) × س $\Big|_{١}^{٣}$ = (لو٣) × ٣ − (لو٣) × ١

= ٣لو ٣ − لو٣ = ٢لو ٣ = لو٣^{٢} = لو ٩

٥ ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{-١}^{٢}$ (س + ١)^{٢} ءس .

الحل : نقسم الفترة [−١ ، ٢] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول

(١) Δ س$_{ر}$ = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٢ + ١}{ن}$ = $\frac{٣}{ن}$

(٢) س$^{*}_{ر}$ = أ + Δ س$_{ر}$ × ر

= −١ + $\frac{٣}{ن}$ ر

(٣) د (س$^{*}_{ر}$) = (س$^{*}_{ر}$ + ١)^{٢}

= ($\cancel{-١}$ + $\frac{٣}{ن}$ ر $\cancel{+١}$)^{٢} = $\frac{٩}{ن^{٢}}$ ر^{٢}

(٤) Δ س$_{ر}$ × د(س$^{*}_{ر}$)

= $\frac{٣}{ن}$ × $\frac{٩}{ن^{٢}}$ ر^{٢} = $\frac{٢٧}{ن^{٣}}$ ر^{٢}

(٥) $\int_{-١}^{٢}$ (س + ١)^{٢} ءس

= نهــا$_{ن \to \infty}$ مجـ$_{ر=١}^{ن}$ ($\frac{٢٧}{ن^{٣}}$ ر^{٢})

= نهــا$_{ن \to \infty}$ $\frac{\cancel{٢٧}^{٩}}{\cancel{ن^{٣}}_{ن^{٢}}}$ × $\frac{\cancel{ن}(٢ن^{٢} + ٣ن + ١)}{\cancel{٦}_{٢}}$

= نهــا$_{ن \to \infty}$ $\frac{١٨ن^{٢} + ٢٧ن + ٩}{٢ ن^{٢}}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

السؤال الرابع

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمــــن	العمود الأيسر
١) ميل المماس للمنحني د(س) = $\frac{١}{٢}$ ظا^{٢}س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ يساوي = ...٣....	٠
٢) إذا كانت للدالة د(س)= أ س^{٢} − هـ^{٢س} نقطة انعطاف عند س=٠ ؛ فإن قيمة أ = ...٢...	١
٣) إذا كانت ص = س^{٩} ؛ فإن المشتقة النونية = ...صفر....	٢
٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ قا^{٢} س ءس = ...١....	٣
٥) إذا كانت د(٥) = ٢ ، د (١) = ٠ ؛ فإن $\int_{١}^{٥}$ [د(س)]^{٣} دَ(س) ءس = ...٤...	٤
	٥

٥

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١- $\int (هـ^{٣لوس} - ٣)\ ءس$

الحل :

$= \int (\cancel{هـ}^{لوس^٣}\ ءس - ٣)\ ءس$

$= \int (س^٣ - ٣)\ ءس$

$= \frac{س^٤}{٤} - ٣س + ث$

٢- $\int ٢س\ (س - ١)^٣\ ءس$

الحل:

نفرض ع = س − ١ ⇐ س = ع + ١

∴ ءع = ءس

$\int ٢س(س-١)^٣\ ءس = \int ٢(ع+١) \times ع^٣\ ءع = \int (٢ع^٤ + ٢ع^٣)\ ءع$

$= \frac{٢ع^٥}{٥} + \frac{\cancel{٢}ع^٤}{\cancel{٤}_٢} + ث$

$= \frac{٢(س-١)^٥}{٥} + \frac{(س-١)^٤}{٢} + ث$

السؤال السادس

أ) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب $\int_١^٥ (٢س - ١)\ ءس$.

الحل :

∵ $\int_أ^ب د(س)\ ءس = د(جـ)\ (ب - أ)$

∴ $\int_١^٥ (٢س - ١)\ ءس = (٢جـ - ١)\ (٥ - ١)$

⇐ $\left(\frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} - س\right)\Big|_١^٥ = (٢جـ - ١) \times ٤$

⇐ $(٢٥ - ٥) - (١ - ١) = (٢جـ - ١) \times ٤ \quad (÷٤)$

⇐ $\frac{٢٠}{٤} = (٢جـ - ١)$

⇐ ٥ = ٢جـ − ١ ⇐ ٢جـ = ٦ (÷٢)

جـ = ٣ ∈ [١ ، ٥]

ب) احسب التكاملين التاليين :

[١] $\int (-ظتا س - ظا س)^٢\ ءس$

الحل :

$= \int (ظتا س + ظا س)^٢\ ءس$

$= \int (ظتا^٢ س + ٢ظتا س\ ظا س + ظا^٢ س)\ ءس$

$= \int \left(ظتا^٢ س + ٢ \frac{\cancel{جتا س}}{\cancel{جا س}} \times \frac{\cancel{جا س}}{\cancel{جتا س}} + ظا^٢ س\right)\ ءس$

$= \int [(ظتا^٢ س + ١) + (١ + ظا^٢ س)]\ ءس$

$= \int (قتا^٢ س + قا^٢ س)\ ءس$

$= -ظتا س + ظا س + ث$

[٢] $\int ٩س^٢ لوس\ ءس$.

الحل :

ف = لوس ءو = ٩س^٢ ءس

$ءف = \frac{١}{س}\ ءس \quad \int \Leftarrow \quad و = \frac{\cancel{٩}^٣ س^٣}{\cancel{٣}}$

$\int ف\ ءق = ف ق - \int ق\ ءف$

∴ $\int ٩س^٢ لوس\ ءس$

$= لوس \times ٣س^٣ - \int ٣\cancel{س^٣}^٢ \times \frac{١}{\cancel{س}}\ ءس$

$= ٣س^٣ لوس - \int ٣س^٢\ ءس$

$= ٣س^٣ لوس - \frac{\cancel{٣}س^٣}{\cancel{٣}} + ث$

$= ٣س^٣ لوس - س^٣ + ث$

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية

بسم الله الرحمن الرحيم

اختبار مادة :التفاضل والتكامل
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

اليوم : السبت
التاريخ : ٢٣/ ٧/ ٢٠١٧م
الزمن : ثلاث ساعات
الفترة : واحدة
النموذج الخامس

اختبار مادة : **التفاضل والتكامل** الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل ما يأتي :

١) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}$ جا (π هـ^{س}) جتا $\frac{١}{س}$ = π (×)

٢) إذا كانت د(س)= س جا (لو س) ؛ فإن دَ (١) = صفر (×)

٣) ∫ ٦ س (س +١) ٤ س = ٢ س^{٣} + ٣س^{٢} + ث (√) ٦

ب) إذا كانت د(س) = (٢س – أ)^{٢} تحقق شروط مبرهنة رول على [١ ، ٣] ، فأوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة جـ الناتجة من المبرهنة .

الحل :

∵ الدالة تحقق مبرهنة رول على [١ ، ٣] ٤

∴ د(١) = د(٣) ⇐ (٢ × ١ – أ)^{٢} = (٢ × ٣ – أ)^{٢}

⇐ (٢ – أ)^{٢} = (٦ – أ)^{٢}

⇐ ٤ – ٤ أ + $\cancel{أ^{٢}}$ = ٣٦ – ١٢ أ + $\cancel{أ^{٢}}$

⇐ – ٤ أ + ١٢ أ = ٣٦ – ٤

⇐ ٨ أ = ٣٢ (÷ ٨)

⇐ أ = $\frac{٣٢}{٨}$ ⇐ $\boxed{أ = ٤}$

∴ د(س) = (٢ س – ٤)^{٢} ، دَ (س) = ٢ (٢ س – ٤) = ٨ س – ١٦

، ∴ ∃ جـ ∈] ١ ، ٣ [: دَ (جـ) = ٠

∴ ٨ جـ - ١٦ = ٠ ⇐ ٨ جـ = ١٦ ⇐ جـ = ٢ ∈] ١ ، ٣ [

السؤال الأول

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١) ميل المماس للمنحني د(س) = $\frac{٨}{٣}$ جا^{٣} س عند س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوي ....٣..........

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ظا ٨ س قتا أ س = ٢ فإن قيمة أ = ...٤..........

٣) ∫ لو$_{٣}$ س × لو$_{س}$ ٨١ ٤ س = ...٤س + ث..........

السؤال الثاني

ملخصات
سنع
لتحميل
اسم الجامعة في اليمن
Ye-second

للأسئلة بق...

د 10 ل

تابع السؤال الثاني

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{أ}\,س^2 + س\ \text{جا}\,س}{س^2} & ، س \ne ٠ \\ \text{أ}^2 - ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

٤

الحل : ∵ د (س) متصلة ، ∴ د(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

⇐ $\text{أ}^2 - ١ = \lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{أ}\,س^2 + س\ \text{جا}\,س}{س^2}$ (بـ ع . ت)

⇐ $\text{أ}^2 - ١ = \lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{أ}\,\cancel{س^2}}{\cancel{س^2}} + \lim_{س \to ٠} \dfrac{\cancel{س}\ \text{جا}\,س}{\cancel{س^2}}$

⇐ $\text{أ}^2 - ١ = \text{أ} + ١$ ⇐ $\text{أ}^2 - \text{أ} - ٢ = ٠$ ⇐ $(\text{أ} - ٢)(\text{أ} + ١) = ٠$

إما أ − ٢ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

أو أ + ١ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{أ} = -١}$

السؤال الثالث

أ) إذا كانت ص = جا س + جتاس ؛ فأثبت أن : $(ص')^2 + (ص'')^2 = ٢$

٣

الحل : ص = جا س + جتا س ⇐ ص' = جتا س − جا س ⇐ ص'' = − جا س − جتا س

الطرف الأيمن = $(ص')^2 + (ص'')^2 = (\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س)^2 + (-\text{جا}\,س - \text{جتا}\,س)^2$

$= \text{جا}^2 س \cancel{- ٢\,\text{جا}\,س\,\text{جتا}\,س} + \text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س \cancel{+ ٢\,\text{جا}\,س\,\text{جتا}\,س} + \text{جتا}^2 س$

$= \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س$

= ١ + ١ = ٢ = الطرف الأيسر

ب) ادرس تغيرات الدالة : د (س) = $٢س + \dfrac{١}{س^2}$ ، ثم ارسم بيانها .

٧

الحل :

د(س) = $\dfrac{٢س^3 + ١}{س^2}$

(١) م. ت = ح / {٠} =] −∞ ، ٠ [∪] ٠ ، ∞ [

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

$\lim_{س \to -\infty}$ د (س) = −∞ ، $\lim_{س \to \infty}$ د(س) = +∞

$\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = +∞ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = +∞

(٣) المقاربة الرأسي $\boxed{س = ٠}$

المقارب المائل $\boxed{ص = ٢س}$

س	٠	١
ص	٠	٢

(٤) ص' = $\dfrac{(٦س^2)(س^2) - (٢س^3 + ١) \times (٢س)}{س^4}$

ص' = $\dfrac{٦س^4 - ٤س^4 - ٢س}{س^4}$ ⇐ ص' = $\dfrac{٢س^4 - ٢س}{س^4}$

ص' = $\dfrac{\cancel{س}(٢س^3 - ٢)}{س^{\cancel{4}\,3}}$ ⇐ $\boxed{ص' = \dfrac{٢س^3 - ٢}{س^3}}$

ص' = ٠ ⇐ $\boxed{س = ١}$

ص'	+	∥	−	١	+
ص	↗	∥	↘	٣	↗

ن . ص

د(١) = ٣ (١ ، ٣) قيمة صغرى

(٥) ص'' = $\dfrac{٦س^2 \times س^3 - ٣س^2 \times (٢س^3 - ٢)}{س^6}$

ص'' = $\dfrac{\cancel{٦س^5} - \cancel{٦س^5} + ٦س^2}{س^6} = \dfrac{٦}{س^4}$

ص'' = ٠ ⇐ $\boxed{٦ \ne ٠}$

ص''	+	∥	+
ص	∪	∥	∪

لا توجد نقاط انعطاف

(٦) النقاط المساعدة

عندما س = ٠ ⇐ ص = $\dfrac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

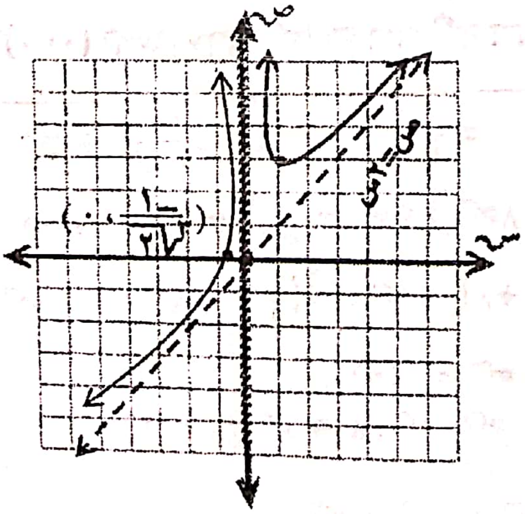
عندما ص = ٠ ⇐ س = $\dfrac{-١}{\sqrt[3]{٢}}$ ($\dfrac{-١}{\sqrt[3]{٢}}$ ، ٠)

(٧) الجدول

س	+∞		١		٠		−∞
ص'		+	٠	−	∥	+	
ص''		+		+	∥	+	
ص	+∞	↗	٣	↘	+∞ ∥ +∞	↗	−∞

ن . ص

(٨) الرسم



أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت ص = أ هـ^٢س ؛ فإن قيمة أ التي تجعل صً = ٨ هـ^٢س .... [١ ، $\boxed{٢}$ ، ٣ ، ٤].

٢) إذا كانت س = جا ص ؛ فإن صَ = ... [$\boxed{\text{قاص}}$ ، ـ قاص ، قتا ص ، ـ قتا ص].

٣) إذا كانت د(س) = هـ^٢س ، ن(س) = لو س ؛ فإن (د ٥ ن)َ (١) = ... [١ ، $\boxed{٢}$ ، ٣ ، ٤].

٤) $\int$ ٣ قا^٣ س ظا س ى س = ...[$\boxed{\text{قا}^٣ \text{س} + \text{ث}}$ ، قا^٤ س + ث ، ظا^٢ س + ث ، ظا^٣ س + ث].

٥) $\int_{١}^{٣}$ لو ٢ س^٤ ى س + $\int_{٣}^{٩}$ لو س^٤ ى س = ... [٠ ، لو٢ ، لو ٣ ، $\boxed{\text{لو٤}}$].

٥

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{-٢}^{١}$ (س + ٢)^٢ ى س .

الحل : نقسم الفترة [ـ٢ ، ١] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول

(١) Δ سر = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١ + ٢}{ن} = \frac{٣}{ن}$

(٢) سر* = أ + Δ سر × ر

$= -٢ + \frac{٣}{ن}$ ر

(٣) د (سر*) = (سر* + ٢)^٢

$= (\cancel{-٢} + \frac{٣}{ن} \cancel{+٢})^٢ = \frac{٩}{ن^٢}$ ر^٢

(٤) Δ سر × د(سر*)

$= \frac{٣}{ن} \times \frac{٩}{ن^٢}$ ر^٢ $= \frac{٢٧}{ن^٣}$ ر^٢

(٥) مجـ (ر=١ إلى ن) $\frac{٢٧}{ن^٣}$ ر^٢

= مجـ (ر=١ إلى ن) $\frac{\cancel{٢٧}^{٩}}{\cancel{ن^٣}ن^٢} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)(٢ن+١)}{\cancel{٦}_{٢}}$

(٦) $\int_{-٢}^{١}$ (س + ٢)^٢ ى س

= نهـــا (ن←∞) $\frac{١٨ن^٢ + ٢٧ن^٢ + ٩}{٢ ن^٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$

٥

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمــــــن	العمود الأيسر
١) للدالة د(س) = س^٣ ــ ١٨ س^٢ نقطة انعطاف عند س = ...٦......	٠
٢) إذا كانت للدالة د(س) = ٧ س+ هـ^٢س ؛ فإن دَ (لو٢) = ...١٥......	٣
٣) إذا كانت(ـ٦ ،٦) نقطة تقاطع المقاربين الرأسي والأفقي للدالة ص= $\frac{٣+ك س}{س+ل}$ ، فإن ك+ ل= ...١٢...	٦
٤) $\int_{}^{\frac{\pi}{٤}}$ ٣ قا^٢ س ى س = ...٣......	٩
٥) إذا كانت د(٥) = ٣ ، د (١) = ٠ ؛ فإن $\int_{١}^{٥}$ [د(س)]^٢ دَ(س) ى س = ...٩......	١٢
	١٥

٥

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١- ∫ (٤س + هـ^{س} + س^{هـ}) ء س

الحل

= ٤س^{٢}/٢ + هـ^{س} + س$^{هـ+١}$/(هـ+١) + ث

= ٢س^{٢} + هـ^{س} + س$^{هـ+١}$/(هـ+١) + ث

٢- ∫ س (س + ٧)^{٨} ء س

الحل :

نفرض أن ص = س+٧ ⇐ ص−٧ = س

∴ ء ص = ء س

= ∫ س (س + ٧)^{٨} ء س = ∫ (ص − ٧) ص^{٨} ء ص

= ∫ (ص^{٩} − ٧ص^{٨}) ء ص = ص^{١٠}/١٠ − ٧ ص^{٩}/٩ + ث

= (س+٧)^{١٠}/١٠ − ٧ (س+٧)^{٩}/٩ + ث

٥

السؤال السادس

أ) إذا كان ميل المماس لمنحني هو هـ$^{٢س−ص}$ فأوجد معادلة المنحني علماً أنه يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠).

الحل

ء ص / ء س = هـ$^{٢س-ص}$ ⇐ ء ص / ء س = هـ^{٢س} / هـ^{ص} ⇐ هـ^{ص} ء ص = هـ^{٢س} ء س (ندخل ∫)

⇐ ∫ هـ^{ص} ء ص = ∫ هـ^{٢س} ء س ⇐ $\boxed{\text{هـ}^{ص} = \text{هـ}^{٢س}/٢ + ث}$ (∵ المنحني يمر بـ (٠ ، ٠))

∴ هـ^{٠} = هـ^{٠}/٢ + ث ⇐ ١ = ١/٢ + ث ⇐ ١ − ١/٢ = ث ⇐ $\boxed{١/٢ = ث}$

$\boxed{\text{هـ}^{ص} = \text{هـ}^{٢س}/٢ + ١/٢}$

٤

ب) احسب التكاملين التاليين :

١] ∫ (ظاس + ظتاس)^{٢} ء س . = ∫ (ظا^{٢}س + ٢ ظاس ظتاس + ظتا^{٢}س) ء س

= ∫ (ظا^{٢} ء س + ٢ظاس × ١/~~ظاس~~ ء س + ظتا^{٢} س) ء س

= ∫ ((ظا^{٢}س +١) + (١ + ظتا^{٢}س)) ء س = ∫ (قا^{٢}س + قتا^{٢}س) ء س

= ظاس − ظتاس + ث

٢] ∫ ٢ س جتاس ء س

الحل :

ف = ٢ س   ء ق = جتاس ء س

ء ف = ٢ ء س   ق = جاس

∴ ∫ ٢ س جتاس ء س = ف ق − ∫ ق ء ف

= ٢ س جاس − ∫ ٢جاس ء س

= ٢ س جاس + ٢ جتاس + ث

٦

بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية

اختبار مادة: التفاضل والتكامل
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي ٢٠١٦ /٢٠١٧م

اليوم: السبت
التاريخ: ٢٣ /٧ /٢٠١٧م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة
النموذج السادس

اختبار مادة: **التفاضل والتكامل** الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) العام الدراسي ٢٠١٦ /٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

السؤال الأول

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل ما يأتي :

١) $\lim_{س \to ب}$ جا (π هـ^{س}) جا $\frac{١}{س}$ = صفر (√)

٢) إذا كانت د (س) = س ظا (لو س) ؛ فإن دَ (١) = ١ (√)

٣) $\int$ ٤(٢ س + ١)^{٣} ٤ س = (٢س +١)^{٤} + ث (×) ٦

ب) إذا كانت د(س) = (س - أ)^{٢} تحقق شروط مبرهنة رول على [٠ ، ٣] ، فأوجد قيمة أ ، ثم قيمة جـ الناتجة من المبرهنة .

الحل :

∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

∴ د(٠) = د(٣) ⇐ (٠ - أ)^{٢} = (٣ - أ)^{٢}

٤ ⇐ أ^{٢} = ٩ - ٦أ + أ^{٢} ⇐ ٦ أ = ٩ (÷٦)

∴ $\boxed{أ = \frac{٣}{٢}}$ ∴ د(س) = (س - $\frac{٣}{٢}$)^{٢} ، دَ(س) = ٢س - ٣

∵ ∃ جـ ∈] ٠ ، ٣ [: دَ (جـ) = ٠

∴ ٢ جـ - ٣ = ٠

⇐ $\boxed{جـ = \frac{٣}{٢}}$ ∈] ٠ ، ٣ [

١٠

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١) إذا كانت صَ = أ $\sqrt{ص}$ ، وكان صً = ٨ ؛ فإن قيمة أ = ± ٤ ....

توضيح : ∵ صَ = أ $\sqrt{ص}$ ⇐ صً = $\frac{أ}{٢}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ × صَ ⇐ صً = $\frac{أ}{٢}$ × ص$^{-\frac{١}{٢}}$ × أ × ص$^{\frac{١}{٢}}$

⇐ ٨ = $\frac{أ^{٢}}{٢}$ ⇐ أ = ± ٤

٢) إذا كانت معادلة الناظم للمنحني ص= د(س) عند (١ ، ٤) : ٣ ص - ٤س = ٨ ؛ فإن دَ(١) = $\frac{-٣}{٤}$ ٦

توضيح : ميل الناظم = $\frac{-(-٤)}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ ⇐ ميل المماس = $\frac{-٣}{٤}$

، ∵ ميل المماس = دَ (١) ⇐ دَ(١) = $\frac{-٣}{٤}$

٣) $\int$ جتا س قتا (جا س) ظتا (جا س) ٤ س = - قتا (جا س) + ث ....

توضيح : نفرض ص = جا س ∴ $\frac{٤ ص}{جتاس}$ = ٤ س

∴ $\int$ د(س) ٤ س = $\int$ قتا ص ظتا ص ٤ ص = - قتا ص + ث

= - قتا (جا س) + ث

تابع السؤال الثاني

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{١ - جتا٢س + س جا أ س}}{\text{س}^{٢}} & \text{، س} \neq \text{٠} \\ \text{٢ س + ٤} & \text{، س = ٠} \end{cases}$

الحل ⇓ ∵ د(س) متصلة

∴ د (٠) = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}$ د(س)

⇐ ٢×٠+ ٤ = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}$ $\dfrac{\text{١ - جتا٢س+ س جا أ س}}{\text{س}^{٢}}$

⇐ ٤ = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}$ $\dfrac{\text{٢جا}^{٢}\text{ س + س جا أ س}}{\text{س}^{٢}}$

⇐ ٤ = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}$ $\dfrac{\text{٢جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$ + $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}$ $\dfrac{\text{س جا أ س} \times \frac{\text{أ س}}{\text{أ س}}}{\text{س}^{٢}}$

⇐ ٤ = ٢ + أ ⇐ أ = ٤ - ٢ ⇐ $\boxed{\text{أ = ٢}}$

٤

أ) إذا كانت س ص = ظتا ٢ س ؛ فأثبت أن : ص″ - ٨ ص (ص² + ١) = صفر

الحل ⇓ ∵ ص = ظتا ٢ س ∴ ص′ = - ٢ قتا² ٢ س ⇐ ص″ = ٢ × ٤ قتا² ٢س × ظتا ٢ س

⇐ ص″ = ٨ قتا² ٢س ظتا ٢ س

⇐ ص″ - ٨ قتا² ٢س ظتا ٢ س = ٠ ، (∵ قتا² ٢س = ١ + ظتا² ٢ س)

⇐ ص″ - ٨ (١ + ظتا² ٢س) ظتا ٢ س = ٠ (∵ ص = ظتا ٢س)

⇐ ص″ - ٨ (١ + ص²) × ص = ٠ ⇐ ص″ - ٨ ص (ص² + ١) = ٠

٣

السؤال الثالث

ب) ادرس تغيرات الدالة : د (س) = ٢س + $\dfrac{\text{١}}{\text{س}^{٢}}$ ، ثم ارسم بيانها .

٧

الحل ⇓

د(س) = $\dfrac{\text{٢س}^{٣}\text{+١}}{\text{س}^{٢}}$

(١) م. ت = ح / {٠} =] - ∞ ، ٠ [∪] ٠ ، ∞ [

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{-∞}}{\text{نهــا}}$ د (س) = - ∞ ، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{∞}}{\text{نهــا}}$ د(س) = + ∞

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) = + ∞ ، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) = + ∞

(٣) المقارب الرأسي $\boxed{\text{س = ٠}}$

المقارب المائل $\boxed{\text{ص = ٢س}}$

س	٠	١
ص	٠	٢

(٤) ص′ = $\dfrac{\text{(٦س}^{٢}\text{)×(س}^{٢}\text{) - (٢س}^{٣}\text{+١) × (٢س)}}{\text{س}^{٤}}$

ص′ = $\dfrac{\text{٦س}^{٤}\text{ - ٤س}^{٤}\text{ - ٢س}}{\text{س}^{٤}}$ ⇐ ص′ = $\dfrac{\text{٢س}^{٤}\text{ - ٢س}}{\text{س}^{٤}}$

ص′ = $\dfrac{\cancel{\text{س}}\text{(٢س}^{٣}\text{ - ٢)}}{\text{س}^{٤}}$ ⇐ $\boxed{\text{ص′ = } \dfrac{\text{٢س}^{٣}\text{ - ٢}}{\text{س}^{٣}}}$

ص′ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س = ١}}$

ص′	+	١	-	٠	+
ص	↗	٣	↘		↗

و. ص

د(١) = ٣ (١ ، ٣) قيمة صغرى

(٥) ص″ = $\dfrac{\text{٦س}^{٢}\text{ × س}^{٣}\text{ - ٣س}^{٢}\text{ × (٢س}^{٣}\text{ - ٢)}}{\text{س}^{٦}}$

ص″ = $\dfrac{\text{٦س}^{٥}\text{ - ٦س}^{٥}\text{ + ٦ س}^{٢}}{\text{س}^{٦}}$ = $\dfrac{\text{٦}}{\text{س}^{٤}}$

ص″ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{٦ ≠ ٠}}$

ص″	+	٠	+
ص	∪		∪

لا توجد نقاط انعطاف

(٦) النقاط المساعدة

عندما س = ٠ ⇐ ص = $\dfrac{\text{١}}{\text{٠}}$ كمية غير معرفة

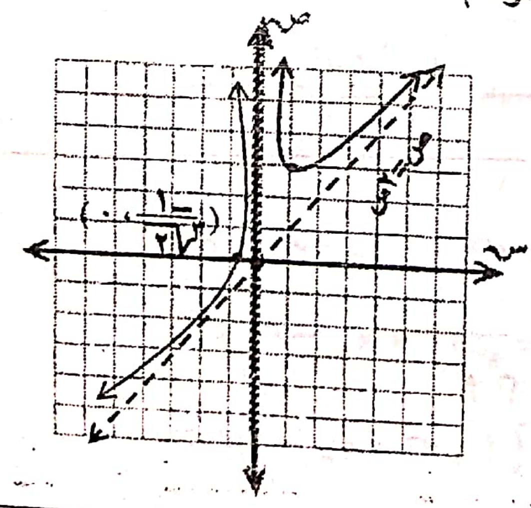
عندما ص = ٠ ⇐ س = $\dfrac{\text{-١}}{\sqrt[3]{\text{٢}}}$ ($\dfrac{\text{-١}}{\sqrt[3]{\text{٢}}}$ ، ٠)

(٧) الجدول

س	+ ∞		١		٠	- ∞
ص′		+	٠	-		+
ص″			+			+
ص	+ ∞	↗	٣	↘	+ ∞ / + ∞	↗ - ∞

و. ص

(٨) الرسم



⟸ للأسئلة بقية في الصفحة الثالثة

السؤال الرابع

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت د(س) = ٢ $هـ^{س}$ ، ق (س) = لوس ؛ (د ∘ ق)َ (س) =...[١ ، $\boxed{٢}$ ، ٣ ، ٤].

٢) إذا كانت د(س) = جا ٢ س؛ فإن دً (س) +٦ د(س) =... [– ٢جا٢ س ، جا٢س ، $\boxed{٢جا٢س}$ ، ٤جا٢س].

٥ ٣) إذا كان للدالة د(س) = $س^٢ + \frac{أ}{س}$ قيمة صغرى عند س =١ ؛ فإن أ = ... [– ٢ ، –١ ، ١ ، $\boxed{٢}$].

٤) إذا كان ١ ≤ د(س) ≤ ٢ ؛ فإن الحد الأدنى لـ $\int_{١}^{هـ}$ لو د(س) ء س= ...[$\boxed{صفر}$ ، لو٢ ، هـ ، هـ لو٢].

٥) $\int_{٢}^{٥}$ لو ٢ $س^٤$ ء س + $\int_{٥}^{٢}$ لو $س^٤$ ء س = ... [٠ ، لو ٢ ، لو ٤ ، $\boxed{لو ٨}$].

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{٠}^{٢}$ (س + ١ $)^٢$ ء س .

الحل : نقسم الفترة [٠ ، ٢] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول

(١) $\Delta س_ر = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٢ - ٠}{ن} = \frac{٢}{ن}$

(٢) $س_ر^* = أ + \Delta س_ر \times ر$

$= ٠ + \frac{٢}{ن} ر = \frac{٢}{ن} ر$

(٣) $د(س_ر^*) = (س_ر^* + ١)^٢ = (\frac{٢}{ن} ر + ١)^٢$

$د(س_ر^*) = \frac{٤}{ن^٢} ر^٢ + \frac{٤}{ن} ر + ١$

٥ (٤) $\Delta س_ر \times د(س_ر^*)$

$= (\frac{٢}{ن}) \times (\frac{٤}{ن^٢} ر^٢ + \frac{٤}{ن} ر + ١)$

$= \frac{٨}{ن^٣} ر^٢ + \frac{٨}{ن^٢} ر + \frac{٢}{ن}$

(٥) $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{٨}{ن^٣} ر^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٨}{ن^٢} ر + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٢}{ن}$

$= \frac{\cancel{٨}^{٤}}{\cancel{ن^٣}^{ن^٢}} \times \frac{\cancel{ن}(٢ن^٢ + ٣ن + ١)}{\cancel{٦}_{٣}} + \frac{\cancel{٨}^{٤}}{\cancel{ن^٢}^{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن + ١)}{\cancel{٢}_{١}} + \frac{٢}{\cancel{ن}} \times \cancel{ن}$

(٦) $\int_{٠}^{٢} (س + ١)^٢ ء س$

$= \lim_{ن \to \infty} [\frac{٨ن^٢ + ١٢ن + ٤}{٣ن^٢} + \frac{٤ن + ٤}{ن} + ٢]$

$= \frac{٨}{٣} + ٤ + ٢ = \frac{٨}{٣} + ٦ = \frac{٢٦}{٣}$

السؤال الخامس

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١) إذا كانت د(س) = س + $هـ^{٢س}$ ؛ فإن دَ (لو ٢) = ...٩.........	٥
٢) إذا كانت(٣،٢) نقطة تقاطع المقاربين الرأسي والأفقي للدالة د(س) = $\frac{م س + ٥}{س - هـ}$ فإن م+هـ = ...٥...	٦
٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س + جا٢ س}{س}$ = ...٦..........	٧
٤) إذا كان د(٩) = ٨ ، د(٤) = ٣ ، فإن قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ٤س دَ($س^٢$) ء س = ...١٠.........	٨
٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ ٧$قا^٢$ س ء س = ...٧......	٩
	١٠

٥

للأسئلة بقية في الصفحة الرابعة ⟸

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١) $\int$ قاس (٣ جا س − ٢ قا س) ى س

الحل:

$= \int$ (٣قا س جا س − ٢ قا^{٢}س) ى س

$= \int$ ($\frac{\text{٣جا س}}{\text{جتاس}}$ − ٢قا^{٢} س) ى س

= −٣ لو | جتا س | −٢ ظا س + ث

٢) $\int$ (٢ س + هـ^{س} − ١)ى س .

الحل:

= $\frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}}$ + هـ^{س} − س + ث

= س^{٢} + هـ^{س} − س + ث

أ) أوجد قيمة جـ الناتج عن مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب $\int_{١}^{٩} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ى س .

الحل:

$\because \int_{أ}^{ب}$ د(س) ى س = د (جـ) (ب − أ)

$\therefore \int_{١}^{٩} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ى س = د(جـ) (٩ − ١)

$\Leftarrow$ ٢$\sqrt{\text{س}}\Big|_{١}^{٩}$ = د (جـ) × ٨

$\Leftarrow$ ٢ ($\sqrt{٩}$ − $\sqrt{١}$) = ٨ د (جـ)

$\Leftarrow$ ٤ = ٨ د (جـ) (÷ ٨)

$\Leftarrow$ د (جـ) = $\frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \frac{١}{\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{١}{٢}$ (نقلب)

$\Leftarrow \sqrt{\text{جـ}}$ = ٢ (بالتربيع)

$\Leftarrow$ جـ = ٤ $\in$ [١ ، ٩]

٤

ب) احسب التكاملين التاليين :

١] $\int$ (س٢ + ١) × جتا (س٣ + ٣ س+١) ى س

الحل :

نفرض : -

ص = س^{٣} + ٣ س + ١

$\therefore$ ى ص = (٣س^{٢} + ٣) ى س

$\Leftarrow \frac{\text{ى ص}}{\text{٣(س}^{٢}\text{+١)}}$ = ى س

$\therefore \int$ (س^{٢} + ١) × جتا (س^{٣} + ٣ س +١) ى س

$= \int$ ($\cancel{\text{س}^{٢}\text{+١}}$) × جتا ص × $\frac{\text{ى ص}}{\text{٣(}\cancel{\text{س}^{٢}\text{+١}}\text{)}}$

$= \frac{١}{٣} \int$ جتا ص ى ص

= $\frac{١}{٣}$ جا ص + ث

= $\frac{١}{٣}$ جا (س^{٣} + ٣ س+١) + ث

٦

٢] $\int$ س قا^{٢} س ظا س ى س

الحل : نضع

ف = س ى ʋ = قا^{٢} س ظا س ى س

ى ف = ى س ʋ = $\frac{\text{قا}^{٢}\text{ س}}{٢}$

$\therefore \int$ س قا^{٢} س ظا س ى س

= ف ʋ − $\int$ ʋ ى ف

= $\frac{١}{٢}$س قا^{٢} س − $\frac{١}{٢} \int$ قا^{٢} س ى س

= $\frac{١}{٢}$ س قا^{٢} س − $\frac{١}{٢}$ظا س + ث

حل آخر :-

ف = س ى ʋ = قا^{٢}س ظا س ى س

ى ف = ى س ʋ = $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$

$\therefore \int$ف ى ʋ = $\frac{١}{٢}$س ظا^{٢} س − $\frac{١}{٢} \int$ ظا^{٢} س ى س

= $\frac{١}{٢}$س ظا^{٢} س − $\frac{١}{٢}$ $\int$ (قا^{٢} س − ١) ى س

= $\frac{١}{٢}$س ظا^{٢} س − $\frac{١}{٢}$ (ظا س − س) + ث

= $\frac{١}{٢}$ س ظا^{٢} س − $\frac{١}{٢}$ظا س + $\frac{١}{٢}$س + ث

انتهت الأسئلة... مع أصدق التمنيات بالنجاح والتفوق

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة: التفاضل والتكامل
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

اليوم: السبت
التاريخ: ٢٣/ ٧/ ٢٠١٧م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة
النموذج السابع

اختبار مادة: **التفاضل والتكامل** الشهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) العام الدراسي ٢٠١٦/ ٢٠١٧م

س	أجب عن أربعة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	د

السؤال الأول

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ ، لكل ما يأتي :

١) $\lim_{س \leftarrow \pi}$ جا ٢س قتا ٣س $= \frac{-٢}{٣}$ (√)

٢) إذا كانت د(س) = قا^٢ س ؛ فإن دَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\sqrt{٢}$ (×)

٦ ٣) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ د(س) ءس = ٢ ؛ فإن $\int_{١}^{٣}$ (٣د(س) − ٢) ءس = ٢ (√)

ب) بين أن الدالة د(س) $= \sqrt{س^٢ + ١}$ تحقق شروط مبرهنة رول على [−١ ، ١] ، ثم أوجد قيمة (جـ) الناتجة من المبرهنة .

الحل:

(١) د(س) $= \sqrt{س^٢ + ١}$
م . ت = ح
∵ [−١ ، ١] ⊂ ح
∴ الدالة متصلة على [−١ ، ١]

(٢) دَ(س) $= \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^٢ + ١}}$
م . ت = ح
]−١ ، ١[⊂ ح
∴ الدالة قابلة للاشتقاق على]−١ ، ١[

٤ (٣) د(−١) $= \sqrt{٢}$
د (٢) $= \sqrt{٢}$
∴ د(−١) = د (١)

∴ د(س) تحقق شروط مبرهنة رول على [−١ ، ١]

وبالتالي ∃ جـ ∈]−١ ، ١[: دَ (جـ) = ٠

١٠ $\frac{جـ}{\sqrt{جـ^٢ + ١}} = ٠ \Leftarrow \boxed{جـ = ٠} \in]-١ ، ١[$

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل العبارات صحيحة :

١) إذا كانت د(س) = لو س فإن (د ∘ د)َ (س) = $\frac{١}{س \text{ لو } س}$ ....

توضيح : (د ∘ د)َ (س) = دَ(د (س)) × دَ(س) = دَ (لوس) × دَ (س) = $\frac{١}{لو س} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س \text{ لو } س}$

٦ ٢) إذا كان الدالة د (س) = (س - أ)^٣ + ٢ ، نقطة انعطاف عند س = ٤ فإن قيمة أ = ...٤.....

٣) ∀ س ∈ $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ ؛ فإن $\int \sqrt{١ - \text{جتا } ٢س}$ ءس = ... $-\sqrt{٢}$ جتا س + ث

توضيح :

$\int \sqrt{١ - \text{جتا } ٢س}$ ءس $= \int \sqrt{٢ \text{جا}^٢ س}$ ءس $= \int \sqrt{٢}$ | جا س | ءس (∵ ∀ س ∈ $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$)

$= \int \sqrt{٢}$ جاس ءس $= -\sqrt{٢}$ جتا س + ث

للأسئلة بقية في الصفحة الثانية ⟸

تابع السؤال الثاني

ب) أوجد قيم م التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠ ، $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جتا\,س - جتا^٢\,س}{س\ ظا\ م\ س} & ، س \ne ٠ \\ م^٢ + \dfrac{١}{٢}\ جتا\,س & ؛ س = ٠ \end{cases}$

الحل :- ∵ د(س) متصلة

$د(٠) = \underset{س \to ٠}{نهـا}\ د(س)$

$\Leftarrow م^٢ + \dfrac{١}{٢} جتا ٠ = \underset{س \to ٠}{نهـا} \dfrac{جتا\,س - جتا^٢\,س}{س\ ظا\ م\ س}$ ($\frac{٠}{٠}$ ع.ت)

$\Leftarrow م + \dfrac{١}{٢} × ١ = \underset{س \to ٠}{نهـا} \dfrac{جتا\,س(١ - جتا\,س)}{س\ ظا\ م\ س}$

$\Leftarrow م + \dfrac{١}{٢} = \underset{س \to ٠}{نهـا} \dfrac{جتا\,س × ٢ جا^٢\frac{س}{٢} × \frac{(\frac{س}{٢})^٢}{(\frac{س}{٢})^٢}}{س × ظا\ م\ س × \frac{م\ س}{م\ س}}$

$\Leftarrow م + \dfrac{١}{٢} = \underset{س \to ٠}{نهـا} \dfrac{جتاس × \cancel{٢} × \frac{\cancel{س^٢}}{٤}}{م\ \cancel{س^٢}}$

$\Leftarrow م + \dfrac{١}{٢} = \dfrac{(جتا ٠) × \frac{١}{٢}}{م}$

$\Leftarrow م + \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٢م} \Leftarrow (×٢م) \Leftarrow ٢م^٢ + م = ١$

$\Leftarrow ٢م^٢ + م - ١ = ٠$

$\Leftarrow (م + ١)(٢م - ١) = ٠$

إما $م + ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{م = -١}$

أو $٢م - ١ = ٠ \Leftarrow ٢م = ١ \Leftarrow \boxed{م = \frac{١}{٢}}$

٤

١٠

أ) إذا كانت س = لو (س + ص) ، فأثبت أن : $١ + صَ - صً = ٠$

الحل :

$س = لو(س + ص) \Leftarrow ١ = \dfrac{١ + صَ}{س + ص} \Leftarrow س + ص = ١ + صَ$ (نشتق مرة أخرى)

$\Leftarrow ١ + صَ = ٠ + صً \Leftarrow ١ + صَ - صً = ٠$ #

٣

ب) ادرس تغيرات الدالة : $د(س) = س - \dfrac{٤}{س^٢}$ ، ثم ارسم بيانها .

السؤال الثالث

الحل :

$د(س) = س - \dfrac{٤}{س^٢} = \dfrac{س^٣ - ٤}{س^٢}$

(١) م.ت = ح / {٠} =]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[

(٢) عدد الأفرع اللانهائية (٤) أفرع لا نهائية

$\underset{س \to -\infty}{نهـا} د(س) = -\infty$ ، $\underset{س \to +\infty}{نهـا} د(س) = +\infty$

$\underset{س \to ٠^+}{نهـا} د(س) = -\infty$ ، $\underset{س \to ٠^-}{نهـا} د(س) = -\infty$

(٣) المقاربة الرأسي $\boxed{س = ٠}$

المقارب المائل ص = س

س	٠	١
ص	٠	١

(٤) $صَ = \dfrac{س^٣ + ٨}{س^٣}$ ، $صَ = ٠ \Leftarrow س^٣ + ٨ = ٠$

$\Leftarrow س^٣ = -٨$

$\Leftarrow \boxed{س = -٢}$

صَ : + −٢ − ٠ +

(−٢ ، −٣) قيمة عظمى

(٥) $صً = \dfrac{-٢٤}{س^٤}$ ، $صً = ٠ \Leftarrow ٢٤ \ne ٠$

(لا توجد نقاط انعطاف)

صً : − ٠ −

(٦) النقاط المساعدة

عندما س = ٠ ⇐ ص = كمية غير معرفة

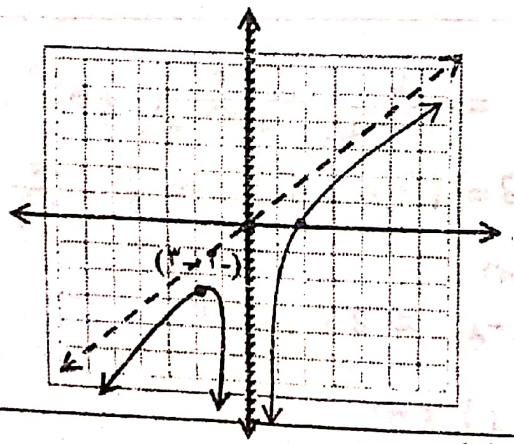
عندما ص = ٠ ⇐ $س^٣ - ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \sqrt[٣]{٤}}$

$(\sqrt[٣]{٤} ، ٠)$

(٧) الجدول

س	+∞		٠		−٢		−∞
صَ		+		−	٠	+	
صً		⌒ −		⌒ −			
ص	+∞	↗	−∞ ‖ −∞	↘	−٣	↗	−∞

ع . ق



٧

للأسئلة بقية في الصفحة الثالثة ⟸

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

١) إذا كانت معادلة الناظم للمنحني د(س) عند(١، ١) هي س+٢ص=٣ فإن دَ(١) = ... [-٢ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\boxed{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$].

٢) للدالة د(س) = س – ٢$\sqrt{س}$ قيمة صغرى عند النقطة ....
[(٠ ، ٠) ، $\boxed{(١ ، -١)}$ ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٠)].

٥

٣) منحنى الدالة مقعراً للأعلى في [ﺃ ، ب] إذا ....
[دً(س) > ٠ ، دَ(س) > ٠ ، $\boxed{دً(س) < ٠}$ ، دَ(س) < ٠].

٤) إذا كانت – ٢ ≤ د(س) ≤ ٣ ؛ فإن الحد الأعلى لـ $\int_{-١}^{٢}$ د(س)ى س = ... [-٦ ، ٣ ، ٦ ، $\boxed{٩}$].

٥) $\int$ ٤ قتا^{٤}س ظتا س ى س=...[$\boxed{- قتا^٤س + ث}$ ، قتا^{٤}س + ث ، ٢ ظا^{٢}س + ث ، ٢ ظتا^{٢}س+ ث].

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{-٢}^{١}$ (س + ٢)^٢ ى س .

الحل :

نقسم الفترة [-٢ ، ١] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول

٥

(١) △ س$_ر$ = $\frac{ب - ﺃ}{ن}$ = $\frac{١ + ٢}{ن}$ = $\frac{٣}{ن}$

(٢) سَ*$_ر$ = ﺃ + △ س$_ر$ × ر

= -٢ + $\frac{٣}{ن}$ ر

(٣) د (سَ*$_ر$) = (سَ*$_ر$ + ٢)^٢

= ($\cancel{-٢}$ + $\frac{٣}{ن}$ ر $\cancel{+٢}$)^٢ = $\frac{٩}{ن^٢}$ ر^٢

(٤) △ س$_ر$ × د (سَ*$_ر$)

= $\frac{٣}{ن}$ × $\frac{٩}{ن^٢}$ ر^٢ = $\frac{٢٧}{ن^٣}$ ر^٢

(٥) $\sum_{ر=١}^{ن}$ $\frac{٢٧}{ن^٣}$ ر^٢ = $\frac{\cancel{٢٧}^{٩}}{\cancel{ن}ن^٢}$ × $\frac{\cancel{ن}(ن+١)(٢ن+١)}{\cancel{٦}_٢}$

(٦) $\int_{-٢}^{١}$ (س + ٢)^٢ ى س

= $\lim_{ن \to \infty}$ $\frac{١٨ ن^٢ + ٢٧ ن + ٩}{٢ ن^٢}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

السؤال الرابع

أ) أكمل كل فقرة في العمود الأيمن بالإجابة الصحيحة من العمود الأيسر :

العمود الأيمـــــن	العمود الأيسر
١) $\lim_{س \to ٠}$ ٨س^٢ ظتا ٢س^٢ = ...٤.......	١
٢) إذا كانت للدالة د(س)= هـ^{س} جتا س ؛ فإن دَ (٠) =......١.......	٢
٣) إذا كان للدالة د(س) = $\frac{ﺃ س}{٢س - ١}$ مقارب أفقي معادلته ص = ٣ ؛ فإن ﺃ =.....٦........	٣
٤) $\int_{١}^{٤}$ $\frac{ى س}{\sqrt{س}}$ = ...٢..........	٤
	٥
٥) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ دً (س) ى س= ٩ ، $\int_{١}^{٥}$ د(س) ى س ى س =١٢ ؛ فإن $\int_{٣}^{٥}$ دَ(س)ى س=.....٣.....	٦

٥

السؤال الخامس

تابع السؤال الخامس

ب) احسب التكاملين التاليين :

١- $\int \left(\text{هـ}^{٢\text{لوس}} - ٢^{\text{س}} \right) \text{ءس}$

الحل :

$\int \left(\text{هـ}^{٢\text{لوس}} - ٢^{\text{س}} \right) \text{ءس}$

$= \int \left(\cancel{\text{هـ}}^{\cancel{\text{لو}}\text{س}^٢} - ٢^{\text{س}} \right) \text{ءس}$

$= \dfrac{\text{س}^٣}{٣} - \dfrac{٢^{\text{س}}}{\text{لو}٢} + \text{ث}$

٢- $\int \text{س} \left(\text{س} - ٣ \right)^٤ \text{ءس}$

الحل:

نفرض أن ع = س − ٣ ⟸ ع + ٣ = س

∴ ءع = ءس

∴ $\int (\text{ع} + ٣) \times \text{ع}^٤ \, \text{ءع} = \int \left(\text{ع}^٥ + ٣\text{ع}^٤ \right) \text{ءع} = \dfrac{\text{ع}^٦}{٦} + \dfrac{٣\text{ع}^٥}{٥} + \text{ث}$

$= \dfrac{(\text{س}-٣)^٦}{٦} + \dfrac{٣(\text{س}-٣)^٥}{٥} + \text{ث}$

٥

١٠

السؤال السادس

أ) أوجد معادلة المنحني الذي ميل المماس له هو $\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا ٣ص}}$ علماً بأنه يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) .

الحل :

∵ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا ٣ص}}$ ⟸ جتا ٣ص ءص = جا س ءس (ندخل $\int$)

٤

$\int$ جتا ٣ ص ءص = $\int$ جا س ءس ⟸ $\dfrac{\text{جا٣ص}}{٣}$ = − جتا س + ث ((المنحني يمر بـ (٠ ، ٠)))

⟸ $\dfrac{\text{جا}(٣\times ٠)}{٣}$ = − جتا ٠ + ث

⟸ صفر = −١ + ث ⟸ ث = ١

∴ معادلة المنحني هى : $\boxed{\dfrac{\text{جا٣ص}}{٣} = -\text{جتا س} + ١}$

ب) احسب التكاملين التاليين :

١] $\int \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}}{١ - \text{جتا س}} \text{ءس}$.

الحل :

$= \int \dfrac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{١ - \text{جتا س}} \text{ءس}$

$= \int \dfrac{\cancel{(١ - \text{جتاس})} (١ + \text{جتاس})}{\cancel{(١ - \text{جتاس})}} \text{ءس}$

$= \int \left(١ + \text{جتا س} \right) \text{ءس} = \text{س} + \text{جا س} + \text{ث}$

٦

٢] $\int \dfrac{\text{لوس}}{\sqrt{\text{س}}} \text{ءس}$.

الحل :

ف = لوس ⟵ ءق = $\dfrac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ءس

ءف = $\dfrac{١}{\text{س}}$ ءس ⟵ ق = ٢$\sqrt{\text{س}}$

$\int$ فءق = ف ق − $\int$ ق ءف

$= ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{لوس} - \int ٢\cancel{\sqrt{\text{س}}} \times \dfrac{١}{\cancel{\text{س}}} \text{ءس}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{لو س} - ٢\int \text{س}^{-\frac{١}{٢}} \text{ءس}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{لو س} - ٤\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$