مبادئ الرياضيات

لطلبة الإقتصاد والعلوم الإدارية

الطبعة الثانية

١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م

تأليف

د. محمد القاضي

أ. أحمد أبوبكر

مكتبة الرشد
ناشرون

مجموعات الأعداد والعمليات عليها

(1 – 1) المجموعات (Sets):

المجموعة هي مجموعة من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تحديدها بدقة وتدعى هذه الأشياء عناصر المجموعة ، وتُكتب المجموعة بوضع عناصرها داخل أقواس حاضنة على الشكل $\{\ \}$ ويرمز للمجموعة عادة بحروف انجليزية كبيرة مثل $A, B, C, D, \ldots$. فمثلاً يمكن كتابة المجموعة التي عناصرها $1,2,3,4$ بالشكل $\{1,2,3,4\}$ ونرمز لها بالرمز A أي أن $A=\{1,2,3,4\}$.

وسنذكر تعريف بعض مجموعات الأعداد الشهيرة مع ذكر رمزها المتعارف عليه .

مجموعة الأعداد الطبيعية (Set of Natural Numbers): ويرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\mathbb{N}$ وهي:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\} .$$

مجموعة الاعداد الكلية (Set of Whole Numbers): وهي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً إلى الصفر ويرمز لها بالرمز W أي أن:

$$W=\{0,1,2,3,4,\ldots\} .$$

مجموعة الأعداد الصحيحة (Set of Integers): ويرمز لمجموعة الأعداد

الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ وتشمل W إضافة إلى سالب الأعداد الطبيعية وتكون على الصورة:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} .$$

الإنتماء (Membership):

نستخدم الرمز $\in$ ويقرأ (ينتمي) للتعبير عن وجود عنصر في المجموعة.

على سبيل المثال: $2\in \mathbb{N}$ يقرأ 2 ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$. والرمز $\notin$ هو نقيض للرمز $\in$ فمثلا $-1\notin \mathbb{N}$ يعني أن العنصر 1- ليس عنصرا في المجموعة $\mathbb{N}$ ، وتقرأ (العنصر 1- لا ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$) .

المجموعة الجزئية (Subset):

نقول عن مجموعة B أنها مجموعة جزئية من مجموعة A ، إذا كانت عناصر B هي عناصر في A ونعبر عن ذلك بالرمز $B\subseteq A$ كما نقول في هذه الحالة أن A تحوي B . وإذا كانت A تحوي B ولا تساويها نعبر عن ذلك بالرمز $B\subset A$ ونقول أن B مجموعة جزئية فعلية من A . فعلى سبيل المثال:

إذا كانت $B=\{2,3\}$ و $A=\{1,2,3,4\}$ ، فإن $B\subset A$. لاحظ لأي مجموعة A فإن $A\subseteq A$.

المجموعة الخالية (Empty Set):

هي المجموعة التي لاتحوي على عناصر تسمى المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أو بالرمز $\{\ \}$.

طرق التعبير عن المجموعات:

هناك ثلاث طرق في وصف أو تحديد مجموعة:

(1) طريقة كتابة العناصر:(List of Elements)

وفي هذه الطريقة يتم كتابة جميع عناصر المجموعة داخل الحاضنتين $\{\ \}$ حيث تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصر المجموعة محدود وقليل .

مثال (Example)(1):

أكتب عناصر المجموعات التالية:

1. A هي مجموعة أول خمسة أعداد صحيحة فردية موجبة.
2. B هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -2 , 5 .

الحل (Solution):

1. $A = \{1,3,5,7,9\}$.
2. $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$.

(2) طريقة الصفة المميزة (Characteristic Property):

وفي هذه الطريقة لايتم كتابة عناصر المجموعة بذاتها ولكن يتم كتابة صفة لاتنطبق إلا على عناصر هذه المجموعة. وهذه الطريقة هي الاكثر فعالية في وصف المجموعات وخصوصاً إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيراً جداً أو غير منتهي.

والشكل العام لهذه الطريقة هو:

$$A = \{\, x \mid x \text{ الخصائص التي تحدد } \}.$$

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من مجموعة معروفة T ولها صفات معينة فإننا نكتب المجموعة A بالشكل التالي:

$$A = \{\, x \in T \mid x \text{ الخصائص التي تحدد } \}.$$

ولتوضيح ذلك نعتبر المجموعة $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 5\}$ والتي تقرأ A هي المجموعة الجزئية من $\mathbb{N}$ التي يحقق كل عنصر x فيها المعادلة $x + 2 = 5$.
وواضح أن A تحوي العنصر 3 فقط .

مثال (Example)(2):

أكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة:

1. A هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.
2. B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.
3. C هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -20 , 55.

الحل:

1. $A=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{حيث } x \text{ عدد فردي}\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة A بالصورة التالية:

$$A=\{2x-1 \mid x\in\mathbb{N}\} .$$

2. $B=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{حيث } x \text{ عدد زوجي}\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة B بالصورة التالية:

$$B=\{2x \mid x\in\mathbb{N}\} .$$

3. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid -20<x<55\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة C بالصورة التالية:

$$C=\{x\in\mathbb{Z} \mid 0<20+x<75\} .$$

(3) طريقة التسلسل النمطي:(Pattern Succession):

وفي هذه الطريقة يتم كتابة بعض العناصر على نمط معين بحيث يسهل على القارئ تخيل باقي العناصر، وهي من الطرق المهمة إذا كان عدد العناصر كبير جداً أو غير منتهي وله نمط معين. فعلى سبيل المثال لكتابة الأعداد الفردية الموجبة بطريقة التسلسل النمطي فإننا نكتب $A=\{1,3,5,7,\ldots\}$. وإذا أردنا كتابة الأعداد الفردية المحصورة بين العددين 2 , 100 فإننا نكتب $A=\{3,5,7,\ldots,97,99\}$ وتدل النقاط الثلاث (...) داخل المجموعة على أن الأعداد تستمر بنفس نمط الأعداد المكتوبة.

مثال (Example)(3):

أكتب المجموعات التالية بطريقة التسلسل النمطي:

4. $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x \text{ عدد زوجي } \}$.

5. $B=\{10x \mid x\in\mathbb{N}\}$.

الحل:

1. $A=\{2,4,6,8,\ldots\}$.

2. $B=\{10,20,30,40,\ldots\}$.

(1 – 2) جبر المجموعات (Algebra of Sets):

سندرس بعض العمليات الجبرية على المجموعات وتمثيلها بأشكال فن:

الاتحاد (Union):

لتكن A و B مجموعتين، فإن اتحاد هاتين المجموعتين هي مجموعة جديدة تحتوي على عناصر المجموعتين، ونرمز لاتحاد المجموعتين A و B بالرمز $A \cup B$ ، ونعرف الاتحاد كما يلي:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \quad x \in B \}.$$

وحرف العطف (أو) في التعريف أعلاه هو بمعناه الواسع أي x ينتمي على الاقل لإحدى المجموعتين A و B .

خصائص الاتحاد:

إذا كان A و B أي مجموعتين فإن:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cup A = A$.
3. $A \cup \phi = A$.

مثال (4)(Example):

إذا كانت $A = \{1,2,4,7\}$ و $B = \{2,5,7,9\}$ أوجد $A \cup B$.

الحل:

$$A \cup B = \{1,2,4,5,7,9\}.$$

التقاطع (Intersection):

لتكن A و B مجموعتين، فإن تقاطع هاتين المجموعتين هي مجموعة جديدة تحتوي على العناصر المشتركة من المجموعتين، ونرمز لتقاطع المجموعتين A و B بالرمز $A \cap B$ ، ونعرف التقاطع كما يلي:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ , x \in B \} .$$

مثال (5)(Example):

إذا كانت $A = \{3,5,9,12,17\}$ و $B = \{1,4,5,8,9,10,11,12\}$ أوجد $A \cap B$.

الحل:

$$A \cap B = \{5,9,12\} .$$

خصائص التقاطع:

إذا كان A و B أي مجموعتين فإن:

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cap \phi = \phi$.

مثال (Example)(6):

إذا كانت $A=\{0,4,5,9\}$ و $B=\{-1,0,2,5\}$ و $C=\{-2,-1,0,4\}$ أوجد مايلي:

1. $A\cup B$.
2. $B\cap C$.
3. $(A\cup B)\cap C$.
4. $(B\cap C)\cup A$.

الحل:

1. $A\cup B=\{-1,0,2,4,5,9\}$.
2. $B\cap C=\{-1,0\}$.
3. $A\cup B=\{-1,0,2,4,5,9\} \Rightarrow (A\cup B)\cap C=\{-1,0,4\}$.
4. $B\cap C=\{-1,0\} \Rightarrow (B\cap C)\cup A=\{-1,0,4,5,9\}$.

المجموعة الشاملة والمتممة

(The Universal Set & The Complement):

عادة في كل دراسة معينة يوجد مجموعة تحت الإعتبار لانخرج عنها نسميها المجموعة الشاملة، ونرمز لها عادة يرمز لها بالحرف U . فعلى سبيل المثال مجموعة خانات الأعداد في لوحات السيارات هي $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، وتعتبر المجموعة الشاملة للمجموعات الثلاث $A=\{1,2,5\}$ و $B=\{0,2,3,4\}$ و $C=\{5,6,7,8\}$. وبالتالي نرى أن المجموعة الشاملة تحتوي على عناصر المجموعات A و B و C ، وأن كلا من هذه المجموعات تكون محتواة في المجموعة الشاملة U .

المجموعة المتممة:

لتكن U مجموعة شاملة و $A \subseteq U$ فإن متممة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولاتنتمي إلى A ونرمز لمتممة A بالرمز A^c وتعرف كما يلي:

$$A^c = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\} .$$

خصائص المجموعة الشاملة والمتممة:

لتكن U مجموعة شاملة وأن $A \subseteq U$ فإن:

1. $U \cup A = U$.
2. $A^c \cup A = U$.
3. $A^c \cap A = \phi$.
4. $U \cap A = A$.
5. $U^c = \phi \;,\; \phi^c = U$.

مثال(Example)(7):

لتكن $U = \{1,2,\ldots,10\}$ و $A = \{3,4,5,6\}$ و $B = \{2,3,4,5,8,10\}$ أوجد مايلي:

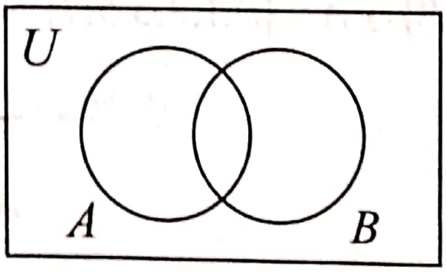
1. A^c .
2. B^c .
3. $(A\cup B)^c$.
4. $(A\cap B)^c$.

الحل:

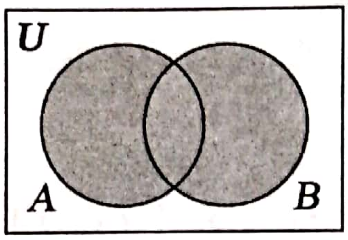
1. $A^c=\{1,2,7,8,9,10\}$.
2. $B^c=\{1,6,7,9\}$.
3. $A\cup B=\{2,3,4,5,6,8,10\} \quad \Rightarrow \ (A\cup B)^c=\{1,7,9\}$.
4. $A\cap B=\{3,4,5\} \quad \Rightarrow \ (A\cap B)^c=\{1,2,6,7,8,9,10\}$.

أشكال فن (Venn Diagrams):

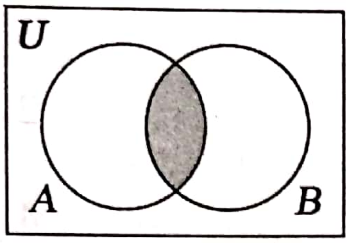
إن من أهم الطرق في توضيح المجموعات والعمليات عليها استخدام ما يسمى بأشكال فن، حيث تمثل المجموعة الشاملة U بمستطيل ونرسم داخله دوائر تمثل المجموعات الواقعة داخل المجموعة الشاملة U ، فمثلاً الشكل التالي يمثل تقاطع مجموعتين A ، B داخل U .



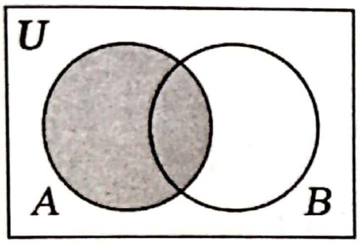
وفيما يلي أشكال ڤن لبعض العمليات على المجموعات:



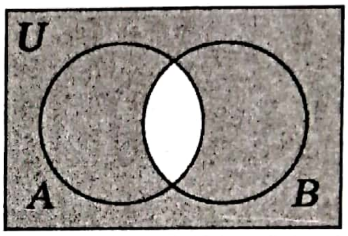
$A\cup B$



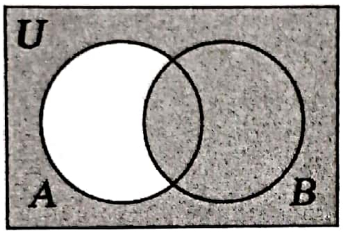
$A\cap B$



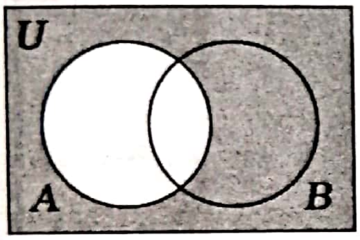
A



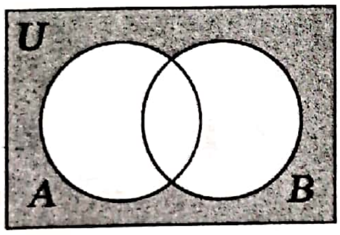
$A^c\cup B^c$



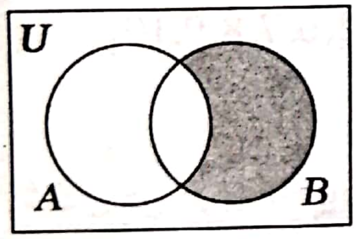
$A^c\cup B$



A^c



$A^c\cap B^c$



$A^c\cap B$

مثال (Example)(8):

لتكن $U=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$ و $A=\{0,1,2,3,5,7\}$ و $B=\{0,2,4,6,8\}$:

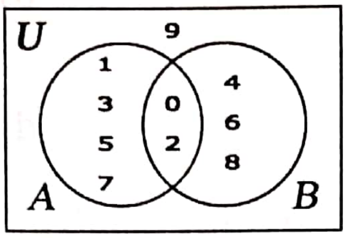
1. مثل هذه المجموعات بأشكال ڤن.
2. حدد منطقة $A\cap B$.

3. حدد منطقة $A \cap B^c$.

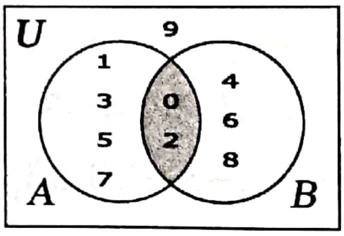
4. حدد منطقة $A^c \cup B^c$.

الحل:

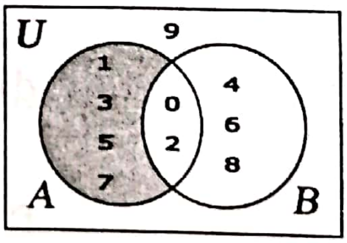
1.



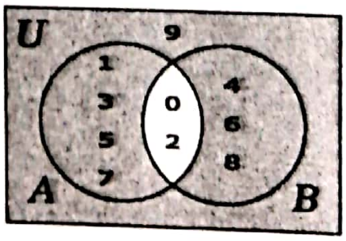
2. $A \cap B = \{0,2\}$.



3. $A \cap B^c = \{1,3,5,7\}$.



4. $A^c \cup B^c = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$.



تمارين (Exercises)

1. أي من العبارات التالية صحيحة و أيها خاطئة:

a) $0 \in W$.
b) $\mathbb{N} \subset W$.
c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.
d) $\mathbb{N} \cup W = W$.
e) $-1.5 \in \mathbb{Z}$.
f) $-2 \in W$.

2. لتكن $U = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ و $A = \{-4,-2,0,2,4\}$ و $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ و $C = \{-3,-1,0,1,3\}$ و أوجد مايلي:

a) A^c .
b) B^c .
c) C^c .
d) $A \cup A^c$.
e) $B \cap B^c$.
f) $A \cap B^c$.
g) $B^c \cup C$.
h) $B^c \cup C^c$.
i) $A \cup B \cup C$.
j) $A \cap B \cap C$.

k) $(A \cap C) \cup B$. l) $(A \cup B) \cap C^c$.

m) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. n) $(A \cup B) \cap (A^c \cup C)$.

o) $U \cap (B \cup C)$. p) $U \cap (A \cup B)^c$.

3. لتكن $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $A = \{3,4,5,6,7\}$ و
$B = \{0,1,2,3,4\}$:

a) مثل المجموعات بأشكال فن . b) حدد منطقة A^c .

c) حدد منطقة B^c . d) حدد منطقة $A \cap B$.

e) حدد منطقة $A \cup B$. f) حدد منطقة $A^c \cap B^c$.

g) حدد منطقة $A^c \cap B$. h) حدد منطقة $A \cup B^c$.

4. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة كتابة العناصر:

a) A هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -9 , 1 .

b) B هي مجموعة مضاعفات العدد 5 الواقعة بين العددين 7 , 36 .

c) C هي مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة المحصورة بين العددين 4 , 17 .

d) $D=\{x^2 \mid 0<x<6\ ,\ x\in\mathbb{Z}\}$.

5. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة الصفة المميزة:

a) A هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -3 , 2 .

b) B هي مجموعة الأعداد الطبيعية لمضاعفات العدد 4 .

c) C هي مجموعة الأعداد الطبيعية أقل من 50 .

6. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة التسلسل النمطي:

a) $A=\{x-4 \mid x\in\mathbb{N}\}$.

b) $B=\{x^2 \mid x\in\mathbb{N}\}$.

c) $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid -4<x<100\}$.

(1 – 6) مجموعة الأعداد الحقيقية (Set of Real Numbers):

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وهي أهم مجموعة أعداد في الرياضيات، وتشمل مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الغير نسبية أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ ، ولدينا العلاقة التالية بين مجموعات الأعداد: $\mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

كما سنرمز للأعداد الحقيقية غير الصفرية بالرمز $\mathbb{R}^*$. وتعتبر عمليات الجمع $(+)$ والطرح $(-)$ والضرب $(\times)$ والقسمة $(\div)$ عمليات أساسية على الأعداد الحقيقية. وفيما يلي بعض الخصائص الهامة لمجموعة الأعداد الحقيقية مع التنبيه على أنه لأي عددين $a, b \in \mathbb{R}$ سنكتب ab ليعني الضرب $a \times b$.

خصائص الأعداد الحقيقية:

إذا كان $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن:

1. **خاصية الإبدال (Commutative Law):**

في عملية الجمع: $a+b=b+a$.

في عملية الضرب: $ab=ba$.

2. **خاصية التجميع (Associative Law):**

في عملية الجمع: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

في عملية الضرب: $a(bc)=(ab)c$.

3. **خاصية التوزيع (Distributive Law):**

$$a(b+c)=(ab)+(ac) .$$

4. **العنصر المحايد (Identity Element):**

العنصر المحايد لعملية الجمع هو 0 أي أن: $a+0=0+a=a$.

العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1 أي أن: $a1 = 1a = a$.

5. المعكوس (Inverse):

لأي عدد $a \in \mathbb{R}$ فإن المعكوس الجمعي هو $(-a)$ ولدينا:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \ .$$

ولأي عدد $a \in \mathbb{R}^*$ فإن المعكوس الضربي هو $\left(\frac{1}{a}\right)$ ولدينا:

$$a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1 \ .$$

أما معكوس الصفر الضربي فلا يوجد .

والجدول التالي يوضح هذه الخاصية لبعض الأعداد الحقيقية:

العدد	المعكوس الجمعي	المعكوس الضربي
4	-4	$\frac{1}{4}$
-2	2	$\frac{-1}{2}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	6
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3}{\pi}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	0	غير معرف

ويمكن إثبات خواص أخرى كثيرة للأعداد الحقيقية نذكر منها الخواص التالية:

إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $a0=0a=0$.
2. $(-1)a=-a$.
3. $-(-a)=a$.
4. $-(a+b)=-a-b$.
5. $(-a)b=a(-b)=-ab$.
6. $(-a)(-b)=ab$.

وكذلك من ضمن الخصائص المهمة لعمليتي الجمع والضرب ما يلي:

خصائص الحذف (Cancellation Laws):

لأي $a\ ,\ b\ ,\ c\in\mathbb{R}$ لدينا:

1. إذا كان $a+c=b+c$ فإن $a=b$.
2. إذا كان $c\neq 0$ وكان $ac=bc$ فإن $a=b$.
3. إذا كان $ab=0$ فإما $a=0$ أو $b=0$.

ويمكن تعريف العمليتين الحسابيتين الطرح والقسمة بدلالة عمليتي الجمع والضرب .

تعريف عمليتي الطرح والقسمة:

لأي عددين $a\ ,\ b\in\mathbb{R}$ نعرف ما يلي:

1. عملية الطرح $(-)$:

$a-b=a+(-b)$ ، حيث $-b$ هو المعكوس الجمعي للعدد b .

2. عملية القسمة $(\div)$: بفرض $b\neq 0$:

$a\div b=a.\dfrac{1}{b}$ ، حيث $\dfrac{1}{b}$ هو المعكوس الضربي للعدد b .

مثال (37):

أحسب ما يلي:

1. $(-5)+2$.
2. $4\times(-3)$.
3. $5\times(2\times 3)$.
4. $3\times(4+6)$.
5. $15-6-5$.
6. $15-(6-5)$.
7. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

الحل:

1. $(-5)+2=2+(-5)=2-5=-3$.
2. $4\times(-3)=-(4\times 3)=-12$.
3. $5\times(2\times 3)=5\times 6=30$.

4. $3\times(4+6)=3\times 10=30$.

أو $3\times(4+6)=(3\times 4)+(3\times 6)=12+18=30$.

5. $15-6-5=9-5=4$.

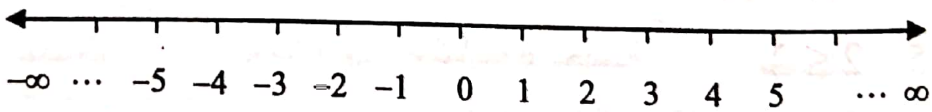
6. $15-(6-5)=15-6+5=14$.

أو $15-(6-5)=15-1=14$.

7. $\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{(4\times 3)-(5\times\sqrt{2})}{5\times 3}=\frac{12-5\sqrt{2}}{15}$.

خط الأعداد الحقيقية (The Real Line):

يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية هندسيا على أي خط مستقيم بإختيار أي نقطة لتمثل الصفر ونقطة على اليمين لتمثل 1 ومن ثم ينتج لدينا أن أي نقطة على الخط تُمثل عدداً حقيقياً وكل عدد حقيقي يحدد نقطة على الخط ونحصل على ما نسميه بخط الأعداد الحقيقية، كما في الشكل التالي:



حيث نعني بالرمز ∞ تزايد الأعداد من اليمين بدون توقف بينما $-\infty$ يعني تناقصها بدون توقف. ويمكن الإستفادة من خط الأعداد الحقيقية في المقارنة بين عددين حقيقيين لمعرفة العدد الأكبر من العدد الأصغر. فالعدد الحقيقي a يكون أكبر من العدد الحقيقي b إذا كان العدد a يقع إلى يمين العدد b على خط الأعداد الحقيقية ، وفي هذه الحالة فإن $(a-b)$ أكبر من الصفر، أي أن حاصل الطرح عدد موجب ، وعندما يقع العدد c على يسار العدد a فإن c أصغر من a ويكون في هذه الحالة $(c-a)$ عدداً سالباً.

نستعمل رموز خاصة للدلالة على أن عدد حقيقي أكبر من أو أصغر من عدد اخر والجدول التالي يبين هذه الرموز ومدلولاتها:

العبارة الرياضية	المعنى
$a>b$	a أكبر من b
$a\geq b$	a أكبر من أو يساوي b
$a<b$	a أصغر من b
$a\leq b$	a أصغر من أو يساوي b

أي عبارة رياضية تحتوي على أي من هذه الرموز $\leq$, $>$, $\geq$, $<$ تسمى متباينة أو متراجحة.

مثال(38): حدد أي من المتباينات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

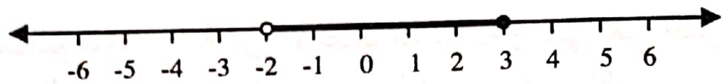
1. $5>9$ متباينة خاطئة .
2. $4<-8$ متباينة خاطئة .
3. $0\geq -3$ متباينة صحيحة .
4. $-1\leq -10$ متباينة خاطئة .
5. $2\leq 2$ متباينة صحيحة .
6. $7>7$ متباينة خاطئة .

الفترات الحقيقية (Real Intervals):

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزنية من الاعداد الحقيقية حيث:

$$A=\{x\in\mathbb{R}|\ -2<x\leq 3\}.$$

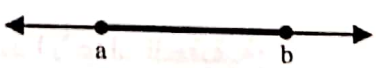
والتي تمثل على خط الأعداد الحقيقية بالخط الغامق كما في الشكل:



أي أن A هي جميع الأعداد الحقيقية الواقعة بين العددين -2 و 3 متضمنة العدد 3 ولا تحوي العدد -2. نسمي A فترة نصف مغلقة من اليمين ونصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(-2,3]$. مع ملاحظة أن الدائرة الصغيرة السوداء على خط الأعداد ترمز للطرف المغلق والبيضاء للطرف المفتوح. وعموماً لأي عددين حقيقيين $a<b$ فإن $(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$ بالمثل: $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$ تسمى فترة مفتوحة.

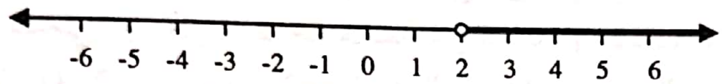
وكذلك $[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$ تسمى فترة مغلقة. أما $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليمين ونصف مغلقة من اليسار.

وتسمى المتباينة $a<x\le b$ بالفترة ونرمز لها بالرمز $(a,b]$. إن الطرف الأيسر من الفترة ممثل بالقوس) وهذا يعني أن العدد a ليس ضمن الفترة، ونقول أن الفترة مفتوحة من اليسار. وقوس الطرف الأيمن من الفترة هو] وهذا يعني أن العدد b ضمن الفترة، ونقول أن الفترة مغلقة من اليمين. والجدول التالي يبين أشكال الفترات ونوعها وتمثيلها على خط الأعداد الحقيقية:

الفترة	المتباينة	تمثيلها على خط الأعداد	نوعها
(a,b)	$a<x<b$		فترة مفتوحة
$[a,b]$	$a\le x\le b$		فترة مغلقة
$(a,b]$	$a<x\le b$		فترة مفتوحة من اليسار و مغلقة من اليمين
$[a,b)$	$a\le x<b$		فترة مغلقة من اليسار و مفتوحة من اليمين

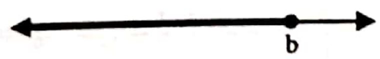
نصف الفترة (Half Intervals):

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية والتي هي أكبر من 2 والممثلة على خط الأعداد الحقيقية بالخط الغامق كما في الشكل التالي:



أي أن $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$.

ونسمي A فترة نصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(2,\infty)$. وبشكل عام لأي عدد حقيقي a نعرف نصف الفترة المفتوحة من اليسار (a,∞) بالمثل نعرف نصف الفترة المغلقة من اليسار $[a,\infty)$ ونصف الفترة المفتوحة من اليمين $(-\infty,a)$ ونصف الفترة المغلقة من اليمين $(-\infty,a]$ والجدول التالي يبين أشكال هذه الفترات.

نوعها	تمثيلها على خط الأعداد	المتباينة	الفترة
فترة مفتوحة		$x>a$	(a,∞)
فترة مغلقة		$x\geq a$	$[a,\infty)$
فترة مفتوحة		$x<b$	$(-\infty,b)$
فترة مغلقة		$x\leq b$	$(-\infty,b]$

مثال(39):

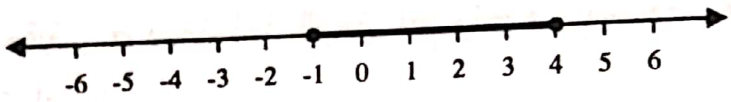
مثل ما يلي من الفترات على خط الأعداد الحقيقية:

3. $(-5,-2)$.　　2. $[0,3)$.　　1. $[-1,4]$.

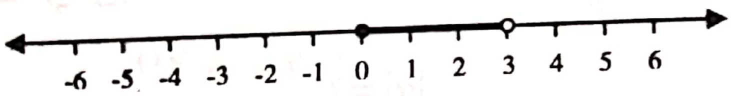
5. $(-\infty,2]$.　　4. $(-3,\infty)$.

الحل:

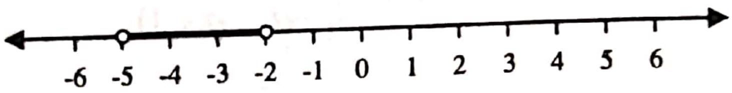
1. $[-1,4]$



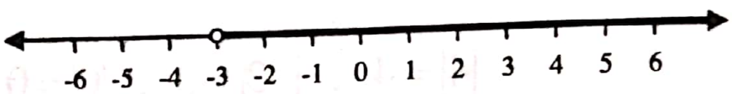
2. $[0,3)$



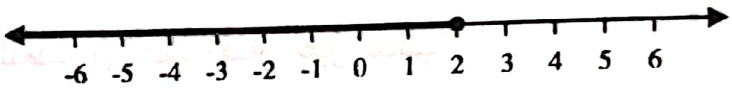
3. $(-5,-2)$



4. $(-3,\infty)$



5. $(-\infty,2]$



مثال (40):

أكتب المتباينات التالية على صورة فترات:

1. $-5 \le x \le 6$.
2. $0 \le x < 3$.
3. $-8 < x \le -1$.
4. $x \ge 5$.
5. $x < 2$.

الحل:

1. $-5 \le x \le 6$ $\quad [-5,6]$.
2. $0 \le x < 3$ $\quad [0,3)$.
3. $-8 < x \le -1$ $\quad (-8,-1]$.
4. $x \ge 5$ $\quad [5,\infty)$.
5. $x < 2$ $\quad (-\infty,2)$.

(1 – 7) القيمة المطلقة (Absolute Value):

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a يرمز لها بالرمز $|a|$ وتعرف أنها العدد محذوفاً منه الإشارة السالبة إن وجدت أي أن:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثال (41):

$$|4| = 4 \ , \ |-3| = 3 \ , \ |0| = 0 \ , \ |6-8| = |-2| = 2$$

لاحظ أن القيمة المطلقة للعدد a دائما مقدار غير سالب .

<u>خصائص القيمة المطلقة:</u>

إذا كان $a \ , b \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3. $|ab| = |a|.|b|$.
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , \ b \neq 0$.
5. $|a-b| = |b-a|$.
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$.
7. $|a-b| \geq |a| - |b|$.

مثال (42):

احسب قيمة كلٍ مما يلي:

1. $-|6|$. 2. $-|-3|$. 3. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|$.

4. $\frac{|4-10|}{-2}$. 5. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}$. 6. $\left|\frac{-3}{2}\right|$.

الحل:

1. $-|6|=-6$.

2. $-|-3|=-3$.

3. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{(1\times 3)-(2\times 2)}{2\times 3}\right|=\left|\frac{3-4}{6}\right|=\left|\frac{-1}{6}\right|=\frac{1}{6}$.

4. $\frac{|4-10|}{-2}=\frac{|-6|}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$.

5. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}=\frac{5+|-3|}{|4|}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$.

6. $\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{|-3|}{|2|}=\frac{3}{2}$.

المسافة بين نقطتين (Distance Between Two Points):

لتكن A و B نقطتين على خط الأعداد الحقيقية و تمثلان العددين a و b على الترتيب فإن المسافة $d(A,B)$ بين النقطتين A و B تعرف بأنها:

$$d(A,B)=|b-a|=|a-b| .$$

مثال (43):

أوجد المسافة بين النقطتين A و B اللتين تمثلان العددين a و b في كل مما يلي:

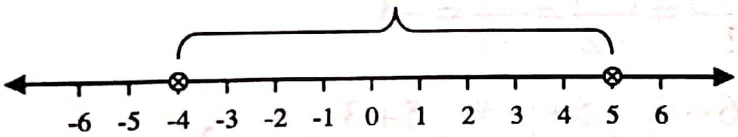
1. $a=2 \quad , \quad b=9$.

2. $a=5 \quad , \quad b=-4$.

الحل:

1. $d(A,B)=|b-a|=|9-2|=|7|=7$.

2. $d(A,B)=|b-a|=|-4-5|=|-9|=9$.



10. معرض سيارات أعلن عن تخفيض أسعاره بنسبة 5.5% وكان سعر إحدى السيارات قبل التخفيض 40000 ريالاً . ما هو سعر السيارة بعد التخفيض.

11. اشترى تاجر أجهزة تلفزيون بمبلغ 580 ريالاً للجهاز الواحد وباعها بنسبة ربح 25% ، أوجد سعر البيع للجهاز الواحد.

12. إذا كانت نسبة النجاح في أحد المقررات 85% وكان عدد الطلاب المسجلين في المقرر 2540 طالباً، فكم عدد الطلاب الراسبين في هذه المقرر.

13. ✓ أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي لكل من الاعداد التالية:

a) $\frac{5}{4}$.　　b) $\sqrt{6}$.　　c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14. ✓ مثّل كل فترة مما يلي على خط الأعداد الحقيقية:

a) $(-6,0]$.　　b) $[-2,1)$.

c) $(1,\infty)$.　　d) $-3 \le x \le 4$.

e) $5 < x < 9$.　　f) $2 \le x < 11$.

g) $x > 3$.

h) $x \leq -5$.

15. أكتب الفترات التالية على صورة متباينات:

a) $[-3,-1)$.

b) $[0,5]$.

c) $(-2,4)$.

d) $(-\infty,1]$.

e) $(-4,\infty)$.

16. قارن بين الأعداد النسبية التالية:

a) $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$.

b) $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{15}$.

c) $\frac{-4}{7}$, $\frac{-3}{5}$.

d) $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{7}$.

17. حول الأعداد العشرية التالية إلى الصورة الكسرية:

a) 0.05 .

b) 3.2 .

c) $\frac{6}{5}+\frac{8}{10}$.

d) $\frac{4}{3}-\frac{10}{6}$.

e) $-5\times\frac{2}{5}$.

f) $\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}$.

g) $\frac{-9}{2}\times\frac{4}{12}$.

h) $6\div\frac{3}{4}$.

i) $\frac{-\frac{3}{5}}{9}$.

j) $\frac{-12}{9}\div\frac{-2}{3}$.

k) $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}$.

l) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

m) $123.43+3.536$.

n) $(6.25+1.516)-4.62$.

o) 4.59×0.75 .

p) $9.43\div4.1$.

q) $6.545\div1.19$.

r) $2.5(54.1-12.12)$.

20. إحسب ناتج كل مما يلي:

a) $\frac{|2-6|}{10-|3-8|}$.

b) $\frac{|-5|-|5-8|}{|-3-7|+5}$.

(1 – 8) القوى و الأسس (Powers & Exponents):

إذا كان a عدداً حقيقياً وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n}$$

ونقول أن a^n هو القوة النونية للعدد a أو (a أس n) ونسمى a الأساس و n الأس. مثلاً a^2 تمثل aa ، و a^3 تمثل aaa . وفيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

ومن المهم أن نلاحظ أن -2^2 تعني $-(2 \times 2) = -4$ بينما $(-2)^2$ تعني $-2 \times -2 = 4$.

قوانين الأسس:

إذا كان كل من $a , b \in \mathbb{R}$ وكان $m , n \in \mathbb{N}$ فإن:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$.
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

مثال (44):

احسب كل مما يلي:

1. -5^2 .
2. $(-4)^3$.
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.
4. $(2a)^3$.
5. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 , b \neq 0$.
6. $a^4 \div (3a)^2 , a \neq 0$.

الحل:

1. $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$.
2. $(-4)^3 = -4 \times -4 \times -4 = -64$.
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.
4. $(2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8a^3$.
5. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 = \frac{(a^2)^3}{b^3} = \frac{a^{2\times 3}}{b^3} = \frac{a^6}{b^3}$.
6. $a^4 \div (3a)^2 = \frac{a^4}{(3a)^2} = \frac{a^4}{3^2 \times a^2} = \frac{a^4}{9a^2} = \frac{a^{4-2}}{9} = \frac{a^2}{9}$.

لاحظ أنه لأي a فإن $a = a^1$.

الدوال

(7 – 1) مفهوم الدالة (The Function):

إن مفهوم الدالة من أهم المفاهيم في الرياضيات زهز العامل الأساسي في التطبيقات المذهلة للرياضيات في سائر العلوم وعلى وجه الخصوص في علمي الإقتصاد والإدارة.

تعريف الدالة:

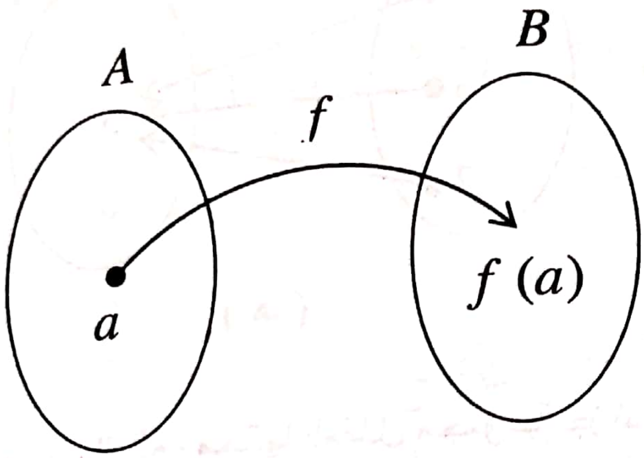
الدالة من مجموعة A إلى المجموعة B وتكتب $f:A\to B$ هي علاقة تربط كل عنصر $a\in A$ بعنصر وحيد $b\in B$ يسمى صورة a ويرمز له بالرمز $f(a)$. كما نسمي المجموعة A مجال تعريف الدالة f (Domain) ونرمز لها بالرمز $Dom(f)$. ونسمي المجموعة B المجال المقابل للدالة f (Range) .

طبعاً يمكن استخدام رموز أخرى للدالة بدلاً من f مثل g , h وغيرها. لاحظ من التعريف أن الدالة f يجب أن تحقق شرطين وهما:

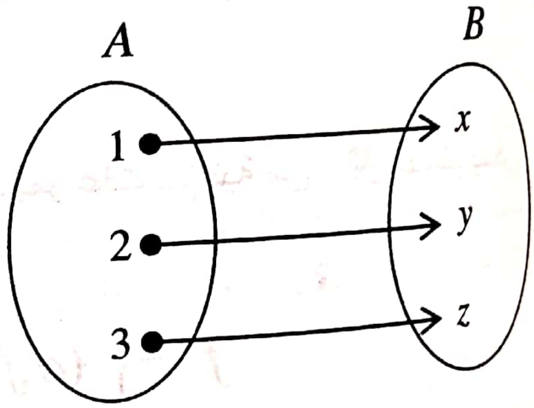
شرطا تعريف الدالة:

1. لكل $a\in A$ يوجد صورة $f(a)\in B$.
2. الصورة $f(a)$ وحيدة بمعنى إذا كان كلاً من b_1 , $b_2\in B$ صورة لنفس العنصر $a\in A$ فلابد أن يتساويان.

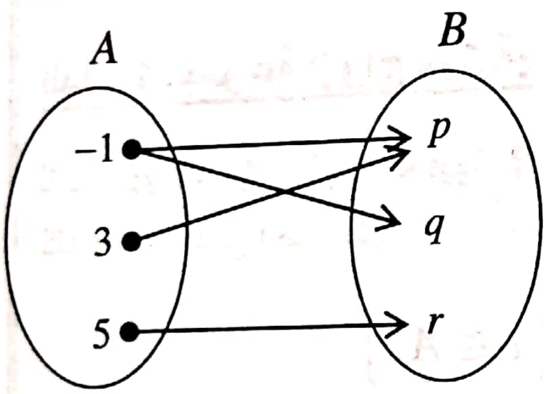
ويمكن للتوضيح تمثيل الدوال بأشكال فن على الصورة:



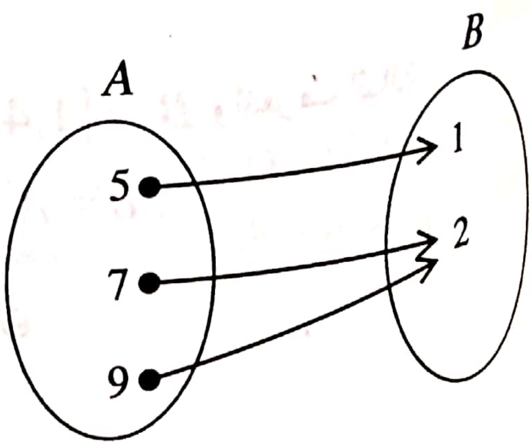
فمثلا في الأشكال التالية كل من (أ) و (جـ) و (هـ) يمثل دالة أما الشكلان (ب) و (د) فلا يمثلان دالة (لماذا؟) .



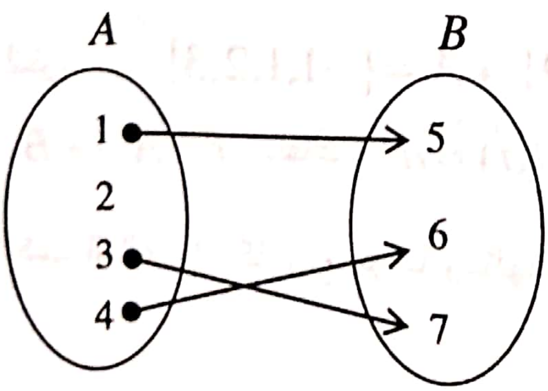
(أ)



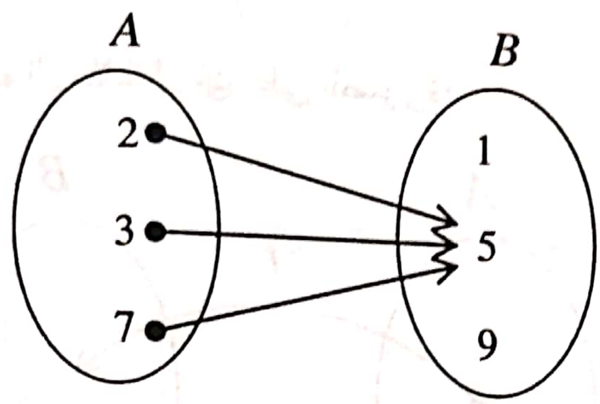
(ب)



(جـ)



(د)



(هـ)

عادة ما يكون مجال تعريف الدالة ومجالها المقابل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وفي هذه الحالة يمكن وصف الدالة بشكل أفضل باستخدام الأزواج المرتبة التي سبق للطالب دراستها في الفصل الرابع. ولدينا التعريف التالي:

الدالة كمجموعة أزواج مرتبة:

لتكن $f : A \to B$ دالة فيها B , A مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ عندئذٍ يمكن كتابة f على الصورة:

$$f = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}$$

مثال (1):

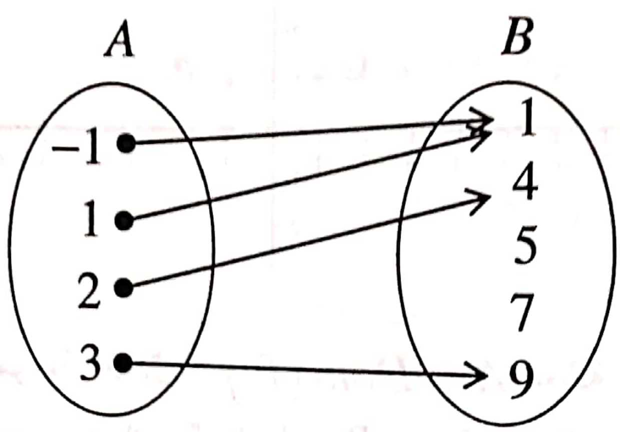
لتكن $A = \{-1,1,2,3\}$ و $B = \{1,4,5,7,9\}$ ولنعرف الدالة $f : A \to B$ بالقاعدة $f(a) = a^2$ لكل $a \in A$:

أكتب الدالة f كأزواج مرتبة ومثلها بأشكال فن.

الحل:

$$f = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}$$
$$= \{ (-1,1) , (1,1) , (2,4) , (3,9) \} .$$

وتمثل بشكل ڤن الموضح:



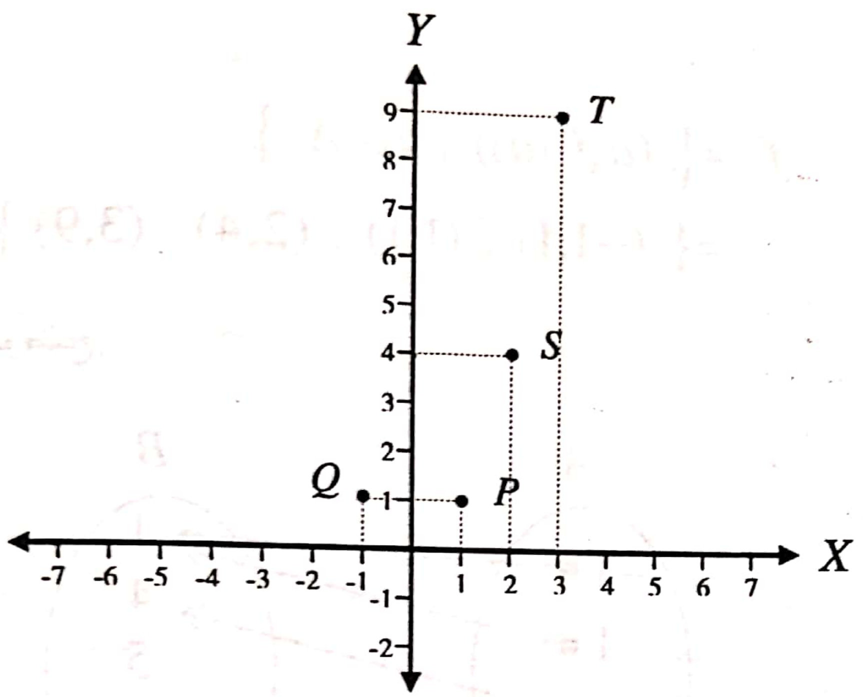
أيضاً في حالة الدوال المعرفة بين مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ يمكننا رسم الدوال بشكل أكثر فعالية من أشكال ڤن وذلك بتمثيلها كنقاط في المستوى الإحداثي XY .

مثال (2):

مثل الدالة في المثال (1) في المستوى الديكارتي.

الحل:

لدينا $f = \{ (-1,1) , (1,1) , (2,4) , (3,9) \}$ ويمكننا تمثيل هذه الأزواج في المستوى الديكارتي بالنقاط P , Q , S , T كما هو موضح.



لاحظ أن عناصر مجموعة المجال $A = Dom(f)$ ممثلة على المحور السيني X ، بينما عناصر مجموعة المجال المقابل B ممثلة على المحور الصادي Y.

(7 – 2) الدوال المعرفة على فترات حقيقية

:(Functions on Real Intervals)

إن معظم الدوال التي نتعامل معها في التطبيقات تكون معرفة على فترة حقيقية (مفتوحة أو مغلقة أو غيرها) ومجالها المقابل أيضاً فترة حقيقية. وفي هذه الحالة فإن تمثيل الدالة في المستوى الديكارتي يكون على شكل منحنى متصل أو خط مستقيم أو متكسر والذي نسميه بشكل عام منحنى الدالة.

مثال (3):

لنعرف الدالة $f : [0,4) \to \mathbb{R}$ بالقاعدة: لكل $x \in [0,4)$ فإن $: f(x) = 3x$

1. أوجد الصورة $f(4)$, $f(2)$, $f(1)$.
2. مثل الدالة بالمستوى الديكارتي.

الحل:

.1 $f\ (1)=3(1)=3$

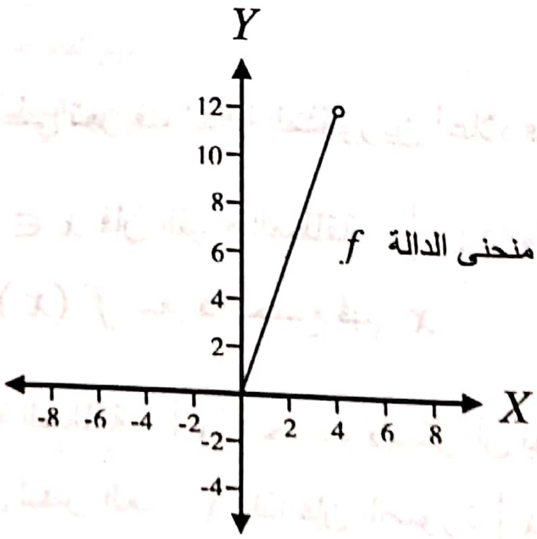
$f\ (2)=3(2)=6$

$f\ (4)$ غير معرف لأن $4\notin[0,4)$.

.2 لدينا $f\ (x)=3x$ لكل $x\in[0,4)$ وكمجموعة أزواج فإن:

$$f=\{\ (x,f\ (x))\ |\ x\in[0,4)\ \}$$

أي أن الصورة $f\ (x)$ تقابل الإحداثي الصادي Y لذا يمكن التعبير عن الصورة $f\ (x)$ بالصيغة $y=3x$ ونعرف من دراستنا السابقة أن هذه معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بنقطة الأصل ولكن الدالة f ممثله فقط بالجزء من المستقيم الواقع بين $x=0$ و $x=4$ لأن مجالها $[0,4)$ كما هو موضح في الشكل:



إن الدائرة البيضاء الصغيرة في نهاية الخط الممثل للدالة تعني أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x=4$ لأنها لاتدخل في مجال تعريفها.

الدالة الخطية (Linear Function):

هي أي دالة على الصورة $f(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0$.

مثال (4):

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ علاقة معرفة بالقاعدة:

$f(x) = |x|$ لجميع القيم $x \in \mathbb{R}$.

1. أثبت أن f في الواقع دالة.
2. أوجد الصور $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
3. ما هي العلاقة بين $f(x)$ و $f(-x)$.
4. أرسم منحنى هذه الدالة.

الحل:

1. سنثبت تحقق شرطي تعريف الدالة المذكورين أعلاه فنلاحظ:

أ) لأي $x \in \mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة $|x|$ دائماً معرفة لذلك الصورة $f(x) = |x|$ معرفة لجميع قيم x .

ب) إن القيمة المطلقة $|x|$ وحيدة ولايمكن أن يوجد قيمتان مطلقتان مختلفتان لنفس العدد x لذا فإن الصورة $f(x) = |x|$ وحيدة.

من تحقق (أ) و (ب) ينتج أن f دالة.

2. $f(-1)=|-1|=1$ ، $f(1)=|1|=1$ ، $f(0)=|0|=0$.

3. عند $x=0$ فإن $f(x)=|0|=0=f(-x)$

عند $x>0$ فإن $f(x)=|x|=x=|-x|=f(-x)$

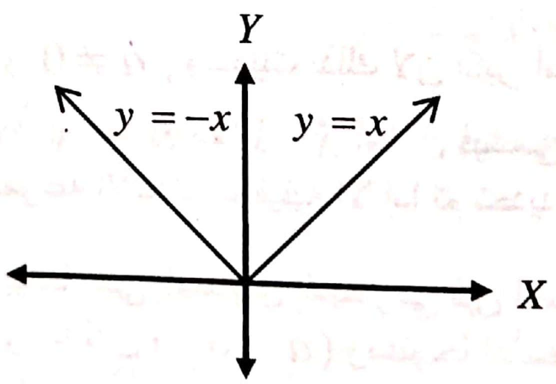
عند $x<0$ فإن $f(x)=|x|=-x=|-x|=f(-x)$

لذا في جميع الحالات الممكنة لقيم x فإن $f(x)=f(-x)$ وهي العلاقة المطلوبة.

4. لرسم منحنى الدالة $f(x)=|x|$ لدينا حالتان:

أ) عندما $x\geq 0$: في هذه الحالة $|x|=x$ أي أن $f(x)=x$ وبالتالي لدينا المعادلة $y=x$ وهي تمثل نصف الخط المستقيم المنصف للربع الأول والمنبعث من نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.

ب) عندما $x<0$: في هذه الحالة $|x|=-x$ وبالتالي نحصل على $y=-x$ وهي تمثل نصف المستقيم المنصف للربع الثاني والمنبعث أيضاً من نقطة الأصل كما في الشكل:



من (أ) و (ب) فإن منحنى الدالة $f(x)=|x|$ هو إتحاد نصفي الخطين الموضحين في الشكل.

لاحظ التماثل بين فرعي منحنى الدالة حول محور الصادات Y بسبب أن $f(x)=f(-x)$ كما رأينا في الفقرة (3) .

مثال (5):

لنعتبر العلاقة $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\sqrt{x}$. ناقش هل هذه العلاقة دالة أم لا؟

الحل:

من المعروف أن الجذر التربيعي $\sqrt{x}$ معرف فقط في حالة x عدد غير سالب لذلك على وجه الخصوص $\sqrt{-1}$ غير معرف أي أن الصورة $g(-1)$ غير موجودة وهذا يخل بالشرط (1) من شرطي تعريف الدالة لذلك فإن العلاقة g ليست دالة.

الدالة التربيعية (Quadratic Function):

تكون الدالة $y=f(x)$ دالة تربيعية أي دالة من الدرجة الثانية إذا كانت على الصيغة:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

حيث $a\ ,\ b\ ,\ c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$, وسميت بذلك لأن أكبر أس للمتغير x هو العدد 2 . ويسمى a معامل x^2 و b معامل x أما c فيسمى بالحد المطلق ومجال الدالة التربيعية دائما هو مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا تم تحديده مسبقاً.

وعند تمثيل الدالة التربيعية بيانيا على المستوى الديكارتي فإن الشكل الناتج يسمى قطع مكافئ ويكون مفتوحاً للأعلى إذا كان $(a>0)$ ومفتوحاً للأسفل إذا كان $(a<0)$ وإحداثيات رأس القطع المكافئ هي $\left(\frac{-b}{2a}\ ,f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ والأشكال التالية تمثل أنماطاً مختلفة من القطوع المكافئة.

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)-1$$
$$=8-16-1=-9$$

وبالتالي إحداثيات نقطة الرأس هو $(-2,-9)$.

مثال (7):

مثل الدالة $f(x)=x^2+2x+2$ بيانيا على مستوى الديكارتي مع تحديد المجال والمجال المقابل.

الحل:

أولاً نجد إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ حيث $a=1$ و $b=2$ و $c=2$:

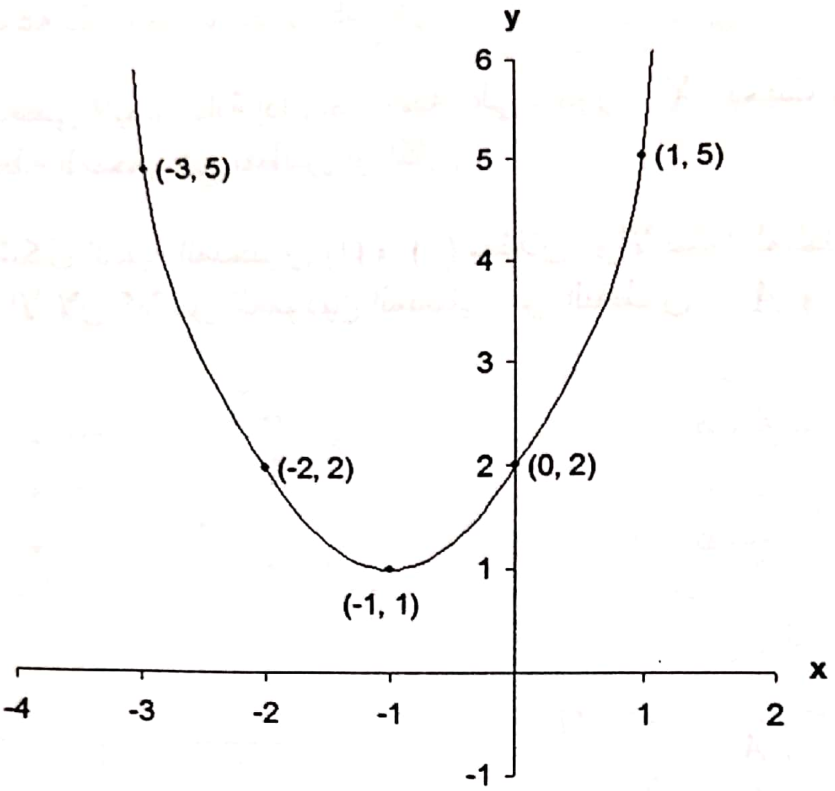
$$\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2$$
$$=1-2+2=1$$

وبالتالي إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ هي $(-1,1)$.

وسوف نختار قيم للمتغير x تكون أكبر من وأصغر من قيمة x في إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ. على سبيل المثال $x=0$ و $x=1$ و $x=-2$ و $x=-3$.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	5	2	1	2	5



لاحظ أن القطع المكافي في هذه الدالة مفتوح لأعلى وذلك لأن $a = 1$ (أي أكبر من صفر) .

مجال الدالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية أما المجال المقابل فيساوي $[1,\infty)$ لأن أقل قيمة للدالة $f\ (x)$ هي 1 (انظر الرسم البياني) وأما أكبر قيمة غير محددة.

أحياناً يكون لدينا منحنى معطى في المستوى الديكارتي ونحتاج لمعرفة هل هذا المنحنى يمثل دالة أم لا؟ وفي الواقع لدينا معيار بسيط ودقيق للإجابة على ذلك وهو:

<u>معيار تمثيل منحنى الدالة:</u>

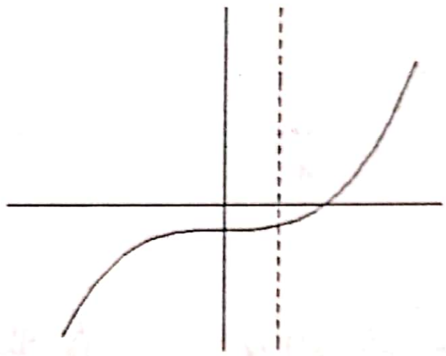
إذا أعطينا منحنى في المستوى الديكارتي فانه يلزم ويكفي لتمثيل هذا المنحنى دالة أن يحقق الشرط التالي:

إذا أنشأنا عموداً من أي نقطة على المحور السيني X فانه يقطع المنحنى المعطى في نقطة واحدة على الأكثر.

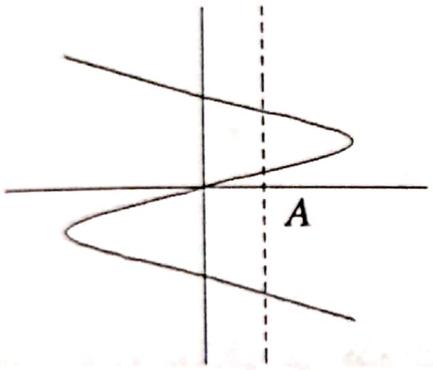
ويمكن صياغة ذلك بعبارة أخرى كما يلي:

المنحنى المعطى لايمثل دالة إذا وجد نقطة على محور X بحيث يقطع العمود المنشا من هذه النقطة المنحنى في نقطتين أو أكثر.

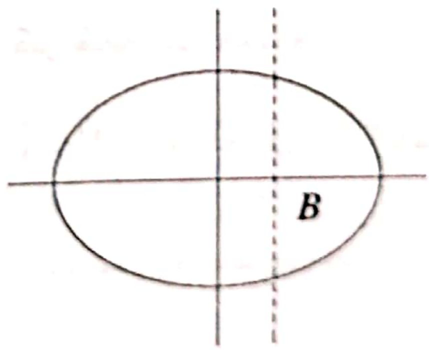
مثلاً في الأشكال التالية المنحنيان (أ) و (د) يمثلان دوالاً بينما المنحنيان (ب) و (جـ) لايمثلان دوالاً لأن كلاً من العمودين المنشأين من النقطتين A و B يقطع المنحنى في نقطتين.



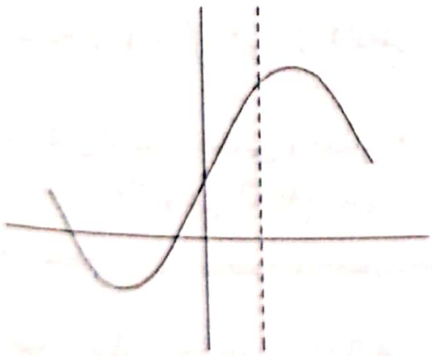
(أ)



(ب)



(جـ)

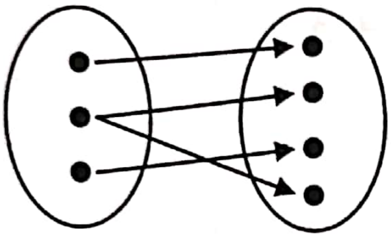


(د)

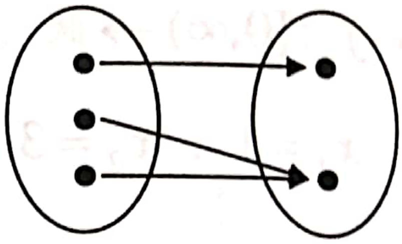
تمارين (Exercises)

1. أي من الأشكال التالية يمثل دالة:

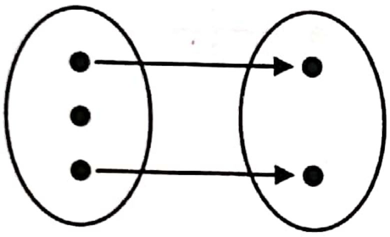
a)



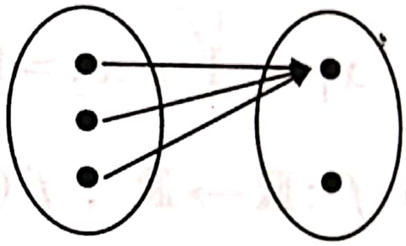
b)



c)



d)



2. في كل مما يلي دالة معبر عنها كمجموعة أزواج مرتبة أوجد مجال تعريف كل دالة ثم مثل الدالة في المستوى الديكارتي:

a) $f = \{ (1,-1) \ , (2,0) \ , (3,-1) \ , (4,2) \}$.

b) $g = \{ (0,1) \ , (-1,2) \ , (\frac{1}{2},1) \ , (2.5,-2) \}$.

c) $h = \{ (1,1) \ , (-1,1) \ , (2,2) \ , (-2,2) \ , (3,3) \ , (-3,3) \}$

3. في كل دالة مما يلي أوجد $f(x_1), f(x_2)$ عند النقطتين x_1, x_2 المعطاتين ثم ارسم منحنى الدالة:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$

$x_1=1$, $x_2=-1$.

b) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+3$

$x_1=1$, $x_2=3$.

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

$x_1=-1$, $x_2=1$.

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+|x|$

$x_1=-3$, $x_2=5$.

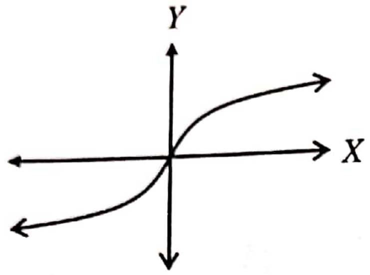
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+4$

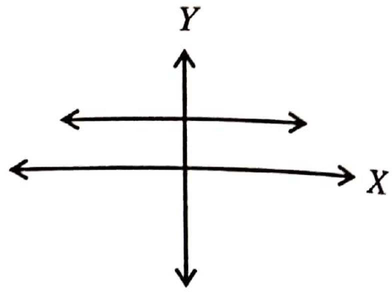
$x_1=-2$, $x_2=\sqrt{3}$.

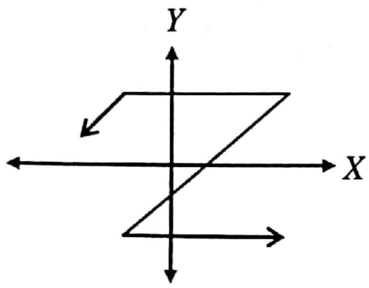
f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$

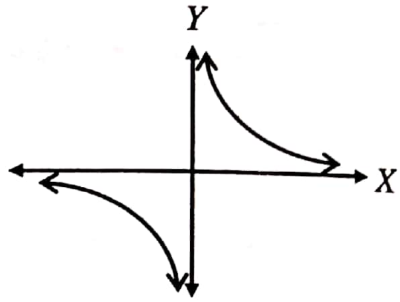
$x_1=0$, $x_2=-1$.

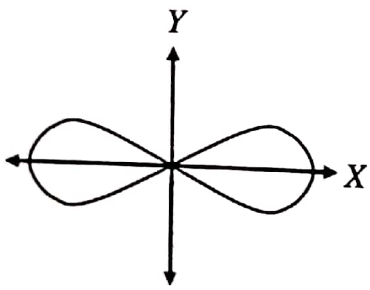
4. بين أي من المنحنيات التالية يمثل دالة:

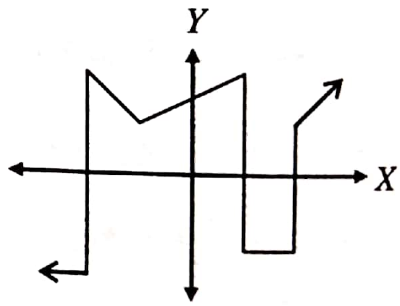
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

المعادلات

إن المعادلات الرياضية تلعب دوراً كبيراً في علمي الاقتصاد والإدارة وسنقدم في هذا الباب بعض المعادلات المهمة في هذا المجال.

تعريف (Definition):

المعادلة في المجهول x عبارة عن صيغة جبرية تعبر عن علاقة التساوي بين عبارتين رياضيتين تحوي أحدهما أو كلاهما المجهول x .

ومن أمثلة المعادلات:

$$2x+5=9 \longrightarrow (1)$$

$$x^2=9 \longrightarrow (2)$$

$$x+3=x+4 \longrightarrow (3)$$

عندما نعوض عن المجهول x في المعادلة بعدد ما فإن العلاقة الناتجة قد تكون صحيحة أو خاطئة. فمثلاً في المعادلة (1) إذا وضعنا $x=1$ لحصلنا على $7=9$ وهذه علاقة خاطئة، ولكن إذا وضعنا $x=2$ في نفس المعادلة لحصلنا على:

$$2(2)+5=9 \qquad 9=9$$

وهذه علاقة صحيحة. ونسمي العدد 2 في هذه الحالة حلاً للمعادلة (1) أو جذراً لها. مجموعة الحلول لأية معادلة تسمى مجموعة الحل لهذه المعادلة. فمثلاً $x=3$ هو حل من حلول المعادلة (2) وكذلك $x=-3$. لذا فإن مجموعة حلول المعادلة (2) هي $\{3,-3\}$. بينما مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي $\{2\}$. أما المعادلة (3) فليس لها حل لأن إعطاء أي قيمة للمجهول x سينتج عنه علاقة خاطئة. رأينا مما سبق أنه قد يكون للمعادلة حل واحد أو أكثر من حل أو قد لايكون لها حل.

(3 – 1) حل معادلة خطية في مجهول واحد

(Solving the Linear Equation in One Unknown):

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة:

$ax + b = 0$ حيث a , b أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

ونستخدم العمليات الجبرية لحل المعادلة الخطية، ويبدأ الحل بوضع الحدود التي تحوي المجهول x في طرف والقيم الثابتة في الطرف الآخر، ومن ثم إجراء عمليات حسابية على طرفي المعادلة للوصول إلى النتيجة النهائية على الصورة $x = c$.

مثال (Example)(1):

حل المعادلات التالية:

1. $3x - 1 = 5$.
2. $4x - 5 = 2x + 3$.
3. $2(x + 10) + 16 = 9 - 3(2x - 1)$.

الحل (Solution):

1. $3x - 1 = 5$

$3x - 1 + 1 = 5 + 1$ جمع العدد 1 للطرفين

$3x = 6$ قسمة الطرفين على 3

$x = 2$.

وبذلك يكون $x = 2$ هو حل للمعادلة.

2. $4x - 5 = 2x + 3$

$4x - 2x = 3 + 5$ وضع المجاهيل في الطرف الأيسر والباقي في الطرف الاخر

$2x = 8$ قسمة الطرفين على 2

$x = 4$.

وبذلك يكون $x = 4$ هو حل للمعادلة.

3. $2(x+10)+16=9-3(2x-1)$

$2x+20+16=9-6x+3$ فك الأقواس

$2x+36=12-6x$ تجميع الحدود المتشابهة

وضع المجاهيل في الطرف الأيسر والباقي في الطرف الاخر

$2x+6x=12-36$

قسمة الطرفين على 8

$8x=-24$

$x=-3$.

وبذلك يكون $x = -3$ هو حل للمعادلة.

(3 – 2) حل معادلتين خطيتين في مجهولين

:(Solving Two Linear Equations in Two Unknowns)

المعادلة الخطية في مجهولين x , y تكون على الصورة:

$$ax+by=c \ .$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية وكلا من العددين a , b لا يساوي الصفر.

وإذا كان لدينا معادلتان من نفس النوع:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

فإننا نقول أن لدينا معادلتين خطيتين في مجهولين x , y ونحتاج إلى تحديد قيم هذين المجهولين اللذين يحققان المعادلتين في نفس الوقت ويمكن استخدام إحدى الطرق الاتية في حل هذا النظام من المعادلات الخطية:

الطريقة الأولى:

استنتاج قيمة أحد المجهولين بدلالة المجهول الاخر من احدى المعادلتين ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الثانية، وبذلك يصبح لدينا معادلة ذات مجهول واحد نستطيع تحديد قيمته. وبالتعويض بهذه القيمة المحددة في أي من المعادلتين نحصل على قيمة المجهول الثاني.

مثال (2):

أوجد قيمة x , y التي تحقق المعادلتين:

$$2x+3y=2 \longrightarrow (1)$$

$$x-y=6 \longrightarrow (2)$$

الحل: من المعادلة (2) تكون $x=6+y$. وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (1) :

$$2(6+y)+3y=2$$

$$12+2y+3y=2$$

$$12+5y=2$$

$$5y=2-12$$

$$5y=-10$$

$$y=-2\ .$$

وبتعويض $y=-2$ في المعادلة (1) أو في المعادلة (2) :

التعويض في المعادلة (1) أو التعويض في المعادلة (2)

$$2x+3(-2)=2$$
$$2x-6=2$$
$$2x=8$$
$$x=4\ .$$

$$x-(-2)=6$$
$$x+2=6$$
$$x=4\ .$$

لذا فإن حل المعادلتين هو $x=4$ ، $y=-2$.

الطريقة الثانية:

استبعاد أحد المجهولين بطرح المعادلتين بعد توحيد كل من الإشارة الجبرية وقيمة معامل المجهول الذي نريد استبعاده.

مثال(3):

أوجد قيمة y , x التي تحقق المعادلتين:

$$3x-y=5 \longrightarrow (1)$$
$$x+2y=4 \longrightarrow (2)$$

الحل:

بضرب المعادلة (1) في العدد -2 تصبح المعادلة كالتالي:

$$-6x+2y=-10 \longrightarrow (3)$$

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) :

$$\begin{array}{rl} & -6x + 2y = -10 \\ - & x + 2y = 4 \\ \hline & -7x \quad\quad = -14 \end{array}$$

إذا ناتج الطرح هي المعادلة $-7x = -14$. ونجد قيمة x بالقسمة على -7 .

$$x = \frac{-14}{-7} = 2$$

ولإيجاد قيمة y نعوض $x = 2$ في المعادلة (2) :

$$2 + 2y = 4$$

$$2y = 4 - 2 = 2$$

$$y = 1 \ .$$

و أيضاً يمكن التعويض بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة y .

ويمكن ايجاد قيمة y , x بضرب المعادلة (2) في العدد 3 فتصبح المعادلة كالتالي:

$$3x + 6y = 12 \quad \longrightarrow \quad (4)$$

نطرح المعادلة (1) من المعادلة (4) :

$$\begin{array}{rl} & 3x + 6y = 12 \\ - & 3x - \ \ y = 5 \\ \hline & 7y = 7 \end{array}$$

ناتج الطرح هي المعادلة $7y = 7$. وبالقسمة على 7 نجد قيمة $y = 1$. وبالتعويض في المعادلة (2) .

$$x + 2(1) = 4$$

$$x+2=4$$

$$x=4-2=2$$

$$x=2\ .$$

إذاً حل المعادلتين هو $x=2$ ، $y=1$.

مثال (4):

أوجد قيم y , x التي تحقق المعادلتين:

$$4x+3y=13 \longrightarrow (1)$$

$$3x+2y=9 \longrightarrow (2)$$

الحل:

في هذا المثال إذا أردنا استبعاد المجهول x نضرب المعادلة (1) في العدد 3 والمعادلة (2) في العدد 4 فتصبح المعادلتين كالتالي:

$$12x+9y=39 \longrightarrow (3)$$

$$12x+8y=36 \longrightarrow (4)$$

نطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) وينتج $y=3$, وبالتعويض بالمعادلة (2) :

$$3x+2(3)=9$$

$$3x+6=9$$

$$3x=9-6=3$$

$$x=1\ .$$

ويمكن حل النظام باستبعاد المجهول y ، بضرب المعادلة (1) في العدد 2 والمعادلة (2) في العدد 3 فتصبح المعادلتين كالتالي:

$$8x+6y=26 \longrightarrow (5)$$

$$9x+6y=27 \longrightarrow (6)$$

نطرح المعادلة (6) من المعادلة (5) وينتج $x=1$ ، وبالتعويض بالمعادلة (2) :

$$3(1)+2y=9$$

$$3+2y=9$$

$$2y=9-3=6$$

$$y=3\ .$$

إذا حل المعادلتين هو $x=1$ و $y=3$.

(3 – 3) حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

:(Solving the Second Degree Equation in One Unknown)

معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد x هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$ax^2+bx+c=0\ .$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية و $a\neq 0$ ، و تحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ .$$

نسمي المقدار (b^2-4ac) بالمميز وهو يحدد هل للمعادلة جذور وعددها إذا وجدت حسب القاعة التالية :

1. $b^2-4ac>0$ للمعادلة جذرين حقيقيين.
2. $b^2-4ac=0$ للمعادلة جذر حقيقي واحد.
3. $b^2-4ac<0$ فلا يوجد جذور للمعادلة.

مثال (5):

حل كل من المعادلات التالية:

1. $2x^2=3x+2$.
2. $x^2-6x+9=0$.
3. $3x^2+2x=-1$.

الحل:

1. نحول المعادلة إلى الصورة العامة فتصبح:

$$2x^2-3x-2=0 \ .$$

نجد قيمة المميز علما أن $c=-2$, $b=-3$, $a=2$:

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (-3)^2-4(2)(-2) \\ &= 9+16=25 \ . \end{aligned}$$

بما أن المميز يساوي 25 فإن للمعادلة جذرين (أي حلين) حقيقيين. وسنستخدم القانون العام لإيجادها.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{3\pm5}{4}\ .$$

وبذلك يكون حل المعادلة هو:

إما $x=\frac{3-5}{4}=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\ .$

أو $x=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}$

$\Rightarrow x=2\ .$

2. إن المعادلة بالصورة العامة, فنجد قيمة المميز مباشرة علما أن $a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=9$:

$$b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(9)$$
$$=36-36=0\ .$$

بما أن المميز يساوي 0 فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2(1)}=\frac{6}{2}=3\ .$$

وبذلك يكون حل المعادلة هو $x=3$.

3. نحول المعادلة إلى الصورة العامة فتصبح:

$$3x^2+2x+1=0\ .$$

نجد قيمة المميز علما أن $c=1$, $b=2$, $a=3$:

$$b^2-4ac=(2)^2-4(3)(1)=4-12=-8 \ .$$

بما أن المميز يساوي -8 (أي عدد سالب) فإنه ليس للمعادلة أي جذور حقيقية.

تمارين (Exercises)

1. حل كل من المعادلات التالية:

a) $2x+5=13$.

b) $3x-4=8$.

c) $4(x+2)=6x-10$.

d) $3(6x+2)=2(4x-5)$.

e) $3x+2(1-x)=4-3x$.

f) $3x+y=-1$.
$2x-3y=-8$.

g) $2x-6y=4$.
$x+5y=10$.

h) $4x+5y=-6$.
$3x-2y=7$.

i) $6x-4y=0$.
$4x-2y=-2$.

j) $5x+y=14$.
$2y-3x=2$.

k) $3x^2-8x=3$.

l) $5x^2+5x+4=2$.

m) $x^2=8x+16$.

n) $x^2-4x+8=2x-2$.

o) $-11x^2=10x-1$.

مدخل لتفاضل الدوال

يعتبر التفاضل من أهم فروع الرياضيات وله تطبيقات عملية واسعة ومتنوعة في العلوم الطبيعية والاقتصادية الإدارية. وفي هذا الفصل سندرس مشتقة الدالة وكيفية إيجادها والمعنى الهندسي لها، ويمكن باستخدام حساب التفاضل الإجابة على الكثير من التساؤلات حول سلوك الدالة مثل معرفة أعلى وأدنى قيمة لها خلال فترة معينة. وسنقدم أولاً مفهوم نهاية واتصال دالة عند نقطة والتي هي الأساس في دراسة تفاضل الدوال.

(8 – 1) مفهوم النهاية (Limits):

سنقدم هنا مفهوم النهاية بصورة مبسطة يسهل على الطالب استيعابها. حيث تكمن أهمية نهاية دالة في أنها تصف وبصورة دقيقة سلوك الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من قيمة معينة.

مثلا لنعتبر الدالة: $$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

المعرفة على كل $\mathbb{R}$ باستثناء $\{1\}$ لأن مقام $f(x)$ غير معرفة عند $x=1$.
لنتتبع قيم الدالة $f(x)$ حول $x=1$ كما في الجدول التالي :

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب x من العدد 1 (ولكنها لا تأخذ القيمة 1) ، سواء من اليمين – أي تأخذ x قيم أكبر من الواحد - أو سواء من اليسار – أي تأخذ x قيم أصغر من الواحد - فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 2 ونشير إلى هذه الحقيقة

بالقول (أن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من 1 هي 2) ويعبر عن هذا رمزياً على النحو التالي:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2} .$$

حيث أن الرمز $(x \to 1)$ يدل على أن x تقترب من 1 ولا تساويها.

وتكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أكبر من 1 على النحو التالي:

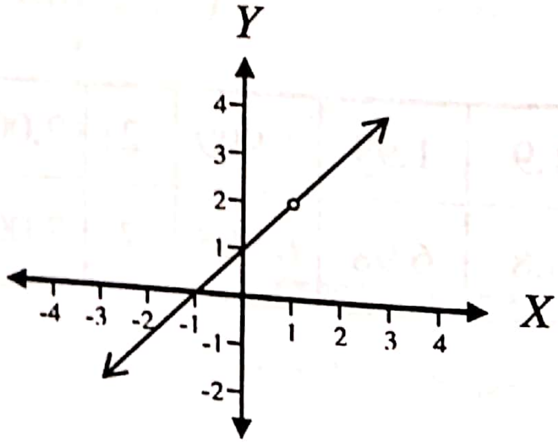
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليمين، حيث يدل الرمز $(x \to 1^+)$ على اقتراب x من يمين العدد 1. في حين تكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أصغر من 1 على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليسار، حيث يدل الرمز $(x \to 1^-)$ على اقتراب x من يسار العدد 1 .

ويوضح الشكل التالي أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 1$ إلا أن قيمة الدالة تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من جهة اليمين أو من جهة اليسار .



نهاية الدالة (Limit of the Function):

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على جميع النقاط القريبة من النقطة $x=a$ ، وكانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين L عندما تقترب x من العدد a سواءً من جهة اليمين أو من جهة اليسار. عندئذٍ نقول إن نهاية الدالة عندما تقترب x من a هي L . ونعبر عن ذلك رمزياً على الصورة :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L .$$

يوضح التعريف السابق أنه إذا كانت نهاية الدالة $f(x)$ من اليمين ومن اليسار متساوية وتساوي L عندما تقترب x من a فإن نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة a موجودة وتساوي L .

أما إذا كانت $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ فإن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة.

مثال (Example)(1):

أوجد قيمة $\lim_{x \to 2} 2x + 3$.

الحل (Solution):

نكون الجدول التالي:

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	7	7.002	7.02	7.2

يبين لنا الجدول أن:

$$\lim_{x\to 2^+}(2x+3)=\lim_{x\to 2^-}(2x+3)=7\ .$$

وبما أن النهاية للدالة $2x+3$ من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن:

$$\lim_{x\to 2}\ (2x+3)\ =7\ .$$

خصائص النهايات:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين في x وكان $c,a\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim_{x\to a} c=c$ أي أن نهاية الدالة الثابتة هي القيمة الثابتة للدالة .
2. $\lim_{x\to a} x^n=a^n$.
3. $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$.
6. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.
7. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$.

ومن هذه الخصائص يمكن إثبات أنه إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

مثال (2):

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 3 \\ 2x - 3 & x > 3 \end{cases}$$

فأوجد ما يلي:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$. 2. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$. 3. $\lim_{x \to 3} f(x)$.

الحل:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x - 3 = 2(3) - 3 = 3$.

2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - x = 3^2 - 3 = 6$.

3. $\lim_{x \to 3} f(x)$ النهاية غير موجودة

لأن $\lim_{x \to 3^+} f(x) \ne \lim_{x \to 3^-} f(x)$.

مثال (3):

أوجد قيمة مايلي:

1. $\lim_{x \to 2} 5$. 2. $\lim_{x \to 3} x^2$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right)$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 8}{x + 2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5$.

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$.

2. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3 = -3(-2)^3 = -3(-8) = 24$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right) = 2(-1)^2 + 5(-1) - 4 = -7$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 8}{x + 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} 2x + 8}{\lim\limits_{x \to 4} x + 2} = \dfrac{2(4) - 8}{4 + 2} = \dfrac{0}{6} = 0$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 1}{\lim\limits_{x \to 1} 2 - x}\right)^5$

$$= \left(\frac{(1)^2 + 1}{2 - 1}\right)^5 = (2)^5 = 32 .$$

في حالة حساب النهايات للدوال النسبية فإننا في كثير من الأحيان عند أخذ نهاية البسط ونهاية المقام نحصل على الكمية غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولتلافي ذلك ينبغي أولاً تحليل كل من البسط والمقام ومن ثم اختصار العوامل المشتركة وأخيراً نقسم نهاية البسط الجديد على نهاية المقام الجديد كما في المثال التالي:

مثال (4):

أوجد قيمة كلٍ مما يلي:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}$.

الحل:

1.

نلاحظ أولاً بأخذ النهاية مباشرة أن:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-3x}{\lim\limits_{x\to 3}x-3}\longrightarrow\frac{0}{0} .$$

وهذه نهاية غير محددة ولإيجادها بالضبط نتبع ما يلي:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}x=3 .$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-4)=1-4=-3\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x^2-x+1)}=\frac{1}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{1}{3}\ .$$

$$4.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{3\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$$

.

(8 – 2) اتصال الدالة عند نقطة

:(Continuity of a Function at a Point)

إن موضوع اتصال الدوال هو أحد الموضوعات الهامة في دراسة التفاضل والتكامل حيث يعد المدخل الرئيسي لإيجاد مشتقات الدوال وتكاملاتها والتي سيتم شرحها لاحقا. والان نقدم دراسة بسيطة لمفهوم اتصال الدالة.

نقصد بقولنا أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل دون انقطاع خلال الفترة $[a,b]$ التي يتغير فيها x ، أو بمعنى اخر إذا أمكننا أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التي نرسم عليها، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خالياً من الإنقطاعات أو القفزات. وهذا يعني أن $f(x_0)$ معرفه عند كل نقطة x_0 في الفترة $[a,b]$ وأن

وبما أن $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ فإن نهاية الدالة $f(x)$ $\left(\lim_{x \to 1} f(x)\right)$ غير موجودة، ولذلك فإن إحدى شروط الإتصال غير متحقق وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x = 1$.

5. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 + x + 2 = (3)^2 + (3) + 2 = 14$.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 4x + 2 = 4(3) + 2 = 14$.

إذا قيمة $\lim_{x \to 3} f(x) = 14$.

ولكن $f(3) = 5(3) - 3 = 12$.

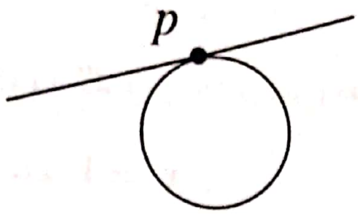
وحيث أن $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$ فإن $f(x)$ غير متصل عند $x = 3$.

(8 – 3) مشتقة الدالة عند نقطة وتفسيرها الهندسي:

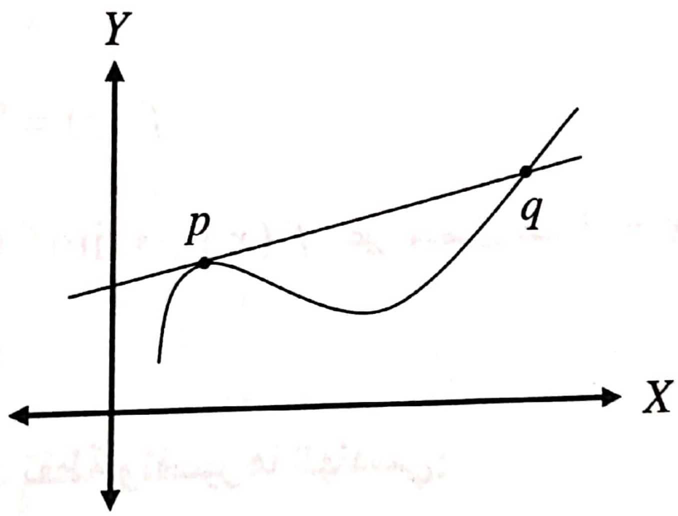
قبل أن نبدأ في تقديم مفهوم المشتقة نود أن نتعلم أولاً كيفية إيجاد خط التماس لمنحنى دالة ما لأن ذلك يساعدنا بدرجة كبيرة في فهم المعنى الهندسي للمشتقة.

<u>المماس لمنحنى عند نقطة (Curve's Tangent at a Point):</u>

تعتمد كثير من مسائل علم التفاضل على إيجاد خط التماس لمنحنى ما عند نقطة محددة واقعة عليه. فيعرف خط التماس لدائرة عند نقطة ما p واقعة عليه بأنه الخط الذي يتقاطع مع منحنى الدائرة في نقطة واحدة فقط هي النقطة p نفسها ويسمى هذا الخط بمماس الدائرة عند p . انظر الشكل التالي:

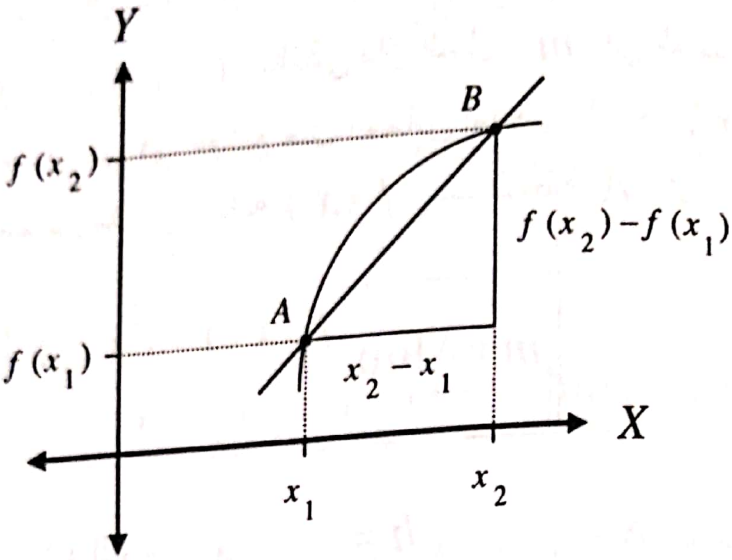


وهذا لا يصلح أن يكون تعريفاً عاماً لجميع المنحنيات، إذ أنه لو نظرنا للمنحنى المبين بالشكل التالي لوجدنا أن خط التماس للمنحنى عند النقطة p يتقاطع مع المنحنى عند نقطة أخرى هي نقطة q .



وسوف نحاول الوصول إلى تعريف مناسب لخط التماس لمنحنى عند نقطة واقعة عليه ولهذا فإننا سوف نبدأ بتعريف ميل خط التماس عند نقطة ما، وذلك لأنه إذا عرف ميل أي خط ونقطة عليه فإنه يتحدد تماماً ويمكن بسهولة إيجاد معادلته.

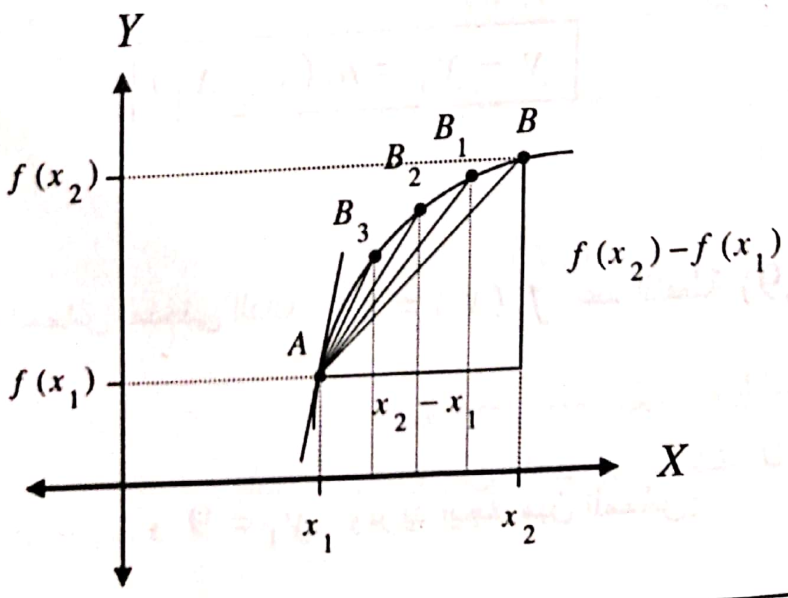
إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $A(x_1, f(x_1))$ وكان هناك نقطة أخرى $B(x_2, f(x_2))$ على منحنى الدالة $f(x)$. انظر الشكل التالي:



فإننا نحصل على الميل m للخط AB حسب القاعدة التي درسناها سابقا:

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{------------- (1)}$$

ونجعل النقطة B تتحرك على منحنى الدالة في اتجاه النقطة A ، فإننا نلاحظ أنه كلما اقتربت النقطة B من النقطة A (أي كلما اقتربت x_2 من x_1) متخذه الأوضاع $B_1,B_2,B_3\ldots$ ، فإن الخط AB سيقترب من خط نهائي يسمى خط التماس (المماس) للمنحنى عند النقطة A . انظر الشكل التالي:



وعند اقتراب النقطة B من A بدون توقف فإن المسافة بين x_2 و x_1 تقترب من الصفر بدون توقف (ولكن $x_1 \neq x_2$) وبالتالي فإن الميل m في المتساوية (1) أعلاه يقترب من نهاية معينة، هي في الواقع ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A . أي أن ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A هو:

$$\boxed{m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}\ .$$

سنعيد كتابة هذه الصيغة بدلالة الفرق $h = x_2 - x_1$.

فيكون $x_2 = x_1 + h$ ، وبالتالي $x_2 \to x_1$ تعني $(x_2 - x_1) \to 0$ أي أن $h \to 0$ ومنه :

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}\ .$$

وهذا هو تعريف المشتقة الاولى لدالة عند نقطة، فالمعنى الهندسي للمشتقة الأولى عند النقطة (x_1, y_1) يعبر عن ميل مماس المنحنى عند هذه النقطة وتكون معادلة المماس على الصورة :

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}\ .$$

مثال (7):

أوجد ميل ومعادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2$ عند النقطة $(3,9)$.

الحل:

معطى من السؤال $x_1 = 3$ و $y_1 = 9$. ونريد إيجاد ميل المماس:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2-(3)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 .$$

إذا ميل المماس $m = 6$ والنقطة $(3,9)$ وبالتالي فإن معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

$$y - 9 = 6x - 18$$

$$y = 6x - 9 .$$

المشتقة الأولى للدالة (The Function's First Derivative):

علمنا مما سبق أن إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة x_1 تعطى بالعلاقة التالية:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} .$$

لكن إذا أردنا إيجاد ميل مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ لأي نقطة اختيارية على المنحنى فإننا سنكتب x بدلاً من x_1 في الصيغة السابقة، وبالتالي ستصبح كالتالي:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وهذه هي المشتقة الأولى – أو التفاضل – للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x .

ويستخدم الرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ أو y' للإشارة إلى المشتقة الأولى للدالة y بالنسبة للمتغير x .

تعريف دالة المشتقة الأولى:

دالة المشتقة الاولى $f'(x)$ للدالة $f(x)$ تعرف بأنها:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

و تسمى المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x ، ومجال الدالة $f'(x)$ هو كل قيم x التي تكون هذه النهاية موجودة عندها.

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ عند النقطة $(a, f'(a))$ يمثل ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $x = a$.

مثال (8):

لدينا $f(x) = x^2 + 3$

1. أوجد دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة .

2. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقط $x = 2$ و $x = -2$ و $x = 0$.

الحل:

1. باستخدام التعريف أعلاه :

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left[(x+h)^2+3\right]-\left[x^2+3\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2+3-x^2-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x\ .$$

2. بما أن $f'(x)=2x$ فإن ميل المماس عند النقط $x=2$ و $x=-2$ و $x=0$ كما يلي :

$$m_{x=2}=f'(2)=2(2)=4\ .$$

$$m_{x=-2}=f'(-2)=2(-2)=-4\ .$$

$$m_{x=0}=f'(0)=2(0)=0\ .$$

مثال (9):

باعتبار الدالة $f(x)=x^2-3x$.

1. أوجد دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

2. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقط $x_0=4$.

الحل:

1. باستخدام التعريف أعلاه :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-3(x+h)\right]-\left[x^2-3x\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h-3)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)=2x-3\ .$$

2. لإيجاد معادلة المماس نجد ميل المماس وقيمة الدالة عند $x_0=4$:

بما أن $f'(x)=2x-3$ فإن ميل المماس هو:

$$m=f'(4)=2(4)-3=5\ .$$

وقيمة الدالة عند $x_0=4$ هي:

$$f(4)=(4)^2-3(4)=16-12=4\ .$$

وبما أن الميل يساوي $m=5$ والنقطة هي $(4,4)$ فإن معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 5(x - 4)$$

$$\Rightarrow y - 4 = 5x - 20 \Rightarrow y = 5x - 16 .$$

وبذلك فإن معادلة المماس المطلوبة هي $y = 5x - 16$.

في أغلب الأحيان من الصعب إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف مباشرة لذا يوجد قوانين تسهل كثيرا عملية إيجاد المشتقة الأولى ونورد فيما يلي بعض هذه القوانين.

(8 – 4) قوانين الإشتقاق (Derivation Laws):

اشتقاق الدالة الثابتة:

إذا كانت $y = f(x) = k$ لجميع قيم x حيث k عدد حقيقي ثابت فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة هي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 .$$

أي أن المشتقة الأولى للدالة الثابتة تساوي صفراً.

مثال (10):

1. $f(x) = 1.2 \Rightarrow f'(x) = 0$.
2. $f(x) = -6 \Rightarrow f'(x) = 0$.
3. $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.

اشتقاق دالة القوة:

إذا كانت $y = f(x) = x^a$ حيث a ثابت حقيقي و x تأخذ قيماً موجبة فإن المشتقة الأولى للدالة هي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = a x^{a-1} .$$

أي أن المشتقة الأولى للمتغير x مرفوع لأس حقيقي هي الأس مضروباً في المتغير x بعد رفعه لأس ينقص واحد عن الأس الأصلي .

مثال (11):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = x$.
2. $y = x^3$.
3. $y = x^{-8}$.
4. $y = \frac{1}{x^5}$.
5. $y = \sqrt{x}$.
6. $y = \sqrt[3]{x^4}$.
7. $y = x^{\pi}$.

الحل:

1. $y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1(x)^{1-1} = x^0 = 1$.

2. $y = x^{3} \quad \Rightarrow \quad y' = 3(x)^{3-1} = 3x^{2}$.

3. $y = x^{-8} \quad \Rightarrow \quad y' = -8(x)^{-8-1} = -8x^{-9}$.

4. $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \quad \Rightarrow \quad y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$.

5. $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1\cdot}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

6. $y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

7. $y = x^{\pi} \quad \Rightarrow \quad y' = \pi x^{\pi-1}$.

<u>اشتقاق الدالة المضروبة بعدد ثابت:</u>

إذا كانت $y = kf(x)$ حيث k ثابت حقيقي فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = kf'(x) .$$

ويعني ذلك أن المشتقة الأولى للدالة المضروبة بعدد ثابت تساوي العدد الثابت مضروباً في المشتقة الأولى للدالة.

مثال (12):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 3x$.

2. $y = -2x^{4}$.

3. $y = 5x^{-2}$.

4. $y = \frac{-6}{x^{3}}$.

الحل:

1. $y = 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3(1)x^{1-1} = 3x^{0} = 3$.

2. $y = -2x^{4} \quad \Rightarrow \quad y' = -2(4)x^{4-1} = -8x^{3}$.

3. $y = 5x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = 5(-2)x^{-2-1} = -10x^{-3}$.

4. $y = \frac{-6}{x^{3}} = -6x^{-3}$

$$\Rightarrow \quad y' = -6(-3)x^{-3-1} = 18x^{-4} = \frac{18}{x^{4}} .$$

اشتقاق حاصل جمع أو طرح دالتين:

إذا كانت $y = f(x) \pm g(x)$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x) .$$

أي أن المشتقة الأولى لحاصل جمع أو طرح دالتين هي حاصل جمع أو طرح مشتقتي الدالتين .

مثال (13):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = x^3 + 5$.

2. $y = 3x^2 - 4x - 6$.

3. $y = 2\sqrt[3]{x} + 3x^5$.

4. $y = x^9 - 2x^2 + 8x^{-3}$.

الحل:

1. $y' = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$.

2. $y' = 3(2)x^{2-1} - 4x^{1-1} - 0 = 6x - 4$.

3. $y' = 2\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} + 3(5)x^{5-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 15x^4$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + 15x^4 .$$

4. $y' = 9x^{9-1} - 2(2)x^{2-1} + 8(-3)x^{-3-1}$

$$= 9x^8 - 4x - 24x^{-4} .$$

مثال (14):

أوجد قيمة المشتقة الأولى للدوال التالية عند قيم x_0 المشار إليها:

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7 \qquad x_0 = -1$.

2. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 3 \qquad x_0 = 2$.

الحل:

1. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 10(-1) + 1 = 3 + 10 + 1 = 14$$

2. $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$$f'(2) = 4(2)^3 - 6(2) = 32 - 12 = 20 \ .$$

اشتقاق حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $y = f(x)g(x)$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \ .$$

أي أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين يساوي حاصل ضرب الدالة الأولى في المشتقة الأولى للدالة الثانية مضافاً له حاصل ضرب الدالة الثانية في المشتقة الأولى للدالة الأولى.

مثال (15):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 5x^2\left(x^3 - 2x\right) .$

2. $y = \left(2x^4 + x\right)\left(3x - 1\right) .$

الحل:

1. $y = 5x^2(x^3 - 2x)$

على إعتبار أن $5x^2$ هي الدالة الأولى و $x^3 - 2x$ هي الدالة الثانية فإن:

$$y' = 5x^2(3x^2 - 2) + (x^3 - 2x)(10x)$$

$$= 15x^4 - 10x^2 + 10x^4 - 20x^2$$

$$= 25x^4 - 30x^2 .$$

ويمكن أن نستخدم القوانين السابقة لإيجاد المشتقة وذلك بعد فك الأقواس:

$$y = 5x^2(x^3 - 2x) = 5x^5 - 10x^3$$

$$y' = 25x^4 - 30x^2 .$$

2. $y = (2x^4 + x)(3x - 1)$

على إعتبار أن $2x^4 + x$ هي الدالة الأولى و $3x - 1$ هي الدالة الثانية فإن:

$$y' = (2x^4 + x)(3) + (3x - 1)(8x^3 + 1)$$

$$= 6x^4 + 3x + 24x^4 + 3x - 8x^3 - 1$$

$$= 30x^4 - 8x^3 + 6x - 1 .$$

و أيضاً بفك الأقواس واستخدام القوانين السابقة نوجد المشتقة:

$$y=\left(2x^{4}+x\right)\left(3x-1\right)=6x^{5}-2x^{4}+3x^{2}-x$$

$$y'=30x^{4}-8x^{3}+6x-1 \, .$$

اشتقاق قسمة دالتين:

إذا كانت $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ بحيث أن y معرفة دائماً (أي أن $g(x)\neq 0$) فإن:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^{2}} \, .$$

أي أن المشتقة الأولى لقسمة دالتين تساوي المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه البسط في مشتقة المقام والمقدار بالكامل مقسوماً على مربع المقام:

مثال (16):

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y=\dfrac{4x^{2}-x}{2x-1}$.

الحل:

$$y'=\frac{(2x-1)(8x-1)-\left(4x^{2}-x\right)(2)}{(2x-1)^{2}}$$

$$=\frac{16x^{2}-2x-8x+1-8x^{2}+2x}{(2x-1)^{2}}=\frac{8x^{2}-8x+1}{(2x-1)^{2}} \, .$$

اشتقاق دالة مرفوعة لأس ثابت:

إذا كانت $y=\left(f(x)\right)^{a}$ حيث a ثابت حقيقي فإن:

$$y'=\frac{dy}{dx}=a\left(f(x)\right)^{a-1}f'(x)\ .$$

مثال (17):

أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

1. $y=\left(4x^{5}-2x\right)^{3}$.

2. $y=\sqrt{2x^{3}-6}$.

الحل:

1. $y=\left(4x^{5}-2x\right)^{3}$

$$y'=3\left(4x^{5}-2x\right)^{3-1}\left(20x^{4}-2\right)$$

$$=3\left(4x^{5}-2x\right)^{2}\left(20x^{4}-2\right)\ .$$

2. $y=\sqrt{2x^{3}-6}=\left(2x^{3}-6\right)^{\frac{1}{2}}$

تمارين (Exercises)

1. أوجد النهاية في كل مما يلي:

a) $\lim\limits_{x \to 6} 7$.

b) $\lim\limits_{x \to 5}(-2)$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} 12$.

d) $\lim\limits_{x \to -2} 3x$.

e) $\lim\limits_{x \to 3^-} 6x$.

f) $\lim\limits_{x \to 2}(x-3)(x+5)$.

g) $\lim\limits_{x \to -1} x^6 - 12x + 1$.

h) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{3x+4}$.

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x}{x+1}$.

k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+1}$.

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x-9}{x^3-12x+3}$.

m) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$.

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

o) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$.

p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

q) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2+6x}{x^2-36}$.

r) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

s) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x+8}{x^2+x-12}$.

t) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$.

u) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$.

v) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{2x-4}\right)^4$.

w) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{x^2-x-6}{x+2}\right)^2$.

x) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\sqrt{x^2+3x-1}\right)^4$.

2. لتكن $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le 3 \\ 3x-7 & x>3 \end{cases}$ أوجد ما يلي:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

3. لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ x-2 & x>0 \end{cases}$ اوجد ما يلي:

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.   b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.   c) $\lim_{x \to 0} f(x)$.

4. أوجد نهاية الدوال التالية عند x_0 النقطة الموضحة :

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & x \le 3 \\ 4x-1 & x>3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

b) $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x \le 1 \\ 5x & x>1 \end{cases}$ ، $x_0=1$.

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x \ne 3 \\ 7 & x=3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x<-1 \\ x^2-3 & x \ge -1 \end{cases}$ ، $x_0=-1$.

مدخل لتكامل الدوال

في كثير من العمليات الرياضية نلاحظ أن كل عملية لها عملية عكسية تقابلها, فالطرح هو العملية العكسية للجمع, والقسمة هي العملية العكسية للضرب, واستخراج الجذور هو العملية العكسية للرفع إلى قوى. وعلى نفس النمط فأن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

(9 – 1) الدالة الأصلية (Primitive Function):

نعلم أن لكل دالة $g(x)$ قابلة للإشتقاق دالة تناظرها هي دالة المشتقة $g'(x)$. فهل من الممكن عكس العملية؟ فإذا أعطيت دالة المشتقة $g'(x)$ هل من الممكن إيجاد الدالة الأصلية $g(x)$ ؟. أو بعبارة أخرى إذا أعطينا دالة $f(x)$ هل من الممكن إيجاد دالة $F(x)$ بحيث تحقق المعادلة $F'(x)=f(x)$.

<u>تعريف الدالة الأصلية:</u>

تسمى الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ إذا كان $F'(x)=f(x)$.

فعلى سبيل المثال: إن الدالة $F_1(x)=x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=3x^2$ (لأن $F'(x)=3x^2=f(x)$). ونود هنا طرح سؤال هل هناك دالة أصلية أخرى للدالة $f(x)=3x^2$ ؟. نلاحظ أن كلا من الدالتين $F_2(x)=x^3+1$ و $F_3(x)=x^3-2$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$ لأن كلاهما يحققان $F_i'(x)=f(x)$.

إن هذا يقودنا إلى الاستنتاج بأن للدالة $f(x)=3x^2$ عدداً لاحصر له من الدوال الأصلية لأنه عند إضافة أي عدد ثابت للدالة الأصلية $F_1(x)$ نحصل على دالة أصلية جديدة لنفس الدالة $f(x)$.

نظرية (Theorem):

إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن جميع الدوال على الصورة $F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي إختياري هي أيضاً دوال أصلية لنفس الدالة $f(x)$.

مثال (1)(Example):

أوجد جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x)=2x$.

الحل (Solution):

نعرف أن مشتقة x^2 هي $2x$ وعليه فإن جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x)=2x$ هي على الصورة:

$F(x)=x^2+c$ حيث c ثابت حقيقي إختياري.

مثال (2):

تحقق من أن الدالة $F(x)=2x^4+3x^2+3x-1$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=8x^3+6x+3$.

الحل:

إذا تحقق الشرط $F'(x)=f(x)$ فإن $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$ ،

ولدينا:

$$F'(x) = 8x^3 + 6x + 3 = f(x)$$

وبالتالي $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

(9 – 2) التكامل غير المحدود (Indefinite Integral):

إن عملية إيجاد جميع الدوال الأصلية لدالة $f(x)$ تسمى التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ ونرمز له بالرمز $\int f(x)\,dx$. ومن النظرية السابقة يكفي معرفة دالة أصلية واحدة $F(x)$ للدالة $f(x)$ فنجد أن:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\ .$$

حيث c ثابت حقيقي إختياري و $F'(x) = f(x)$. ويسمى الرمز $\int$ بإشارة التكامل ونقرأ $\int f(x)\,dx$ تكامل $f(x)$ بالنسبة إلى x . بينما dx تشير إلى أن هذه العملية يجب إجرائها بالنسبة إلى المتغير x . ويسمى الثابت الحقيقي الإختياري c بثابت التكامل. الجدول التالي يوضح عملية التفاضل لبعض الدوال والعملية العكسية له وهي التكامل غير المحدود.

صيغة التكامل غير المحدود	صيغة المشتقة
$\int 4x^3\,dx = x^4 + c$	$\frac{dy}{dx}\left[x^4\right] = 4x^3$
$\int \left[6x^2 + 5\right] dx = 2x^3 + 5x + c$	$\frac{dy}{dx}\left[2x^3 + 5x\right] = 6x^2 + 5$
$\int \left[x - 2x^{-3}\right] dx = \frac{1}{2}x^2 + x^{-2} + c$	$\frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 + x^{-2}\right] = x - 2x^{-3}$

ويمكن إعادة ماذكر أعلاه في التعريف التالي:

التكامل الغير محدود:

إذا كانت $F'(x)=f(x)$ فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ هو:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c\ .$$

حيث أن c ثابت حقيق إختياري يسمى ثابت التكامل.

ولأي قيمة معينة c_1 للثابت c نحصل على دالة أصلية $F_1(x)=F(x)+c_1$.
ومن الممكن إيجاد قيمة c_1 عند معرفة قيمة $F_1(x_1)$ لقيمة معينة x_1.

اصطلاح:

إذا كانت $f(x)=1$ فإن التكامل $\int 1\,dx$ يختصر بالشكل $\int dx$. كما نكتب $\int \frac{dx}{x^n}$ بدلا من $\int \frac{1}{x^n}\,dx$.

ولتسهيل عملية إيجاد التكامل غير المحدود للدوال سنقدم بعض قوانين التكامل المهمة:

(3 – 9) قوانين التكامل الغير محدود:

تكامل العدد الثابت:

إذا كان a عدداً حقيقياً ثابتاً فإن:

$\int a\,dx = ax + c$ ، حيث c ثابت حقيقي إختياري.

أي أن تكامل الثابت يساوي الثابت مضروب في x مضافا له ثابت التكامل.

مثال (3):

1. $\int 2\,dx = 2x + c$.
2. $\int -1\,dx = -x + c$.
3. $\int dx = x + c$.

تكامل دالة القوة:

إذا كان a عدداً حقيقياً بحيث $a \neq -1$ فإن:

$\int x^{a}\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ **، حيث c ثابت حقيقي إختياري.**

أي أن تكامل x^{a} هو x^{a+1} مقسوما على العدد $a+1$ مع إضافة ثابت التكامل الإختياري c .

مثال (4):

أوجد تكامل كل ممايلي:

1. $\int x^{2}\,dx$.
2. $\int x^{-5}\,dx$.
3. $\int \frac{1}{x^{3}}\,dx$.
4. $\int \sqrt{x}\,dx$.

الحل:

1. $\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c$.

2. $\int x^{-5}\,dx = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{4}x^{-4} + c = \dfrac{-1}{4x^4} + c$.

3. $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$

$= \frac{-1}{2}x^{-2} + c = \dfrac{-1}{2x^2} + c$.

4. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

تكامل الدالة المضروبة بعدد ثابت:

إذا كان a ثابت حقيقي فإن:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \ .$$

أي أن تكامل الدالة المضروبة ثابت حقيقي يساوي حاصل ضرب العدد الثابت في تكامل الدالة.

مثال (5):

أوجد تكامل مايلي:

1. $\int 2x \ dx$.

2. $\int 12x^2 \ dx$.

3. $\int \frac{9}{x^4} \ dx$.

4. $\int -4\sqrt[3]{x} \ dx$.

الحل:

1. $\int 2x \ dx = 2\int x \ dx = 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + c = x^2 + c$.

2. $\int 12x^2 \ dx = 12\int x^2 \ dx = 12\frac{x^3}{3} + c = 4x^3 + c$.

3. $\int \frac{9}{x^4} \ dx = 9\int x^{-4} \ dx = 9\frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-3}{x^3} + c$.

4. $\int -4\sqrt[3]{x} \ dx = -4\int x^{\frac{1}{3}} \ dx = -4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -3\sqrt[3]{x^4} + c$.

<u>تكامل مجموع أو فرق دالتين:</u>

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل فإن:

$$\int [f(x) \pm g(x)] \ dx = \int f(x) \ dx \pm \int g(x) \ dx \ .$$

أي أن تكامل مجموع دالتين أو أكثر يساوي مجموع تكامل تلك الدوال. ووكذلك بالنسبة للفرق.

مثال (6):

أوجد تكامل مايلي:

1. $\int\left(x^{3}-2x\right)dx$.
2. $\int\left(x^{\frac{2}{3}}-6x^{2}+4\right)dx$.
3. $\int\left(\frac{x^{5}+2x^{2}-1}{x^{4}}\right)dx$.
4. $\int\left(1+x^{2}\right)\left(2-x\right)dx$.

الحل:

1. $$\int\left(x^{3}-2x\right)dx=\int x^{3}\,dx-\int 2x\,dx$$
$$=\frac{x^{4}}{4}-2\frac{x^{2}}{2}+c=\frac{1}{4}x^{4}-x^{2}+c\ .$$

2. $$\int\left(x^{\frac{2}{3}}-6x^{2}+4\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx-\int 6x^{2}\,dx+\int 4\,dx$$
$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-6\frac{x^{3}}{3}+4x+c$$
$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^{5}}-2x^{3}+4x+c\ .$$

3. $$\int\left(\frac{x^{5}+2x^{2}-1}{x^{4}}\right)dx=\int\left(\frac{x^{5}}{x^{4}}+\frac{2x^{2}}{x^{4}}-\frac{1}{x^{4}}\right)dx$$
$$=\int x\,dx+\int 2x^{-2}\,dx-\int x^{-4}\,dx$$
$$=\frac{x^{2}}{2}+2\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-3}}{-3}+c$$
$$=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{3x^{3}}+c\ .$$

4. $\int(1+x^2)(2-x)dx=\int(2-x+2x^2-x^3)\,dx$

$$=\int 2\,dx-\int x\,dx+\int 2x^2\,dx-\int x^3dx$$

$$=2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+c\ .$$

مثال (7):

أوجد الدالة $F(x)$ علما أن $F(0)=10$ حيث:

$$F(x)=\int(3x^2-6x-2)dx\ .$$

الحل:

$$F(x)=\int(3x^2-6x-2)dx=3\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}-2x+c$$

ومنه $F(x)=x^3-3x^2-2x+c$.

ولإيجاد قيمة ثابت التكامل c لدينا معطى $F(0)=10$:

$$F(0)=(0)^3-3(0)^2-2(0)+c=10$$

ومنه $c=10$

وبالتالي: $F(x)=x^3-3x^2-2x+10$

تمارين (Exercises)

1. في كل مما يلي تحقق ما إذا كانت الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$ أم لا:

a) $F(x)=5x^2+6x-3$, $f(x)=10x+6$.

b) $F(x)=2x^4-3x^2+7$, $f(x)=8x^3-6x+7$.

c) $F(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$, $f(x)=\dfrac{-10x}{x^2-1}$.

d) $F(x)=\sqrt{3x^2-x}$, $f(x)=\dfrac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x}}$.

2. أوجد التكامل غير المحدود في كل مما يلي:

a) $\int x^8\,dx$.

b) $\int 14x^{\frac{5}{7}}\,dx$.

c) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

d) $\int \frac{1}{x^6}\,dx$.

e) $\int \frac{2}{x^3}\,dx$.

f) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$.

g) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$.

h) $\int \left(9x^2 - 10x + 5\right) dx$.

i) $\int x^3 \sqrt{x} \, dx$.

j) $\int (x+2)^2 \, dx$.

k) $\int x\left(2 + x^2\right) dx$.

l) $\int (3-x)(x-1) \, dx$.

m) $\int \left(x^{-3} - 4x^{\frac{1}{4}}\right) dx$.

n) $\int \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) dx$.

o) $\int \frac{2-2x^3}{x^3} \, dx$.

p) $\int \frac{x^2 - 2x^4}{x^4} \, dx$.

3. أوجد الدالة $F(x)$ حيث $F(x) = \int (6x-5)dx$ و $F(1) = 0$.

4. أوجد الدالة $F(x)$ حيث $F(x) = \int \sqrt[3]{x} \, dx$ و $F(1) = 2$.

5. احسب التكاملات المحدودة التالية:

a) $\int_5^{10} 6 \, dx$.

b) $\int_{-4}^{0} 2 \, dx$.

c) $\int_{-2}^{-1} x \, dx$.

d) $\int_0^3 2x \, dx$.

المصفوفات

إن للمصفوفات تطبيقات أساسية ومهمة في علمي الاقتصاد وإدارة الأعمال بل لقد ولد علم جديد في الاقتصاد يسمى الاقتصاد المصفوفي (**Economatrix**). وفي هذا الباب نعطي بعض المفاهيم الأساسية البسيطة لنظرية المصفوفات.

(6 – 1) المصفوفة (Matrix):

المصفوفة هي مجموعة من الأرقام مرتبة في جدول مستطيل الشكل يتكون من عدد m من الصفوف (Rows) وعدد n من الأعمدة (Columns) وتكون المصفوفة في هذه الحالة من الحجم (Size) $m \times n$ وتقرأ (المصفوفة m في n) . وتسمى الأرقام عناصر(Elements) المصفوفة، وعدد عناصر المصفوفة يساوي حاصل ضرب عدد الصفوف m في عدد الأعمدة n . عادة يرمز للمصفوفة بالأحرف الإنجليزية الكبيرة مثل $A, B, C, D, \ldots$. فعلى سبيل المثال:

الأعمدة

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
A = & \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & 8 & 7 & -9 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\leftarrow \text{الصف الأول} \\
\leftarrow \text{الصف الثاني} \\
\leftarrow \text{الصف الثالث}
\end{array}
$$

هنا المصفوفة A لها 3 صفوف و 4 أعمدة وبالتالي هي من الحجم 3×4 وعدد عناصرها يساوي حاصل الضرب $3 \times 4 = 12$ ويمكن التعبير عن العنصر بالمصفوفة بالرمز a_{ij} حيث أن هذا العنصر يقع في الصف رقم i والعمود رقم j من المصفوفة A . فمثلا العنصر a_{23} يقع في الصف الثاني والعمود الثالث وبالتالي $a_{23} = 5$ وبالمثل $a_{32} = 8$.

المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة تسمى **المصفوفة المربعة** (Square Matrix). **القطر الرئيسي** (Main Diagonal) في المصفوفة المربعة

هو الذي يحتوي على العناصر التي لها نفس الرقم في الصف والعمود كما هو مبين على سبيل المثال في المصفوفة 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة (a_{11}, a_{22}, a_{33})

مثال (Example)(1):

لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 9 & -8 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. ما حجم المصفوفة .
2. اكتب قيمة العناصر a_{32} , a_{42} , a_{14} , a_{33} .
3. اكتب عناصر الصف الثاني للمصفوفة.
4. اكتب عناصر العمود الرابع للمصفوفة.
5. اكتب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

الحل (Solution):

1. بما أن عدد الصفوف 4 وعدد الأعمدة 4 فهي مصفوفة مربعة من الحجم 4×4 .
2. $a_{32}=9$ $\quad a_{42}=-1$ $\quad a_{14}=4$ $\quad a_{33}=-8$.

3. عناصر الصف الثاني هي 1− 2 ،4 6 .

4. عناصر العمود الرابع هي 3 7 1 ،... 4 .

5. عناصر القطر الرئيسي هي3 8− ،2 5 .

(6 – 2) جبر المصفوفات:

تساوي المصفوفات (Equal Matrices):

تتساوى مصفوفتان A و B إذا وفقط إذا كانتا من الحجم نفسه وكان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B .

مثال (2):

إذا كانت المصفوفة A تساوي المصفوفة B حيث:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 18\\ 5 & y-2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2x+1 & 2\\ 4 & 3z\\ 5 & -3\end{bmatrix}$$

اوجد قيمة z ، y ، x .

الحل:

بما أن المصفوفتان متساويتان $A=B$ فإن:

$$3z=18 \qquad y-2=-3 \qquad 2x+1=-1$$

$$z=6 \qquad y=-1 \qquad 2x=-2$$

$$x=-1$$

جمع وطرح المصفوفات (Addition & Subtraction of Matrices):

لجمع وطرح مصفوفتين يجب أن يكونا من الحجم نفسه ويكون حاصل الجمع بجمع العناصر المتناظرة وحاصل الطرح بطرح العناصر المتناظرة كما في المثال التالي:

مثال (3):

$$1.\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 & -7 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2 & 3+8 & -1+-7 \\ 2+-6 & 0+5 & -4+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 11 & -8 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$2.\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6--4 & -3--2 \\ 4-3 & 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن ناتج جمع وطرح مصفوفتين مصفوفة جديدة لها نفس الحجم كما في المصفوفتين الأصليتين.

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

حاصل ضرب عدد حقيقي k في المصفوفة A هي مصفوفة kA من نفس الحجم المصفوفة A نحصل عليها بضرب العدد k في جميع عناصر المصفوفة A كما يتضح من المثالين التاليين:

مثال (4):

$$2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times -1 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

مثال (5):

إذا كانت المصفوفتين A و B هما:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -6\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $4A$.
2. $-3B$.
3. $3A+5B$.
4. $2(A+B)$.

الحل:

$$1.\quad 4A=4\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times 5 & 4\times 3 & 4\times 0\\ 4\times -2 & 4\times 6 & 4\times 1\\ 4\times 4 & 4\times 2 & 4\times 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & 12 & 0\\ -8 & 24 & 4\\ 16 & 8 & 24\end{bmatrix}.$$

$$2.\quad -3B=-3\begin{bmatrix}-3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -6\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\times-3 & -3\times-2 & -3\times4\\ -3\times1 & -3\times0 & -3\times-6\\ -3\times0 & -3\times5 & -3\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 6 & -12\\ -3 & 0 & 18\\ 0 & -15 & -6\end{bmatrix}.$$

$$3.\quad 3A+5B=3\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -6\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15 & 9 & 0\\ -6 & 18 & 3\\ 12 & 6 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-15 & -10 & 20\\ 5 & 0 & -30\\ 0 & 25 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 20\\ -1 & 18 & -27\\ 12 & 31 & 28\end{bmatrix}.$$

$$4.\quad 2(A-B)=2\left(\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -6\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=2\begin{bmatrix} 5--3 & 3--2 & 0-4 \\ -2-1 & 6-0 & 1--6 \\ 4-0 & 2-5 & 6-2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 8 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 16 & 10 & -8 \\ -6 & 12 & 14 \\ 8 & -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

ضرب صف في عامود:

إذا كان صف R من مصفوفة له نفس عدد عناصر عمو د C من مصفوفة أخرى فإن حاصل ضرب الصف R بالعمود C هو العدد الناتج من ضرب العناصر المتناظرة فيهما. ومن ثم جمع نواتج الضرب كما يتضح من المثال التالي:

مثال (6):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}=\left[(2\times5)+(4\times3)+(-1\times8)\right]=\left[10+12+-8\right]=14 .$$

ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices):

ليكن لدينا مصفوفتان B، A بحيث أن عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B (أي أن عدد عناصر كل صف في A يساوي عدد عناصر كل عمو د في المصفوفة B) عندئذٍ نعرف ضرب المصفوفتين B، A بأنه المصفوفة $A\times B$ (ويُكتب للاختصار AB) التي لها نفس عدد صفوف A ونفس عدد أعمدة B حيث عنصرها

الواقع في الصف i والعامود j هو حاصل ضرب الصف R_i من المصفوفة A بالعمود C_j من المصفوفة B ولتوضيح ذلك انظر المثال التالي:

مثال (7):

افرض ان $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B لذلك فالضرب AB معرف ولدينا:

$$AB=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{الصف الأول من A} \times \text{العامود الأول من B} & \text{الصف الأول من A} \times \text{العامود الثاني من B} \\ \text{الصف الثاني من A} \times \text{العامود الأول من B} & \text{الصف الثاني من A} \times \text{العامود الثاني من B} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (5\times 6)+(-3\times -2)+(1\times 7) & (5\times 1)+(-3\times 3)+(1\times -5) \\ (-1\times 6)+(0\times -2)+(4\times 7) & (-1\times 1)+(0\times 3)+(4\times -5) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 43 & -9 \\ 22 & -21 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن المصفوفة الناتجة AB هي من الحجم 2×2 أي ان عدد صفوف المصفوفة AB يساوي عدد صفوف المصفوفة A وعدد أعمدة المصفوفة AB يساوي عدد أعمدة المصفوفة B. ويمكن توضيح ذلك عى الصورة:

$$\underbrace{\underset{2\times 3}{A} \times \underset{3\times 2}{B}}_{} = \underset{2\times 2}{AB}$$

لاجراء عملية الضرب يشترط ما يلي:
عدد أعمدة A = عدد صفوف B

عدد أعمدة B
عدد صفوف A

مثال (8):

لدينا المصفوفات التالية:

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

اوجد قيمة كل مما يلي :

1. AC .
2. $2BC$.

الحل:

1. $AC=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} (2\times 3)+(3\times 1) & (2\times 0)+(3\times -4) & (2\times 2)+(3\times 5) \\ (4\times 3)+(-2\times 1) & (4\times 0)+(-2\times -4) & (4\times 2)+(-2\times 5) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9 & -12 & 19 \\ 10 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$2.\ \ 2BC = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} (1\times 3)+(0\times 1) & (1\times 0)+(0\times -4) & (1\times 2)+(0\times 5) \\ (-1\times 3)+(-2\times 1) & (-1\times 0)+(-2\times -4) & (-1\times 2)+(-2\times 5) \\ (2\times 3)+(3\times 1) & (2\times 0)+(3\times -4) & (2\times 2)+(3\times 5) \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5 & 8 & -12 \\ 9 & -12 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -10 & 16 & -24 \\ 18 & -24 & 38 \end{bmatrix}.$$

ننبه الطالب هنا أنه خلاف عملية ضرب الاعداد فإن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية دائماً فمثلاً إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ بينما $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ أي أن $AB \neq BA$. أيضاً ننبه إن عملية ضرب المصفوفات ليست دائماً معرفة حتى بين مصفوفتين من نفس الحجم إلا إذا كانت مربعتين (لماذا ؟)

مصفوفة الوحدة (The Identity Matrix):

هي المصفوفة المربعة $n \times n$ (يرمز لها بالرمز I_n) التي فيها جميع عناصرها اصفارعدا عناصر القطر الرئيسي والتي كل منها يساوي الواحد فمثلاً:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا كان هناك مصفوفة A مربعة $n \times n$ فإن ناتج حاصل ضرب المصفوفة A بمصفوفة الوحدة I_n هو نفس المصفوفة A أي أن:

$$AI = IA = A \ .$$

(6 – 3) المحددات (Determinants):

المحدد هو **عدد حقيقي** يتعين لكل **مصفوفة مربعة** A ويُرمز له بالرمز $|A|$.
ويعرف المحدد حسب حجم المصفوفة.

محدد المصفوفة من الحجم 2x2:

يعرف محدد المصفوفة من الحجم 2×2 بالقاعدة:

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

مثال (9):

اوجد محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$.

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (8 \times 3) - (2 \times 7) = 24 - 14 = 10 \ .$$

تمارين (Exercises)

1. أوجد قيمة z , y , x في كل مما يلي:

a) $\begin{bmatrix} 2+x & 5-3y \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & z+4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} x+1 & 2x+y \\ 6 & z-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2y \\ -z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 2 & x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. إذا كان لديك المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل مما يلي:

a) $A+B$.

b) $B+C$.

c) $A-C$.

d) $5A$.

e) $-4B$.

f) $A - B - C$.

g) $5A - 4B + 2C$.

h) $3(A + B) - 4C$.

3. إذا كان لديك المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل مما يلي (إذا كان معرفا):

a) AB .

b) BA .

c) $(AB)C$.

d) $(BA)C$.

e) ABA .

f) C^2 .

g) $2C^2$.

h) $(2C)^2$.

i) $2BA - 3C$.

j) $(A + B)C$.

4. أكتب مصفوفة الوحدة I_n لقيم n التالية:

a) $n=2$.

b) $n=3$.

c) $n=4$.

5. أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

h) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.