[1]

الأعداد العقدية وتطبيقاتها

أولاً

★ يرمز لمجموعة الأعداد العقدية بـ $\mathbb{C}$

1- تشكل العدد العقدي $Z = x + iy$

حيث أن:

x : القسم الحقيقي لـ Z

iy : القسم التخيلي لـ Z

i : الوحدة التخيلية

ملاحظة: $((i)^2 = -1)$

ملاحظة: 1- x و y اعداد حقيقية ....

2- $Re L(Z)$ القسم الحقيقي لـ Z ← يعني x

3- $Img (Z)$ القسم التخيلي لـ Z ← يعني y

8- هام: يكون Z تخيلي بحت عندما يكون $X = 0$ عندما $Z = iy$

يكون Z حقيقي عندما يكون $y = 0$ عندما $Z = x$

6- العمليات الحسابية على الأعداد العقدية:

ملاحظة: عند جمع / طرح عددين عقديين نجمع / نطرح القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

مثال: ليكن لدينا $Z_1 = 3 + 2i$ ، $Z_2 = 5 + 3i$

أوجد $Z_2 + Z_1$

الحل:

$$Z_1 + Z_2 = (3 + 2i) + (5 + 3i) = 8 + 5i$$

مثال: ليكن لدينا $Z_1 = 4 - 2i$ ، $Z_2 = 1 + 2i$ أوجد $Z_1 - Z_2$

الحل

$$Z_1 - Z_2 = (4 - 2i) - (1 + 2i) = 3 - 4i$$

ملاحظة: عندما تكون العملية ضرب ننشر كما تعلمنا سابقاً.

مثال: ليكن لدينا $Z_1 = 2 + i$ ، $Z_2 = 3 - 2i$ أوجد $Z_1 \cdot Z_2$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2$$

$$= 6 - i + 2 = 8 - i$$

هام للحفظ:

$(1 + i)^2 = 2i$

$(1 - i)^2 = -2i$

تذكرة:

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

2

آخر العمليات المتبقية وهي القسمة:

ملاحظة: لما يكون عندي قسمة وموجود بالمقام i نضرب ونقسم بالمرافق تبعي المقام حصراً.

* إذا كان المقام عبارة عن عدد تخيلي بحت نضرب البسط والمقام بـ (i).

مرافق العدد العقدي $Z = a + bi$ هو $\bar{Z} = a - bi$ حيث $Z \cdot \bar{Z} = a^2 + b^2$

أي $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$

مثال: ليكن $Z_1 = 2+i$ ، $Z_2 = 2-i$ ، $Z_3 = -1-i$ ، $Z_4 = 4i$

أوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$ ، $\frac{Z_3}{Z_1}$ ، $\frac{Z_3}{Z_4}$

الحل:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(2+i)^2}{(4+1)} = \frac{4+4i+i^2}{5} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{(-1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-3-i}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{-1-i}{4i} = \frac{(-1-i)(i)}{(4i)(i)} = \frac{-i-i^2}{4i^2} = \frac{-i+1}{-4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

خواص طويلة ومرافق العدد العقدي

ليكن Z_1 ، Z_2 عددان عقديان و $n \in N$

$$\underbrace{Z = x + iy}$$

$\bar{Z} = x - iy$

$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z_1} \cdot \bar{Z_2}$

$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z_1}}{\bar{Z_2}}$

$\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z_1} + \bar{Z_2}$

$\overline{\lambda \cdot Z} = \lambda \cdot \bar{Z}$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

$|Z^n| = |Z|^n$

$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

$|\lambda \cdot Z| = |\lambda| \, |Z|$

و $|\lambda|$ هي القيمة المطلقة لـ λ حيث $\lambda \in R$

ملاحظة: لما يطلب اثبت ان Z حقيقي نثبت ان $\boxed{Z = \bar{Z}}$

لما يطلب اثبت ان Z تخيلي بحت، نثبت ان $\boxed{Z = -\bar{Z}}$

مثال: ليكن العدد المركب $Z_1=3-4i$ ، $Z_2=-2i$

1- أوجد طويلة ومرافق العددان Z_1 , Z_2

$$Z_1=3-4i \Rightarrow \begin{cases} |Z_1|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \\ \bar{Z_1}=3+4i \end{cases}$$

$$Z_2=-2i \Rightarrow \begin{cases} |Z_2|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2 \\ \bar{Z_2}=2i \end{cases}$$

2- أوجد $|Z_1^3|$ ، $\overline{Z_2}^4$

$$|Z_1^3|=|Z_1|^3=(5)^3=125$$

$$\overline{Z}_2^4=(\bar{Z_2})^4=(2i)^4=16i^4=16$$

3- أوجد $2Z_1-3Z_2$ ، iZ_2+Z_1

$$2Z_1-3Z_2=2(3-4i)-3(-2i)=6-8i+6i=6-2i$$

$$iZ_2+Z_1=i(-2i)+3-4i=-2i^2+3-4i=5-4i$$

ملاحظة: إذا كان $|Z|=1$ فإن $\bar{Z}=\frac{1}{Z} \Leftarrow$ $\boxed{Z\cdot\bar{Z}=1}$

* إذا كان $Z_1=x_1+y_1 i$ و $Z_2=x_2+y_2 i$ فإن

$$Z_1=Z_2 \Leftrightarrow (x_1=x_2 \wedge y_1=y_2)$$

* إذا كان $Z=x+yi$ فإن

$$Z=0 \Leftrightarrow (x=0 \wedge y=0)$$

* $\overline{(\bar{Z})}=Z$

أشكال العدد العقدي:

1- الشكل الجبري

$$Z = x + iy$$
$$= a + ib$$

⇐ نطبق العمليات الحسابية حتى نصل إلى الشكل الجبري.

2- الشكل المثلثي:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

كيف نكتب بالشكل المثلثي ؟؟!

نعلم أن الشكل الجبري يعطى بالشكل $Z = a+bi$ ومنه:

$$|Z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a}{r}\\ \sin\theta &= \frac{b}{r}\end{aligned}\right\} \boxed{\theta = ?} \longrightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ملاحظات:

1- للتحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي نحتاج إلى r، θ

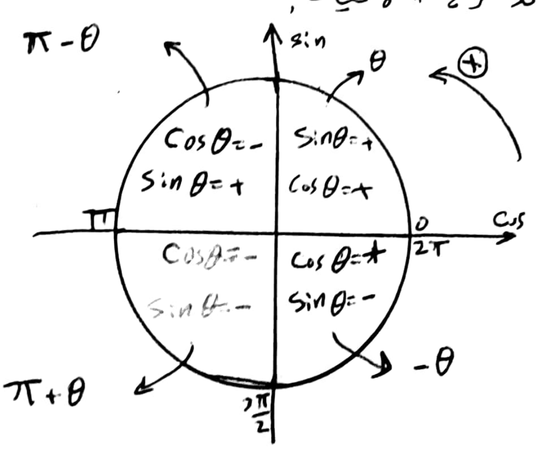
2- هامة جداً" بالمطابقة (حقيقي = حقيقي، تخيلي = تخيلي) $Z = \overset{\text{جبري}}{a+bi} = \overset{\text{مثلثي}}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

3- $\bar{Z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

4- النسب المثلثية للزوايا الشهيرة:

θ	2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\cos\theta$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

5- لمعرفة قياس الزاوية وفي أي ربع نلجأ إلى الدائرة الآتية:



خواص طويلة عدد عقدي وزاويته بالشكل المثلثي:

بفرض Z_1 ، Z_2 عددين عقديين فإن:

$1-|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

$2- \arg(Z_1 \cdot Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2 \Big\} \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 r_2)[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$3- \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

$4- \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2 \Big\} \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$5- \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

$6- \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)$

$7- \arg(Z)^n = n\arg(Z)$

تمرين: بفرض $Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$ ، $Z_2 = 3(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ عندئذ:

$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = 2 \times 3 = 6$

$\arg(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{\pi}{5} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{-\pi}{20} \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = 6(\cos(\frac{-\pi}{20}) + i\sin(\frac{-\pi}{20}))$

ملاحظة: $|Z^n| = |Z|^n$ وعندئذ من $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نجد أن:

$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = (r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta))$

دستور دموافر: في الحالة الخاصة لعدد عقدي طويلته تساوي 1 أي $(r=1)$ فإن دستور دموافر يعطى بالعلاقة:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

تمرين: اكتب بأبسط صورة ممكنة $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3} \overset{\text{دموافر}}{=} \frac{\cos 10\theta + i\sin 10\theta}{\cos 9\theta + i\sin 9\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ج: الشكل الأسي لعدد عقدي

أ) يعرف Z عدد عقدي طويلته تساوي 1 أي $r=|Z|=1$ فإن الشكل الأسي للعدد العقدي

$$Z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

وإذا كان $r=|Z|\neq 1$ فإن الشكل الأسي:

$$\boxed{Z=|Z|e^{i\theta}=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

ب) ملاحظات ونتائج:

1- $e^{2\pi i}=+1$ ، $e^{\pi i}=-1$ ، $e^{\frac{\pi}{2}i}=+i$ ، $e^{\frac{3\pi}{2}i}=e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$

2- $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=(r.r').e^{(\theta+\theta')i}$ / $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{(\theta-\theta')i}$

3- $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ / $(re^{i\theta}=r'e^{i\theta'})\Longleftrightarrow\begin{cases}r=r'\\ \theta=\theta'+2\pi K\end{cases}$

4- دستور دموافر في الشكل الأسي:

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$$

5- $\overline{Z}=re^{-i\theta}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ / $Z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

6- علاقتا أويلر

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta \quad (\div 2i)$$
$$\boxed{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \quad (\div 2)$$
$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$$

تدريب: ليكن $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ أعط الشكل الأسي للعدد العقدي $Z=1+e^{2\theta i}$

الحل:

$$Z=1+e^{2\theta i}=e^{\theta i}\left[\frac{1}{e^{\theta i}}+e^{\theta i}\right]=e^{\theta i}\left[e^{-\theta i}+e^{\theta i}\right]=2\cos\theta\, e^{\theta i}$$

بما أن $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ فإن $\cos\theta>0$ وبالتالي الشكل الأسي هو $Z=2\cos\theta\, e^{\theta i}$

تدريب: اكتب بالشكل المثلثي ثم بالشكل الأسي:

1- $Z_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$|Z_1| = r_1 = \sqrt{(-\frac{1}{4})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \frac{a}{r} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{b}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

مثلثي $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

أسي $Z = r.e^{\theta i} \Rightarrow Z = \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

2- $Z_2 = -6$

$|Z_2| = r_2 = \sqrt{(-6)^2 + (0)} = \sqrt{36} = 6$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \frac{a}{r} = \frac{-6}{6} = -1 \\ \sin\theta_2 = \frac{b}{r} = \frac{0}{6} = 0 \end{array}\right\} \theta_2 = \pi$

مثلثي $Z_2 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$

أسي $Z_2 = 6.e^{i\pi}$

3- $Z_3 = 6i$

$|Z_3| = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} = \sqrt{36} = 6$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_3 = 0 \\ \sin\theta_3 = 1 \end{array}\right\} \theta_3 = \frac{\pi}{2}$

مثلثي $Z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

أسي $Z_3 = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$

ملاحظة: إذا كان $Z = a \Leftarrow$ $r = |a|$, $\theta = \begin{cases} 0 & ; a > 0 \\ \pi & ; a < 0 \end{cases}$

إذا كان $Z = bi \Leftarrow$ $r = |b|$, $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & ; b < 0 \end{cases}$

$\frac{4}{141}$ - 1. ليكن Z عدداً عقدياً ما وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. اثبت أن $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي

الحل: لنثبت أن العدد يساوي مرافقه

$$\overline{\left(\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right)} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

نضرب البسط والمقام بـ u:

$$= \frac{\bar{Z}u - u\bar{u}Z}{u-u\bar{u}}$$

بما أن u عدد عقدي طويلته تساوي الواحد ($u\bar{u}=1$):

$$= \frac{\bar{Z}u - Z}{u-1} = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$$

وهذا العدد حقيقي

2. نفرض أن $u \neq 1$ وأن $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي، اثبت أنه إما أن يكون Z حقيقياً أو يكون $|u|=1$

الحل:

بما أن $u \neq 1$ وأن $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ حقيقي فهو يساوي مرافقه

$$\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

$$(Z-u\bar{Z})(1-\bar{u}) = (1-u)(\bar{Z}-\bar{u}Z)$$

$$Z - Z\bar{u} - u\bar{Z} + u\bar{u}\bar{Z} = \bar{Z} - \bar{u}Z - u\bar{Z} + u\bar{u}Z$$

$$Z - \bar{Z} - u\bar{u}(Z-\bar{Z}) = 0$$

$$(Z-\bar{Z})(1-u\bar{u}) = 0$$

إما $Z-\bar{Z}=0 \Rightarrow Z=\bar{Z} \Rightarrow$ Z حقيقي

أو $1-u\bar{u}=0 \Rightarrow u\bar{u}=1 \Rightarrow |u|=1$

مثال هام: ليكن لدينا العددان العقديان:

$Z_1 = \sqrt{3}+i \qquad Z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

1- اكتب بالشكل المثلثي والأسي Z_1, Z_2 ② أوجد $Z_1 \cdot Z_2$ جبرياً ومثلثياً وأسياً ③ استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}$

الحل:

①

$Z_1 = \sqrt{3}+i \Rightarrow r_1 = \sqrt{3+1} = 2 = r_1$ ، $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{y_1}{r_1} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \theta_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ *

$Z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i \Rightarrow r_2 = \sqrt{2+2} = 2 = r_2$ ، $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2 = \frac{x_2}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2 = \frac{y_2}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

② جبرياً $Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{3}+i)$

$= \sqrt{6}+\sqrt{6}\,i+\sqrt{2}\,i-\sqrt{2} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$

أسياً $Z_1 \cdot Z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} \times 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 4e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})i} = 4e^{\frac{5\pi}{12}i}$

مثلثياً $Z_1 \cdot Z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

يعتمد هنا الطالب على المقارنة بين الشكلين المثلثي والجبري

③

$Z_1 \cdot Z_2 = 4\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$

$Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$4\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ / $4\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

9

15/124 في حالة عدد عقدي $Z\neq -1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{Z}}{1+\bar{Z}}$ ونفترض أن $\bar{Z}=x+iy$ ، $Z=X+iY$ حيث x, y ، X, Y هي أعداد حقيقية.

1- الطلب: 1- احسب X, Y بدلالة العددين x, y

$$Z=\frac{2+x-yi}{1+x-yi}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

$$Z=\frac{(2+x-yi)(1+x+yi)}{(1+x-yi)(1+x+yi)}=\frac{x^2+3x+y^2+2+yi}{(1+x)^2+y^2}=\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}+\frac{y}{(1+x)^2+y^2}i$$

$$X=\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}\quad,\quad Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

2- اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة

يكون Z حقيقياً إذا كان قسمه التخيلي معدوم أي $Y=0$ ومنه $y=0$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط محور الفواصل عدا النقطة $(-1,0)$

3- اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

يكون Z تخيلياً بحتاً إذا كان قسمه الحقيقي معدوم أي $X=0$ ومنه $x^2+3x+y^2+2=0$

بالإتمام إلى مربع كامل

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0 \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}-2 \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط دائرة مركزها $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ عدا النقطة $(-1,0)$

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية:

لتكن المعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ حيث $a,b,c\in\mathbb{R}$ بشرط $a\neq 0$

نوجد Δ: $\Delta=b^2-4a.c$ ونميز 3 حالات

$\Delta<0$ نوجد $\sqrt{-\Delta}$

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$\Delta=0$

$$Z_1=Z_2=\frac{-b}{2a}$$

للمعادلة جذر مضاعف

$\Delta>0$

$$Z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$Z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

للمعادلة جذرين حقيقين.

ملاحظة: يمكن الحل للمعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ بالإتمام إلى مربع كامل بعد إخراج a عامل مشترك

تدريب: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2+4Z+29=0$ بطريقتين:

طريقة إتمام إلى مربع كامل:

$$Z^2+4Z+29=0$$

$$Z^2+4Z+4-4+29=0$$

$$(Z+2)^2+25=0$$

$$(Z+2)^2=-25$$

$$(Z+2)^2=25i^2$$

إما $Z+2=5i \Rightarrow Z=-2+5i$

أو $Z+2=-5i \Rightarrow Z=-2-5i$

طريقة الدستور Δ:

$$Z^2+4Z+29=0$$

$$\Delta=16-4(1)(29)=-100<0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{100}=10$$

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-4+10i}{2}=-2+5i$$

$$Z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-4-10i}{2}=-2-5i$$

تدريب: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2+3Z+6=0$

ملاحظات:

1- يمكن تحليل كثير الحدود aZ^2+bZ+c إلى جداء عوامل درجة أولى باستخدام القانون:

$$aZ^2+bZ+c=a(Z-Z_1)(Z-Z_2) \quad \text{هامة}$$

2- لكي نثبت أن Z_1 جذر للمعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ نعوض Z_1 في المعادلة ويجب أن نحصل على $0=0$

3- في المعادلة $aZ^2+bZ+c=0$

* إذا كان $\Delta>0$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان Z_1, Z_2 مختلفان.
* إذا كان $\Delta<0$ فإن للمعادلة جذران عقديان مترافقان أي $Z_2=\overline{Z_1}$ وعند معرفة أحد الجذرين يمكن استنتاج الجذر الآخر بأخذ المرافق.

4- بفرض Z_1, Z_2 جذرا المعادلة $Z^2+P.Z+q=0$ فإن المعادلة تكتب بالشكل: هامة

$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+(Z_1.Z_2)=0$$

حيث: $P=-(Z_1+Z_2)$ ، $q=Z_1.Z_2$

مثال: احلل في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $4Z^2-12Z+13$

$$4Z^2-12Z+13=0$$

$\Delta=-64<0$ جذران عقديان مترافقان

$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{+64}=8$$

$$\Longrightarrow \quad Z_1=\frac{3}{2}+i \quad , \quad Z_2=\frac{3}{2}-i$$

$$4Z^2-12Z+13=4\left(Z-\frac{3}{2}-i\right)\left(Z-\frac{3}{2}+i\right)$$

تدريب: لتكن المعادلة $Z^2+Z+1=0$

1- تحقق أن $Z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو جذر للمعادلة السابقة ثم أوجد الجذر الآخر

2- أكتب Z^2+Z+1 على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى

11

أوجد في كل حالة من الحالات الآتية معادلة من الشكل $Z^2 + PZ + q = 0$ جذراها Z_1, Z_2

1) $Z_1 = 5 - i$

الحل:

$Z_2 = \overline{Z_1} = 5 + i$

$* \; Z_1 + Z_2 = 5 - i + 5 + i = 10$

$* \; Z_1 \cdot Z_2 = (5-i)(5+i) = 25 + 1 = 26$

$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1 \cdot Z_2) = 0$

$Z^2 - 10Z + 26 = 0$

2) $Z_1 = i$

3) $\begin{cases} 2iZ + Z' = 2i & \text{--- (1)} \\ 3Z - iZ' = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$

الحل: نضرب طرفي (1) بـ i

(1') $-2Z + iZ' = -2$

(2) $3Z - iZ' = 1$

(2) + (1') $\Rightarrow \boxed{Z = -1}$ نعوض في (2)

$-3 - iZ' = 1 \Rightarrow iZ' = 4 \Rightarrow Z' = -\frac{4}{i} \Rightarrow Z' = 4i$

الجذور التربيعية:

نقول عن $W = x + yi$ جذر تربيعي للعدد المركب $Z = a + bi$ إذا كان $W^2 = Z$

$W^2 = Z$

$(x + iy)^2 = a + bi$

$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = a + bi$

$\underline{x^2 - y^2} + \underline{2xyi} = \underline{a} + \underline{bi}$

بالمطابقة:

$\boxed{x^2 - y^2 = a}$

$\boxed{2xy = b}$

$|W^2| = |Z|$

$|W|^2 = |Z|$

$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين: اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 3+4i$

[1] $x^2+y^2 = \sqrt{9+15} = 5$

[2] $x^2-y^2 = 3$

[3] $2xy = 4$

[1] + [2] $\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$ $\begin{cases} \text{إما } x = 2 \\ \text{أو } x = -2 \end{cases}$

[1] − [2] $\Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1$ $\begin{cases} \text{إما } y = 1 \\ \text{أو } y = -1 \end{cases}$

من [3] بذات x, y لهما نفس الإشارة ومنه:

$w_1 = 2+i \quad , \quad w_2 = -2-i$

تدريب: اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 1-4\sqrt{5}\,i$

المعادلات في $\mathbb{C}$

[1] معادلة خطية بمجهول Z بالأشكال الآتية

a- خطية Z فقط

b- خطية $\bar{Z}$ فقط

} طريقة الحل ⇐ نقوم بالعزل فنحصل على Z

c- خطية Z و $\bar{Z}$ ⇐ طريقة الحل: نبدل كل $Z = x+yi$ و $\bar{Z} = x-yi$

ننشر ونعزل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف آخر

* نقارن القسم الحقيقي في الطرفين
* نقارن القسم التخيلي في الطرفين

نحل المعادلات الناتجة فنستنتج قيمتي x و y ونستخلص على $Z = x+yi$

مثال: احل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية بالمجهول Z:

[1] $3\bar{Z} - 9 = 6+3i$

$3\bar{Z} = 6+3i+9 \Rightarrow 3\bar{Z} = 15+3i$

$\Rightarrow \bar{Z} = 5+i \Rightarrow Z = 5-i$

[2] $2Z - 10i = 4+6i$

$2Z = 10i + 4 + 6i \Rightarrow 2Z = 4+16i$

$Z = 2+8i$

[3] $\dfrac{\bar{Z}-i}{\bar{Z}+2} = i$

$\bar{Z} - i = i(\bar{Z}+2) \Rightarrow \bar{Z} - i = \bar{Z}i + 2i \Rightarrow \bar{Z} - i\bar{Z} = 2i - i \Rightarrow \bar{Z}(1-i) = 3i$

$\bar{Z} = \dfrac{3i}{1-i} \Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{-3+3i}{1+1} \Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$Z = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

[3] (4) $2Z + i\bar{Z} = 5 + 10i$

$\bar{Z} = x - yi$ وكل $Z = x + yi$ نبدل كل

$2(x+yi) + i(x-yi) = 5 + 10i$

$2x + 2yi + xi - y\underset{(-1)}{i^2} = 5 + 10i$

$2x + y + (x+2y)i \underset{\text{بالمقارنة}}{=} 5 + 10i$

$2x + y = 5$ (1)

$x + 2y = 10$ (2) } نضرب (2) بـ (-2) ونجمع مع الأولى

$\Rightarrow -2x - 4y = -20$

$2x + y = 5$ (+)

$-3y = -15 \Rightarrow \boxed{y = 5}$

$\boxed{x = 0}$ نعوض في (1) فنجد:

وعندئذ: $Z = 0 + 5i = 5i$

---

[2] حل جملة معادلتين بمجهولين Z, Z':

طرق الحل: (1) بالتعويض (2) بالجمع (3) بالتساوي

مثال: احل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين بالمجهولين Z, Z':

(1) $2Z + iZ' = 5 + 10i$

(2) $2iZ + 3Z' = 6 + i$

نضرب (1) بـ $(-i)$ ونجمعها مع (2):

$-2iZ + Z' = 10 - 5i$

$2iZ + 3Z' = 6 + i$ بالجمع

$4Z' = 16 - 4i$

$\boxed{Z' = 4 - i}$

نعوض في المعادلة (1):

$2Z + i(4 - i) = 5 + 10i$

$2Z + 4i + 1 = 5 + 10i$

$2Z = 4 + 6i$

$Z = 2 + 3i$

---

[3] حل معادلة من الشكل: $Z^2 = w = a + bi$ لإيجاد الجذور التربيعية للعدد العقدي: تم شرحه.

تدريب: حل المعادلة $w = -5 + 12i$

---

[4] حل المعادلات من الشكل: $aZ^2 + bZ + c = 0$ باستخدام المميز Δ: تم شرحه

تدريب: حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $4Z^2 + 6Z + 9 = 0$

5 حل المعادلة من الشكل $aZ^2+bZ+c=0$ باستخدام المميز Δ حيث a,b,c أعداد على الأقل لا ينتمي لـ R

a عدد حقيقي $\Delta = a$

يكون للمعادلة جذران عقديان مترافقان

عدد عقدي: $\Delta \Leftarrow$ نوجد الجذور التربيعية لـ Δ

المعادلة جذران عقديان

$$Z_1=\frac{-b+w_1}{2a}$$

$$Z_2=\frac{-b+w_2}{2a}$$

مثال: حل المعادلة في $\mathbb{C}$:

$$Z^2-(3+5i)Z-4+7i=0$$

$\Delta = b^2-4a.c \Rightarrow \Delta = (-3-5i)^2-4(1)(-4+7i) \Rightarrow \Delta = 9+30i-25+16-28i = 2i$

نفرض $W=x+yi$ جذر تربيعي لـ Δ

① $x^2+y^2=\sqrt{0+4}=2$

② $x^2-y^2=0$

③ $2xy=2>0$

①+② : $2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$, $x=-1$

①-② : $2y^2=2 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=1$, $y=-1$

من ③ نجد أن x, y متفقان بالإشارة:

$W_1=1+i$ و $W_2=-1-i$

$$Z_1=\frac{3+5i+1+i}{2}=2+3i$$

$$Z_2=\frac{3+5i-1-i}{2}=1+2i$$

---

6 المعادلة من الدرجة الثالثة:

نميز عدة حالات:

1) المعادلة من الشكل: $aZ^3+\beta=0$ حيث α,β أعداد حقيقية، نستخدم القانون:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

مثال:

$* \ (Z^3-8)=(Z-2)(Z^2+2Z+4)$

$* \ 27Z^3+1=(3Z+1)(9Z^2-3Z+1)$

2) المعادلة من الشكل: $aZ^3+bZ+cZ+d=0$

طريقة الحل: نفرض $Z=Z_1$ حل المعادلة نحصل عليه بالتجريب أو نص السؤال.

عندئذ $(Z-Z_1)$ هو أحد عوامل المعادلة.

نكتب المعادلة بشكل جداء عاملين أحدهما درجة أولى والآخر درجة ثانية

$$(Z-Z_1)(a'Z^2+b'Z+c')=0$$

بالنشر والمطابقة نحصل على الثوابت a',b',c' أو مباشرة باستخدام القسمة الإقليدية إذا علم الحل Z

[15]

[redacted]

مثال: حل المعادلة

أولاً

$$Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0$$

١- إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

أ. الحل: نفرض $Z=ai$ حل المعادلة ومنه $(Z-ai)$ عامل من عوامل المعادلة. المعادلة بالشكل:

٢ نشر $(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$

$$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-abiZ-aci=0$$

٣ $$Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aci=0$$

٤ $$Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0$$ بالمطابقة

$b-ai=-3-2i \Rightarrow b=-3\ ,\ a=2$

٥ $c-abi=2+6i \Rightarrow c=2\ ,\ (-ab=6)$ محققة

$(-aci=-4i)$ محققة

ومنه المعادلة تكتب بالشكل:

$$(Z-2i)(Z^2-3Z+2)=0$$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow \boxed{Z=2i}$

أو $Z^2-3Z+2=0$

$(Z-2)(Z-1)=0$

إما $Z-2=0 \Rightarrow \boxed{Z=2}$

أو $Z-1=0 \Rightarrow \boxed{Z=1}$

بسط كتابة العدد العقدي $Z=\dfrac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$ موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً

ط١:

$$Z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}=\frac{1+e^{-xi}}{1+e^{xi}}=\frac{e^{-xi}(e^{xi}+1)}{(1+e^{xi})}=e^{-xi}$$

قيم x التي تجعل المقدار موجوداً

$1+e^{xi}\neq 0$

$e^{xi}\neq -1 \Rightarrow e^{xi}\neq e^{\pi i} \Rightarrow x\neq \pi+2\pi k$

$\Rightarrow x\in \mathbb{R}\setminus\{\pi+2\pi k\}$

ط٢: العلاقات

$$\boxed{\begin{aligned}1+\cos x&=2\cos^2\frac{x}{2}\\ \sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\end{aligned}}$$

$$Z=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-i2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+i2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right]}=\frac{\cos(-\frac{x}{2})+i\sin(-\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}=\frac{e^{-\frac{x}{2}i}}{e^{\frac{x}{2}i}}=e^{-xi}$$

تطبيقات الأعداد العقدية:

أولاً: يمكن تمثيل النقطة بعدد عقدي ويمكن تمثيل العدد العقدي بنقطة أي:

1- $A(x,y) \Longleftrightarrow Z_A = x+iy$

أي: محور x الفواصل يمثل القسم الحقيقي

" " y التراتيب يمثل القسم التخيلي

2- نعرف لدينا نقطتان $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$:

العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{AB}$ هو $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A \Leftarrow$

$$Z_{\vec{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

3- طويلة الشعاع $\vec{AB}$:

$$|Z_{\vec{AB}}| = |Z_B - Z_A| = \sqrt{x^2+y^2}$$

4- إحداثيات I منتصف AB ممثلة بعدد عقدي:

$$Z_I = \frac{Z_A+Z_B}{2}$$

5- إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC ممثلة بعدد عقدي:

$$Z_G = \frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$$

6- إحداثيات J (م.أ.م) للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

$$Z_J = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

عند تمثيل مجموعة النقاط الناتجة:

$|Z-w| = r$

مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها النقطة الموافقة للعدد العقدي w ونصف قطرها يساوي r.

$|Z-b| = |Z-a|$

مجموعة النقاط تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

ملاحظة: لإثبات أن مثلث ABC متساوي الساقين أي ⇐ نقوم بحساب أطوال أضلاع المثلث ويجب أن يتساوى طولان

* لإثبات أن مثلث ABC متساوي الأضلاع ⇐ نقوم بحساب أطوال أضلاع المثلث ويجب أن يتساوى جميع الأطوال

* لإثبات أن مثلث ABC قائم ⇐ نقوم بحساب أطوال أضلاع المثلث ونحسب مبرهنة عكس فيثاغورث يتم الطلاب تذكير:

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{ضلع قائمة } 1)^2 + (\text{ضلع قائمة } 2)^2$$

* إذا انتهى لدينا $Z_{\vec{AB}} = K Z_{\vec{AC}}$ فالنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

ص 124 تدرب ① + 2 + 3 + 4 / ص 123 / 5 + 6 + 7 + 8 / مسائل الوحدة 4 + 8

٣) النسبة بين عددين عقديين ممثلين لشعاعين

$$\frac{Z_{\vec u}}{Z_{\vec v}} = \text{عدد حقيقي} \quad \begin{cases} (\vec v, \vec u) = \arg\left(\frac{Z_{\vec u}}{Z_{\vec v}}\right) = 0 ; \pi \\ \frac{|Z_{\vec u}|}{|Z_{\vec v}|} = 1 \ \text{العدد} \end{cases}$$

⇐ الشعاعات لها حامل (مرتبطين خطياً)

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}} = \text{عدد حقيقي} \quad \begin{cases} (\vec{AC}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-c}{c-a}\right) = 0 ; \pi \\ \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \text{العدد} \end{cases}$$

⇐ النقاط A, B, C على استقامة واحدة (متوازيات)

$$\frac{Z_{AB}}{Z_{CD}} = \pm 1 \quad \begin{cases} (\vec{CD}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-d}\right) = 0 ; \pi \\ \frac{|AB|}{|CD|} = 1 \end{cases}$$

⇐ الرباعي ABCD متوازي أضلاع

$$\frac{Z_{\vec u}}{Z_{\vec v}} = \text{عدد تخيلي بحت} \quad \begin{cases} (\vec u, \vec v) = \arg\left(\frac{Z_{\vec u}}{Z_{\vec v}}\right) = \mp \frac{\pi}{2} \\ \frac{|Z_{\vec u}|}{|Z_{\vec v}|} = 1 \ \text{العدد} \end{cases}$$

الشعاعات متعامدة

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}} = \pm i \quad \begin{cases} (\vec{AC}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC \end{cases}$$

⇐ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$$\frac{Z_{\vec u}}{Z_{\vec v}} = a + bi \quad \begin{cases} \frac{|Z_{\vec u}|}{|Z_{\vec v}|} = r = \sqrt{a^2+b^2} \\ (\vec u, \vec v) = \theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases} \end{cases}$$

التفسير يكون حسب الطويلة والزاوية.

* - التحويلات الهندسية في المستوي:

(T) الانسحاب:

الشكل العام:

$$Z' = Z + b$$

حيث: Z' العدد الممثل لـ M' ، Z العدد الممثل لـ M ، b العدد الممثل لشعاع الانسحاب.

(H) التحاكي:

الشكل العام:

$$Z' - w = K(Z - w)$$

حيث: Z' العدد الممثل لـ M' ، Z العدد الممثل لـ M ، W العدد الممثل لمركز التحاكي

$K \in R$ نسبة التحاكي

ملاحظة: في حال كان مركز التحاكي مبدأ المعلم: $\boxed{Z' = K Z}$

(R) الدوران:

الشكل العام:

$$Z' - w = e^{\theta i}(Z - w)$$

حيث: Z' العدد الممثل لـ M' ، Z العدد الممثل لـ M ، w العدد الممثل لمركز الدوران

θ زاوية الدوران ملاحظة $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$

ملاحظة: في حال كان مركز الدوران مبدأ المعلم: $\boxed{Z' = e^{\theta i} \cdot Z}$

(S) التناظر:

التناظر بالنسبة لمحور الفواصل: M' صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ xx' فإن $Z' = \bar{Z} = x - iy$

التناظر بالنسبة لمحور التراتيب: M' صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ yy' فإن $Z' = -\bar{Z} = -x + iy$

التناظر بالنسبة لنقطة: M' صورة M وفق تناظر بالنسبة للنقطة A مثلاً فإن:

$$w = \frac{Z' + Z}{2} \Rightarrow Z' = 2w - Z$$

4

تمرين: لتكن المعادلة $Z^2+2iZ-2=0$ في C

1- اثبت ان $Z_1=1-i$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الآخر.

2- تحقق ان M_2 نظير M_1 بالنسبة لـ yy'

الحل: 1) نعوض الجذر في المعادلة (التحقق):

$$L_1=(1-i)^2+2i(1-i)-2 \Rightarrow -2i+2i+2-2=0=L_2$$

محققة أي ان Z_1 جذر للمعادلة

لإيجاد الجذر الآخر: نعلم ان $Z^2+PZ+q=0$

$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+Z_1Z_2=0 \Rightarrow P=-(Z_1+Z_2)$$ أي

$$2i=-((1-i)+Z_2) \Rightarrow Z_2=-1+i-2i=-1-i \rightarrow Z_2=-1-i$$

2) لنتحقق ان $Z_2=-\bar{Z_1}$

$$\bar{Z_1}=1+i \Rightarrow -\bar{Z_1}=-1-i=Z_2$$

أي M_2 نظيرة M_1 بالنسبة لـ yy'

تمرين: ليكن في C: $Z^2-2iZ-4+4i=0$

1- اثبت ان $Z_1=2i$ جذراً للمعادلة ثم أوجد الجذر الآخر

2- اوجد صورة M_1 الممثلة لـ Z_1 وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبها بالشكل الجبري

الحل: 1-

$$L_1: i(2i)^2-2i(2i)-4+4i=i(-4)+4-4+4i=0$$ محققة

لإيجاد الجذر الآخر نقسم على i:

$$Z^2-2Z-\frac{4}{i}+4=0 \Rightarrow Z^2-2Z+4+4i=0$$

$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+Z_1Z_2=0 \Rightarrow -2=-(Z_1+Z_2) \Rightarrow 2=(2i+Z_2)$$

$$Z_2=2-2i$$

2- $$Z_1'=e^{\frac{\pi}{4}i}Z_1$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2i)=\sqrt{2}i-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

تمرين هام: ليكن كثير الحدود: $P(Z)=Z^4+4Z^3+19Z^2+30Z+50$

1- عين عددين حقيقيين a, b بحيث: $P(Z)=(Z^2-aZ+b)(Z^2+aZ+2b)$

2- حل المعادلة $P(Z)=0$

فكرة الحل:

1- ننشر $P(Z)=(Z^2-aZ+b)(Z^2+aZ+2b)$

2- نطابق ناتج النشر مع كثير الحدود $P(Z)$ الأساسي ونحسب a و b

3- نحل المعادلة $P(Z)=0$ حيث نستخدم الشكل الجديد للحل

تمرين: لتكن المعادلة: $Z^3+3Z^2+3Z-7=0$

1- علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $(*)\quad Z^3+3Z^2+3Z-7=(Z-1)Q(Z)$

2- عين Q ثم حل المعادلة $Q(Z)=0$

الحل: 1- لاحظنا انه بتعويض $Z=1$ تتحقق المعادلة:

$(1)^3+(3)(1)^2+3(1)-7=0 \Leftarrow$ أي يوجد Q من الدرجة الثانية يحقق الشكل المعطى.

-2

$$\begin{array}{r|l} Z^3+3Z^2+3Z-7 & Z-1 \\ \underline{Z^3-Z^2} & Z^2+4Z+7 \\ 4Z^2+3Z-7 & \\ \underline{4Z^2-4Z} & \\ 7Z-7 & \\ \underline{7Z-7} & \\ 0 & \end{array}$$

$Q(Z)=Z^2+4Z+7$

$Q(Z)=0$

$\Delta=16-4(1)(7)=16-28=-12<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{-(-12)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$Z_2=\dfrac{-4+2\sqrt{3}\,i}{2}=-2+\sqrt{3}\,i \quad , \quad Z_3=-2-\sqrt{3}\,i \quad ,$ ولدينا $Z_1=1$

إضافة: لتكن A, B, C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة $(*)$ اثبت ان ABC متساوي الأضلاع.

$AB=|Z_B-Z_A|=|-2+\sqrt{3}\,i-1|=|-3+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

$AC=|Z_C-Z_A|=|-2-\sqrt{3}\,i-1|=|-3-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

$BC=|Z_C-Z_B|=|-2-\sqrt{3}\,i+2-\sqrt{3}\,i|=|-2\sqrt{3}\,i|=2\sqrt{3}$

$AB=AC=BC=2\sqrt{3}$

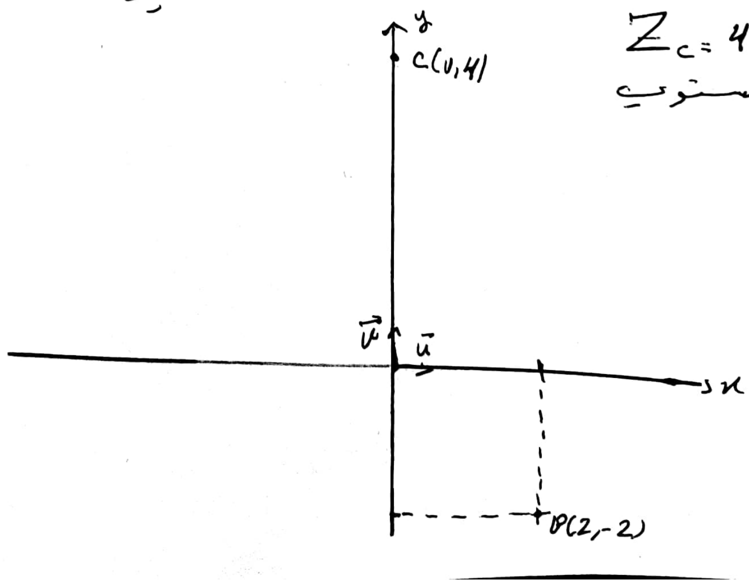
ABC متساوي الأضلاع.

تمرين: في المستوي المنسوب $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين B, C حيث $Z_B=2-2i$ ، $Z_C=4i$

1- مثل الأعداد في المستوي

$B(2,-2)$

$C(0,4)$



جد العدد العقدي Z_A الممثل للنقطة A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$Z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i} Z_B = -i(2-2i) = -2-2i$$

3- جد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_D = e^{\frac{\pi}{2}i} Z_C = i(4i) = -4$$

4- جد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M منتصف $[AD]$

$$Z_M = \frac{Z_A+Z_D}{2} = \frac{-2-2i-4}{2} = -3-i$$

5- اثبت أن $(OM)\perp(BC)$ وأن $OM = \frac{1}{2}BC$

لدينا

$$\frac{Z_M-Z_O}{Z_C-Z_B} = \frac{-3-i}{4i-2+2i} = \frac{-3-i}{-2+6i}\times\frac{(-2-6i)}{(-2-6i)}$$

$$= \frac{20i}{40} = \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{Z_M-Z_O}{Z_C-Z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OM \perp BC$$

$$\left|\frac{Z_M-Z_O}{Z_C-Z_B}\right| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC$$

سؤال: نأخذ في معلم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A, B, C حيث $a=-1+2i$ ، $b=2+i$ ، $c=3+4i$

1- احسب النسبة $\frac{a-c}{b-c}$ وماذا تستنتج

2- جد صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

الحل:

①

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{-1+2i-2-i}{2+i-3-4i} = \frac{-3+i}{-1-3i} = \frac{-3+i}{-1-3i}\times\frac{(-1+3i)}{(-1+3i)} = \frac{3-9i-i-3}{1+9} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow AB = BC$$

أي أن المثلث قائم في B ومتساوي الساقين

-2

$$Z_{A'} = e^{\frac{\pi}{3}i} Z_A = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+2i)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

(مسألة ١٠٠)

7

سؤال

$$Z^2+(-1+3i)Z-2-2i=0$$

1- اثبت ان $Z_1=1-i$ جذر المعادلة ثم أوجد الجذر الثاني Z_2

2- اكتب $Z_1=1-i$ بالشكل الأسي ثم اوجد (Z_1^8)

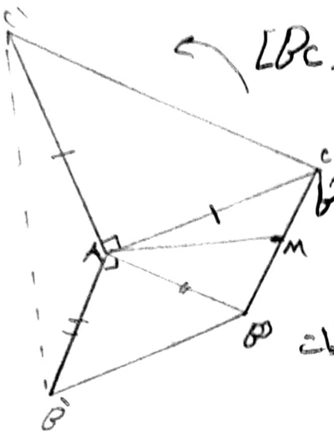
3- اوجد $Z_1=x+yi$ المنقل لـ M_1 نظير M_1 المناظرة لـ $Z_1=1-i$ بالنسبة لـ yy'

4- لتكن النقاط A, B, C حيث $a=1-i$ ، $b=-2i$ ، $c=-1-i$ اثبت ان ABC قائم في B

5- اوجد صورة A المثلث العدد ولتكن A' وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

6- اوجد صورة النقطة B وفق تحاكي مركزه النقطة C ونسبته $K=3$

$\frac{3}{141}$ نتأمل في المستوي ABC مثلثاً ما زواياه كيفية، ولتكن M منتصف $[BC]$ ولنبني $AB'B$ ، $AC'C$ مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين خارجه اثبت ان المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$ وان $B'C'=2AM$



الحل: طريقة الحل بالأعداد العقدية:

* لدينا العدد العقدي b يمثل النقطة B ، العدد العقدي c يمثل النقطة C ، نعتبر A مبدأ الاحداثيات

النقطة B' صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $(\frac{-\pi}{2})$:

$$b'=e^{-\frac{\pi}{2}i}b \Rightarrow b'=-ib$$

النقطة C' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $(\frac{\pi}{2})$:

$$c'=e^{\frac{\pi}{2}i}c \Rightarrow c'=ic$$

ولدينا M منتصف BC وليكن m تمثل النقطة M فنجد ان :

$$m=\frac{b+c}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{2}(b+c)$$

لنحسب النسبة $\frac{Z_{B'C'}}{Z_{AM}}$:

$$\frac{Z_{\overrightarrow{B'C'}}}{Z_{\overrightarrow{AM}}}=\frac{c'-b'}{m-0}=\frac{ic+ib}{\frac{1}{2}(b+c)}=\frac{(c+b)i}{\frac{1}{2}(b+c)}=2i$$

نطلب

$$\frac{c'-b'}{m-0}=2i$$

$$\arg\frac{c'-b'}{m-0}=\arg(2i)$$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'})=\frac{\pi}{2}$$

متعامدان AM ، $B'C'$

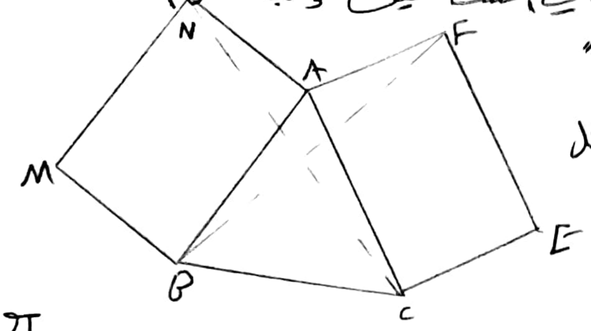
$\Leftarrow AM$ هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$

$$\left|\frac{c'-b'}{m-0}\right|=|2i|$$

$$\frac{B'C'}{AM}=2$$

$$B'C'=2AM$$

تمرين: ABC مثلث متساوي الساقين ومباشر التوجيه ننشئ خارجياً مربعين $ACEF$ ، $ABMN$



نفرض $(A, \vec{u}, \vec{v})$ معلماً متجانساً

نرمز للأعداد العقدية a, b, c, n, f التي تمثل النقاط A, B, C, N, F

1- اثبت ان $n = -ib$ ، $f = ic$

لدينا مربع $ACEF$ ومنه F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ $f = e^{\frac{\pi}{2}i} c \Rightarrow f = ic$

مربع $ABMN$ $\Leftarrow$ N صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ $\Leftarrow$ $n = e^{-\frac{\pi}{2}i} b \Rightarrow n = -ib$

2- اثبت ان $b - f = -i(c - n)$

$l_1 = b - f = b - ic$

$l_2 = -i(c - n) = -i(c + ib) = b - ic$ $\Big\}$ $l_1 = l_2$

3- استنتج ان $(CN) \perp (BF)$ وان $BF = CN$

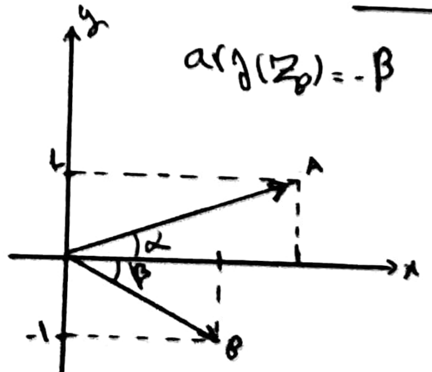
$b - f = -i(c - n) \Rightarrow \frac{b - f}{c - n} = -i$

$\arg\left(\frac{b-f}{c-n}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$FB \perp NC$

$\left|\frac{b-f}{c-n}\right| = |-i| = 1$

$\frac{FB}{NC} = 1 \Rightarrow FB = NC$



تمرين: ليكن العددان العقديان Z_A ، Z_B حيث $\arg(Z_A) = \alpha$ ، $\arg(Z_B) = -\beta$

المطلوب: 1- اكتب Z_A ، Z_B بالشكل الجبري

2- اكتب $\frac{Z_A}{Z_B}$ بالشكل الجبري والأسي

3- استنتج قيمة $\alpha + \beta$

الحل: 1- $Z_A = 3 + i$ ، $Z_B = 2 - i$

2- $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{6+3i+2i-1}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i$

$\left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = \sqrt{2}$ ، $\arg\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{Z_A}{Z_B} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$ $

نوجد $\frac{Z_A}{Z_B}$ بالشكل الأسي: $Z_A = 3 + i$ ، $Z_B = 2 - i$

$\Leftarrow \begin{cases} Z_A = \sqrt{10}\, e^{i\alpha} \\ Z_B = \sqrt{5}\, e^{-i\beta} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} e^{i(\alpha - (-\beta))} = \boxed{\sqrt{2}\, e^{i(\alpha+\beta)}}$ ★

بالمقارنة بين $ و ★ نجد $\sqrt{2}\, e^{i(\alpha+\beta)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\Leftarrow$ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

عزيزي الطالب هذا الملخص هو الشرح الكامل لوحدةالاعداد العقدية مع تطبيقات الأعداد العقدية لي لازم تعملو تدرس لملخص اول شي بعدين تفتح اسئلة لوحدة لكل بحث وتبلش تحل في حال وقفت عند اي تمرين بتقدر تبعتلي واتساب شو لتمرين لي وقفت عندو وانا رح ساعدك ل تحلو وتفهم فكرتو

ما ننسى انو هاد لملخص شامل لكل الافكار
رح حاول وفرو بشكل ورقي وملون الدراسة منو افضل
واي حدا بيدرس من هل ملخص بتمنى تشاركو مع رفقاتكن
كرمال يستفادو

نسيت حطلكن رقمي 0992932502
لي عندو اي استفسار بيقدر يبعتلي عليه

وهاد رابط قناتي على التلجرام حط بالبحث math662@
بتمنى التوفيق للجميع
ا.امجد.ذبيان