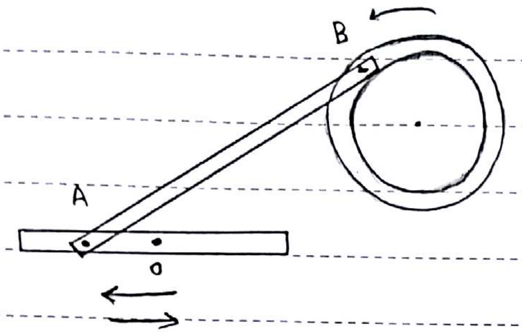
الوحدة الأولى: الحركة والتحريك

الدرس الأول: الحركة التوافقية البسيطة

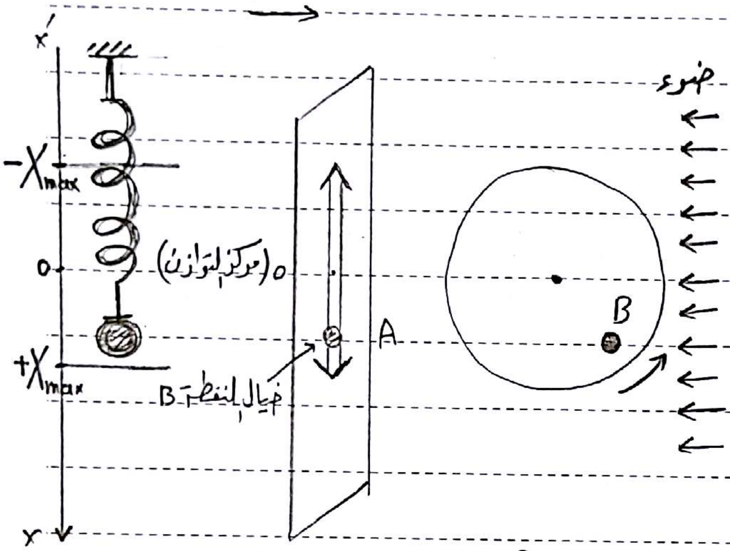
الدراسة التجريبية:

نشاط (1): في الشكل المجاور عندما تتحرك النقطة (B) حركة دائرية منتظمة فإن النقطة (A) تتحرك حركة انسحابية باتجاهين



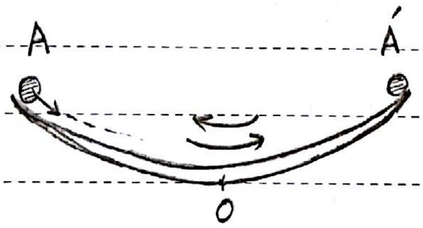
نشاط (2): في الشكل المجاور عندما تتحرك النقطة (B) حركة دائرية منتظمة فإن خيال النقطة (A) يتحرك حركة انسحابية على مستوٍ شاقولي باتجاهين

وحركة النقطة (A) يتطابق مع حركة الجسم المعلق بنابض



نتيجة: حركة النقطة (A) في النشاطين السابقين يتحرك حركة اهتزازية على جانبي مركز التوازن.

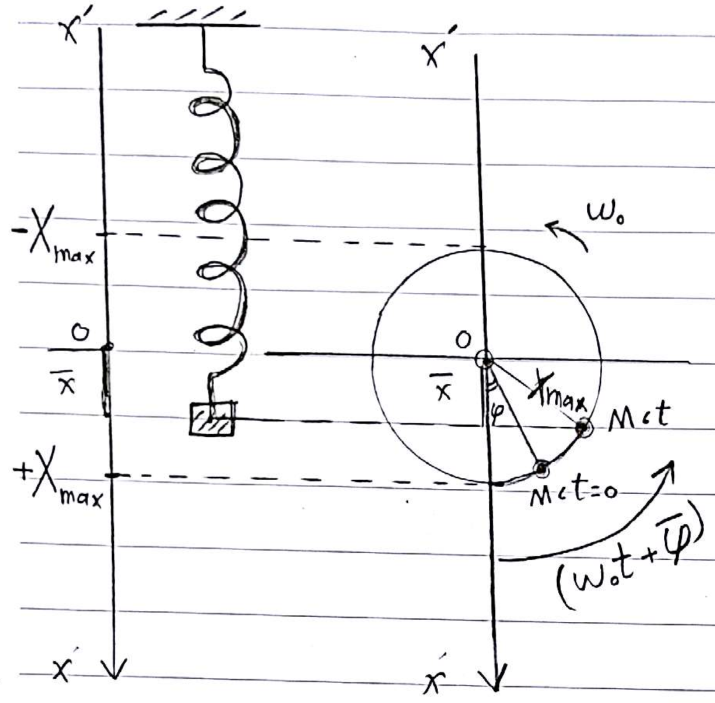
نشاط (3): في الشكل المجاور عندما نترك كرة صغيرة دون سرعة ابتدائية من أحد طرفي وعاء أملس مقعر فإنها تتحرك باتجاهين متعاكسين وبسرعات مختلفة وتنعدم سرعتها (تقف) عند A، A' وتكون سرعتها عظمى في النقطة (o).



نتيجة: الحركة الاهتزازية: هي حركة جسم على جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز أي مركز التوازن ومن الأجسام التي تتحرك حركة اهتزازية هي حركة جسم معلق بنابض يسمى النواس المرن

نشاط (4):

- العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل)



عندما تدور نقطة (M) على محيط دائرة حركة دائرية منتظمة فإن مسقطها على $\overrightarrow{x'x}$ يتحرك حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة).

لتبسيط دراسة الحركة التوافقية البسيطة نمثلها بشعاع $\overrightarrow{OM}$ يتصف بما يلي:

1- طويلته ثابتة تمثل سعة الحركة

$$|\overrightarrow{OM}| = X_{max}$$

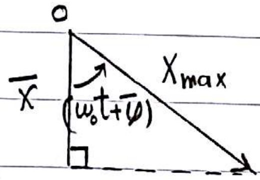
2- زاويته في اللحظة ($t=0$) مع $\overrightarrow{x'x}$ تسمى الطور الابتدائي ($\bar{\varphi}$) (rad)

3- زاويته في اللحظة (t) مع $\overrightarrow{x'x}$ تسمى طور الحركة ($\omega_0 t+\bar{\varphi}$)

4- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل سرعة زاوية ثابتة (ω)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

5- مسقطه القائم على $\overrightarrow{x'x}$ يمثل مطال الحركة ($\bar{x}$) وهو متغير بتغير الزمن.



6- من الشكل نجد:

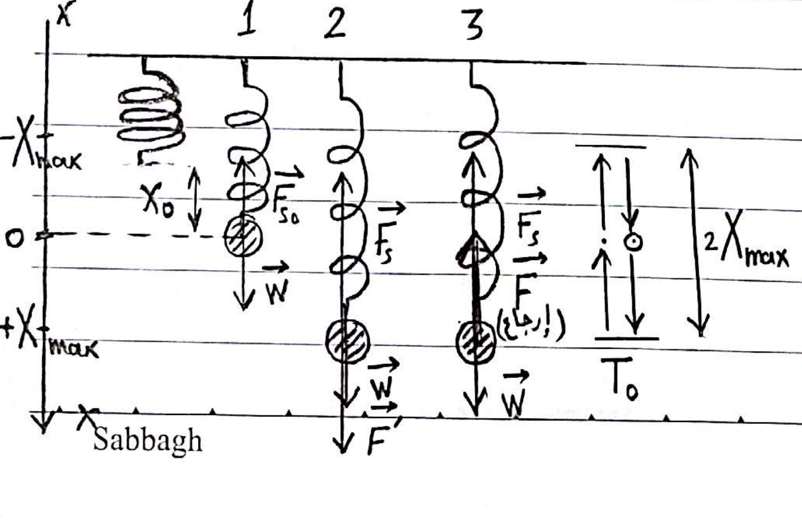
$$\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$$

$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ وهو تابع جيبي لذلك حركة مسقط (M) او حركة الجسم المعلق بنابض هي حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة).

نشاط (5):

النواس المرن:

كرة صغيرة كتلتها (m) معلقة بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته K.



1- الجسم المعلق بنابض يسبب استطالة سكونية X_0 ويخضع لتأثير قوتين
$\vec{W}$: قوة ثقل الجسم ، $\vec{F}_{s_0}$: قوة توتر النابض

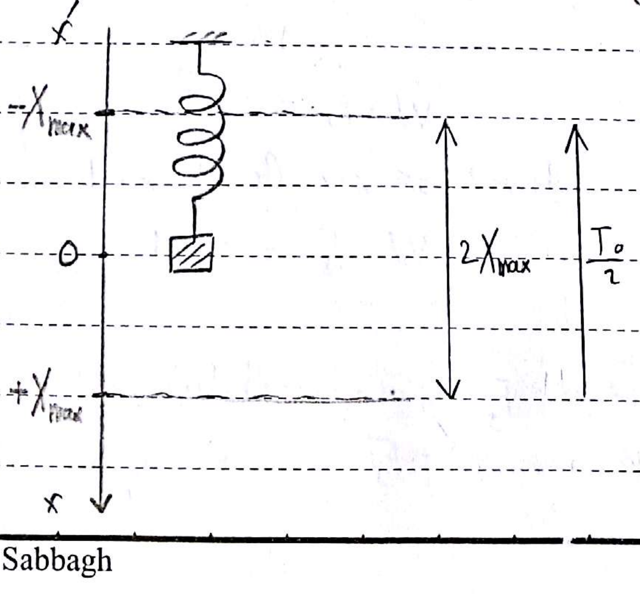
2- نشد الجسم شاقولياً نحو الاسفل ضمن حدود مرونة النابض مسافة $+X_{max}$ فيخضع الجسم لتأثير ثلاث قوى :
$\vec{W}$: قوة ثقل الجسم ، $\vec{F'}$: قوة الشد (تتجهان نحو الاسفل)
$\vec{F_s}$: قوة توتر النابض التي ازدادت شدتها (تتجه نحو الاعلى)

3- لحظة ترك الجسم ، تنعدم قوة الشد $\vec{F'}$ ويخضع للقوتين $\vec{F_s}$ ، $\vec{W}$ محصلة تسمى قوة الارجاع $\vec{F}_{(ارجاع)}$ تتجه نحو مركز التوازن
فيتحرك الجسم على جانبي مركز التوازن راسماً قطعة مستقيمة طولها $(2X_{max})$

الدور الخاص (T_0) : هو الزمن اللازم لينجز المتحرك هزة كاملة
أي : الزمن اللازم لانتقال الجسم من $(+X_{max}) \rightarrow -X_{max}$
ثم العودة الى $(+X_{max})$ ويقدر بالثانية (sec)

التواتر الخاص (f_0) : هو عدد الهزات في واحدة الزمن ويقدر بالهرتز (HZ)
وهو مقلوب الدور $\left(f_0 = \frac{1}{T_0}\right)$

تطبيق : يتحرك جسم حركة جيبية انسحابية بحيث ينطلق من مبدأ الزمن من نقطة مطالها $+X_{max}$ فيستغرق (10 sec) حتى يصل الى المطال المناظر $-X_{max}$ راسماً قطعة مستقيمة طولها 24 cm أثناء اهتزازه والمطلوب استنتج الدور الخاص (T_0) ، ~~وسعة~~ سعة الاهتزاز (X_{max}).



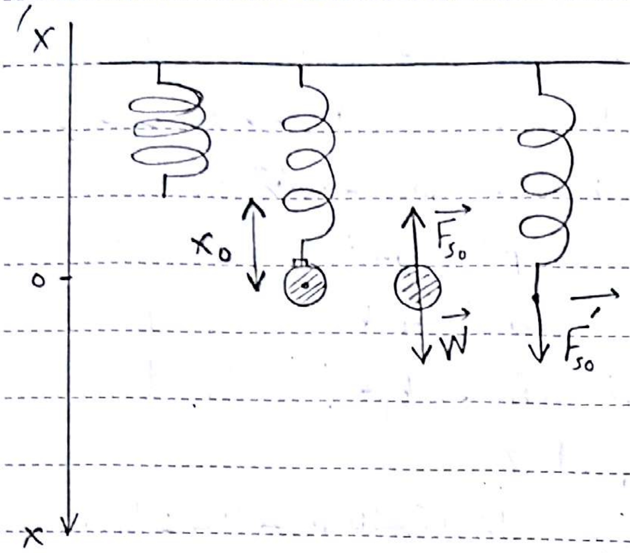
الحل :

$\frac{T_0}{2} = 10\ sec$
$\Rightarrow T_0 = 20\ sec$

$2X_{max} = 24\ cm$
$\Rightarrow X_{max} = 12 \times 10^{-2}\ m$

1- قوة الارجاع

a) حالة السكون: يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه.



- يخضع الجسم (s) لتأثير قوتين: $\vec{W}$: قوة ثقل الجسم
  $\vec{F_{s_0}}$: قوة توتر النابض
- العلاقة الاساسية بالتحريك الانسحابي:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{(حالة سكون)}$$

$$\vec{W} + \vec{F_{s_0}} = \vec{0}$$

- بالاسقاط على $\overline{x'x}$ نحو الاسفل

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$\boxed{W = F_{s_0}} \quad (1)$$

تؤثر في النابض قوة شد $\vec{F'_{s_0}}$ تسبب استطالة (x_0)

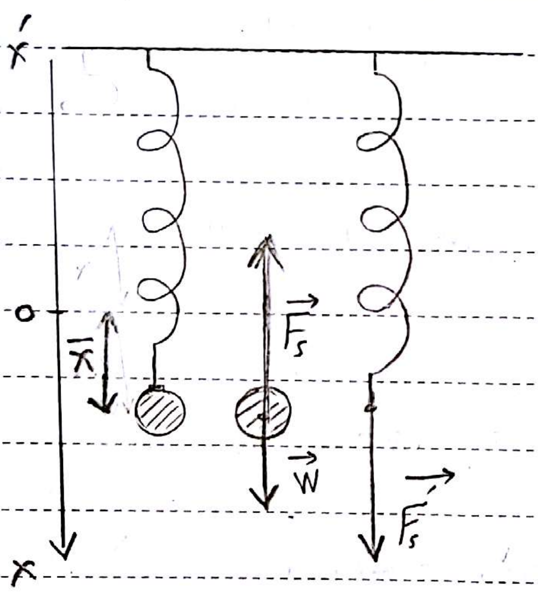
بالاستفادة من (1) $\quad F'_{s_0} = F_{s_0} = K x_0$

$$\boxed{W = K x_0} \quad (2)$$

حيث x_0: استطالة سكونية

K: ثابت صلابة النابض

b) حالة الحركة:



- يخضع الجسم لتأثير قوتين: $\vec{W}$: قوة ثقل الجسم
  $\vec{F_s}$: قوة توتر النابض
- العلاقة الاساسية بالتحريك الانسحابي (قانون نيوتن الثاني)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

- بالاسقاط على $\overline{x'x}$ نحو الاسفل

$$\boxed{W - F_s = ma} \quad (3)$$

تؤثر على النابض قوة $\vec{F'_s}$ التي تسبب استطالة $(\bar{x} + x_0)$

$F'_s = F_s = K(\bar{x} + x_0)$ نعوض في (3)

$$W - k(\bar{x} + x_0) = m\bar{a}$$

$$W - k\bar{x} - kx_0 = m\bar{a}$$

بالاستفادة من (2

$$\cancel{kx_0} - k\bar{x} - \cancel{kx_0} = m\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = m\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = \bar{F}$$

قوة الارجاع $\boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$

اذاً: محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة ارجاع لانها تعيد الجسم الى مركز الاهتزاز دوماً، وهي تتناسب طرداً مع المطال $\bar{x}$، وتعاكسه بالاشارة.

2- استنتاج طبيعة حركة النواس المرن (إيجاد التابع الزمني للنواس المرن)

نعلم ان محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم

$$\bar{F} = m\bar{a} = -k\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

$$\boxed{(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}} \quad (1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن

$$(x)'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 \underbrace{X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}_{\bar{x}}$$

$$\boxed{(x)''_t = -\omega_0^2\bar{x}} \quad (2$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

k: ثابت صلابة النابض $(N.m^{-1})$ ، m: كتلة الجسم المهتز (kg) ، ω_0: النبض الخاص $(rad.s^{-1})$

وهذا محقق لأن k ، m موجبان

وهو النبض الخاص بالحركة للنواس المرن وحركته جيبية انسحابية (اهتزازة توافقية بسيطة) التابع الزمني للمطال (الموضع) يعطى بالعلاقة

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{x}$: المطال (موضع الجسم) في اللحظة t ويقدر بالمتر (m)

X_{max}: سعة الاهتزاز ويقدر بالمتر (m) وهي موجبة دوماً

ω_0: النبض الخاص بالحركة ويقدر $rad.s^{-1}$ $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $(t=0)$ ويقدر rad

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة (t) ويقدر (rad)

X_{max} ، ω_0 ، $\bar{\varphi}$: ثوابت الحركة

3- استنتاج علاقة الدور الخاص للنواس المرن:

علماً

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

بالمساواة نجد

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد ومنه نستنتج أن الدور الخاص

1) لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

2) يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m.

3) يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k.

4- توابع الحركة:

1) تابع المطال: التابع الزمني للمطال من الشكل $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

باختيار مناسب لشروط البدء ($\bar{x} = +X_{max}$ ، $t=0$) نأخذ تابع المطال

شكلاً مختزلاً: $+X_{max} = X_{max} \cos(\omega_0 (0) + \bar{\varphi})$

$\cos(\bar{\varphi}) = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$

إذاً الشكل المختزل لتابع المطال (أبسط شكل لتابع المطال)

$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t)$

- منحني المطال بدلالة الزمن خلال دور: $\bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

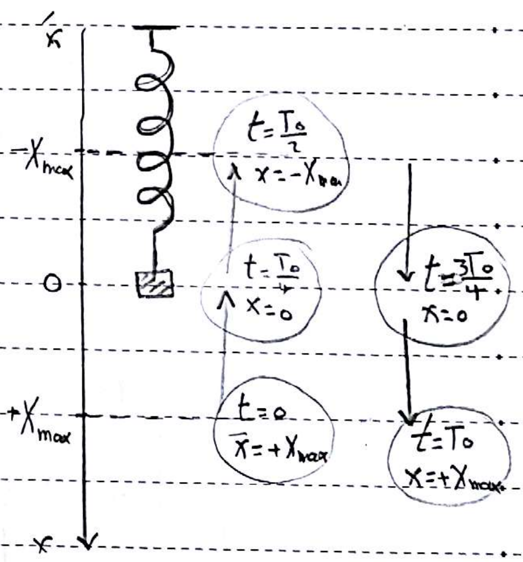
لـ: $t=0 \Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}(0)\right) \Rightarrow \bar{x} = +X_{max}$

$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{4}\right) \Rightarrow \bar{x} = 0$

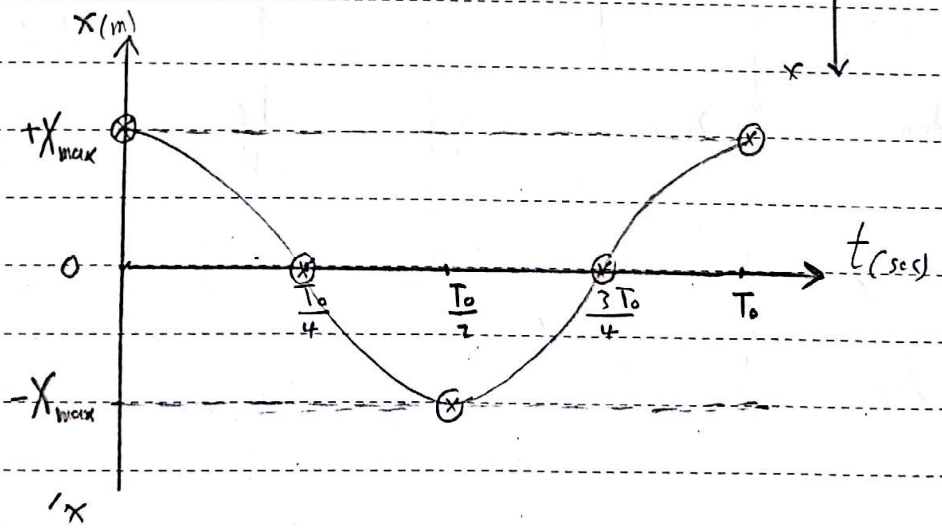
$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = -X_{max}$

$t = \frac{3T_0}{4} \Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{3T_0}{4}\right) \Rightarrow x = 0$

$t = T_0 \Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times T_0\right) \Rightarrow x = +X_{max}$



$t(sec)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$x(m)$	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$



المناقشة:

1) في الوضعين الطرفيين يكون المطال أعظمي (طويلة) $x = |\mp X_{max}|$

2) في مركز التوازن يكون المطال معدوم $x = 0$

2- تابع السرعة: هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$= -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$$

- منحني السرعة بدلالة الزمن خلال دور:

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

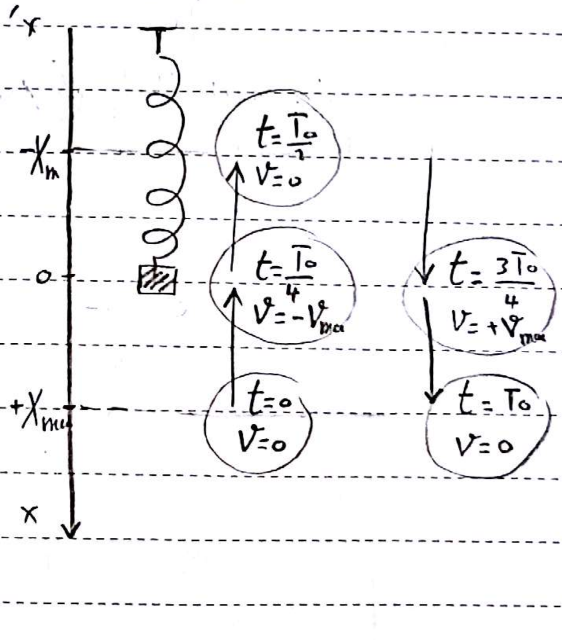
$$\text{Li: } t = 0 \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0\right) \Rightarrow v = 0$$

$$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{4}\right) \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} = -v_{max}$$

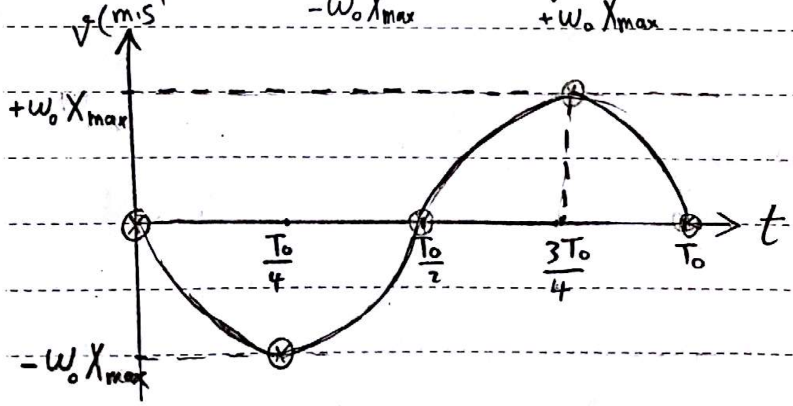
$$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2}\right) \Rightarrow v = 0$$

$$t = \frac{3T_0}{4} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{3T_0}{4}\right) \Rightarrow v = +\omega_0 X_{max} = +v_{max}$$

$$t = T_0 \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times T_0\right) \Rightarrow v = 0$$



t(sec)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v ($m.s^{-1}$)	0	$-v_{max}$	0	$+v_{max}$	0
		$-\omega_0 X_{max}$		$+\omega_0 X_{max}$	



المناقشة:

1) في الوضعين الطرفيين تكون السرعة معدومة: $\bar{v} = 0$

2) في مركز التوازن تكون السرعة عظمى (طويلة): $v_{max} = |\mp \omega_0 X_{max}|$

3- تابع التسارع: هو المشتق الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن والمشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن:

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t$$

$$\bar{a} = (\bar{x})''_t$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

$$= -\omega_0^2 \bar{x}$$ ← (قانون يطبق في السائل)

وهو تابع التسارع بدلالة المطال وقيمته تتغير بتغير المطال

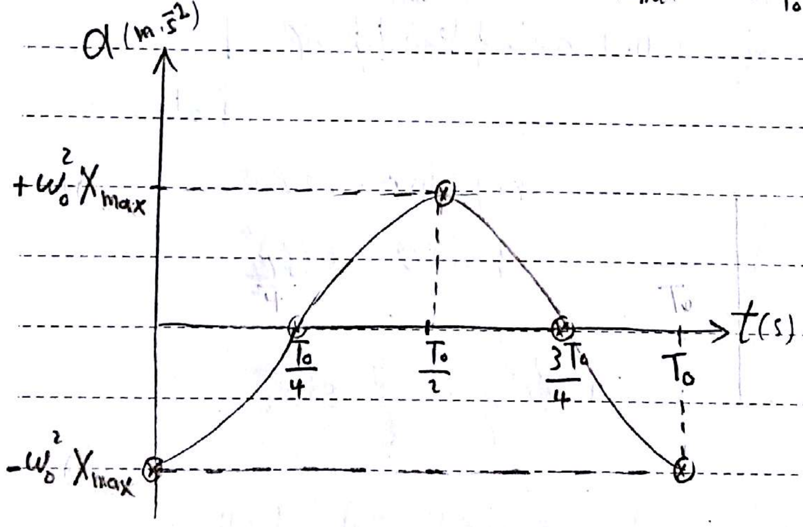
منحني التسارع بدلالة الزمن خلال دور: $\bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\frac{2\pi}{T_0} t)$

لـ: $t = 0 \Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\frac{2\pi}{T_0}(0)) \Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} = -a_{max}$

$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{4}) \Rightarrow a = 0$

$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2}) \Rightarrow a = +\omega_0^2 X_{max} = +a_{max}$

$t = T_0 \Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\frac{2\pi}{T_0} \times T_0) \Rightarrow a = -\omega_0^2 X_{max} = -a_{max}$



$t(sec)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$a(m.s^{-2})$	$-a_{max}$	0	$+a_{max}$	0	$-a_{max}$

$\downarrow -\omega_0^2 X_{max}$ $\downarrow +\omega_0^2 X_{max}$ $\downarrow -\omega_0^2 X_{max}$

المناقشة:

1) في الوضعين الطرفيين يكون التسارع أعظمياً (طويلة): $a_{max} = |\mp \omega_0^2 X_{max}|$

2) في مركز التوازن يكون التسارع معدوم: $a = 0$

تطبيق : حدد قيمة كلاً من السرعة والتسارع في اللحظتين $t=\frac{5T_0}{4}$ ، $t=\frac{5T_0}{2}$

الحل :

$t=\frac{5T_0}{4}$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$= -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$= -v_{max} \quad (\text{عظمى})$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$= -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$= 0 \ m.s^{-2} \quad (\text{معدوم})$$

عندما تكون السرعة عظمى ينعدم التسارع

$t=\frac{5T_0}{2}$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{2}\right)$$

$$= 0 \quad (\text{معدومة})$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{2}\right)$$

$$= +a_{max} \quad (\text{عظمى})$$

عندما تنعدم السرعة يكون التسارع أعظمياً

5) الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة :

الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقتين الكامنة والحركية

$$E_{total} = E_p + E_K \quad ---- (1)$$

تابع المطال : $x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع السرعة : $v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

الطاقة الكامنة المرونية المختزنة في النابض $E_p = \frac{1}{2} K x^2$

$$= \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad ---- (2)$$

الطاقة الحركية للجسم $E_K = \frac{1}{2} m v^2$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن : $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = m\omega_0^2$

$$E_K = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\phi}) \quad \ldots (3)$$

نعوض عن (2) و (3) في (1) فنجد

$$E_{total} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\phi}) + \frac{1}{2} K X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\phi})$$

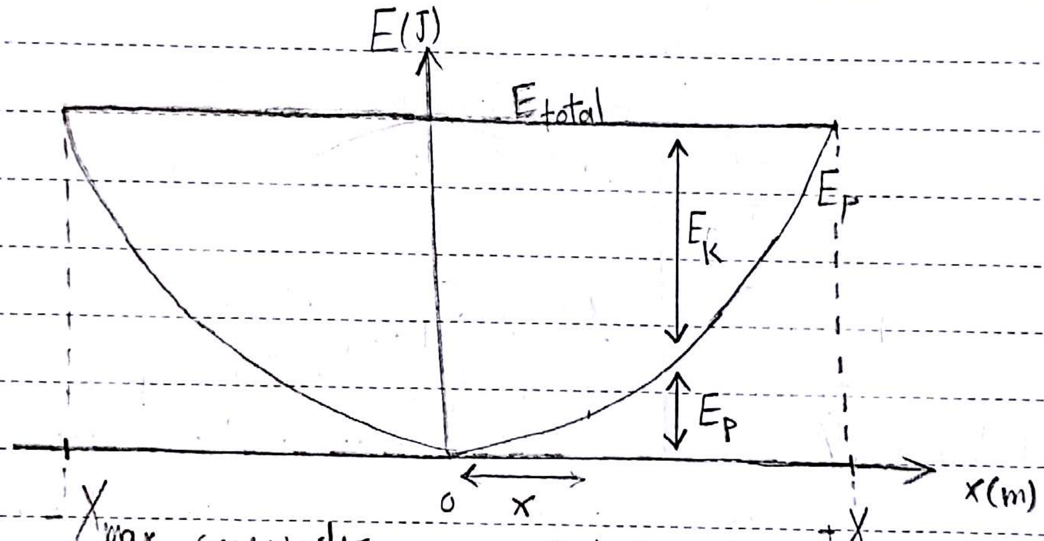
$$= \frac{1}{2} K X_{max}^2 \left[\cos^2(\omega_0 t + \bar{\phi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\phi})\right]$$

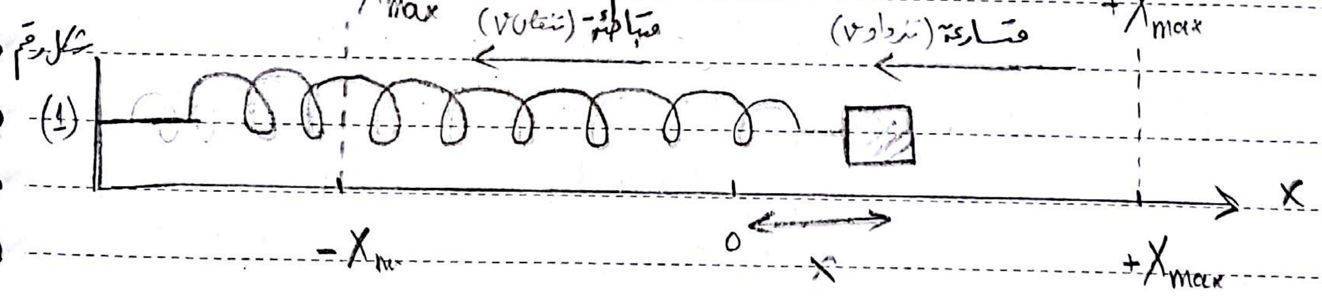
$$E_{total} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 = const$$

المناقشة:

- يمكن إيضاح العلاقة $E_{total} = E_P + E_K$ بدلالة المطال (x) بيانياً

$E_{total} = \frac{1}{2} K X_{max}^2$ ، $E_{total} = E_P + E_K$ ، $E_P = \frac{1}{2} K x^2$ ، $E_K = \frac{1}{2} m v^2$





- في وضع التوازن: $X = 0 \Rightarrow E_P = 0 \Rightarrow E_{total} = E_K$

الطاقة الكلية في مركز التوازن هي طاقة حركية فقط

- في الوضعين الطرفيين: $v = 0 \Rightarrow E_K = 0 \Rightarrow E_{total} = E_P$

الطاقة الكلية في الوضعين الطرفيين هي طاقة كامنة مرونية فقط،

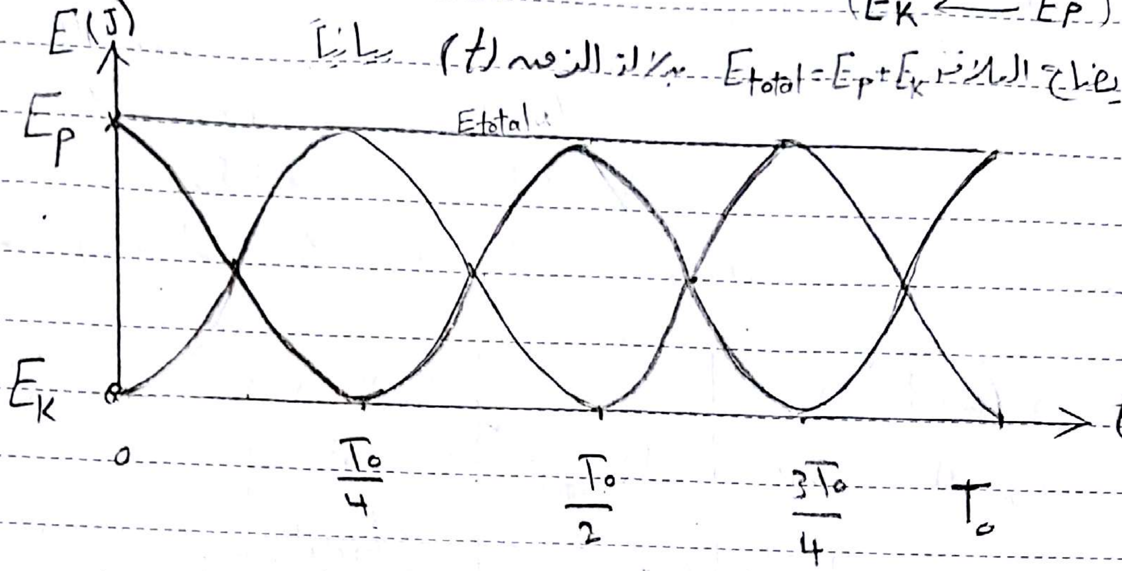
- بالابتعاد عن مركز التوازن يزداد المطال (X) وبالتالي تزداد الطاقة الكامنة المرونية وتنقص الحركية

أي تتحول ($E_K \longrightarrow E_P$).

بالاقتراب من مركز التوازن ينقص المطال (x) وبالتالي تنقص الطاقة الكامنة المرونية وتزداد الحركية

أي أن $(E_K \longleftarrow E_P)$.

يمكن إيضاح التلازم $E_{total} = E_p + E_K$ بالنسبة للزمن (t) بيانياً:



تطبيق:

نواس مرن افقي كما في الشكل رقم (1) مؤلف من جسم ونابض تابعه الزمني $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \pi)$ والمطلوب:

1) حدد ثوابت الحركة لهذا النواس 2) احسب دوره T_0

3) حدد موضع المتحرك (الجسم) في لحظة بدء الزمن.

الحل: 1) التابع الزمني للنواس المرن: $\bar{x} = \boxed{X_{max}}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \pi)$$

بالمقارنة نجد:

$X_{max} = 0.1\ m$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

$\bar{\varphi} = +\pi\ rad$ (طور الحركة في اللحظة $t=0$)

2) الدور الخاص (T_0): $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ sec$

3) عند بدء الزمن $t=0$

$U: t=0 \Rightarrow \bar{x} = 0.1\cos(\pi(0)+\pi) \Rightarrow \bar{x} = +0.1\underbrace{\cos(+\pi)}_{-1}$

$\Rightarrow x = -0.1\ m$ (الجسم في المطال الأعظمي السالب)

نشاط (6):

حدد المواضع واللحظات التي تكون فيها الطاقتين الحركية والكامنة المرونية

1) عظمى

2) معدومة

باعتبار مبدأ الزمن نقطة مطال $+X_{max}$

أولاً: المواضع: هنالك ثلاث مواضع للجسم وهي طرفين $\mp X_{max}$ ومركز التوازن 0

X (m)	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$
E_K (J)	0	(عظمى) E_{total}	0
E_P	E_{total}	0	E_{total}

نستنتج انه في المواضع التي تكون فيها الطاقة الحركية معدومة تكون فيها الكامنة عظمى والعكس صحيح

ثانياً: اللحظات: هنالك خمس لحظات خلال دور كامل

t (s)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
E_K (J)	0	(عظمى) E_{total}	0	E_{total}	0
E_P (J)	E_{total}	0	E_{total}	0	E_{total}

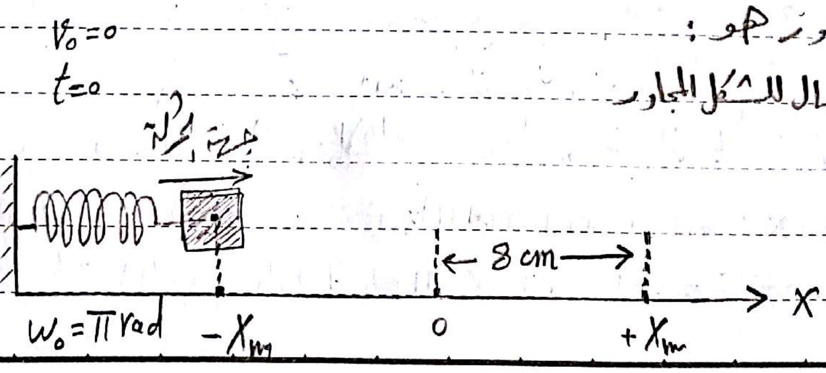
نستنتج انه في اللحظات التي تكون فيها الطاقة الحركية معدومة تكون فيها الطاقة الكامنة عظمى والعكس صحيح.

/ أختبر نفسي /

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي

1- تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:

أ) استنتج تابع المطال للشكل المجاور



الحل: تابع المطال في الحركة الجيبية من الشكل: $x = \underline{X_{max}}\cos(\underline{\omega_0} t + \underline{\bar{\varphi}})$

لنعين الثوابت $(X_{max}, \omega_0, \bar{\varphi})$

*) $X_{max} = 0.08$ m   لأن الجسم تُرك دون سرعة ابتدائية $(V_0 = 0)$

*) $\omega_0 = \pi$ rad.s^{-1}

*) $\bar{\varphi} = ?$

لحساب $\bar{\varphi}$ نعوض شروط البدء $(x = -X_{max}, t = 0)$ بتابع المطال

$-X_{max} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi})$

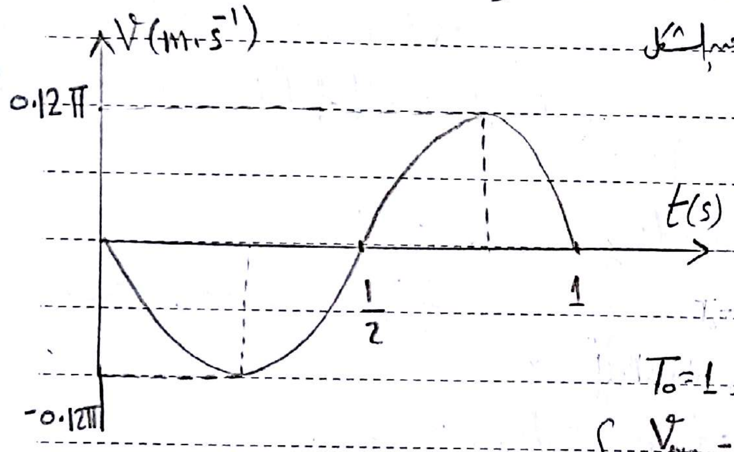
$\cos(\bar{\varphi}) = -1$

$\bar{\varphi} = \pi$ rad

إذاً تابع المطال:

$\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

2- الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك حركة توافقية بسيطة فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



الحل: بما أن الحركة توافقية بسيطة فإن تابع مطالها من الشكل

$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$v = (x)'_t$

$v = -\underline{\omega_0}\,\underline{X_{max}}\sin(\omega_0 t + \underline{\bar{\varphi}})$

لنعين الثوابت $(\omega_0, X_{max}, \bar{\varphi})$

*) من الشكل نجد: $T_0 = 1$ sec $\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ rad.s^{-1}

*) من الشكل نجد: $V_{max} = 0.12\pi \Rightarrow V_{max} = |\mp\omega_0 X_{max}|$

$0.12\pi = 2\pi X_{max}$

$X_{max} = 0.06$ m

يمكن الاستغناء عن حساب X_{max}

*) من الشكل نجد: $(t = 0, V = 0)$ نعوض في تابع السرعة:

$0 = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi}) \Rightarrow \sin\bar{\varphi} = 0 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0$ rad أو π rad

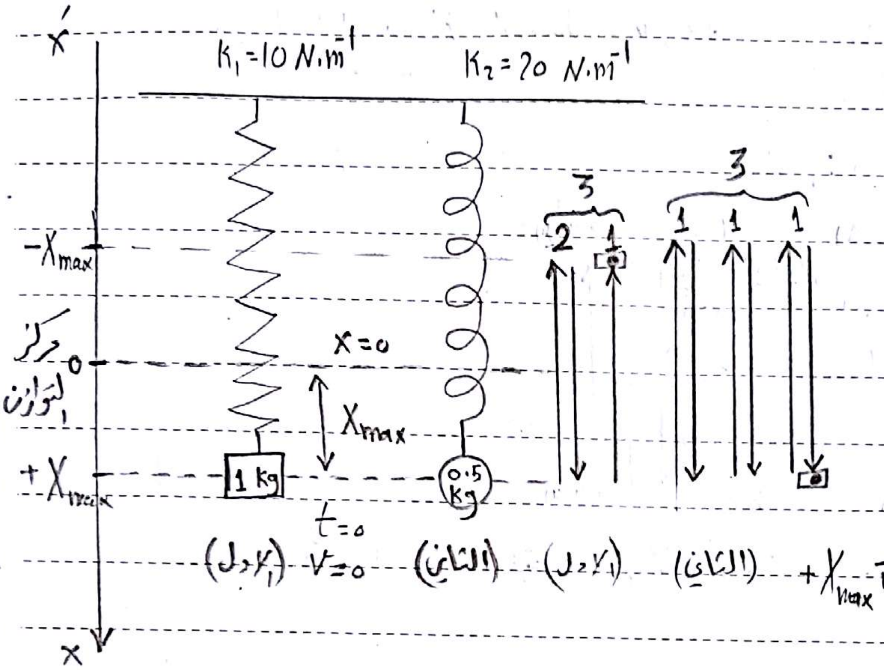
نختار القيمة التي تجعل $0 < X_{max}$ وذلك بإحداثيات النقطة $(t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}, V = -0.12\pi)$

مقبول: لما $\varphi = 0$ rad $\Rightarrow -0.12\pi = -2\pi X_{max}\sin(2\pi \times \frac{1}{4} + 0) \Rightarrow X_{max} = 0.06$ m

مرفوض: لما $\varphi = \pi$ rad $\Rightarrow -0.12\pi = -2\pi X_{max}\sin(2\pi \times \frac{1}{4} + \pi) \Rightarrow X_{max} = -0.06$ m < 0

إذاً: $V = -2\pi \times 0.06\sin(2\pi t + 0) \Rightarrow V = -0.12\pi\sin(2\pi t)$

3) يمثل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان تنطلقان من الوضع نفسه في اللحظة نفسها قارنهما بعد مضي (3) sec من بدء حركتهما:



الحل:

لنحسب دور النواس الاول:

$$T_{o_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\ sec$$

لنحسب دور النواس الثاني

$$T_{o_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1/2}{20}} = 1\ sec$$

بعد مضي (3) sec يكون مطال الاولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$ لا تلتقيان

ثانياً: اجب عن الاسئلة الآتية:

1. أثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة

الحل: في الحركة التوافقية البسيطة:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نربع الطرفين:

$$x^2 = X_{max}^2\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$v^2 = \omega_0^2 X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نقسم المعادلة (2) على ω_0^2 ونجمع العلاقتين:

$$x^2 = X_{max}^2\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$+$$
$$\frac{v^2}{\omega_0^2} = X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_{max}^2\underbrace{\left(\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})\right)}_{=1}$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_{max}^2 \Rightarrow \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_{max}^2 - x^2$$

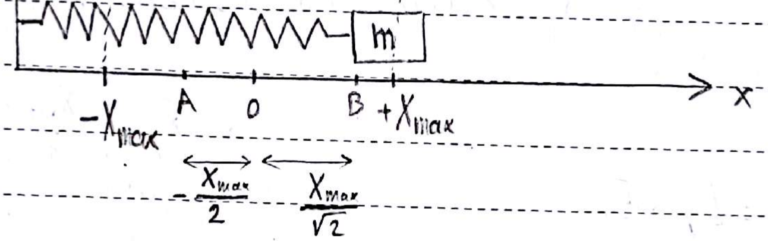
$$\frac{v}{\omega_0} = \sqrt{X_{max}^2 - x^2} \Rightarrow \boxed{v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}}$$

2- نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K، مثبت من أحد طرفيه ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي مناسب، ونتركه دون سرعة ابتدائية: المطلوب

a) ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

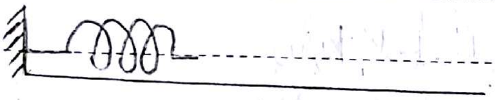
b) استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين A و B :

$x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ ، $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ ، ماذا تستنتج



الحل:

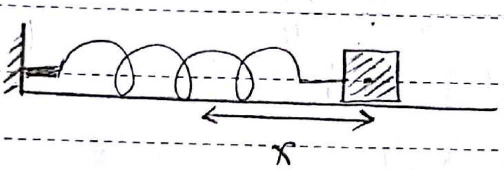
a) دراسة حركة الجسم:



- يخضع الجسم لتأثير القوى

$\vec{W}$: قوة ثقله

$\vec{R}$: قوة رد فعل مستوي الحركة

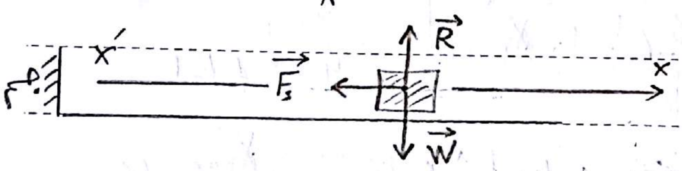


$\vec{F_s}$: قوة توتر النابض

- العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي

جسم

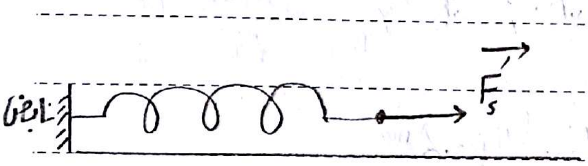
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$



$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

- بالإسقاط على محور موجه بجهة إزاحة الجسم

$$0 + 0 - F_s = m a \quad (1)$$



- تؤثر في النابض قوة شد F'_s تسبب استطالة x

نابض

$F_s = F'_s = Kx$ نعوض في (1)

$$-Kx = m a$$

لكن بما أن الحركة مستقيمة فإن التسارع الناظمي معدوم والتسارع هو تسارع مماسي فقط

$$a = a_t = (x)''_t$$

إذاً:

$$-Kx = m(x)''_t$$

$$(x)''_t = -\frac{K}{m}x \quad \text{---} ①$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

بالاشتقاق مرتين بالنسبة للزمن نحصل على

$$(x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \quad \text{----} ②$$

بمطابقة ① مع ② نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$ (K و m موجبان تماماً)

وهو النبض الخاص للنواس المرن وحركته جيبية انسحابية

التابع الزمني لمطاله: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

b) * $\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2}$:

$$E_{total} = E_p + E_K$$

$$E_K = E_{total} - E_p = \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}Kx_A^2$$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}K\frac{X_{max}^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}KX_{max}^2\right)} = \frac{3}{4}E_{total}$$

* $\bar{x}_B = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_K = E_{total} - E_p = \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}K\frac{X_{max}^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}KX_{max}^2\right)} = \frac{1}{2}E_{total}$$

نستنتج انه: تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد المطال وبالتالي تزداد طاقته الكامنة المرونية

حيث وجدنا:

في الموضع A: $E_K = \frac{3}{4}E$ ، $E_p = \frac{1}{4}E$ (75% E_K ، 25% E_p)

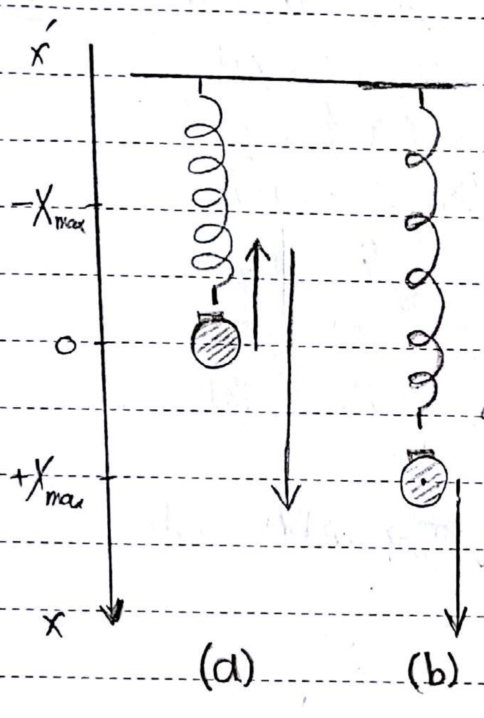
في الموضع B: $E_K = \frac{1}{2}E$ ، $E_p = \frac{1}{2}E$ (50% E_K ، 50% E_p)

كما انه ليس بالضرورة عندما يكون الجسم في نقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ تتساوى الطاقتين E_p ، E_K:

3- جسم معلق بنابض مرن شاقولي طاقته مهملة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم؟ ولماذا؟ بعد انفصاله عن النابض في:

a) مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟

b) المطال الأعظمي الموجب؟



الحل

- لحظة انفصال الجسم يخضع الجسم الى قوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$
- العلاقة الأساسية بالتحريك الانسحابي

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{W} = m\vec{a}$$
$$m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{Const}$$

اذاً الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

a) الانفصال في مركز الاهتزاز:

طور الصعود: تنقذف شاقولياً نحو الاعلى لان الجسم يملك سرعة ابتدائية للحركة وبالاتجاه جهة حركته تعاكس قوة ثقله فالحركة متباطئة بانتظام

طور الهبوط: سقوط حر وبالاتجاه جهة حركته بجهة قوة ثقله فالحركة متسارعة بانتظام

b) الانفصال في المطال الاعظمي الموجب: سقوط حر لان السرعة الابتدائية معدومة وبالاتجاه جهة حركته بجهة قوة ثقله فالحركة متسارعة بانتظام

ثالثاً: حل المسائل الآتية.

المسألة الأولى: تتألف هزازة جيبية بسيطة من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $K=10\ N.m^{-1}$ مثبت من أحد طرفيه ويحمل في طرفه الآخر جسم كتلته m، ويعطى التابع الزمني لمطال حركته بالعلاقة $X=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

والمطلوب:

1) أوجد قيم ثوابت الحركة والدور الخاص.

2) احسب كتلة الجسم m.

3) احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $X=5\ cm$، والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.

الحل: 1) التابع الزمني للهزازة الجيبية البسيطة:

$$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$X = 0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$$

بالمقارنة نجد:

المطال الأعظمي: $X_{max}=0.1\ m$

النبض الخاص: $\omega_0=\pi\ rad.s^{-1}$

الطور الابتدائي: $\varphi=+\frac{\pi}{2}\ rad$

الدور الخاص $T_0=?$:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$=\frac{2\pi}{\pi}$$

$$=2\ sec$$

2) $m=?$:

$$\omega_0^2=\frac{K}{m} \Rightarrow m=\frac{K}{\omega_0^2}$$

$$=\frac{10}{(\pi)^2}$$

$$=1\ kg$$

3) $v = ?$

$x = 5\times10^{-2}\,m$

يتحرك بالاتجاه الموجب

لنحسب E_K:

$$E_K = E - E_P$$
$$= \frac{1}{2}K X_{max}^2 - \frac{1}{2}K x^2$$
$$= \frac{1}{2}\times10\times(0.1)^2 - \frac{1}{2}\times10\times(5\times10^{-2})^2$$
$$= 5\times10^{-2} - 125\times10^{-4}$$
$$= 500\times10^{-4} - 125\times10^{-4}$$
$$= 375\times10^{-4}\ J$$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$375\times10^{-4} = \frac{1}{2}\times1\ v^2$$
$$v^2 = 750\times10^{-4}$$
$$v = \sqrt{75\times10^{-3}}$$
$$= \sqrt{\frac{25\times3}{10\times100}} = \mp\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

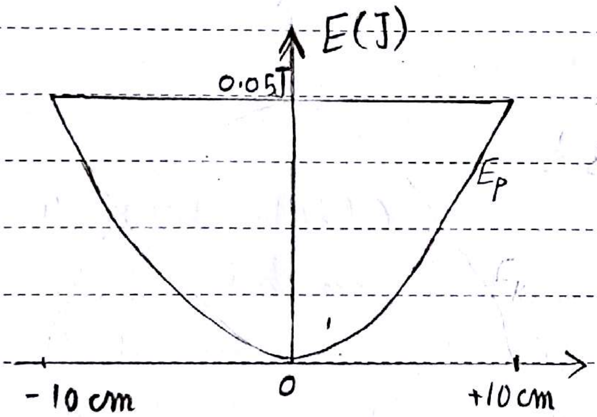
ملاحظة: يمكن حساب السرعة من العلاقة

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$
$$= \pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2}$$
$$= \pi\sqrt{10^{-2} - 25\times10^{-4}} = \pi\sqrt{10^{-2} - 0.25\times10^{-2}}$$
$$= \pi\sqrt{\frac{3}{4}\times10^{-2}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}\times10^{-1} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{20}$$
$$= \mp\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ m.s^{-1}$$

بما أن الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب فإن:

$$v = +\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ m.s^{-1}$$

المسألة الثانية:



يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن حلقاته متباعدة ثابت صلابته (K) معلق به جسم كتلته $0.4\ Kg$

المطلوب:

1. استنتج قيمة ثابت صلابة النابض K.
2. احسب الدور الخاص للحركة.
3. احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل: من الشكل نجد سعة الاهتزاز $X_{max} = 10\times10^{-2}\ m$

الطاقة الكلية $E = 0.05\ J$

1) $K = ?$

$$E = \frac{1}{2} K X_{max}^2$$

$$0.05 = \frac{1}{2} K (10\times10^{-2})^2$$

$$5\times10^{-2} = \frac{1}{2} K \times 100\times10^{-4}$$

$$K = 10\ N.m^{-1}$$

2) $T_0 = ?$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} = 2\pi\times\frac{2}{10}$$

$$= \frac{4\pi}{10} = \frac{12.5}{10} = 1.25\ sec$$

3) $v = ?$ عند المرور بمركز التوازن

$X = 0$ عند المرور بمركز التوازن

$$E_p = 0$$

$$E = E_K$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$0.05 = \frac{1}{2}\times0.4\ v^2$$

$$5\times10^{-2} = 2\times10^{-1}\ v^2$$

$$v = 0.5\ m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: (حذف)

نريد قطع اسطوانة معدنية باستخدام منشار كهربائي مخصص لذلك فإذا فرضنا حركة المنشار توافقية بسيطة أثناء حركته تقطع مسافة طولها 16 cm ويستغرق لقطع تلك المسافة زمناً قدره 0.5 sec وقد بدأ حركته في اللحظة $t=0$ دون سرعة ابتدائية، وهو في مطاله الأعظمي الموجب. المطلوب:

1- أوجد التابع الزمني لحركة المنشار انطلاقاً من شكله العام

2 - احسب قيمة سرعة المنشار لحظة مروره الاول في مركز الاهتزاز

3 - اذا افترضنا أن قطر الاسطوانة المراد قطعها 5 cm ويتم نشر 0.5 mm في كل ثانية من قطرها فما هو الزمن اللازم لتقطيع تلك الاسطوانة كاملة؟

الحل: (يرسم المنشار قطعة مستقيمة طولها 16 cm)

$$2X_{max} = 16\ cm \Rightarrow X_{max} = 8\times10^{-2}\ m$$

(الزمن اللازم لقطع مسافة $2X_{max}$ يمثل نصف الدور)

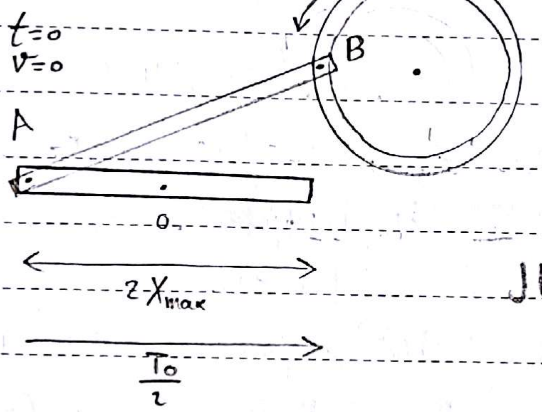
$$\frac{T_0}{2} = 0.5 \Rightarrow T_0 = 1\ sec$$

(بدء حركته في اللحظة $t=0$، دون سرعة ابتدائية، وهو في مطاله الاعظمي الموجب)

$$t=0,\ x=+X_{max}$$

1) التابع الزمني للحركة التوافقية البسيطة:

$$x = \underline{X_{max}} \cos(\underline{\omega_0} t + \underline{\bar{\varphi}})$$



*) $X_{max} = 8\times10^{-2}\ m$

*) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

*) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض شرط البدء ($t=0$, $x=+X_{max}$) بتابع المطال

$$+X_{max} = X_{max}\cos(0+\bar{\varphi})$$

$$\cos(\bar{\varphi}) = 1$$

$$\bar{\varphi} = 0\ rad$$

اذاً تابع المطال: $x = 8\times10^{-2}\cos(2\pi t + 0)$

2)

$$v = (x)'_t$$

$$= -2\pi\times8\times10^{-2}\sin(2\pi t)$$

$$= -16\pi\times10^{-2}\sin(2\pi t)$$

يلزم t (زمن المرور الاول بمركز التوازن)

عندما يبدء الزمن $t=0$ نقطة مطال $x=+X_{max}$ فان زمن المرور الاول يساوي ربع الدور

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\ sec$$

Date :   / /   Subject: ....

$$v = -16\pi \times 10^{-2} \sin\left(2\pi \times \frac{1}{4}\right)$$
$$= -4\pi \times 4 \times 10^{-2} \times 1$$
$$= -0.5 \ m.s^{-1}$$

ملاحظة: يمكن حساب الزمن بطريقة اخرى ونستخدم هذه الطريقة مهما كانت موضع الجسم في بدء الزمن.

في مركز التوازن: $X = 0 \Rightarrow 0 = 8 \times 10^{-2} \cos(2\pi t) \Rightarrow \cos(2\pi t) = 0$

$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi K \quad ; \quad K = 0, 1, 2 \ldots$

عند أول مرور: $K = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ sec

3) كل 5×10^{-4} m من طول قطر الاسطوانة يحتاج زمناً للنشر 1 sec

كل 5×10^{-2} m " " " " " " " " t sec

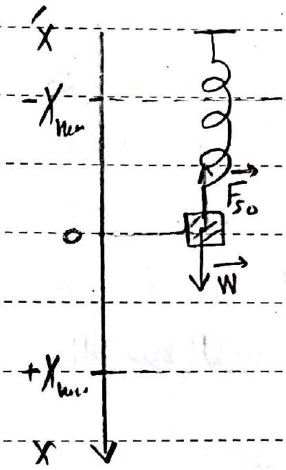
$2r = 5$ cm

$$t = \frac{5 \times 10^{-2} \times 1}{5 \times 10^{-4}} = 100 \ sec$$

المسألة الرابعة:

تشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1$ kg معلق بطرف نابض مرن شاقولي ونزيح الكتلة شاقولياً مسافة مناسبة فينجز (10) هزات خلال (8) sec، ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها (24 cm). المطلوب:

1) استنتج قيمة الاستطالة السكونية لطرف النابض، ثم احسب قيمتها
2) احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).
3) احسب قيمة التسارع في مطال $(X = 10 \text{ cm})$
4) احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $X = -4$ cm، واحسب الطاقة الحركية عندئذ.



الحل: 1) يخضع الجسم لتأثير قوتين: $\vec{W}$: قوة ثقل الجسم، $\vec{F_{s0}}$: قوة توتر النابض

- العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{W} + \vec{F_{s0}} = \vec{0}$$

- بالإسقاط على $\overrightarrow{x'x}$: $W - F_{s0} = 0$

$$\boxed{W = F_{s0}} \quad (1)$$

- يخضع النابض الى قوة شد F_s تسبب استطالة X.

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = K X_0$$

بالاستفادة من (1) نجد:

$$W = K X_0$$

$$mg = K X_0$$

$$X_0 = \frac{mg}{K}$$

لكن: $K = m\omega_0^2$

$$X_0 = \frac{mg}{m\omega_0^2} = \boxed{\frac{g}{\omega_0^2}}$$

يلزم ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

يلزم T_0:

$$T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8 \ sec$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{\pi}{0.4} \ rad.s^{-1}$$

نعوض في علاقة X_0:

$$X_0 = \frac{10}{\left(\frac{\pi}{0.4}\right)^2} = \frac{10 \times 0.16}{\pi^2} = 0.16 \, m$$

ط2:

$$mg = K x_0 \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{x_0}{g}$$

نعوض في علاقة الدور الخاص

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

يلزم T_0: $T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8 \ sec$

$$0.8 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{10}}$$

$$0.8 = 2\sqrt{x_0} \Rightarrow$$

$$0.64 = 4x_0 \Rightarrow x_0 = 16 \times 10^{-2} \, m$$

2)

$$v_{max} = \omega_0 X_{max}$$

لكن:
$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{\pi}{0.4} \ rad.s^{-1} \\ 2X_{max} = 24 \, cm \Rightarrow X_{max} = 12 \times 10^{-2} \, m \end{array}\right.$$

$$v_{max} = \left(\frac{\pi}{0.4}\right)(12 \times 10^{-2})$$

$$= 3\pi \times 10^{-1}$$

$$= 0.3\pi \ m.s^{-1}$$

(3.

$$a = -\omega_0^2 \bar{x}$$
$$= -\left(\frac{\pi}{0.4}\right)^2 (10\times10^{-2})$$
$$= -\frac{10}{0.16} \times 10^{-1}$$
$$= -\frac{100}{16}$$
$$= -\frac{25}{4} = -6.25 \ m.s^{-2}$$

(4.

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = m\omega_0^2 = 1\times\left(\frac{\pi}{0.4}\right)^2 \quad : K \text{ يلزم} \\ \quad = \frac{10}{0.16} = \frac{1}{16}\times10^{+3} \ N.m^{-1} \end{array} \right\}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\times\frac{1}{16}\times10^{+3}(-4\times10^{-2})^2$$
$$= 0.05 \ J$$

$$E_K = E - E_p$$
$$= \frac{1}{2} K X_{max}^2 - E_p$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{16}\times10^{+3}(12\times10^{-2})^2 - 0.05$$
$$= \frac{1}{32}\times144\times10^{-1} - 0.05$$
$$= 0.45 - 0.05$$
$$= 0.4 \ J$$

المسألة الخامسة:

تهتز كرة معدنية كتلتها m مربوطة بنابض شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $K = 16 \ N.m^{-1}$ ، بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $(1) \ sec$ ، وسعة اهتزازه $X_{max} = 0.1 \ m$ وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ ، وهي تتحرك بالاتجاه السالب. المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام
2. عين لحظتي المرور الاول والثالث للكرة في موضع التوازن
واحسب شدة قوة الارجاع في نقطة مطالها $X = 0.1 \ m$
3. احسب كتلة الكرة.

الحل:

$K = 16\ N.m^{-1}$

$T_0 = 1\ sec$

$X_{max} = 0.1\ m$

$(t = 0 \ , \ x = \frac{X_{max}}{2})$

$v < 0$

1) التابع الزمني للحركة التوافقية البسيطة من الشكل

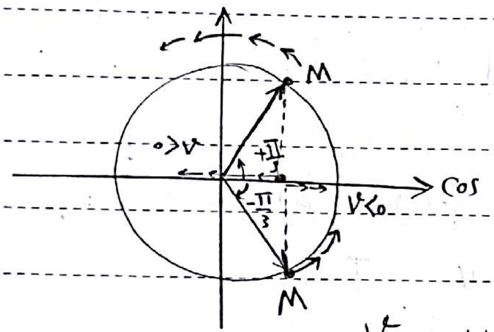
$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

*) $X_{max} = 0.1\ m$

*) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

*) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض شروط البدء $(t = 0 \ , \ x = \frac{X_{max}}{2})$ بتابع المطال



$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} \cos(0 + \bar{\varphi})$

$\cos(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2}$

$\bar{\varphi} = \mp \frac{\pi}{3}\ rad$

نختار القيمة التي تجعل $v < 0$:

$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\bar{\varphi})$

لـ: $\varphi = -\frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(-\frac{\pi}{3}) = \omega_0 X_m \sin(\frac{\pi}{3}) > 0$

مرفوض

لـ: $\varphi = +\frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin(\frac{\pi}{3}) < 0$

مقبول

$x = 0.1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

2) عند المرور بمركز التوازن $x = 0$ نعوض بتابع المطال

$0 = 0.1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

$\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$$\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi K$$ ؛ $K=0,1,2\dots$

$$2\pi t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi K$$

$$2t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+K$$

$$2t=\frac{1}{6}+K$$

$$t=\frac{1}{12}+\frac{K}{2}$$

المرور الاول: $K=0$

$$t=\frac{1}{12}\ sec$$

المرور الثاني: $K=1$ غير مطلوب

المرور الثالث: $K=2$

$$t=\frac{1}{12}+\frac{2}{2}$$

$$=\frac{13}{12}\ sec$$

(3

$$\bar{F}=-K\bar{x}$$

$$=-16\times 0.1$$

$$=-1.6\ N$$

مقداراً (طولياً):

$$F=1.6\ N$$

(4

$$\omega_0^2=\frac{K}{m}\Rightarrow m=\frac{K}{\omega_0^2}$$

$$=\frac{16}{(2\pi)^2}$$

$$=0.4\ Kg$$

عادة (1):

تشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن، شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت مرونته $K=10\,N.m^{-1}$ مثبت من احدى نهايتيه الى نقطة ثابتة ويحمل في نهايته الثانية جسم كتلته $m=0.1\,kg$ فإذا علمت ان مبدأ الزمن لحظة مرور الجسم في مركز التوازن، وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $v=-3\,m.s^{-1}$ المطلوب:

1- احسب نبض الحركة الحاصل.

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.

3- احسب شدة قوة الارجاع في نقطة مطالها 3 cm

الحل: $K=10\,N.m^{-1}$

$m=0.1\,kg$

$(t=0 , X=0)$

$0>v$

$v=-3\,m.s^{-1}$

1. $$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{10}{0.1}}$$

$$=10\,rad.s^{-1}$$

2. التابع الزمني من الشكل

$$\bar{x}=\underline{\underline{X_{max}}}\cos(\underline{\underline{\omega_0}}t+\underline{\underline{\bar{\varphi}}})$$

*) $\boxed{\omega_0=10\,rad.s^{-1}}$

*) $\bar{\varphi}=?$

نعوض شرط البدء $(t=0 , X=0)$ بتابع المطال

$$0=X_{max}\cos(0+\bar{\varphi})$$

$$\cos(\bar{\varphi})=0$$

$$\bar{\varphi}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\,rad\\ \frac{3\pi}{2}\,rad\end{cases}$$

نختار القيمة التي تجعل $X_{max} > 0$: $(t = 0 : 4)$

$V = -\omega_0 X_{max} \sin(\phi)$

$4: \phi = \frac{3\pi}{2}$ rad $\Rightarrow -3 = -10 X_{max} \sin(\frac{3\pi}{2})$

$-3 = -10 X_{max} (-1)$

$X_{max} = -0.3$ m

مرفوض لأن الطال لا يعطي موجب دوما

$4: \phi = \frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow -3 = -10 X_{max} \sin(\frac{\pi}{2})$

$-3 = -10 X_{max} (+1)$

$\boxed{X_{max} = 0.3 \text{ m}}$

إذاً التابع الزمني هو بالشكل :

$X = 0.3 \cos(10t + \frac{\pi}{2})$

3) $\bar{x} = 3$ cm

$\bar{F} = -K\bar{x}$

$= -K\bar{x}$

$= -10(0.3)$

شدتها (طويلتها) :

$F = |-3|$

$= 3$ N

عامة (2):

تهتز نقطة مادية كتلتها 0.5 Kg بحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض حول الكتلة ملتفة متباعدة شاقولياً، وبدور 4 sec وبسعة اهتزاز $X_{max}=8\,cm$

فإذا علمت أن النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب المطلوب

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت

2. عين لحظتي المرور الأول والثالث في موضع التوازن

3. عين المواضع التي تكون فيها شدة محصلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، أوجد موضعاً تنعدم فيه شدة هذه المحصلة.

4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغير هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟

5. احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص 1 sec.

الحل:

1) الشكل العام لتابع المطال من الشكل

$$x = \underline{\underline{X_{max}}}\cos(\underline{\underline{\omega_0}}t + \underline{\underline{\bar{\varphi}}})$$

*) $X_{max} = 8\times10^{-2}\ m$

*) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$

*) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض من شروط البدء ($t=0$ ، $x=\frac{X_{max}}{2}$) بتابع المطال

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(\omega_0(0)+\bar{\varphi})$$

$$\cos(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\varphi} = \mp\frac{\pi}{3}\ rad$$

نختار القيمة التي تجعل $v<0$ ($t=0$)

حيث: $v=(x)'_t$

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$$

مرفوض $\bar{\varphi}=-\frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow v=-\omega_0 X_{max}\sin(-\frac{\pi}{3})>0$

مقبول $\bar{\varphi}=+\frac{\pi}{3}\ rad \Rightarrow v=-\omega_0 X_{max}\sin(+\frac{\pi}{3})<0$

إذاً تابع المطال $\bar{x} = 8\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$ m

2) عند المرور بوضع التوازن $x = 0$

$$0 = 8\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi K$$

المرور الأول $K=0$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi(0)$$

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\ \text{sec}$$

المرور الثاني $K=1$ غير مطلوب

المرور الثالث $K=2$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi(2)$$

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 2$$

$$t = \frac{13}{3}\ \text{sec}$$

3) شدة محصلة القوى أي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة

$$\bar{F} = -K\bar{x}$$

تكون هذه المحصلة عظمى في الوضعين الطرفيين $\mp X_{max}$

أي $\bar{x} = \mp X_{max}$

$$\bar{F} = -K(\mp X_{max})$$

طويلتها (شدتها) $= K\,X_{max}$

لكن: $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 m$

إذاً: $F = \omega_0^2 m X_{max}$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (0.5)(8\times10^{-2}) = 0.1\ N$$

تنعدم هذه المحصلة لما $\bar{x}=0$ اي في موضع التوازن

(4.

$$K = m\omega_0^2$$
$$= 0.5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$= 1.25 \ N.m^{-1}$$

٪ : لأن هذا الثابت ثابت خاص لنابض معين ويختلف قيمته من نابض لآخر وتغيير الكتلة لا يغير قيمته K .

(5.

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{1.25}}$$

$$1 = 4\pi^2\frac{m'}{1.25} \Rightarrow 1 = \frac{40\,m'}{1.25}$$

$$m' = \frac{1.25}{40}\,\frac{\times 2.5}{\times 2.5} = 0.031 \ kg$$

نشاط : حدد قيمة $\bar{\varphi}$ في الحالات شروط البدء التالية

1) $\begin{cases} x = +X_{max} \\ t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -X_{max} \\ t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{X_{max}}{2} \\ t = 0 \\ v < 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ v < 0 \end{cases}$

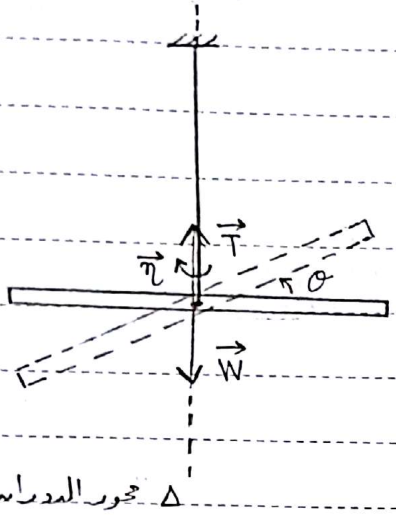
٪ نتائج : 1) 0 rad 2) π rad 3) $+\frac{\pi}{3}$ rad 4) $\frac{\pi}{2}$ rad

أسئلة خارجية عن الدرس الأول :

الدرس الثاني   ٧/ هزازات الجيبية الدورانية

نواس الفتل غير المتخامد

- نواس الفتل غير المتخامد: ساق معلقة بسلك فتل تهتز في مستوي أفقي حول سلك الفتل الشاقولي بتأثير عزم مزدوجة الفتل.



دراسة حركة نواس الفتل:

- القوى الخارجية المؤثرة في الساق:

$\vec{W}$: قوة ثقل الساق

$\vec{T}$: قوة توتر سلك التعليق

$\vec{\eta}$: مزدوجة الفتل وهي قوة تنشأ في السلك

عندما ندير الساق زاوية (θ) تقاوم عملية الفتل عزمها عزم إرجاع.

- بتطبيق العلاقة الأساسية بالتحريك الدوراني

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha}$$

I_{Δ}: عزم عطالة الساق حول محور الدوران Δ (المنطبق على السلك)

$\overline{\alpha}$: التسارع الزاوي

$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha}$$

لكن: $\Gamma_{\vec{W}/\Delta} = \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل كل من $\vec{W}$ ، $\vec{T}$ منطبق على محور الدوران.

$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\overline{\theta}$ عزم مزدوجة الفتل

$$0 + 0 - K\overline{\theta} = I_{\Delta} \cdot \overline{\alpha}$$

$$-K\overline{\theta} = I_{\Delta} \cdot (\theta)''_t$$

$$(\overline{\theta})''_t = -\frac{K}{I_{\Delta}}\overline{\theta} \quad \text{---- (1)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\overline{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

للتأكد من صحة الحل نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن

$\omega = (\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$ (تابع السرعة الزاوية)

(تابع إثبات العلاقة التناسب الزاوي) $a = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar{\theta} \quad \text{---} (1)$$

بموازنة (1) مع (2) نجد :
$$\omega_0^2 = \frac{K}{I}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا ممكن لأن كل من I_Δ ، K موجبان ، وهو النبض الخاص للنواس الفتل غير المتخامد

وحركته جيبية دورانية تابعة للزمن من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

θ : المطال الزاوي في اللحظة (t) (rad)

θ_{max} : السعة الزاوية (rad).

ω_0 : النبض الخاص للحركة $(rad.s^{-1})$.

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي للحركة (rad).

استنتاج دور نواس الفتل :

وجدنا أن : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

ونعلم أن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواة : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

وهي علاقة الدور الخاص لنواس الفتل غير المتخامد.

من علاقة الدور نستنتج أنّ :

- لا يتعلق الدور بالسعة الزاوية للحركة θ_{max} .
- يتناسب الدور طرداً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة الساق.
- يتناسب الدور عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل سلك التعليق الذي يعطى بالعلاقة :

$$K = K' \times \frac{(2r)^4}{l}$$

حيث : K : ثابت فتل سلك التعليق

K' : ثابت يتعلق بمادة السلك

r : نصف قطر السلك

l : طول سلك التعليق

2- الدراسة التجريبية :

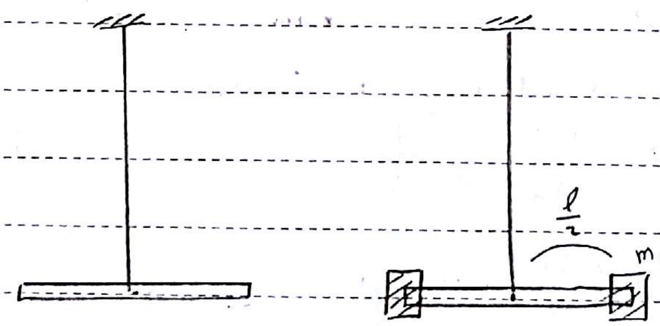
a) علاقة الدور بزاوية الفتل θ_{max} الابتدائية

نزيح الساق الأفقية عن وضع توازنها أفقياً بزوايا مختلفة (θ_{max} ، θ'_{max} ، θ''_{max} ، ...) ونحسب الدور ($T_0 = \frac{t \leftarrow \text{زمن الهزات}}{n \leftarrow \text{عدد الهزات}}$)

نلاحظ أن الدور لا يتغير.

b) علاقة الدور بعزم عطالة الساق I_Δ :

نحمل الساق بكتلتين بهدف زيادة عزم عطالتها (I_Δ) نلاحظ أن الدور يزداد.

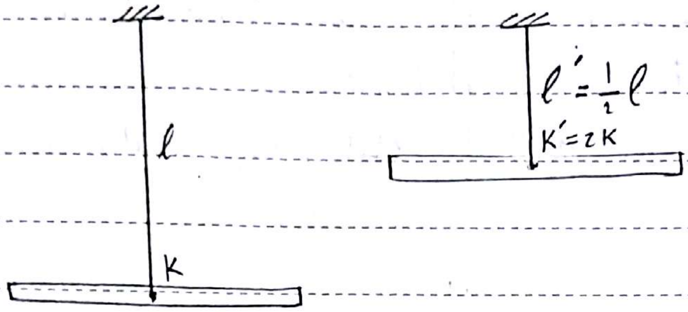


$$I_{\Delta\,(\text{ساق})} \nearrow (2\times10^{-3})\ kg\cdot m^2 \qquad I_{\Delta\,(\text{ساق})} \searrow \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_{\Delta\,(\text{جملة})} = I_{\Delta\,(\text{ساق})} + I_{m_1} + I_{m_2}$$
$$= 0 + 2 I_{m_1}$$
$$= 2 m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

c) علاقة الدور بطول السلك

نقصر من طول السلك بهدف زيادة ثابت الفتل (K) نلاحظ أن الدور ينقص.



$H: l' = \frac{1}{2} l \Rightarrow K' = 2K \quad \left(K = K' \frac{(2r)^4}{l} \right)$

3- التشابه الشكلي بين النواس المرن ونواس الفتل:

جسم انسحابي نواس مرن	$\bar{x}$ المطال	$\bar{v} = (\bar{x})'_t$ السرعة	$\bar{a} = (\bar{v})'_t$ التسارع	m كتلة الجسم المهتز	K ثابت صلابة النابض	$\bar{F}$ قوة الإرجاع
جسيم دوراني نواس فتل	$\bar{\theta}$ المطال الزاوي	$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t$ السرعة الزاوية	$\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t$ التسارع الزاوي	I_Δ عزم عطالة الساق	K ثابت فتل السلك المعلق	$\bar{\Gamma}_{\vec{F}/\Delta}$ عزم الإرجاع

تعلمت:

- نواس الفتل: ساق متجانسة معلقة من مركزها إلى سلك فتل فولاذي ثابت فتله K.
- عزم الإرجاع: $\bar{\Gamma} = -K\bar{\theta}$ يتناسب طرداً مع المطال الزاوي ويعاكسه بالإشارة.
- طبيعة حركة نواس الفتل:
حركة جيبية دورانية وتابعها: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
- دور نواس الفتل: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$
- نبض الحركة: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ أو $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

- النواس المرن: جسم صلب معلق بنابض مرن حلقاته متباعدة يهتز بحركة اهتزازية حول مركز الاهتزاز.
- الاستطالة السكونية: $x_0 = \frac{mg}{K}$
- قوة الإرجاع: $\bar{F} = -K\bar{x}$ تتناسب طرداً مع المطال وتخالفه بالإشارة

طبيعة حركة النواس المرن:

حركة جيبية انسحابية وتابعها: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

دور النواس المرن: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

نبض الحركة: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ أو $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

الطاقة الحركية:

$$E_K = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

الطاقة الكامنة المرونية:

$$E_p = \frac{1}{2} K \theta^2$$

الطاقة الميكانيكية (الكلية):

$$E_{total} = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$$

الطاقة الحركية:

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الطاقة الكامنة المرونية:

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

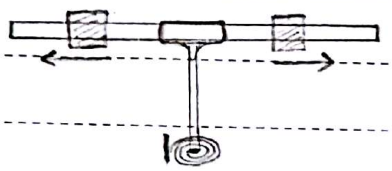
الطاقة الكلية:

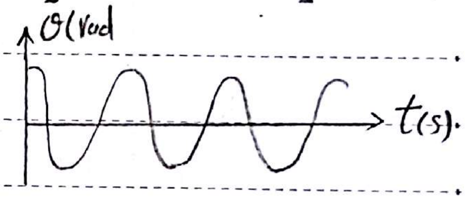
$$E_{total} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 = const$$

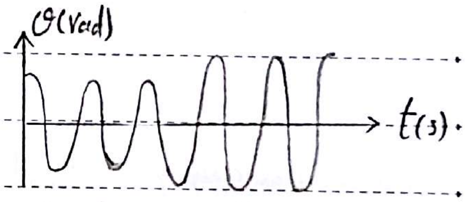
/ أختبر نفسي /

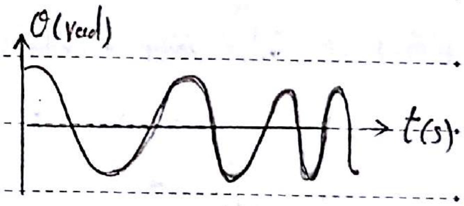
أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

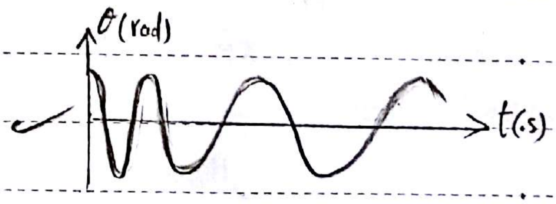
١- يهتز نواس فتل بدور خاص T_0، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الأثقال عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح بالشكل، فالرسم البياني الذي يعبر عن تغير المطال الزاوي مع الزمن في هذه الحالة هو:











- عند ابتعاد الأثقال عن محور الدوران يزداد البعد بينهما أي أن (r) يزداد وبالتالي يزداد عزم العطالة (I_Δ): حسب العلاقة:

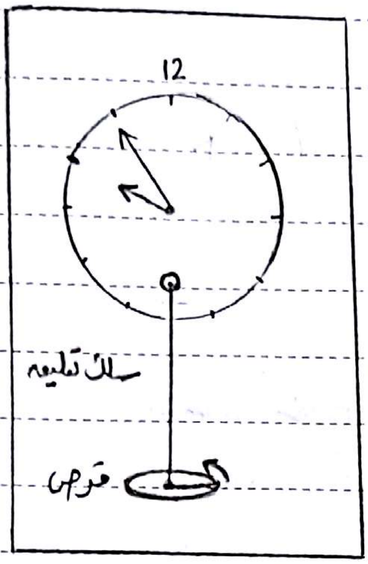
$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{m_1} + I_{m_2}$$
$$= I_{\Delta\,\text{ساق}} + 2 I_{m_1}$$
$$= I_{\Delta\,\text{ساق}} + 2 m_1 r_1^2$$

وبزيادة عزم العطالة يزداد الدور حسب العلاقة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

ملاحظة: الشكل الأول والثاني خطأ لأن دور كل منهما ثابت أما الشكل الثالث صحيح من أجل اقتراب الأثقال من محور الدوران. أما عند ابتعاد الأثقال عن محور الدوران فالشكل الأخير هو الصح.

2- ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدم الطلاب مقترحاتهم فإن الاقتراح الصحيح هو:



a) زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

b) زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

c) إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d) زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

الحل:

عندما تتأخر الميقاتية هذا يعني أن دورها كبير

وبالتالي لتصحيح التأخير يجب إنقاص الدور

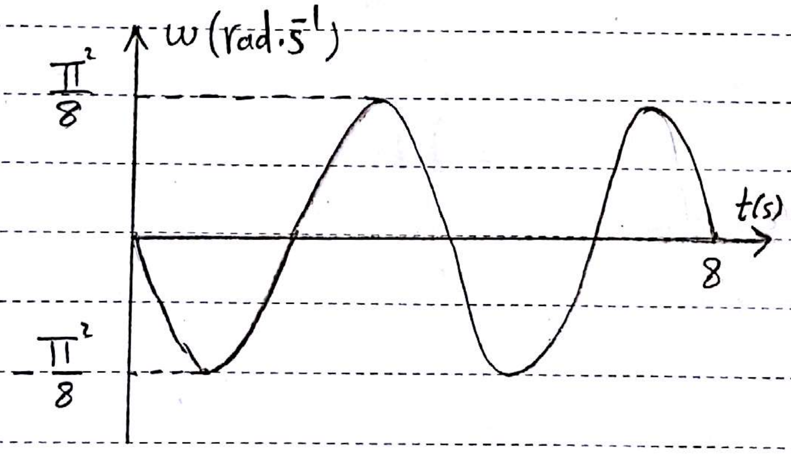
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

ويتم ذلك

إما بإنقاص I_Δ $\left(I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2\right)$ وذلك:
- أ) إنقاص كتلة القرص (m)
- ب) إنقاص نصف قطر القرص (قطر القرص)

أو: زيادة K $\left(K = k' \frac{(2r)^4}{\ell}\right)$ وذلك:
- أ) إنقاص طول سلك الفتل
- ب) زيادة قطر سلك التعليق
- ج) استخدام سلك تعليق ثابت مادته k' كبير.

3- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن، فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو:



a) $\omega = \frac{\pi^2}{8}\sin 2\pi t$

b) $\omega = -\frac{\pi^2}{8}\sin 2\pi t$

c) $\omega = +\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

d) $\omega = -\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

الحل: من الرسم البياني نجد: $(t=0 \;،\; w=0)$

$2T_0 = 8 \text{ sec} \Rightarrow T_0 = 4 \text{ sec}$

$t = \frac{T_0}{4} \;،\; w = -\frac{\pi^2}{8}$

تابع السرعة من الشكل: $w = -w_0\, \theta_{max} \sin(w_0 t + \bar{\varphi})$

نعين الثوابت $(w_0 \;،\; \theta_{max} \;،\; \bar{\varphi})$

1) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$= \frac{2\pi}{4}$

$$\boxed{w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}}$$

2) $\theta_{max} = ?$ $\quad \bar{\varphi} = ?$

نعوض شروط البدء $(t=0 \;،\; w=0)$ بتابع السرعة

$0 = -w_0\, \theta_{max} \sin(\bar{\varphi})$

$\sin(\bar{\varphi}) = 0 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$ أو $\bar{\varphi} = \pi \text{ rad}$

نختار قيمة $\bar{\varphi}$ التي تجعل $\theta_{max} > 0$ بالاستعانة $\left(t = \frac{T_0}{4} \;،\; w = -\frac{\pi^2}{8}\right)$

لـ: $\boxed{\varphi = 0 \text{ rad}} \Rightarrow -\frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi}{2}\,\theta_{max} \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{4}{4} + 0\right)$

$\frac{\pi}{4} = \theta_{max} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$ مقبول

لـ: $\varphi = \pi \text{ rad} \Rightarrow -\frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi}{2}\,\theta_{max} \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{4} + \pi\right)$

$\frac{\pi}{4} = \theta_{max} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\theta_{max} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} < 0$ مرفوض

$$\omega = -\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t+0\right)$$ اذاً تابع السرعة هو:

$$\omega = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

ثانياً: اجب عن المسئلة الآتية:

1- انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن ان حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية.

الحل:

$$E_{total} = E_p + E_K$$

$$\frac{1}{2}K\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

لكن:
$$\begin{cases}\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)\\ \omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}K\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}K\theta_{max}^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}I_\Delta\omega_0^2\theta_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

نقسم على $\theta_{max} \neq 0$

$$\frac{1}{2}K = \frac{1}{2}K\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}I_\Delta\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K\cos^2(\omega_0 t+\varphi) = \frac{1}{2}I_\Delta\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\frac{1}{2}K(1-\cos^2(\omega_0 t+\varphi)) = \frac{1}{2}I_\Delta\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

نعلم أن:
$$\begin{cases}\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \cos^2(\omega_0 t+\varphi) = 1\\ \Rightarrow \sin^2(\omega_0 t+\varphi) = 1-\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\end{cases}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}K\,\underbrace{\sin^2(\omega_0 t+\varphi)}_{\times\times} = \cancel{\frac{1}{2}}I_\Delta\omega_0^2\,\underbrace{\sin^2(\omega_0 t+\varphi)}_{\times\times}$$

$$K = I_\Delta\omega_0^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهو النبض الخاص لنواس الفتل غير المتخامد وحركته جيبية دورانية.

2. نعلق ساقين متماثلتين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1، وطول الثاني l_2

فإذا علمت أن $T_{o_1} = 2T_{o_2}$، اوجد العلاقة بين طولي السلكين

الحل:

النواس الأول $T_{o_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}}$

النواس الثاني $T_{o_2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_2}}$

بنسبة (1) الى (2) نجد:

$$\frac{T_{o_1}}{T_{o_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

$$\frac{2T_{o_2}}{T_{o_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{K_2}{K_1} \Rightarrow K_2 = 4K_1$$

لدينا:

$$K_1 = K'\frac{(2r)^4}{l_1}$$

$$K_2 = K'\frac{(2r)^4}{l_2}$$

بنسبة (1) الى (2) نجد:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$\frac{K_1}{4K_1} = \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$\boxed{l_1 = 4l_2}$$

طريقة حل هذا التدريب وأمثاله:

$$T_{o_1} = 2T_{o_2}$$

$$l_1 = ?\, l_1$$

المطلوب علاقة بين l_1، l_2 لذلك نختار علاقة تحوي l_1، l_2 وهي

$$K_1 = K'\frac{(2r)^4}{l_1}$$

$$K_2 = K'\frac{(2r)^4}{l_2}$$

بنسبة العلاقتين

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad \text{---- (1)}$$

نوجد علاقة بين K_1، K_2 لنحذفهما

عطانا بنص المسألة $T_{o_1} = 2T_{o_2}$

$$T_{o_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}}$$

$$T_{o_2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_2}}$$

$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \Rightarrow \frac{2T_{o_2}}{T_{o_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{K_2}{K_1} \Rightarrow K_2 = 4K_1$$

نعوض في (1):

$$\frac{K_1}{4K_1} = \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow l_1 = 4l_2$$

المسألة الأولى:

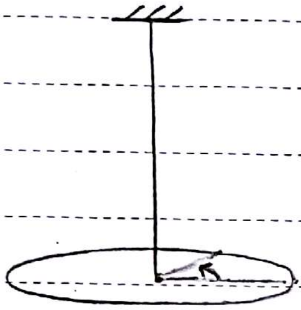
يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m=2\ kg$ ، نصف قطره $r=4cm$
معلق من مركزه الى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K=16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$
ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta=+\frac{\pi}{4}\ rad$ عن وضع توازنه ، ونتركه دون
سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$. المطلوب:

1- احسب الدور الخاص للنواس

2- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

3- احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta=\frac{\pi}{8}\ rad$ ، ثم احسب الطاقة الحركية عندئذ.

($I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}mr^2$ عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه)



الحل:

$m=2\ kg$

$r=4\times10^{-2}\ m$

$K=16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$

($t=0$ ، $\theta=+\frac{\pi}{4}\ rad$)

دون سرعة ابتدائية

1) دور نواس الفتل يعطى بالعلاقة:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

يلزم I_Δ : $I_\Delta=\frac{1}{2}mr^2$

$$=\frac{1}{2}\times2\times(4\times10^{-2})^2$$

$$=16\times10^{-4}\ Kg.m^2$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}}$$

$$=2\ sec$$

2) التابع الزمني للمطال الزاوي من الشكل

$$\theta=\underline{\underline{\theta_{max}}}\cos(\underline{\underline{\omega_0}}t+\underline{\underline{\bar{\varphi}}})$$

٢) $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}\ rad$ (لأن الجسم ترك دون سرعة ابتدائية)

٣) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{16\times10^{-3}}{16\times10^{-4}}} = \sqrt{10} = \pi\ rad.s^{-1}$

٤) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض شروط البدء $(t=0 , \theta = \frac{\pi}{4} rad)$ بتابع المطال

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cos(\pi(0) + \bar{\varphi})$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \boxed{\bar{\varphi} = 0\ rad}$$

إذاً تابع المطال:

$$\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t + 0)\ \ rad$$

3) $\theta = \frac{\pi}{8}\ rad$

$$E_p = \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2$$
$$= 8\times10^{-3}\,\frac{\pi^2}{64}$$
$$= \frac{1}{8}\times10^{-2}\ J$$

$$E = \frac{1}{2}K\,\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$= 8\times10^{-3}\,\frac{\pi^2}{16}$$
$$= \frac{1}{2}\times10^{-2}\ J$$

$$E_K = E - E_p$$
$$= \frac{1}{2}\times10^{-2} - \frac{1}{8}\times10^{-2}$$
$$= \frac{3}{8}\times10^{-2}\ J$$

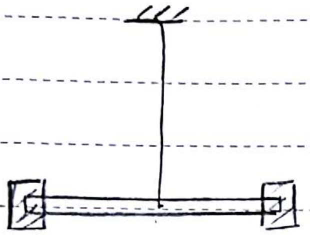
المسألة الثانية:

ساق مهملة الكتلة طولها l ، نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية 125g ،
وتعلق الجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K=16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$
لتؤلف الجملة نواس فتل ، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}\ rad$
وتترك دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن ، فتهتز بحركة جيبية دورانية
دورها الخاص (2.5)sec والمطلوب:

١- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام

2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الاول بوضع التوازن

3. احسب طول الساق (ℓ).



الحل: $m_1 = m_2 = 125 \times 10^{-3}\ kg$ ،

$K = 16 \times 10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$

طول الساق ℓ ، مهملة الكتلة

($t=0$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}\ rad$) ونتركها دون سرعة ابتدائية

$T_0 = 2\ sec$

1) التابع الزمني لمطال الحركة بالشكل $\bar{\theta} = \underline{\underline{\theta_{max}}} \cos(\underline{\underline{\omega_0}} t + \underline{\underline{\bar{\varphi}}})$

*) $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$ (لأن الساق تركت دون سرعة ابتدائية) $\omega = 0\ rad.s^{-1}$

*) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$

*) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض شروط البدء ($\theta = \frac{\pi}{3} rad$ ، $t=0$) بتابع المطال الزاوي

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cos(0 + \bar{\varphi})$

$\cos \bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad$

اذاً تابع المطال

$\theta = \frac{\pi}{3} \cos(\frac{4\pi}{5} t)$

2) $\omega = (\theta)'_t = -\frac{4\pi}{5} \times \frac{\pi}{3} \sin(\frac{4\pi}{5} t)$

$= -\frac{8}{3} \sin(\frac{4\pi}{5} t)$

يلزم زمن المرور الاول بمركز التوازن:

$t = \frac{T_0}{4} = \frac{2.5}{4} = \frac{5}{8}\ sec$

$\omega = -\frac{8}{3} \sin(\frac{4\pi}{5} \times \frac{5}{8})$

$= -\frac{8}{3} \sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{8}{3}\ rad.s^{-1}$

(3) حساب طول الساق (ℓ):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

لكن:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= I_{\text{ساق}} + I_{m_1} + I_{m_2} \\ &= I_{\text{ساق}} + 2 I_{m_1} \\ &= 0 + 2 m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ &= 2 m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2 m_1 \frac{\ell^2}{4}}{K}}$$

$$2.5 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times125\times10^{-3}\ \ell^2}{16\times10^{-3}\times4}} \Rightarrow \frac{6.25}{1} = \frac{40\times250\times\cancel{10^{-3}}\ \ell^2}{16\times4\times\cancel{10^{-3}}}$$

$$\ell^2 = \frac{6.25\times16\times4}{40\times250} = \frac{6.25\times16}{2500}$$

نجذر:

$$\ell = \frac{2.5\times4}{50} = \frac{5\times4}{100} = \frac{20}{100} = 0.2\ m$$

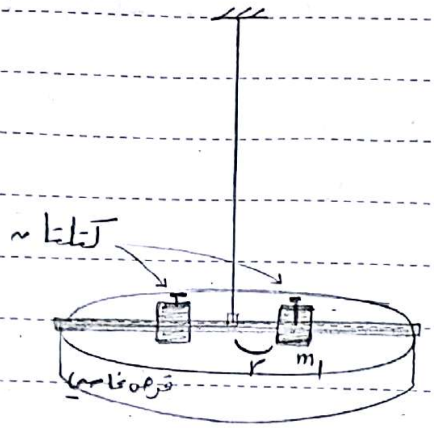
عافية (3):

تتألف ميقاتية من قرص نحاسي كتلته $M_1 = 0.12$ Kg نصف قطره $R = 0.05$ m مثبت عليه ساق كتلتها $M_2 = 0.012$ Kg طولها $L = 0.1$ m تحمل في طرفيها كتلتين نعدهما نقطتين $m_1 = m_2 = 0.05$ Kg تبعدان عن بعضهما مسافة قدرها $2r = 0.04$ m يمكن تغييرها بواسطة برغي، نعلق جملة القرص وما عليه من مركز عطالته بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 8\times10^{-4}$ m.N.rad^{-1} كما في الشكل المجاور، المطلوب:

1- احسب دور الميقاتية

2- إذا أردنا للدور أن يزداد بمقدار 0.86 sec وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين m_1 , m_2 كم يجب أن يصبح البعد الجديد بينهما.

(عزم عطالة القرص حول محور مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2$، وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12} M_2 L^2$، $\pi = 3.14$، $\pi^2 = 10$)



الحل

كتلة القرص النحاسي $M_1 = 0.12\ Kg$

نصف قطر القرص النحاسي $R = 0.05\ m$

كتلة الساق $M_2 = 0.012\ Kg$

طول الساق $L = 0.1\ m$

كتلة الكتل النقطية $m_1 = m_2 = 0.05\ Kg$

البعد بين الكتلتين $2r = 0.04\ m$

ثابت فتل سلك التعليق $K = 8\times10^{-4}\ m.N.rad^{-1}$

(1. $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

يلزم I_Δ:

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{قرص}} + I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{12}M_2L^2 + 2m_1r^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\times0.12(0.05)^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{12}\times0.012(0.1)^2}_{} + \underbrace{2\times0.05(0.02)^2}_{}$$

$$= \underbrace{150\times10^{-6}}_{} + \underbrace{10^{-5}}_{} + \underbrace{40\times10^{-6}}_{}$$

$$= 150\times10^{-6} + 10\times10^{-6} + 40\times10^{-6}$$

$$= 2\times10^{-4}\ Kg.m^2$$

اذاً:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}}$$

$$= \pi = 3.14\ Sec$$

(2. يزداد الدور بمقدار 0.86 Sec

(الجديد) $T_0' = T_0 + 0.86$

$$= 3.14 + 0.86$$

$$= 4\ Sec$$

لنحسب عزم العطالة عندما يكون الدور 4 sec

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I'_{\Delta\,(\text{جملة})}}{k}}$$

$$4 = 2\pi\sqrt{\frac{I'_{\Delta\,(\text{جملة})}}{8\times10^{-4}}} \Rightarrow 2 = \pi\sqrt{\frac{I'_{\Delta\,(\text{جملة})}}{8\times10^{-4}}}$$

$$4 = \frac{\pi^2\, I'_{\Delta\,(\text{جملة})}}{8\times10^{-4}} \Rightarrow I'_{\Delta\,(\text{جملة})} = 32\times10^{-5}\ \text{Kg.m}^2$$

$$I'_{\Delta\,(\text{جملة})} = I_{\Delta\,(\text{قرص})} + I_{\Delta\,(\text{ساق})} + 2m_1 r'^2$$

$$32\times10^{-5} = 15\times10^{-5} + 10^{-5} + 2\times0.05\, r'^2$$

$$16\times10^{-5} = 0.1\, r'^2$$

$$r'^2 = 16\times10^{-4}$$

$$r' = 4\times10^{-2}\ \text{m}$$

وهو بعد إحدى الكتل عن محور الدوران.

فيكون البعد الجديد بين الكتلتين

$$2r' = 2\times4\times10^{-2}$$

$$= 8\times10^{-2}$$

$$= 0.08\ \text{m}$$

المسألة الثالثة:

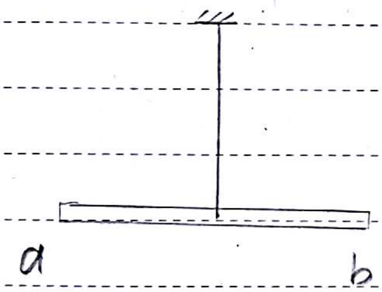
ساق أفقية متجانسة طولها $l=ab=40\ cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها.

A) ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=60^{\circ}$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0=1\ sec$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c}=2\times10^{-3}\ kg.m^2$

والمطلوب: 1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام. 2- احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن. 3- احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما تصنع زاوية (-30°) مع وضع توازنها.

B) نثبت بالطرفين $a\ ،\ b$ كتلتين نقطيتين $m_1=m_2=75\ g$ استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملة المهتزة، ثم احسب قيمة ثابت فتل السلك.

C) نقسم سلك الفتل لقسمين متساويين، ونعلق الساق بعدئذ بمنتصفي السلك معاً أحدهما من الأعلى والآخر من الأسفل ومن منتصفها، ويثبت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً. استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية).



الحل: $l=40\times10^{-2}\ m$

A) $\begin{cases}\theta=60^{\circ}=\frac{\pi}{3}\ rad\\ t=0\end{cases}$

دون سرعة ابتدائية

$T_0=1\ sec$

$I_{\Delta/c}$ (ساق) $=2\times10^{-3}\ kg.m^2$

1) الشكل العام للمطال الزاوي: $\bar{\theta}=\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

*) $\theta_{max}=\frac{\pi}{3}\ rad$

لأن الساق تركت دون سرعة ابتدائية

*) $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi\ rad.s^{-1}$

*) $\bar{\varphi}=?$

نعوض شروط البدء $(t=0\ ،\ \theta=\frac{\pi}{3}\ rad)$ بتابع المطال

$$\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\cos(\omega_0(0)+\bar{\varphi})$$

$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$

إذاً تابع المطال:

$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t + 0) \text{ rad}$

2) السرعة الزاوية هي مشتق تابع المطال الزاوي بالنسبة للزمن

$\omega = (\theta)'_t$

$\omega = -2\pi \times \frac{\pi}{3}\sin(2\pi t)$

$= -\frac{20}{3}\sin(2\pi t)$

يلزم زمن المرور الثاني بمركز التوازن:

عند المرور بمركز التوازن $\theta = 0$ نعوض في تابع المطال الزاوي

$0 = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t)$

$\cos(2\pi t) = 0$

$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi K \;\; ; \; K = 0, 1, 2 \ldots$

المرور الاول: $K = 0 \Rightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{2} + 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{4} \text{ sec}$

المرور الثاني: $K = 1 \Rightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi(1) \Rightarrow t_2 = \frac{3}{4} \text{ sec}$

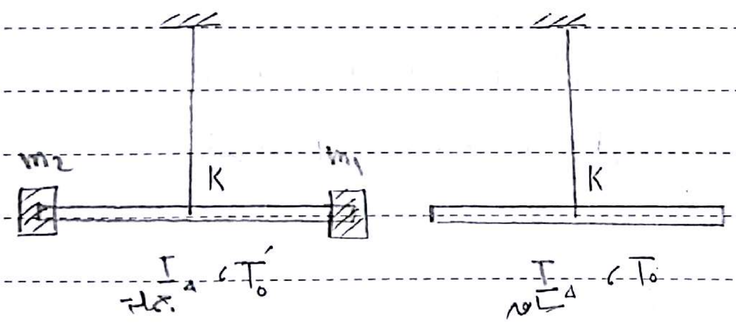
نعوض في تابع السرعة

$\omega = -\frac{20}{3}\sin\left(2\pi \times \frac{3}{4}\right) = -\frac{20}{3}(-1) = \frac{20}{3} \text{ rad.s}^{-1}$

3) $\theta = -30 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$\alpha = -\omega_0^2\bar{\theta} = -(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{20\pi}{3} \text{ rad.s}^{-2}$

B)



(دون حمولة) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta \text{س}}}{K}}$

(مع حمولة) $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta \text{ج}}}{K}}$

للتخلص من (K) نسب العلاقتين

$\frac{T_0}{T'_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta \text{س}}}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta \text{ج}}}{K}}} = \sqrt{\frac{I_{\Delta \text{س}}}{I_{\Delta \text{ج}}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T'_0} = \sqrt{\frac{I_{\Delta \text{س}}}{I_{\Delta \text{ج}}}}$

*) $T_0 = 1$ sec

*) $T_0' = ?$ sec

*) $I_{\Delta/\text{س}} = 2\times10^{-3}$ Kg.m²

*) $I_{\Delta/\text{ج}} = I_{\Delta/\text{س}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= I_{\Delta/\text{س}} + 2 I_{\Delta/m_1}$

$= I_{\Delta/\text{س}} + 2 m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= 2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}\left(\frac{40\times10^{-2}}{2}\right)^2$

$= 2\times10^{-3} + 150\times10^{-3}\times400\times10^{-4}$

$= 2\times10^{-3} + 6\times10^{-3}$

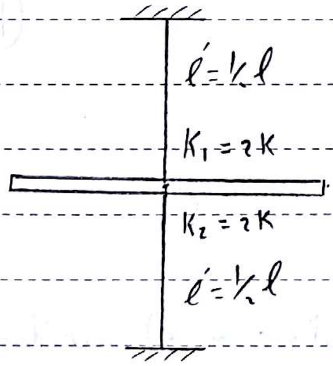
$= 8\times10^{-3}$ Kg.m²

أداً: $\frac{1}{T_0'} = \sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-3}}} \Rightarrow \frac{1}{T_0'} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0' = 2$ sec

(نلاحظ ان الدور ازداد وذلك بسبب زيادة عزم العطالة
لاننا اهملنا السلك بكتلته)

حساب K: (دون حمولة) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \xRightarrow{\text{نعوض}} 1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{K}}$

$\xRightarrow{\text{نربع}} 1 = \frac{4\pi^2\times2\times10^{-3}}{K} \xRightarrow{\text{نبدل}} K = 8\times10^{-2}$ m.N.rad^{-1}



C) $l' = \frac{1}{2} l \Rightarrow K' = 2K \quad \left(K = K'\frac{(2r)^4}{l}\right)$

يكون السلك يخضع لمزدوجتي فتل

$K'' = K_1 + K_2 = 2K + 2K = 4K$

$T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K''}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4K}} = \frac{1}{2}\,2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

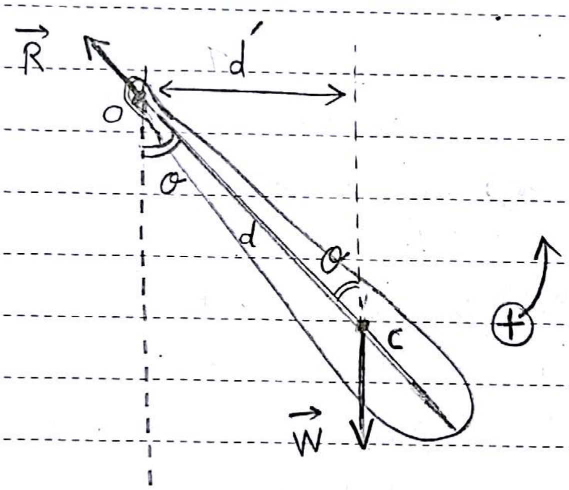
$= \frac{1}{2} T_0$

$= \frac{1}{2}\times1 = \frac{1}{2}$ Sec

(نلاحظ ان الدور ينقص بسبب زيادة (K) وزيادة (K) بسبب تقصير السلك
حسب العلاقة $\left(K = K'\frac{(2r)^4}{l}\right)$).

الدرس الثالث ‎/‎ اهتزازات غير التوافقية
النواس الثقلي غير المتخامد

- تعريفه : كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته.
- الدراسة التحريكية للنواس الثقلي : (استنتاج طبيعة حركته من أجل سعات صغيرة)
نعلق جسماً صلباً كتلته m، مركز عطالته c إلى محور دوران أفقي Δ مار من النقطة o من الجسم
حيث البعد $oc = d$
نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية
ليهتز في مستوٍ شاقولي



- تؤثر في الجسم قوتان :
$\vec{W}$: قوة ثقله
$\vec{R}$: قوة رد فعل محور الدوران
بتطبيق العلاقة الأساسية بالتحريك الدوراني
(نظرية التسارع الزاوي)

$$\Sigma \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$*) \; \bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -d' \cdot W$$

$$= -d \sin\theta \cdot mg$$

$$= -mgd \sin\theta$$

$$*) \; \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$$ لأن حامل $\vec{R}$ يمر من محور الدوران

$$-mgd \sin\theta + 0 = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$-mgd \sin\theta = I_{\Delta} (\theta)''_t$$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \cdot \sin\theta} \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحوي على $\sin\theta$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً وبالتالي حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية.

حركة النواس الثقلي من أجل سعات صغيرة: أي $\theta \ll 0.24\,rad$; $\theta \leqslant 14^\circ$

اذا كانت $\theta \ll 0.24\,rad$ فإن $\sin\theta \simeq \theta$ عندئذ تصبح المعادلة التفاضلية السابقة

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\,\bar{\theta} \quad \ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

باشتقاق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = \alpha = -\omega_0^2\,\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\theta \quad \ldots (2)$$

بمطابقة (1) مع (2) نجد

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن جميع المقادير موجبة. فحركة النواس الثقلي من أجل الاهتزازات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية من أجل الاهتزازات الصغيرة نبضها الخاص ω_0

ω_0: النبض الخاص للنواس الثقلي من أجل سعات صغيرة $(rad.s^{-1})$

m: كتلة الجسم (kg)

d: البعد بين مركز عطالة الجسم (c) ومحور الدوران (Δ) المار من (O). (m)

I_Δ: عزم عطالة الجسم حول محور الدوران $(kg.m^2)$.

g: تسارع الجاذبية $(m.s^{-2})$.

استنتاج الدور الخاص للنواس الثقلي من أجل الاهتزازات الزاوية الصغيرة

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

وهو الدور الخاص للنواس الثقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السعة

يمكن حساب d :

إما : بتطبيق علاقة التوازن الدوراني $\sum \overline{\Gamma}_{\Delta} = 0$

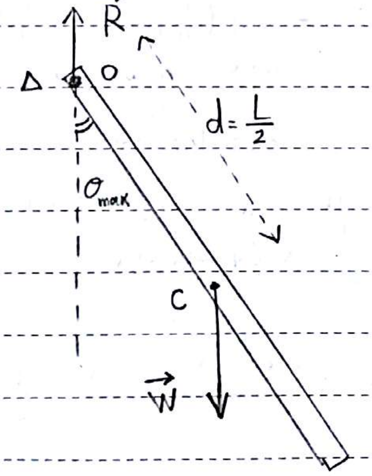
أو : بتطبيق العلاقة

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_i r_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

٢ : مقدار موجب إذا كان مركز عطالة الكتلة تحت محور الدوران وسالباً إذا كان فوق محور الدوران.

تطبيق (١): نواس ثقلي مؤلف من ساق متجانسة طولها $L = 0.375\,m$ وكتلتها M معلقة من طرفها العلوي بمحور أفقي عمودي على مستويها الشاقولي، نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي زاوية $(\theta < 14°)$ ونتركها دون سرعة ابتدائية استنتج بالرموز العلاقة المحددة للدور الخاص انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب ثم احسب قيمتها علماً أن عزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $(I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M L^2)$.

الحل :



دور النواس الثقلي المركب من أجل سعات صغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

لإيجاد عزم العطالة حول محور الدوران المار من (o) نطبق نظرية هايغنز

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + M d^2 \quad ; \quad d = \frac{L}{2}$$

$$= \frac{1}{12} M L^2 + M \frac{L^2}{4}$$

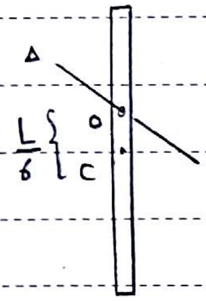
$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) M L^2$$

$$= \frac{1}{3} M L^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}L}{g\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.375}{3\times 10}} = 2\sqrt{\frac{0.75}{3}} = 2\sqrt{\frac{0.25}{1}} = 2(0.5) = 1\ Sec$$

طلب إضافي: أثبت أن الدور يبقى (1) sec عندما تدور حول محور دوران أفقي يبعد $(\frac{L}{6})$ عن مركز عطالتها



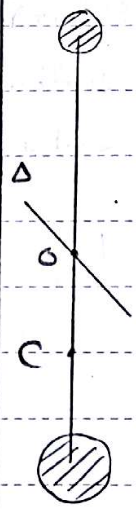
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} \quad ; \quad I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + Mr^2 \quad ; \quad r = \frac{L}{6}$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{6}$$

$$= (\frac{1}{12} + \frac{1}{6})ML^2 = \frac{1}{9}ML^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9}ML^2}{Mg\frac{L}{6}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}L}{g\frac{1}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.375}{3\times 10}} = 1\ sec$$

تطبيق (2): ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها (1) m، تحمل في نهايتها العلوية كتلة $m_1 = 0.2\,kg$، وتحمل في نهايتها السفلية كتلة $m_2 = 0.6\,kg$، تدور حول محور دوران يمر من منتصفها. احسب دور النواس في حالة السعات الصغيرة.



الحل:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

*) $I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$$= 0 + m_1(\frac{l}{2})^2 + m_2(\frac{l}{2})^2$$

$$= 0.2(\frac{1}{4}) + 0.6(\frac{1}{4})$$

$$= \frac{0.2}{4} + \frac{0.6}{4} = \frac{0.8}{4}$$

$$= 0.2\ kg.m^2$$

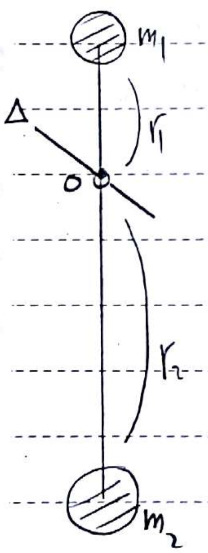
*) $m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2 = 0.8\ Kg$

*) $d = \frac{m_1\overline{r_1} + m_2\overline{r_2}}{m_1 + m_2}$

$$= \frac{0.2(-\frac{1}{2}) + 0.6(\frac{1}{2})}{0.8} = \frac{1}{4}\,m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8\times 10\times\frac{1}{4}}} = 2\ Sec$$

تطبيق (3): ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها 1 m، تحمل في نهايتها العلوية $m_1 = 0.4\,kg$ وفي نهايتها السفلية $m_2 = 0.6\,kg$ تدور حول محور دوران يبعد 20 cm عن نهايتها العلوية. احسب دور اهتزازاتها الصغيرة السعة



الحل:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

*) $I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$$= 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$= 0.4(20\times 10^{-2})^2 + 0.6(80\times 10^{-2})^2$$

$$= 0.4\ kg.m^2$$

*) $m_{\text{جملة}} = 1\ kg$

*) $d = \frac{m_1\overline{r_1} + m_2\overline{r_2}}{m_1 + m_2}$

$$= \frac{0.4(-20\times 10^{-2}) + 0.6(80\times 10^{-2})}{1}$$

$$= 0.4\ m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{1\times 10\times 0.4}}$$

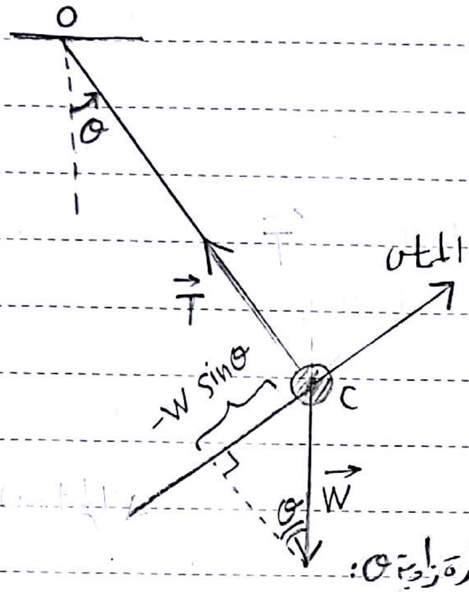
$$= 2\ Sec$$

النواس الثقلي البسيط

1- تعريفه:

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m، كثافتها النسبية كبيرة، معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط، طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.



2- الدراسة الحركية:

- القوى الخارجية المؤثرة

$\vec{W}$: قوة ثقل الكرة

$\vec{T}$: قوة توتر خيط التعليق

- العلاقة الأساسية بالتحريك الانسحابي

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

- بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة زاوية θ:

$$-W\sin\theta + 0 = m a_t$$

لكن

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W = mg \\ a_t = \alpha l \end{array} \right\} \\ \alpha \text{: التسارع الزاوي } (rad.s^{-2}) \\ l \text{: طول خيط التعليق } (m) \end{array} \right\}$$

- إذاً:

$$-mg\sin\theta = m l \alpha$$

$$-g\sin\theta = l(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\bar{\theta}$$

في حالة السعات الصغيرة $\theta \leq 0.24\ rad$ تصبح المعادلة التفاضلية السابقة

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta} \quad \dots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

بالاشتقاق مرتين بالنسبة للزمن نجد

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \quad \ldots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقق لأن g ، l موجبان

حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0.

3- استنتاج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من اجل سعات صغيرة

نعلم أن: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

ولدينا: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

بالمساواة:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

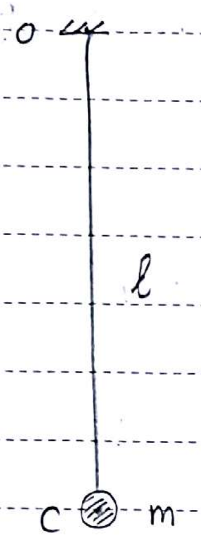
$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل السعات الصغيرة.

ملاحظة (غ م): تم الانتقال من الحركة الانسحابية ـــ الدورانية باستخدام العلاقة بين التسارعين $a_t = \alpha r$

4- استنتاج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الزاوية الصغيرة.



دور النواس الثقلي المركب من أجل سعات صغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

لكن: $I_\Delta = ml^2$, $d = l$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

5- من علاقة الدور الخاص للنواس البسيط $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ نستنتج أن:

1) لا يتعلق دور النواس البسيط بكتلة الكرة، ولا بنوع مادتها.

2) النوسات صغيرة السعة ($\theta \leq 0.24\,rad$ ، $\theta \leq 14^\circ$) لها الدور نفسه (متواقتة فيما بينها).

3) يتناسب الدور طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط (l) وعكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية g.

6- الدراسة التجريبية للنواس الثقلي:

1) في حالة السعات الزاوية الصغيرة لا تتغير قيمة الدور ويحسب من العلاقة

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$ من أجل نواس ثقلي مركب.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ من أجل نواس ثقلي بسيط.

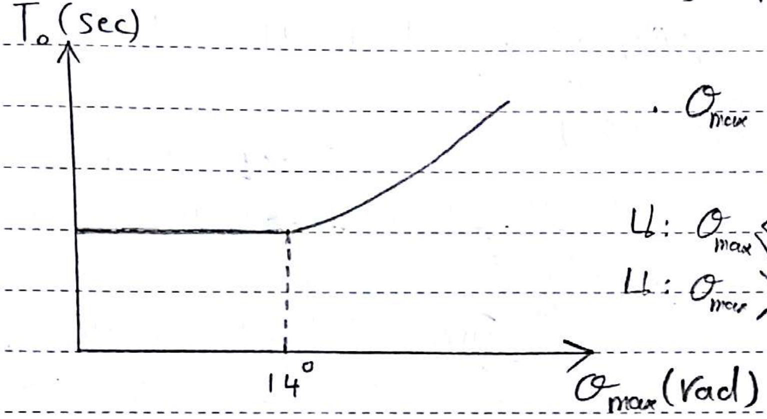
2) في حالة السعات الزاوية الكبيرة ($\theta > 14^\circ$ ، $\theta > 0.24\,rad$)

يزداد الدور بزيادة السعة الزاوية ويحسب من العلاقة

$$T_0' = T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right] \leftarrow \text{rad}$$

T_0 : الدور في حالة السعات الصغيرة.

θ_{max} : السعة الزاوية مقدرة بالراديان.



(3) منحني الدور بدلالة السعة الزاوية θ_{max} .

لـ: $\theta_{max} < 14° \Rightarrow T_0 = const$

لـ: $\theta_{max} > 14° \Rightarrow$ يزداد الدور بزيادة السعة الزاوية

7- استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس وعلاقة توتر خيط التعليق في نقطة من مسارها:

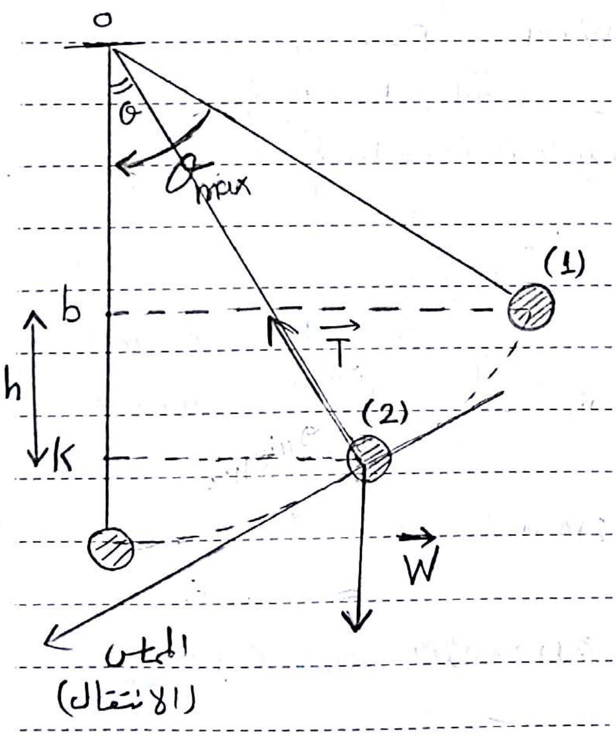
نزيح كرة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية:

1) إيجاد العلاقة المحددة لسرعة الكرة في موضع تصنع فيه الكرة زاوية (θ) مع الشاقول؟

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = \theta$



$$\Delta E_{K(1\to2)} = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال بكل لحظة

$E_{K_1} = 0$ لأن الكرة تركت دون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = mgh + 0$$

$$v^2 = 2gh$$

يلزم h :

$$\left\{ \begin{aligned} h &= oK - ob \\ &= \ell \cos\theta - \ell \cos\theta_{max} \\ &= \ell (\cos\theta - \cos\theta_{max}) \end{aligned} \right\}$$

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

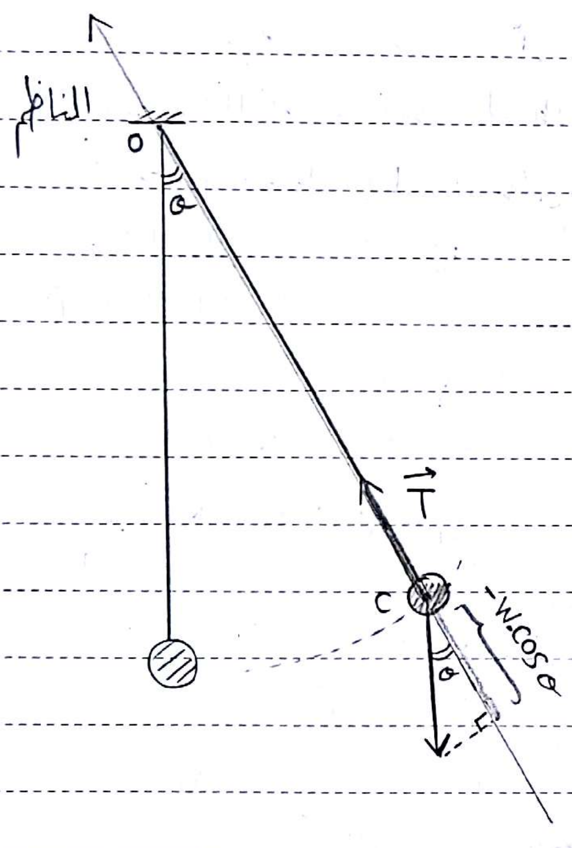
$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

وهي علاقة السرعة الخطية لكرة النواس عندما تصنع مع الشاقول زاوية ما (θ).

وعند المرور بالشاقول $\theta = 0$ تصبح علاقة السرعة الخطية

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}$$

2) إيجاد العلاقة المحددة لتوتر الخيط في موضع تصنع فيه الكرة مع الشاقول زاوية (θ).



- القوى الخارجية المؤثرة في الكرة

$\vec{W}$: قوة ثقل الكرة

$\vec{T}$: قوة توتر خيط التعليق

- العلاقة الأساسية بالتحريك الانسحابي

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

- بالإسقاط على الناظم:

$$-W\cos\theta + T = ma_c$$

حيث أن: $a_c = \frac{v^2}{r}$ تسارع ناظمي

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{r}$$

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg\cos\theta$$

لكن: $r = l$ طول الخيط

$$= m\frac{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{l} + mg\cos\theta$$

$$= 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$

$$= 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

وهي علاقة توتر خيط التعليق في موضع تصنع فيه الكرة مع الشاقول زاوية θ

وعند المرور بالشاقول $\theta = 0$ تصبح علاقة توتر الخيط

$$T = mg(3\cos(0) - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

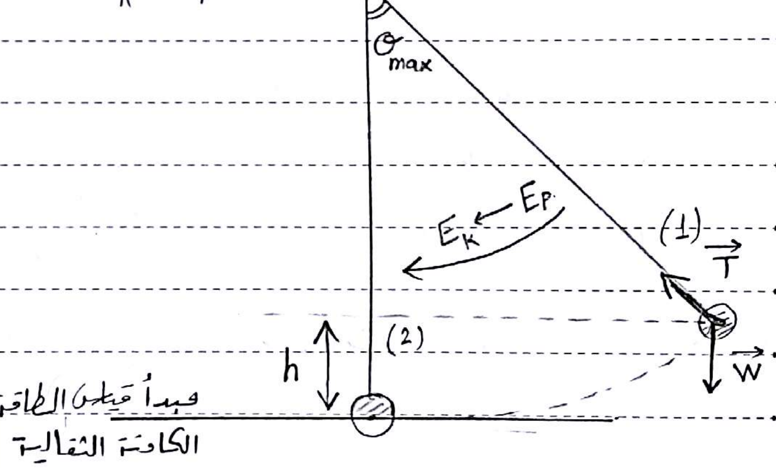
8- الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط:

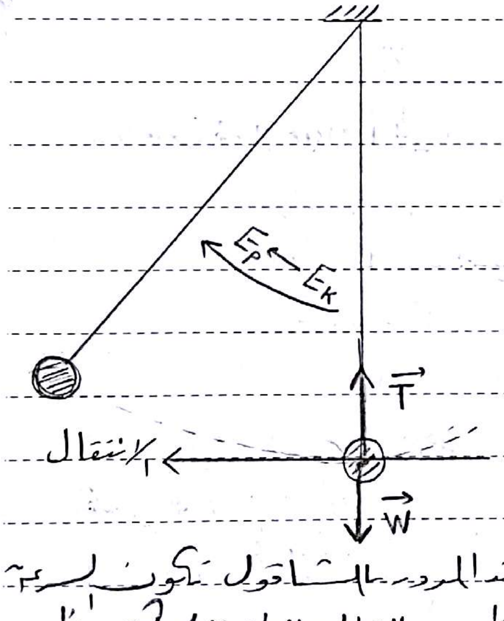
أ) الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط ثابتة وذلك عند إهمال القوى المبددة للطاقة حيث يهتز بسعة ثابتة θ_{max} الى جانبي موضع توازنه الشاقولي.

ب) الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية E_p والحركية E_K

نفرض أن مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الكرة عند المرور بوضع التوازن الشاقولي.

$$E = E_K + E_p$$





* عندما نترك الكرة دون سرعة ابتدائية من أحد الوضعين الطرفيين:

$E_K = 0$

$E_p = W_{\vec{W}} = mgh$

h: الانتقال الشاقولي لمركز عطالة الكرة

من (1 ⟵ 2)

إذاً في الوضعين الطرفيين $(E_{total} = E_p)$

* عند المرور بالشاقول تكون السرعة عظمى وبالتالي الطاقة الحركية عظمى

$E_K = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = E_{total}$

$E_p = W_{\vec{W}} = 0$

لأن حامل القوة $\vec{W}$ يعامد الانتقال فعمل قوة الثقل معدوم وبالتالي $E_p = 0$

إذاً في مركز التوازن الشاقولي $(E = E_K)$

تعلمت:

- تعريف النواس الثقلي المركب: كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم ثقله في مستوٍ شاقولي حول محور دوران افقي لا يمر من مركز عطالته، وعمودي على مستويه.

- طبيعة حركة النواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة جيبية دورانية تابع مطال الزاوي من الشكل $\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- دور النواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة $\theta_{max} \ll 0.24\ rad$ بالعلاقة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

- تعريف النواس الثقلي البسيط: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد l من محور افقي ثابت (نظرياً) وهو التعريف لا يسمى لهذا النواس.

- دور النواس الثقلي البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة $\theta_{max} \ll 0.24\ rad$ بالعلاقة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- دور النواس الثقلي البسيط والمركب في حالة السعات الزاوية الكبيرة $\theta_{max} > 0.24\ rad$ يعطى بالعلاقة

$$T_0' = T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right]$$

- الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية

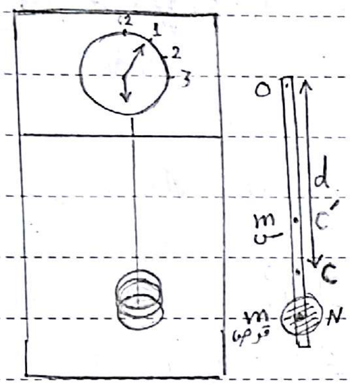
$$E = E_K + E_P$$

أختبر نفسي

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي

1- قمت بزيارة لبيت جدك، وطلبت جدتك تصحيح الميقاتية المعلقة على الجدار، وهي مؤلفة من ساق متجانسة بقرص قابل للحركة مثبت في نهايتها، فما تحققت بالساعة إلكترونية فأشارت الى السادسة تماماً في حين تشير الميقاتية الى السادسة وخمس دقائق، لتصحيح الوقت يجب:

الحل:



الحل: بما ان الميقاتية تشير الى الساعة السادسة وخمس دقائق خارطة تقدم الوقت على الساعة إلكترونية لذلك يجب زيادة الدور الخاص للميقاتية الذي يعطى بالعلاقة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta\,\text{جملة}}}{mgd}}$$

$$\begin{cases} I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta\,\text{قرص}} \quad ; \quad I_{\Delta\,\text{ساق}} = I_{\Delta/c} + m_{\text{ساق}}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad \text{(هايغنز)} \\ \qquad = \frac{1}{12} m_{\text{ساق}}\ell^2 + m_{\text{ساق}}\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m_{\text{ساق}}\ell^2 \\ I_{\Delta\,\text{قرص}} = m_{\text{قرص}}(ON)^2 = m_{\text{قرص}}(d+CN)^2 \\ I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{1}{3} m_{\text{ساق}}\ell^2 + m_{\text{قرص}}(d+CN)^2 \end{cases}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3} m_{\text{ساق}}\ell^2 + m_{\text{قرص}}(d+CN)^2}{mgd}}$$

لزيادة الدور الخاص للميقاتية يجب زيادة $(d = oc)$ وعند زيادة d تكون زيادة البسط أكبر من زيادة المقام (لأن البسط من الدرجة الثانية) لذلك يزداد الدور إذاً الإجابة الصحيحة هي:

a) إيقاف الميقاتية، وخفض القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها

2- ميقاتيتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلي، نضع الأولى الطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة: a) تشير الى التوقيت نفسه. b) تقدم الثانية ويجب تعديلها c) تؤخر الثانية، ويجب تعديلها d) تؤخر الأولى ويجب تعديلها.

الحل: دور الميقاتية يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية

$$\left(T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}\right), \left(T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$$

بما ان الثانية في الطابق الأخير $\Leftarrow g$ أصغر $\Leftarrow T_0$ أكبر فهي تؤخر

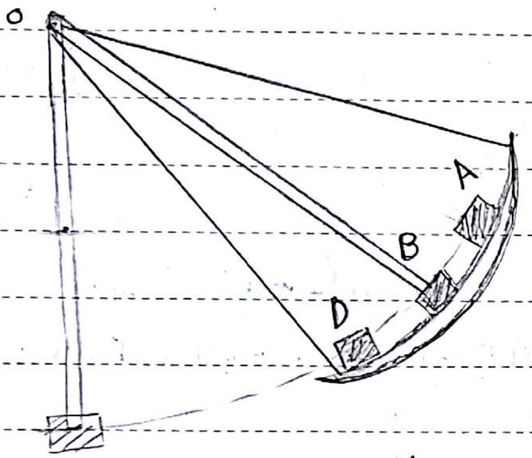
الإجابة الصحيحة هي c) تؤخر الثانية، ويجب تعديلها.

3- أرجوحة كبيرة نعدها نواساً ثقلياً مركباً كما هو موضح بالشكل جانباً تهتز على جانبي موضع توازنها بسعة كبيرة، ويجلس عليها أربعة أشخاص A و B و C و D. فالشخص الذي تكون سرعته الخطية أكبر ما يمكن عند المرور بموضع الشاقول هو:

a) الشخص B   b) الشخص A   c) الشخص D

الحل:

a) الشخص B



السرعة الخطية عند المرور بالشاقول تكون بقيمتها العظمى وبما أن الشخص B يقع في مركز الأرجوحة تكون سرعته الخطية هي الأكبر.

ملاحظة: في السؤال السابق إذا كانت الكتل (A ، B ، D) منفصلة عن بعضها فإن سرعتها الخطية تتناسب طرداً مع الجذر التربيعي للارتفاع الشاقولي (h) لكل منها وبالتالي سوف تكون السرعة الخطية لـ (A) هي الأكبر

حسب العلاقة: $V = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}} \cdot r$

التوضيح:

أسئلة خارجية عن النواس الثقلي المركب:

(ع)4- ميقاتية تدق الثانية عند سطح البحر، عند نقلها إلى قمة جبل فإن دورها T_0:

A) $T_0 < 2$ sec B) $T_0 = 2$ sec C) $T_0 > 2$ sec

(ع)5- نواس ثقلي مركب يدق الثانية نزيد من كتلته العطالية من أربعة أمثال ما كانت عليه فيصبح دوره الخاص T_0:

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{m'gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{4I_\Delta}{4mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} = T_0 = 2 \text{ sec}$$

(ع)6- نواس ثقلي مركب يدق الثانية نزيد من عزم عطالته من أربعة أمثال ما كانت عليه فيصبح دوره الخاص T_0:

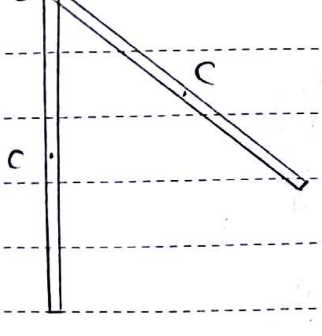
$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{4I_\Delta}{mgd}} = 2\left(2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}\right) = 2T_0 = 2\times 2 = 4 \text{ sec}$$

ملاحظة: نواس يدق الثانية $\Leftarrow T_0 = 2$ sec

(ع)7- أثبت صحة السؤال التالي باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة

لا يتعلق الدور الخاص لساق متجانسة تنوس حول محور مار من طرفها العلوي بكتلتها ويبقى الدور نفسه مهما زدنا من كتلة النواس الثقلي علماً أن ($I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2$)

الإثبات: الساق المعلقة من طرفها العلوي تشكل نواس ثقلي مركب دوره الخاص من أجل سعات صغيرة:



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + mr^2 \quad ; r = \frac{l}{2}$$

$$= \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}$$

$$= \frac{1}{3}ml^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{l}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}l}{g\frac{1}{2}}}$$

إذاً: T_0 لا يتعلق بـ m.

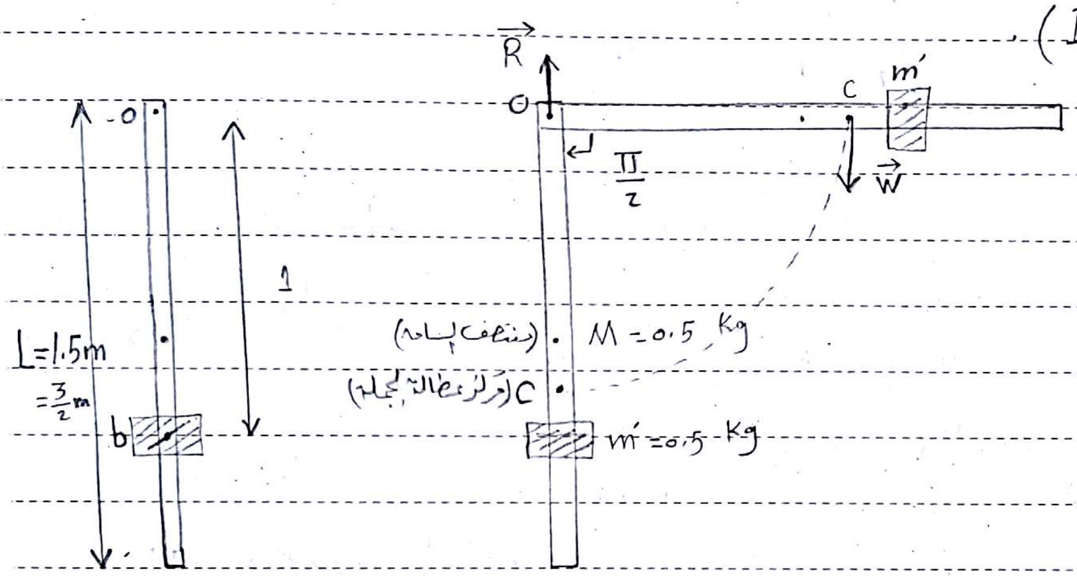
المسألة الأولى:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية، متجانسة، كتلتها $M=0.5\ Kg$، وطولها $1.5\ m$، يمكنها أن تدور حول محور أفقي مار من طرفها العلوي O، وتثبت عليها كتلة نقطية $m'=0.5\ Kg$ على بعد $1\ m$ من هذا الطرف، والمطلوب:

1. احسب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة.
2. نزيح جملة النواس عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{\pi}{2}\ rad$، ونتركها دون سرعة ابتدائية. احسب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول ثم احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m' عندئذ.

(عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/c}=\frac{1}{12}ML^2$).

الحل:



1) دور النواس الثقلي المركب من أجل سعات صغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$*)\ \underset{\text{جملة}}{I_\Delta} = \underset{\text{ساق}}{I_{\Delta/O}} + I_{\Delta/m'}$$

يلزم $\underset{(\text{ساق})}{I_{\Delta/O}}$:

$$\underset{(\text{ساق})}{I_{\Delta/O}} = I_{\Delta/c} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4}$$
$$= \frac{1}{3}ML^2$$
$$= \frac{1}{3}\times 0.5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{3}{8}\ kg.m^2$$

يلزم: $I_{\Delta/m'}$

$$I_{\Delta/m'} = m'(1)^2$$
$$= 0.5 \times 1$$
$$= \frac{1}{2}\ kg.m^2$$

إذاً:

$$I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{8}\ kg\ m^2$$

*) $m_{\text{جملة}} = M_{\text{ساق}} + m' = 0.5 + 0.5 = 1\ kg$

*) $d = \dfrac{M(\frac{L}{2}) + m'(r)}{M + m'} = \dfrac{0.5(\frac{3}{4}) + 0.5(1)}{1}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}\ m$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1 \times 10 \times \frac{7}{8}}} = 2\ sec$$

② بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta_{max} = \frac{\pi}{2} rad$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \Sigma \overline{W}_{\vec{F}}$$
$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$
$$E_{K_2} - 0 = m_{\text{جملة}}\, g\, h + 0$$

تترك الجملة دون سرعة ابتدائية — نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_{K_2} = m_{\text{جملة}}\, g\, d$$
$$= 1 \times 10 \times \frac{7}{8}$$
$$= \frac{70}{8}\ J$$

$$E_{K_2} = \frac{1}{2} I_\Delta\, \omega^2$$

$$\frac{70}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \omega^2$$

$$20 = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ rad \cdot s^{-1}$$

$v = \omega r_{m'}$ ، $r_{m'} = 1 \ m$ (بعد m' عن محور الدوران)

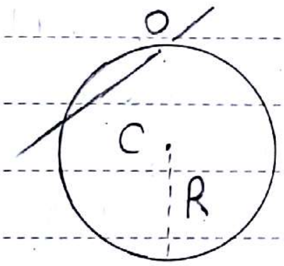
$$= 2\sqrt{5} \times 1$$

$$= 2\sqrt{5} \ m \cdot s^{-1}$$

مسألة (4): نعلق حلقة معدنية نصف قطرها $R = 12.5 \ cm$ ، كتلتها $M = 0.05 \ Kg$ ، بمحور أفقي ثابت، كما هو موضح بالشكل. المطلوب

1- احسب الدور الخاص باهتزازات هذا النواس من أجل السعات الزاوية الصغيرة إذا علمت أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = MR^2$

2- احسب طول النواس البسيط الموافق



الحل: الحلقة المعدنية باهتزازها تصنع قرص يدور حول محور مار بنقطة من محيطه وبالتالي تشكل نواس ثقلي مركب دوره الخاص من أجل سعات صغيرة.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

*) $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + MR^2$

$$= MR^2 + MR^2$$

$$= 2MR^2$$

*) $d = R$ ، $m = M$ (مجرد رموز)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 12.5\times 10^{-2}}{10}}$$
$$= 1 \ sec$$

(2)

$$T_0(\text{مركب}) = T_0(\text{بسيط})$$
$$T_0(\text{مركب}) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$$
$$l = \frac{1}{4}\ m$$

المسألة الثالثة:

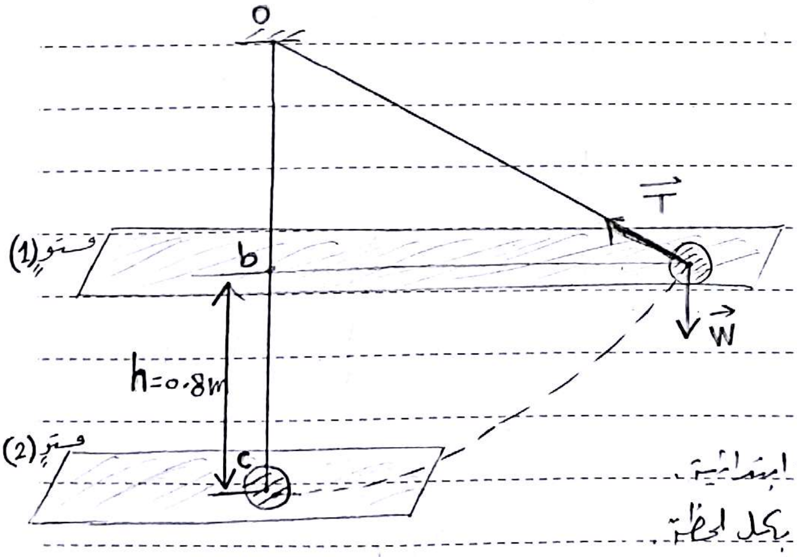
نعلق كرة صغيرة نعدها نقطة مادية، كتلتها $m=0.5kg$ بخيط مهمل الكتلة، لا يمتط طوله $l=1.6m$، لتؤلف نواساً ثقلياً بسيطاً، ثم نزيح الكرة إلى مستوٍ أفقي يرتفع $h=0.8m$ عن المستوي الأفقي المار منها وهي في موضع توازنها الشاقولي، ليصنع خيط النواس مع الشاقول زاوية θ، ونتركها دون سرعة ابتدائية، المطلوب:

1- استنتج بالرموز العلاقة المحددة للسرعة الخطية للكرة عند مرورها بالشاقول، ثم احسب قيمتها، موضحاً بالرسم.

2- استنتج قيمة الزاوية θ، ثم احسب قيمتها.

3- احسب دور هذا النواس.

4- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لشدة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها.



الحل:

1) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}}$$
$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$E_{k_1} = 0$ لأن الكرة تركت دون سرعة ابتدائية.

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال بكل لحظة.

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = mgh + 0$$

$$v^2 = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2 \times 10 \times 0.8}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$v = 4 \ m \cdot s^{-1}$$

2) من الشكل نجد:

$$h = oc - ob$$

$$h = l - l\cos\theta$$

$$h = l(1 - \cos\theta)$$

$$0.8 = 0.16(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \ rad$$

3) دور النواس البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 2\sqrt{\frac{16}{10}} = \frac{8}{\pi} \ sec$$

دوره في حالة السعات الكبيرة

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right] = \frac{8}{\pi}\left[1 + \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{16}\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[1 + \frac{10}{144}\right] = \frac{8}{\pi}\left[\frac{154}{144}\right] = \frac{8}{\pi} \times \frac{77}{72}$$

$$= \frac{77}{9\pi} = \frac{77}{9 \times 3.14} \simeq 2.7 \ sec$$

4) القوى الخارجية المؤثرة على الكرة

$\vec{W}$: قوة الثقل

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على الناظم

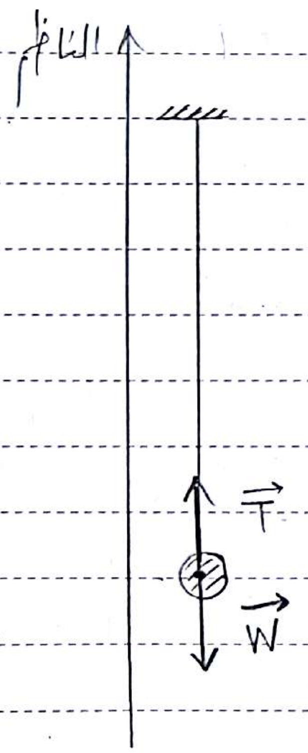
$$-W + T = m a_c$$

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$

$$= m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) \ ; r = l$$

$$= 0.5\left(\frac{(4)^2}{1.6} + 10\right)$$

$$= 10 \ N$$



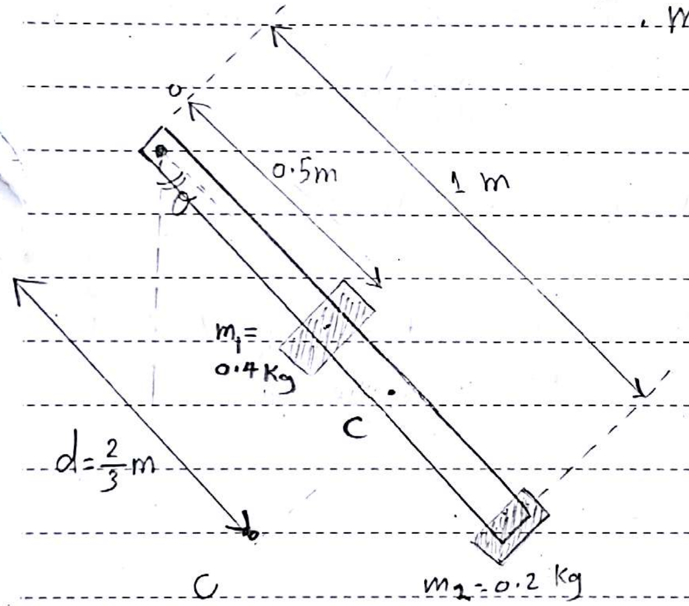
المسألة الرابعة:

ساق شاقولية، مهملة الكتلة طولها $L=1m$، نثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1=0.4\,kg$ ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2=0.2\,kg$، لتؤلف الجملة نواساً ثقلياً مركباً يمكنه أن ينوس في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي للساق. المطلوب:

1. احسب دور نوساتها الصغيرة السعة.
2. نزيح الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\,rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$ والمطلوب:

a) احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2.

b) استنتج قيمة الزاوية θ_{max}.



الحل:

1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

*) $$I_{\Delta\,جملة} = I_{\Delta\,ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= 0 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 l^2$$

$$= m_1\frac{l^2}{4} + m_2 l^2$$

$$= 0.4\times\frac{(1)^2}{4} + 0.2\times(1)^2$$

$$= 0.1 + 0.2$$

$$= 0.3\ Kg.m^2$$

*) $$m_{جملة} = m_{ساق} + m_1 + m_2$$

$$= 0.6\ Kg$$

*) $$d = \frac{m_1\left(\frac{l}{2}\right) + m_2(l)}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{0.4\times\frac{1}{2} + 0.2\times 1}{0.6} = \frac{2}{3}\,m$$

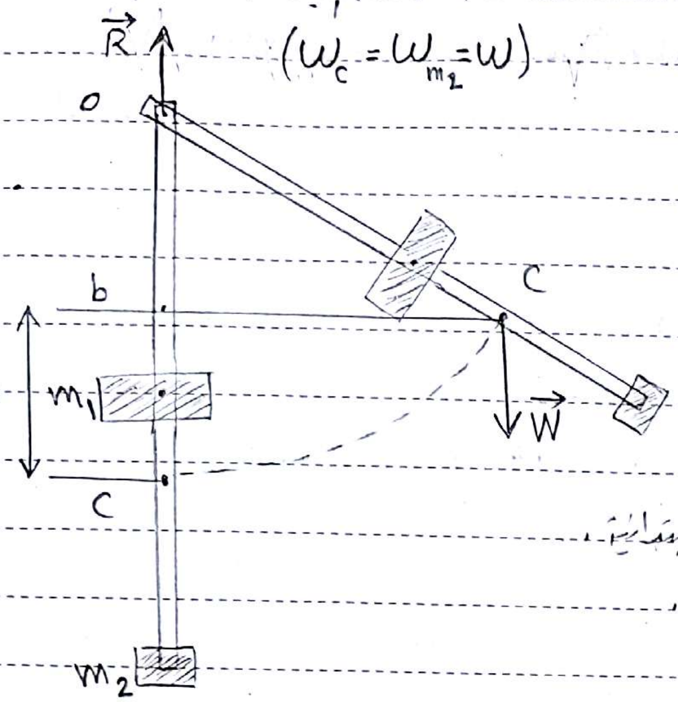
إذاً:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6\times10\times\frac{2}{3}}}$$

$$= \sqrt{3}\ sec$$

يلزم W : مع الأخذ بعين الاعتبار ان السرعة الزاوية لأن نقاط مستقيم الجملة ثابتة أي أنه

$(W_c = W_{m_2} = W)$



2) a)

$V_{m_2} = W r_{m_2}$

$V_c = W r_c \Rightarrow W = \frac{V_c}{r_c} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad.s^{-1}$

إذاً:

$V_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m.s^{-1}$

b) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$

$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$

$E_{K_1} = 0$ لأن الجملة تركت دون سرعة ابتدائية.

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل.

$\frac{1}{2} I_\Delta w^2 - 0 = \underbrace{mgh}_{\text{ثقل}} + 0$

$\frac{1}{2} I_\Delta w^2 = mgh$

*) $I_\Delta = 0.3\ kg.m^2$

*) $V_c = w r_c \Rightarrow w = \frac{V_c}{r_c} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad.s^{-1}$ $(r_c = d = \frac{2}{3} m)$.

*) $m = 0.6\ kg$

*) $h = oc - ob$

$= d - d\cos\theta_{max}$

$= d(1 - \cos\theta_{max})$

$= \frac{2}{3}(1 - \cos\theta_{max})$

إذاً:

$\frac{1}{2} \times 0.3 \times \frac{4\pi^2}{3} = 0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}(1 - \cos\theta_{max})$

$2 = 4(1 - \cos\theta_{max})$

$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max}$

$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$

$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$

المسألة الخامسة:

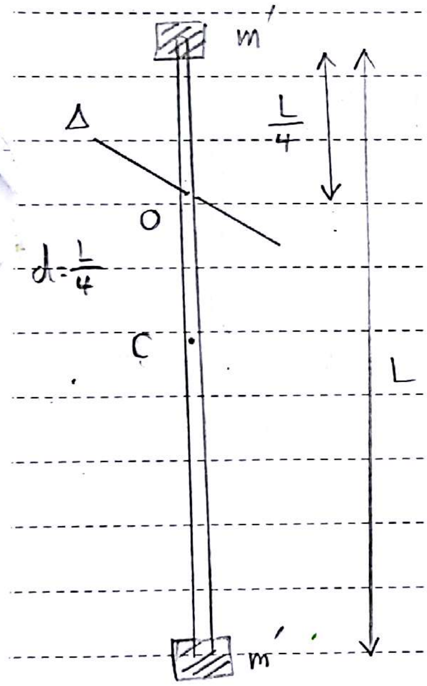
يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية، مهملة الكتلة طولها L، تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية m'، نعلق الجملة بمحور دوران افقي يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلوي، نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{1}{2\pi}$ rad، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$ فتهتز بدور خاص $T_0 = 2.5$ sec، والمطلوب:

1) استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام

2) استنتج بالرموز العلاقة المحددة لطول الساق، ثم احسب قيمته.

3) احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة (طويلة).

4) لنفرض انه خلال إحدى النوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق، استنتج الدور الخاص الجديد للجملة في حالة السعات الزاوية الصغيرة.



الحل:

1)

$$\theta = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\times 3.14} \simeq 0.16 \text{ rad}$$

$$0.16 < 0.24 \text{ rad}$$

أي أن الساق تهتز بسعة زاوية صغيرة فتابع المطال الزاوي من الشكل العام:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

*) $\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}$ rad

لأن الجملة تركت دون سرعة ابتدائية $(\omega = 0)$

*) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad.s}^{-1}$

*) $\bar{\varphi} = ?$

نعوض شروط البدء $(t=0 \,،\, \theta = \frac{1}{2\pi} \text{ rad})$ بتابع المطال

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0(0) + \bar{\varphi})$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1$$

$$\bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

إذاً: $\theta = \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t + 0\right)$ rad

2) النبض الخاص للنواس الثقلي المركب

$$\omega_0^2 = \frac{m_{\text{ج.}}\, g\, d}{I_{\Delta_{\text{ج.م}}}}$$

$$*)\ I_{\Delta_{\text{ج.م}}} = I_{\Delta_{\text{ساق}}} + \underbrace{I_{\Delta/m'}}_{\text{علوية}} + \underbrace{I_{\Delta/m'}}_{\text{سفلية}}$$

$$= I_{\Delta_{\text{ساق}}} + m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m'\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$= 0 + m' L^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right)$$

$$= \frac{5}{8} m' L^2$$

$$*)\ m_{\text{ج.م}} = m_{\text{ساق}} + m'_{(\text{علوية})} + m'_{(\text{سفلية})}$$

$$= 2m'$$

$$*)\ d = OC = \frac{L}{4}$$

أو: $d = \dfrac{m'\left(-\frac{L}{4}\right) + m'\left(\frac{3L}{4}\right)}{m' + m'} = \dfrac{-m'\frac{L}{4} + m'\frac{3L}{4}}{2m'}$

$$= \frac{\frac{1}{2} L}{2} = \frac{L}{4}$$

إذاً: $\omega_0^2 = \dfrac{2m' g \frac{L}{4}}{\frac{5}{8} m' L^2}$

$$\omega_0^2 = \frac{8g}{10L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{8g}{10\,\omega_0^2}}$$

$$L = \frac{8 \times 10}{10 \times \left(\frac{4\pi}{5}\right)^2} = \frac{8 \times 25}{16\pi^2}$$

$$= \frac{25}{2 \times 10} = \frac{12.5}{10} = 1.25 \text{ m}$$

3) السرعة الزاوية هي مشتق تابع المطال الزاوي

$$\overline{\omega} = (\theta)'_t$$

$$= -\frac{4\pi}{5}\,\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right) = -\frac{2}{5}\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

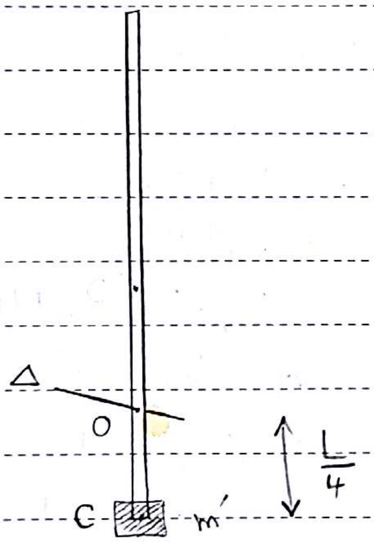
عند المرور بالشاقول تكون السرعة عظمى : $\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right) = \mp 1$

$$\omega_{max} = -\frac{2}{5}(\mp 1)$$

$$= \mp 0.4$$

$\omega_{max} = 0.4\ rad.s^{-1}$ طويلة السرعة الزاوية

4) بعد انفصال الكتلة السفلية عن الساق، تنقلب الجملة وتتابع الكتلة m' التي تبعد عن الكتلة السفلية $\left(\frac{L}{4}\right)$ وتأخذ الجملة الشكل التالي



$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

*) $I_{\Delta_{\text{جملة}}} = I_{\Delta_{\text{ساق}}} + I_{\Delta/m'}$

$$= 0 + m'\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}m'L^2$$

*) $m_{\text{جملة}} = m_{\text{ساق}} + m' = m'$

*) $d = \frac{L}{4}$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{16}m'L^2}{m'g\frac{L}{4}}}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{1.25}{4\times 10}} = \sqrt{1.25} = \sqrt{\frac{125}{100}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ Sec$$

المسألة الثانية:

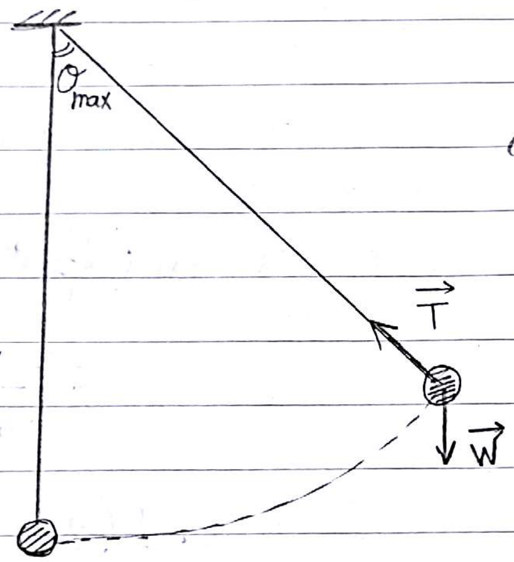
خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l=40cm$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m=100\,g$ المطلوب

1- يحرف الخيط عن وضع التوازن زاوية θ_{max} ونترك الكرة دون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v=2\ m.s^{-1}$

استنتج قيمة الزاوية θ_{max}

2- استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمته.

الحل:



1)

1) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1=\theta_{max}$

الثاني: $\theta_2=0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2}-E_{K_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-0 = mgh+0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال بكل لحظة — لأن الكرة تركت دون سرعة ابتدائية

$$v^2 = 2gh$$

يلزم h:

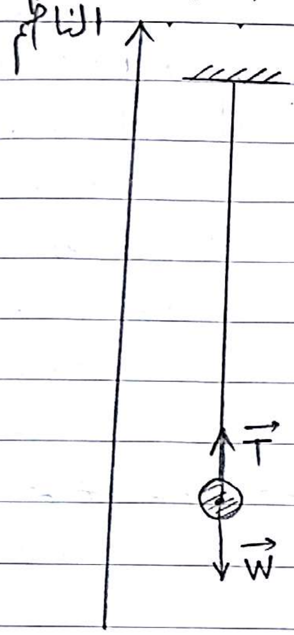
$$\begin{cases} h = oc-ob \\ = l - l\cos\theta_{max} \\ = l(1-\cos\theta_{max}) \end{cases}$$

$$v^2 = 2gl(1-\cos\theta_{max})$$

$$4 = 2\times10\times40\times10^{-2}(1-\cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} = 1-\cos\theta_{max}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$$



(2)

- القوى الخارجية المؤثرة

$\vec{W}$: قوة الثقل

$\vec{T}$: قوة توتر خيط التعليق

- العلاقة الأساسية بالتحريك الانسحابي

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

- بالإسقاط على الناظم

$$-W + T = m a_c$$

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$

$$T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right)$$

$$= 100\times10^{-3}\left(\frac{4}{40\times10^{-2}} + 10\right)$$

$$= 0.1(20) = 2\ N$$

مسألة (5):

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها $1\ m$ تحمل في نهايتها العلوية $m_1 = 0.2\ Kg$ وتحمل في نهايتها السفلية كتلة نقطية $m_2 = 0.6\ Kg$ تهتز هذه الساق حول محور أفقي مار من منتصفها والمطلوب

1- احسب دور في حالة السعات الصغيرة

2- احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس

3- احسب دور النواس لو نوسان بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\ rad$

4- نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = (60)^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائية

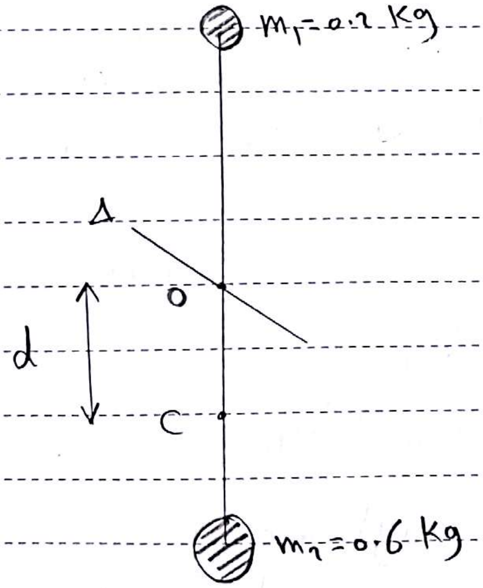
a) استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثم احسب قيمتها عندئذ

b) احسب السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة المرور بالشاقول

5- نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2\ Kg$ ونعلق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي ليشكل بذلك نواساً للفتل، نزيح الساق الأفقية عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائية فتهتز بدور $T_0 = 2\pi\ sec$، احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق

6- احسب قيمة التسارع الزاوي لنواس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5\ rad$.

الحل:



$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

*) $$I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= 0 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= 0.2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0.6\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{0.2}{4} + \frac{0.6}{4} = \frac{0.8}{4}$$

$$= 0.2\ Kg.m^2$$

*) $$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2 = 0.8\ Kg$$

$$d = \frac{m_1 \overline{r_1} + m_2 \overline{r_2}}{m_1 + m_2} = \frac{0.2(-\frac{1}{2}) + 0.6(\frac{1}{2})}{0.8}$$

$$= \frac{1}{4} m$$

إذاً:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0.2}{0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}}}$$

$$= 2 \text{ sec}$$

2) T_0 (مركب) $= T_0$ (بسيط)

$$2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{10}}$$

$$\sqrt{l} = 1$$

$$l = 1 m$$

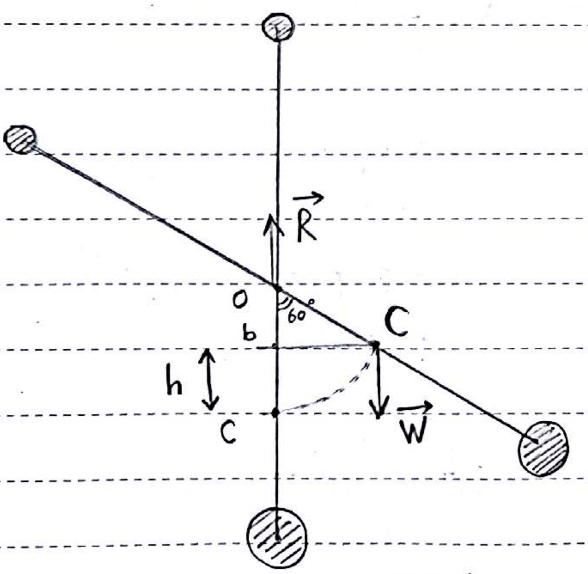
3) $\theta_{max} = 0.4 \text{ rad} > 0.24 \text{ rad}$

$$\Rightarrow T_0' = T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right]$$

$$= 2\left(1 + \frac{(0.4)^2}{16}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 2.02 \text{ sec}$$

4)



a) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \overline{W_F}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{W_{\vec{W}}} + \overline{W_{\vec{R}}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = mgh + 0$$

لأن الجملة تركت دون سرعة ابتدائية

نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

يلزم h :

$$\left\{\begin{aligned} h &= oc - ob \\ &= d - d\cos\theta \\ &= d(1-\cos\theta) \end{aligned}\right\}$$

$$\omega^2 = \frac{2mg\,d(1-\cos\theta)}{I_\Delta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\times 0.8\times 10\times \frac{1}{4}(1-\cos(60))}{0.2}}$$

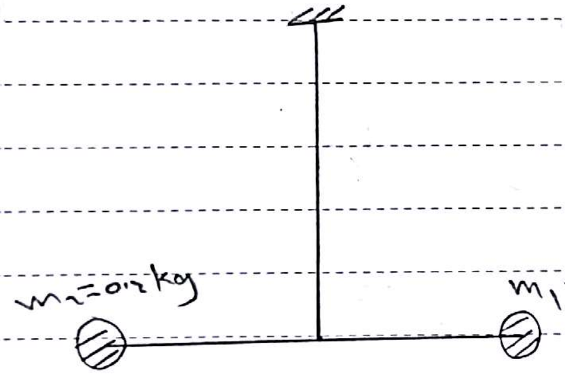
$$= \sqrt{10} = \pi \quad rad.s^{-1}$$

b)

$$v_c = \omega r_c \; ; \; r_c = d$$

$$= \pi \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \; m.s^{-1}$$



5)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

يلزم I_Δ :

$$I_{\Delta\,جملة} = I_{\Delta\,ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= 0 + 2 I_{\Delta/m_1}$$

$$= 2 m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= 2\times 0.2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 0.1 \; kg.m^2$$

اذاً

$$2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{K}}$$

$$K = 0.1 \; m.N.rad^{-1}$$

(6

$\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t$

$\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta}$

لكن: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \ rad.s^{-1}$

إذاً

$\alpha = -(1)^2(0.5)$

$= -0.5 \ rad.s^{-2}$

طلب إضافي: احسب السرعة الخطية للكتلة m_2

$v = \omega r \ ; \ r = \frac{l}{2}$

حيث $r = \frac{l}{2}$ هو نصف قطر الدائرة التي ترسمها الكتلة m_2

$v = \omega \frac{l}{2}$

$= \pi \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{2} \ m.s^{-1}$

مسألة (6):

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته (m) نصف قطره $r = \frac{2}{3} m$ يمكنه أن يهتز في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من نقطة على محيطه

1- انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص في حالة السعات الصغيرة ثم احسب قيمة هذا الدور

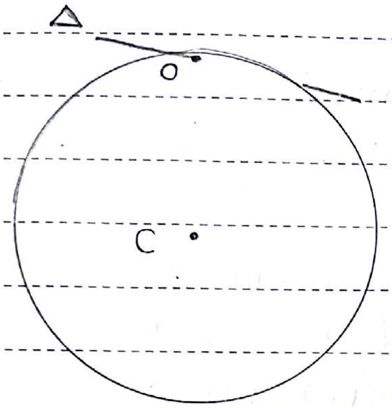
2- احسب طول النواس البسيط الموافق لهذا النواس المركب

3- نثبت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطية m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتز حول محور أفقي مار من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة من أجل السعات الزاوية الصغيرة

4- نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية m' لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max} إذا علمت أن $\theta_{max} > 0.24 \ rad$

$g = 10\ m\,s^{-1}$ ، $\pi^2 = 10$ ، عزم عطالة القرص حول محور مار من مركزه وعمودي على مستويه

$I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m r^2$



الحل:

1) دور النواس الثقلي المركب من أجل سعات صغيرة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta/O}}{m g d}}$$

*) $I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + m r^2$

$= \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$

$= \frac{3}{2} m r^2$

*) $d = OC = r$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{m g r}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} r}{g}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}}{10}}$$

$= 2$ sec

2) T_0 (مركب) $= T_0$ (بسيط)

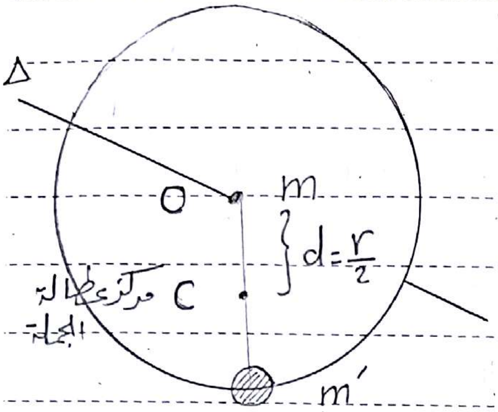
$$2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{10}}$$

$\ell = 1\ m$

3)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta(\text{الجملة})}}{m_{(\text{الجملة})}\, g\, d}}$$



*) $I_{\Delta(\text{جملة})} = I_{\Delta/c} + m' r'^2$ و $r' = r$

بعد محور الدوران عن مركز عطالة القرص ، بعد الكتلة m' عن محور الدوران

$$= \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$$

$$= \frac{3}{2} m r^2$$

*) $d = \frac{r}{2}$

لأن $m' = m \Leftarrow C$ (مركز عطالة الجملة) في منتصف المسافة بين الكتلتين

أو: $d = \frac{m\overline{r} + m'\overline{r'}}{m+m'} = \frac{m(0)+mr}{2m}$

$$= \frac{r}{2}$$

*) $m_{\text{جملة}} = m + m' = 2m$

إذاً:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{2mg\frac{r}{2}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} r}{g}}$$

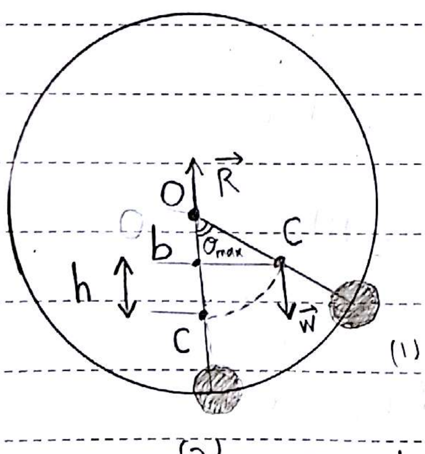
$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}{10}}$$

$$= 2 \text{ sec}$$

4) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$



$v_{m'} = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$

$$\overline{\Delta E_K} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 - 0 = m_{\text{ج.م}}\, g h + 0$$

دون سرعة ابتدائية — نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

☆) $I_{\Delta\,\text{ج.م}} = \frac{3}{2} m r^2$

☆) $v_{m'} = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v_{m'}}{r} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2}{3}} = \pi \ rad.s^{-1}$

بعد m' عن محور الدوران

☆) $m_{\text{ج.م}} = m' + m = 2m$

☆) $h = oc - ob$

$= \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \cos\theta_{max}$

$= \frac{r}{2}(1 - \cos\theta_{max})$

اذاً

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cancel{m} r^{2} \pi^2 = 2 \cancel{m} g \frac{r}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} r \pi^2 = 2 \times 10 \times \frac{1}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \cos\theta_{max}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} \ rad.$$