الرياضيات

I- الدوال العددية :

أ- قواعد الحساب :

1- المتطابقات الشهيرة :

* من الدرجة الثانية :

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

* من الدرجة الثالثة :

* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

ب- حل معادلات من الدرجة الثانية :

* حساب المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان : $\Delta > 0$	إذا كان : $\Delta = 0$	إذا كان : $\Delta < 0$
المعادلة تقبل حلين : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة تقبل حل مضاعف : $x' = \frac{-b}{2a}$	المعادلة لا تقبل حلول

* تحليل دالة من الدرجة الثانية :

إذا كان : $\Delta > 0$	إذا كان : $\Delta = 0$	إذا كان : $\Delta < 0$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$	لا يمكن التحليل

* إشارة الدالة من الدرجة الثانية :

إذا كان : $\Delta > 0$	إذا كان : $\Delta = 0$	إذا كان : $\Delta < 0$
$-\infty$ + − + $+\infty$	$-\infty$ − + $+\infty$	$-\infty$ + $+\infty$
مثل a بعكس a مثل a	مثل a عكس a	مثل a

ج- خواص القيمة المطلقة :

$|x| \geq 0$ ؛ $|-x| = |x|$ ؛ $\sqrt{x^2} = |x|$

$|x \times y| = |x| \times |y|$ ؛ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ؛ $|x+y| \leq |x| + |y|$

د- قواعد الحصر :

* لتكن a, b, c, d أعداد موجبة تماما : $a \leq x \leq b$ ؛ $c \leq y \leq d$:

• جمع :

$a + c \leq x + y \leq b + d$

• طرح :

$a - d \leq x - y \leq b - c$

• ضرب :

$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

• قسمة :

$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

و. الاشتقاقية :

*** معادلة المماس :**

$$* \; y = \underbrace{f'(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}$$

العدد المشتق ... صورة x_0 بالدالة f

* وجود مماس عند الفاصلة x_0 معامل توجيهه هو العدد المشتق .

* إذا كان المماس يوازي مستقيم $y = ax + b$ فإن $a = f'(x_0)$

* المماس الذي يوازي محور الفواصل معامل توجيهه 0 معناه : $f'(x_0) = 0$

أمثلة :

1- لدينا : $f(x) = 3x^2 - 2$ و $x_0 = 1$

أكتب معادلة المماس عند الفاصلة $x_0 = 1$:

$$* \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

* $f'(1) = 6$

* $f(1) = 3(1) - 2 = 1$

$$y = 6(x - 1) + 1$$
$$y = 6x - 6 + 1$$
$$y = 6x - 5$$

وهو المطلوب

2- لدينا : $f(x) = x^2 + x + 1$

أكتب معادلة المماس عند النقطة $A(0,1)$

$$* \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = f'(0)\,x + 1$$

* $f'(0) = 1$

$$y = 1x + 1$$
$$y = x + 1$$

وهو المطلوب

3- أكتب معادلة المماس عند النقطة $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$ الذي يوازي $y = 5x + 4$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = f'(2)(x - 2) + f(x)$$
$$y = f'(2)(x - 2) + \frac{1}{3}$$
$$y = 5(x - 2) + \frac{1}{3}$$

أنظر إلى القاعدة ...

4- أكتب معادلة المماس عند النقطة $C(3, -1)$ يوازي محور الفواصل :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$
$$y = f'(3)(x - 3) - 1$$
$$y = -1$$

*** مشتقات الدوال المألوفة :**

* $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(مشتق ما تحت الجذر / $2 \times \sqrt{x}$)

* $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

(مشتق المقام - / ^{2}(المقام))

أمثلة :

* $f(x) = \sqrt{-x+1}$ ، $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$

* $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ ، $f'(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

* $(U + V)' = U' + V'$

* $(U \times V)' = U' \times V + V' \times U$

(مشتق الأول × الثاني + مشتق الثاني × الأول)

* $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$

$$\frac{\text{مشتق البسط × المقام − مشتق المقام × البسط}}{(\text{المقام})^2}$$

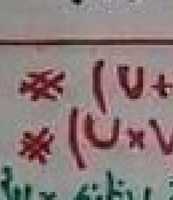
* $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$

* $\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}$

$$\frac{\text{مشتق المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

* $\left(\sqrt{U(x)}\right)' = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$

الاشتقاقية



$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

أمثلة عن حالات عدم التعيين :

* تحليل و اختزال : (كثيرة حدود)

* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} =$ ح.ع.ت $\left\{ \dfrac{0}{0} \right.$

البسط : $\Longleftrightarrow$ المقام :

[redacted]	1	0	0	8
-2	0	-2	4	-8
[redacted]	1	-2	4	0

[redacted]	1	0	-4
-2	0	-2	4
[redacted]	1	-2	0

x^2 x عدد x عدد

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{12}{-4} = \boxed{-3}$$

* الاختزال : (نتخلوا من x)

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{x} =$ ح.ع.ت

* $(x+2)^3 = x^3+8+6x^2+12x$

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+8+6x^2+12x-8}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+6x^2+12x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2+6x+12)}{x}$

$= \boxed{0}$

* المرافق : (الدوال الجذرية)

* $\lim\limits_{x \to -\infty} x+\sqrt{x^2+3} = -\infty+\infty =$ ح.ع.ت

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+\sqrt{x^2+3})(x-\sqrt{x^2+3})}{(x-\sqrt{x^2+3})}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-x^2-3}{x-\sqrt{x^2+3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x-\sqrt{x^2+3}} = \boxed{0}$ $\left\{ \dfrac{3}{-\infty} \right.$

* العدد المشتق :

* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

عند دراسة قابلية الاشتقاق نعوض x_0 نجد النتيجة تساوي عدد

* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} =$ ح.ع.ت

* $f(x) = \sqrt{x-1}$
* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$
* $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(\;)}{x-2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} =$ ح.ع.ت $= \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 12$

* $f'(x) = 3x^2$
* $f'(2) = 12$

* تغيير المتغير

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \dfrac{\sin 6x}{2 \times 3x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 \dfrac{\sin 6x}{6x} = \lim\limits_{X \to 0} 2 \dfrac{\sin X}{X} = \boxed{2}$ 1

$X = 6x$; $x \to 0$; $X \to 0$

عند تغيير المتغير نحاول أن نجعل البسط يساوي المقام بالضرب والقسمة على عدد.

د - النهايات :

* حالات عدم التعيين : (4) :

* الجمع : $+\infty - \infty$
* الضرب : $0 \times \pm\infty$
* القسمة : $\frac{\infty}{\infty}$ ؛ $\frac{0}{0}$

* كيفية إزالة حالات عدم التعيين :

* الإختزال (تحليل واختزال) * المرافق
* التحليل * العدد المشترك
* تغيير المتغير

* نهاية دالة كثيرة الحدود :

نهايتها في $\pm\infty$ هي الحد الأعلى درجة

* نهاية الدالة الناطقة :

نهايتها في $\pm\infty$ هي الحد الأعلى درجة في البسط والحد الأعلى درجة في المقام

يجب الإختزال في حالة وجوده

* نهاية دالة عند عدد :

نعوض مباشرة في الدالة ذلك العدد.

الأكبر > لا تعني 0^+ والأصغر < لا تعني 0^- ، إشارة المقام هي التي تحدد إشارة 0 . التربيع دائما 0^+ سواء عدد أو جذر

أمثلة :

* $\lim_{x \to +\infty} -x^3+2x^2 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = \boxed{-\infty}$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = \boxed{+\infty}$
* $\lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{3}{(x-4)^2} = \boxed{+\infty}$ $\left\{ \frac{3}{0^+} \right.$
* $\lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{3}{(x-4)^2} = \boxed{+\infty}$ $\left\{ \frac{3}{0^+} \right.$

* نهايات شهيرة

* $\sqrt{+\infty} = +\infty$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* نهاية دالة مركبة :

* $\lim_{x \to \pm\infty / N} u \circ v(x) = \lim_{x \to \pm\infty / N} u(v(x)) = c$

أي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to \pm\infty / N} v(x) = b \\ \lim_{x \to b} u(x) = c \end{array} \right.$$

* نهايات شهيرة (2) :

$\frac{0}{\infty} = 0$ ؛ $\frac{l}{\infty} = 0$ ؛ $\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{l}{0} = \infty$ (l = عدد)

* نهايات الدوال المرجعية :

دالة مقلوب	دالة جذر	دالة x^n
$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	لما n زوجي : $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$	لما n فردي :
$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

عند طرق إزالة حالة عدم التعيين بالنسبة للدوال الجذرية عند $\pm\infty$ أو x_0 نضرب ونقسم في المرافق.

وعندما يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك

أمثلة :

* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} = \boxed{1}$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-4} = \boxed{1}$
* $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = \boxed{1}$
* $\lim_{x \to 0} \cos\left(\pi \frac{\sin x}{x}\right) = \boxed{-1}$

* دراسة إتجاه التغير :

1- المشتقة (النهايات دالة)

2- إشارة المشتقة

3- إتجاه التغير

$f'(x)>0 \Leftarrow f$ متزايدة تماما

$f'(x)<0 \Leftarrow f$ متناقصة تماما

4- جدول التغيرات

غالبًا ما يطرح السؤال بـ: أدرس تغيرات الدالة.

II- المعلم والمنحنيات :

* المستقيمات المقاربة :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 5} f(x) = -\infty \quad \left\{\frac{10}{0^-}\right. \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 5} f(x) = +\infty \quad \left\{\frac{10}{0^+}\right. \end{array}\right\}$$

م.م.ع لـ (C_f)

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=y_0$ بجوار $\pm\infty$

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0 \\ \lim g(x) = 0 \end{array}\right\}$$

$y=0$ م.م.أ لـ (C_f)

3) المستقيم المقارب المائل :

ت1: بين أن $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل لـ C_f

ح: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)-(ax+b) = 0$

مثال: لمستقيم

لدينا الدالة: $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+2}$

بين أن $y=2x-1$ م.م.م لـ C_f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)-(2x-1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x-1-(2x-1)(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x-1-2x^2-4x+x+2}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

ومنه $y=2x-1$ م.م.م لـ C_f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)-(2x-1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

ومنه $y=2x-1$ م.م.م لـ C_f عند $-\infty$

ت2: أوجد معادلة المقارب المائل

ح: لدينا: $f(x)=ax+b+g(x)$

و $\lim g(x)=0$ عند $\pm\infty$ ومنه :

$y=ax+b$ م.م.م لـ (C_f)

مثال:

لدينا الدالة : $f(x) = x+1+\frac{4}{x-1}$

بين أن C_f يقبل م.م.م يطلب تعيين معادلته

لدينا : $f(x) = x+1+\frac{4}{x-1}$

و : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$

ومنه $y=x+1$ م.م.م لـ C_f عند $-\infty$ و $+\infty$

ت: أحسب/بين: أن $f(x)-(ax+b)=0$ بجوار $\pm\infty$

أو فسر النتيجة بيانيًا.

Use the following notes to write a compositi

ج: $y=ax+b$ م.م.م ل (C_f) عند $\pm\infty$

مثال: بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x+1=0$ ماذا تستنتج؟

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1)=0$

ومنه $y=2x-1$ م.م.م ل C_f عند $-\infty$

---

* التقاطع مع محاور الإحداثيات:

- مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$ $(x_1,0)$ $(x_2,0)$

- مع محور التراتيب:

نحسب $f(0)$ $[0,f(0)]$

إذا طلب منا حل المعادلة $f(x)=0$ فإن التفسير البياني أو الاستنتاج هو التقاطع مع محور الفواصل

---

* شفعية دالة:

1- الدالة الزوجية:

لما $x\in D$ ؛ $-x\in D$: $f(-x)=f(x)$

تفسيرها الهندسي: C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

2- الدالة الفردية:

لما $x\in D$ ؛ $-x\in D$: $f(-x)=-f(x)$

تفسيرها الهندسي: C_f متناظر بالنسبة للمبدأ.

* مركز تناظر ومحور تناظر الدالة:

1- مركز تناظر:

لدينا: $\Omega(a,b)$ مركز تناظر

(1) $f(2a-x)+f(x)=2b$

(2) $f(a-x)+f(a+x)=2b$

مثال: f دالة معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ب: $f(x)=1+\frac{1}{x-2}$

بين أن النقطة $\Omega(2,1)$ مركز تناظر ل C_f؟

1b: $f(2\times2-x)+f(x)=2\times1$

$f(4-x)+f(x)\overset{?}{=}2$

* $f(4-x)+f(x)=1+\frac{1}{(4-x)-2}+1+\frac{1}{x-2}$

$=2+\cancel{\frac{1}{2-x}}+\cancel{\frac{1}{x-2}}=\boxed{2}$

2b: $f(2-x)+f(2+x)\overset{?}{=}2$

$f(x)=1+\frac{1}{x-2}$

* $f(2-x)+f(2+x)=1+\frac{1}{2-x-2}+1+\frac{1}{2+x-2}$

$=2-\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{x}}=\boxed{2}$

مثال (2): بين أن $f(2-x)+f(x)=4$ ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة؟

لدينا: $f(2-x)+f(x)=4$

و $f(2a-x)+f(x)=2b$

بالمطابقة

$2a=2$ $\quad$ $2b=4$

$a=\boxed{1}$ $\quad$ $b=\boxed{2}$

ومنه النقطة $(1,2)$ مركز تناظر

(نفس الطريقة بالمطابقة للقانون 2)

2- محور تناظر:

لدينا: $x=\alpha$ محور تناظر

(1) $f(2a-x)=f(x)$

(2) $f(a-x)=f(a+x)$

مثال: f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=(x-2)^2+3$

بين أن $x=2$ محور تناظر ل C_f؟

1b: $f(2\times2-x)=f(x)$

$f(4-x)=f(x)$

* $f(4-x)=(4-x-2)^2+3=(2-x)^2+3$

2b: $f(2-x)=f(2+x)$

* $f(2-x)=(2-x-2)^2+3=(-x)^2+3=x^2+3$
* $f(2+x)=(2+x-2)^2+3=(x)^2+3=x^2+3$

ومنه $f(2-x)=f(2+x)$ إذن $x=2$ محور تناظر

---

* المنحنى المقارب

لإثبات أن C_g منحنى مقارب ل C_f ،

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$

* **الوضع النسبي:**

- (Cf) و مستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ أو (Cf) و (Cg):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ ~~$f(x)-g(x)$~~

(Cf) فوق (Δ): $f(x)-y>0$

(Cf) يقع تحت (Δ): $f(x)-y<0$

(Cf) و (Δ) يتقاطعان: $f(x)-y=0$

ملاحظة: غالبا ما يأتي الوضع النسبي بعد مستقيم مقارب المائل: (الفرق $\pm\infty$) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y=0$

مثال: بين أن $y=x$ م.م.م لـ Cf عند $+\infty$ و $-\infty$ وادرس وضعيته؟

لدينا: f دالة معرفة على R بـ:

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6}{x^2+2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=\boxed{0}$$

ومنه $y=x$ م.م.م لـ Cf عند $\pm\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x)-y=f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

$x^2+2>0$ موجبة (لا تؤثر)

$-2x-6=0$ أي $-2x=6$ أي $x=-3$

الجدول:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
و.ن	(Cf) أعلى (Δ)	تقاطع $(-3;-3)$	(Cf) أسفل (Δ)

لإيجاد الترتيبة نعوض في المستقيم

* **إشارة الدالة:**

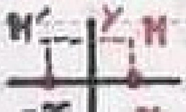
x	مجال تعريف	تقاطع مع محور الفواصل	مجال تعريف
$f(x)$	$-$	0	$+$
	أسفل محور الفواصل		أعلى محور الفواصل

* **معادلة المستقيم الآخر:** Δ

بين أن $y=ax+b$ م.م.م؟ إستنتج معادلة المستقيم الآخر!

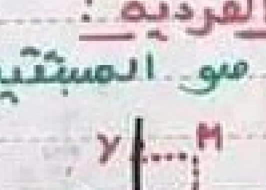
1- **الدالة الزوجية:**

$y=a(-x)+b$ هو المقارب الآخر



2- **الدالة الفردية:**

$-y=a(-x)+b$ هو المستقيم المقارب الآخر



كيفية إستخراج $f(\alpha)$: (بين أن $f(\alpha)=0$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$:

1) نذهب لـ $f(x)$ مكان x نضع α

2) نقوم بمقارنة $f(x)$ التي تحصلت عليها مع $f(x)$ المطلوبة، نستخرج العكر الزائدة $(x^3, x^2 ...)$

3) نذهب لـ $g(x)$ مكان x نضع α ونساويها

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

* مبرهنة القيم المتوسطة :

1- بين أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $a<\alpha<b$: $[a,b]$

أ) الاستمرارية

ب) الرتابة

ج) $f(a) \times f(b) < 0$

التفسير الهندسي :

بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل مرة واحدة في الفاصلة α ; $a<\alpha<b$

---

2) بين أن $f(x)=0$ تقبل حل على الأقل $a<\alpha<b$:

أ) الاستمرارية

ب) $f(a) \times f(b) < 0$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع محور الفواصل مرة على الأقل عند الفاصلة $a<\alpha<b$

---

3) بين أن $f(x)=K$ تقبل حل وحيد α ; $a<\alpha<b$:

أ) الاستمرارية

ب) الرتابة

ج) $f(a) < K < f(b)$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع $y=K$ مرة وحيدة في $a<\alpha<b$

---

4) بين أن $f(x)=K$ تقبل حله على الأقل α ; $a<\alpha<b$:

أ) الاستمرارية

ب) $f(a) < K < f(b)$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع $y=K$ مرة على الأقل $a<\alpha<b$

---

5) بين أن $f(x)=0$ تقبل حلين α و β :

$. < \alpha < .$

أ) استمرارية

ب) رتابة

ج) صور

$. < \beta < .$

أ) استمرارية

ب) رتابة

ج) صور

---

6) بين أن $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $c<\alpha<d$:

$f(0)=0$ ومنه يوجد حل معدوم α نطبق عليها مبرهنة القيم المتوسطة

---

7) بين أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $[a ; +\infty[$ تحقق أن $3<\alpha<4$:

س1: مبرهنة القيم المتوسطة

أ) استمرارية

ب) رتابة

ج) نهايات أو صور

س2: نجيب على التحقيق بحساب الصور $f(a) \times f(b) < 0$

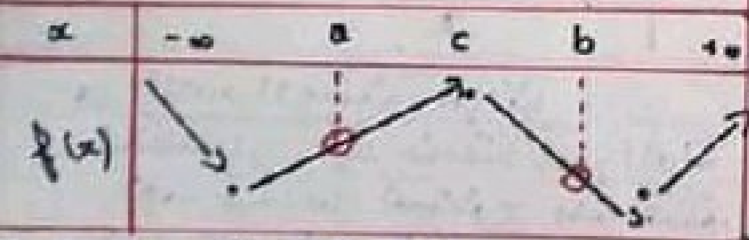
ملاحظات :

- مابين السؤالين ليس لهما نفس الإجابة :

• حل المعادلة $f(x)=0$ $\Leftarrow$ نقوم بإيجاد الحلول

• بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل $\Leftarrow$ مبرهنة القيم المتوسطة .

- في حال لا توجد الرتابة :



إذا لم نتحصل على الرتابة نقسم المجال :

- جزء تقبل فيه المعادلة حل .

- وجزء لا تقبل فيه المعادلة حل .

الرتابة هي : متزايدة أو متناقصة تماما

مبرهنة القيم المتوسطة لا تقوم بإيجاد الحلول بل تؤكد فقط وجود الحلول

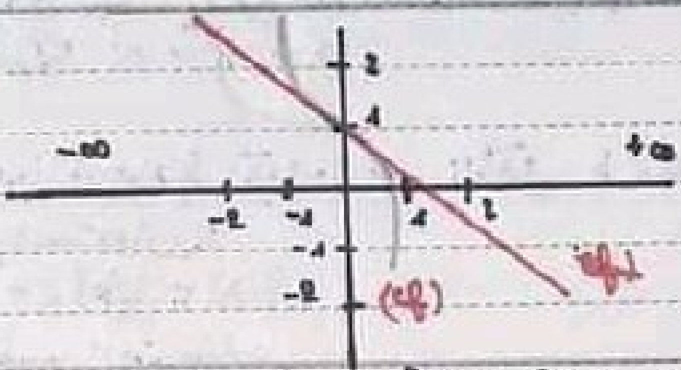
* $f'(1) = \frac{2-1}{1-0} = \boxed{1}$

$(0,1)$ $(1,2)$

* $f'(2.5)=0$ لأن المماس يوازي مح.

$f''(x_0) = ?$:

مثال :



* $f''(0)=0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0)$

النقطة التي يخترق فيها المماس تسمى الدالة نقطة إنعطاف.

* إشارة المشتقة :

x	مجموعة التعريف فواصل قيم ويقسم مجموعة التعريف		
$f'(x)$	+	0	−

متناقصة   متزايدة

+ ↗   − ↘   ∩   ∪

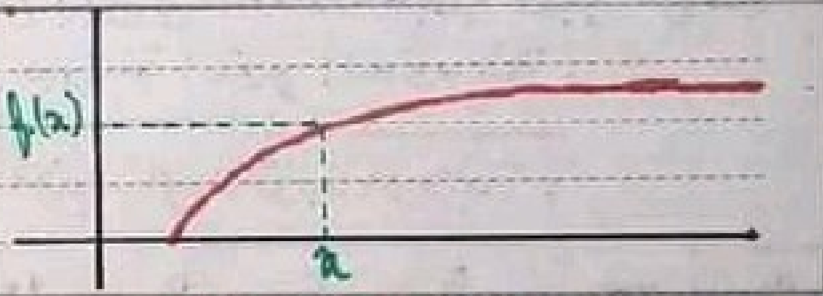
مثال :

(نفس المنحنى السابق)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

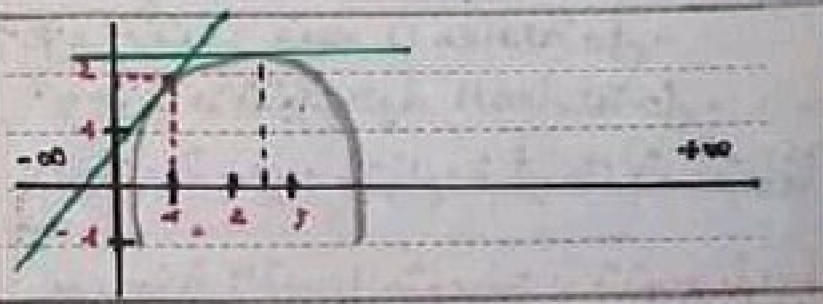
* أوجد $f(a)$:

نسقط على الدالة ومن الدالة لمحور التراتيب



* العدد المشتق بيانيا :

نذهب إلى x_0 نسقط على الدالة نجد مماس نستخرج منه نقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)



www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

للصغر نستخرج العامل الزائد.

4) نضع د $f(x)$ التي تحصلت عليها نعوض فيها العامل ونقوم بالتبسيط.

عملية الحصر تكون باستعمال $f(x)$ العبارة المعطية في التمرين.

مثال: لدينا: $f(x)=\frac{x^3+x^2+4}{x^2-1}$ و $g(x)=x^2-3x-4$

بين أن:

$$f(\alpha)=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

---

* $f(\alpha)=\frac{\alpha^3+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$

يجب أن يعوض: α^3

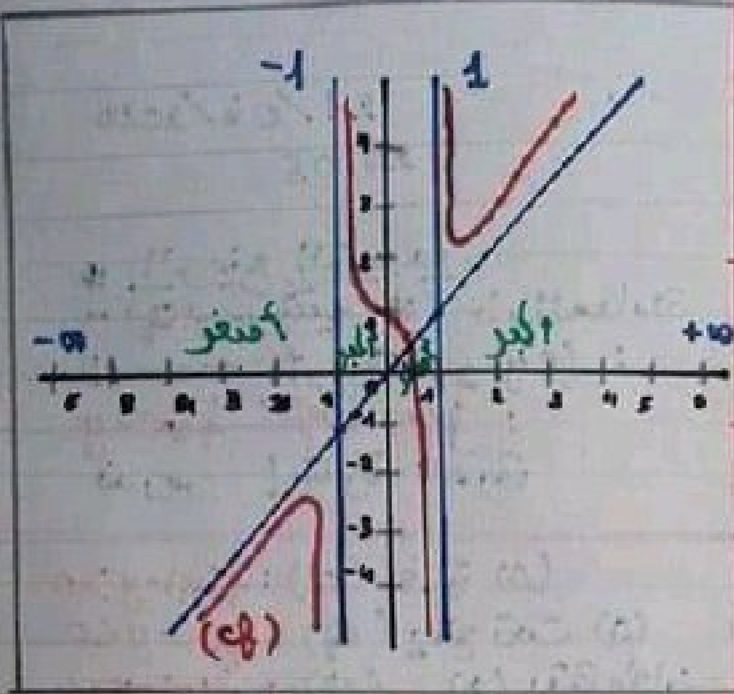
$\alpha^2-3\alpha-4=0$

$\alpha^3=3\alpha+4$

$$f(\alpha)=\frac{3\alpha+4+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2+3\alpha+5}{\alpha^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2+3\alpha+5 & \alpha^2-1 \\ -\ \alpha^2-1 & \\ \hline 3\alpha+6 & 1 \end{array}$$

$$f(\alpha)=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$



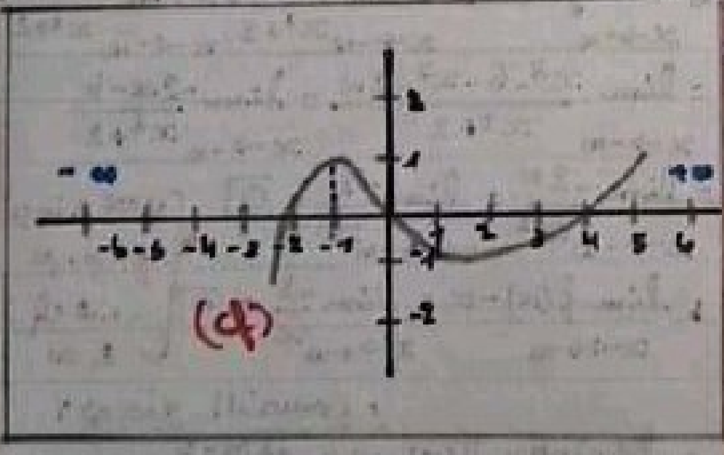
* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ * $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
* $\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ * $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$
* $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ * $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$

* إشارة الدالة (2):

أنظر الصفحة (7) السابقة

مثال:

لدينا الدالة معرفة على R :

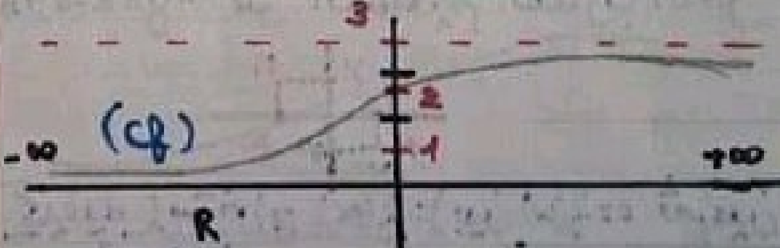


x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

أعلى م.ن أسفل أعلى أسفل

III- القراءات البيانية والمماسات

* النهايات:



* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ * $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

~~إشارة الدالة:~~
~~أنظر الصفحة (7)~~ } مثال 2 للنهايات

مثال:

لدينا مجال التعريف: $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

ب) أسئلة المماسات :

1) أكتب معادلة المماس عند الفاصلة x_0 :

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

العدد المشتق — صورة

---

2) أكتب معادلة المماس عند النقطة $A(x_A;y_A)$:

$$y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$$

العدد المشتق — y_A

---

3) أكتب معادلة المماس عند الترتيبة y_0 :

- نبحث أولاً عن x_0
- نحل المعادلة $f(x)=y_0$

---

4) أكتب معادلة المماس الذي معامل توجيهه a :

- نبحث أولا عن x_0
- نحل المعادلة : $f'(x)=a$

---

5) أكتب معادلة المماس الذي يوازي $y=ax+b$:

- نبحث أولاً عن x_0
- نحل المعادلة : $f'(x)=a$

---

6) أكتب معادلة المماس الذي يشمل $B(x_B;y_B)$:

- نبحث أولاً عن
- نحل المعادلة : $y_B=f'(x_0)(x_B-x_0)+f(x_0)$

---

* الحصر :

إذا كانت الدالة f :

الدالة ليست رتيبة	x: a … b ; $f(x)$: $f(a) \searrow f(b)$	x: a … b ; $f(x)$: $f(a) \nearrow f(b)$
$a<x<b$ أصغر صورة $< f(x) <$ أكبر صورة	$a<x<b$ $f(b)<f(x)<f(a)$ يغير الاتجاه	$a<x<b$ $f(a)<f(x)<f(b)$ لا يغير الاتجاه

مثال 1 : لدينا الدالة $f(x)=x^3-6x^2+9x$

- أوجد حصراً لـ f على $[3;5]$:

x	-1		1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	20

- f متزايدة تماماً على المجال $[3;5]$

$$3\le x\le 5$$
$$f(3)\le f(x)\le f(5)$$
$$0\le f(x)\le 20$$

- أوجد حصراً لـ f على $[1;3]$:

- f متناقصة تماماً على $[1;3]$

$$1\le x\le 3$$
$$f(3)\le f(x)\le f(1)$$
$$0\le f(x)\le 4$$

- أوجد حصراً لـ f على $[-1;5]$:

(f ليست رتيبة)

$$-1\le x\le 5$$

أصغر صورة / أكبر صورة

$$f(-1)\le f(x)\le f(5)$$
$$-16\le f(x)\le 20$$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

* المناقشة بالوسيط m

حل حل	حل	حل
سالب	معدوم	موجب

- في القيم الحدية + ونقط التماس حل مضاعف.
- عند نقط التقاطع مع نفسها عدد الحلول
- لما: ___ = $f(x)$ حلول المعادلة بيانية هي فواصل نقط تقاطع C_f مع ___ = y

يوجد 3 أنواع من المناقشات:

1) مناقشة أفقية:

$* \ f(x) = m$ (حاجة بدلالة m/لا يوجد x)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

أمثلة:

$* \ f(x) = -m$ $\quad * \ f(x) = \frac{1}{m}$

$* \ f(x) = |m|$ $\quad * \ f(x) = e^m$

$* \ f(x) = \ln m$ $\quad * \ f(x) = m^2$

2) مناقشة مائلة:

$* \ f(x) = ax + m$ (m مكان b)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)

أمثلة:

$* \ f(x) = 2x + m$ $\quad * \ f(x) = x - m$

$* \ f(x) = x + m + 1$

3) مناقشة دورانية:

$* \ f(x) = mx + b$ (x مكان m)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0;b)$

أمثلة:

$* \ f(x) = 2m + 1$ $\quad * \ f(x) = mx$

أمثلة: (المناقشة البيانية)

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$$

لدينا: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

يجب أن نجد $f(x)$ ونكتبها من الشكل $f(x) = \dots$

$$x(x+1) - 2m(x+1) = 2\ln x$$

$$(x+1)(x-2m) = 2\ln x$$

$$x - 2m = \frac{2\ln x}{x+1}$$

$$(\div 2) \quad \frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x+1}$$

ومنه: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

مناقشة بيانية مائلة لأن m مكان b: (m تتحرك على محور التراتيب)

$* \ -m \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\Leftarrow m \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$: حلين موجبين.

$* \ -m = -\frac{1}{2} \Leftarrow m = \frac{1}{2}$: حل مضاعف

$* \ -m \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\Leftarrow m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$: لا توجد حلول.

ملاحظة:

* لما $f(x) = m^2$ أو $f(x) = |m|$ هي مناقشة أفقية لكن تبدأ المناقشة من محور الفواصل نحو الأعلى

مثال 2: (مناقشة بيانية أفقية)

$$(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$$

لدينا: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$

$$(m-x)e^{x}=-(x^2+3x+2)$$

$$m-x=-\frac{(x^2+3x+2)}{e^{x}}$$

$$m-x=-(x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$m=x-(x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$-m=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$f(x)=-m \Rightarrow -y=m$$

مناقشة بيانية أفقية:

$y\in]-\infty;0,38[\Rightarrow m\in]+\infty;-0,38[\Rightarrow$ للمعادلة حل موجب

$y\in[0,38] \Rightarrow m=-0,38 \Rightarrow$ للمعادلة حل موجب و حل مضاعف

$y\in]0,38;2[\Rightarrow m\in]-2;-0,38[\Rightarrow$ للمعادلة حلان موجبان و سالبان و حل موجب

$y=2 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow$ للمعادلة حل مضاعف

$y\in]2;+\infty[\Rightarrow m\in]-\infty;-2[\Rightarrow$ للمعادلة حل سالب

مناقشة بيانية دورانية:

$$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$$

لدينا: $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$(2x-3|m|)x=-3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

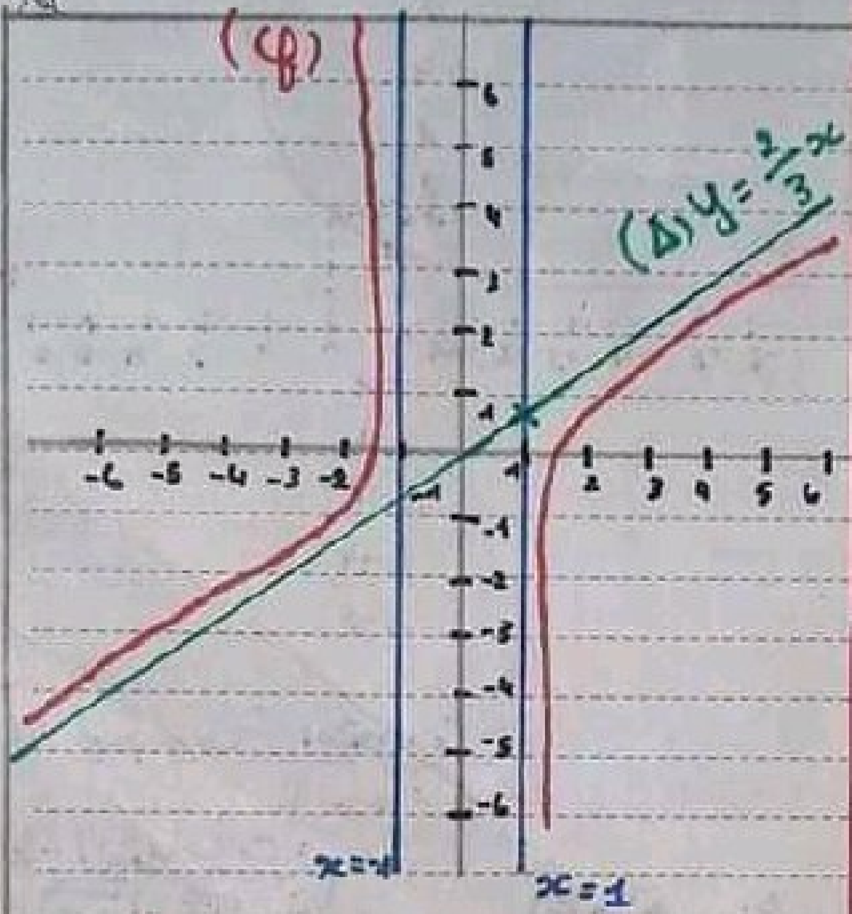
$$-3|m|x=-2x-3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$-\frac{1}{3}(-3|m|x)=-\frac{1}{3}\left(-2x-3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$|m|x=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$f(x)=|m|x$$

مناقشة بيانية دورانية تدور حول المبدأ $O(0,0)$ هي نقط تقاطع المنحنيين (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$

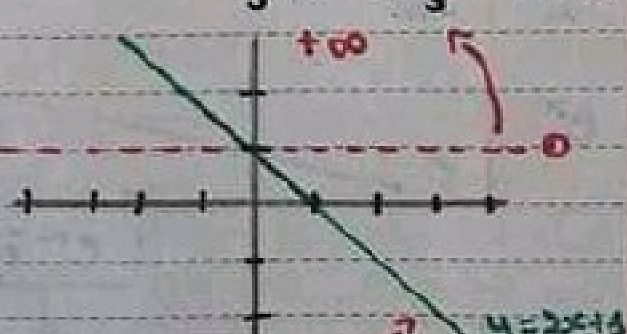


هي نقط تقاطع المنحنيين (C_f) مع المستقيم و المعادلة $y=|m|x$:

* $|m|\in]-\infty;\frac{2}{3}[$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة
* $|m|<\frac{2}{3}$ أي $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$
* $m\in]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}[$
* $|m|=\frac{2}{3}$ أي $m=\mp\frac{2}{3}$ لا توجد حلول
* $|m|\in]\frac{2}{3};+\infty[$ أي $|m|>\frac{2}{3} \Rightarrow$

$$-\frac{2}{3}>m>\frac{2}{3}$$

$]-\infty;-\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3};+\infty[$ لا توجد حلول



www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\alpha)$ $\searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

بين أن : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

نعوض لـ f مكان x نضع α أي :

$$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^{\alpha}$$

يستبدل لأن

$$2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$$

$$e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2} \qquad e^{2\alpha} = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2$$

$$* f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$$

$$= \frac{\alpha^2+4+4\alpha}{4} - \frac{\alpha^2+2\alpha+\alpha+2}{2}$$

$$= \frac{\alpha^2+4+4\alpha-2\alpha^2-4\alpha-2\alpha-4}{4}$$

$$= \frac{-\alpha^2-2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$$

وهو المطلوب.

حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

$$-1,6 < \alpha < -1,5$$

ن+

$$(-1,5)^2 < \alpha^2 < (-1,6)^2$$

$$2\times -1,6 < 2\alpha < 2\times -1,5$$

$$-0,95 < \alpha^2+2\alpha < -0,44$$

$$\frac{-0,95}{4} < \frac{\alpha^2+2\alpha}{4} < -0,11$$

III- الدالة اللوغارتمية

1- مجموعة التعريف :

مابداخل $\ln(\_)$ أكبر تماما من 0

أي : $x > 0$ أي $\ln(x) \in]0;+\infty[$

أمثلة :

$f(x) = \ln(x^2)$	$f(x) = \ln(-x)$	$f(x) = \ln(x+1)$
$x^2 > 0$	$-x > 0$	$x+1 > 0$
R^*	$x < 0$	$x > -1$
	$]-\infty;0[$	$]-1;+\infty[$

2- النهايات :

* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \boxed{+\infty}$ $\qquad \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$
* $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = \boxed{-\infty}$ $\qquad \ln(0) = \boxed{-\infty}$

* النهايات الشهيرة :

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \boxed{0}$ $\qquad$ * $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^n}{x^n} = \boxed{0}$
* $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln(x) = \boxed{0}$ $\qquad$ * $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x^n) = \boxed{0}$

* المشتقة :

$$(\ln(\text{حاجة}))' = \frac{\text{مشتق الحاجة}}{\text{الحاجة}} = \frac{\text{مشتق داخل } \ln}{\text{داخل } \ln}$$

أمثلة :

$$*(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad *(\ln(2x+1))' = \frac{2}{2x+1}$$

3- إشارتها :

ندرس إشارة البسط فقط لأن مابداخل $\ln$ موجب تماما

$$(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$U(x) > 0 \Leftarrow$ الإشارة من نفس إشارة البسط

$$(\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$\Leftarrow$ الإشارة من نفس إشارة البسط والمقام.

مثال :

$$* (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما *

4- جدول التغيرات :

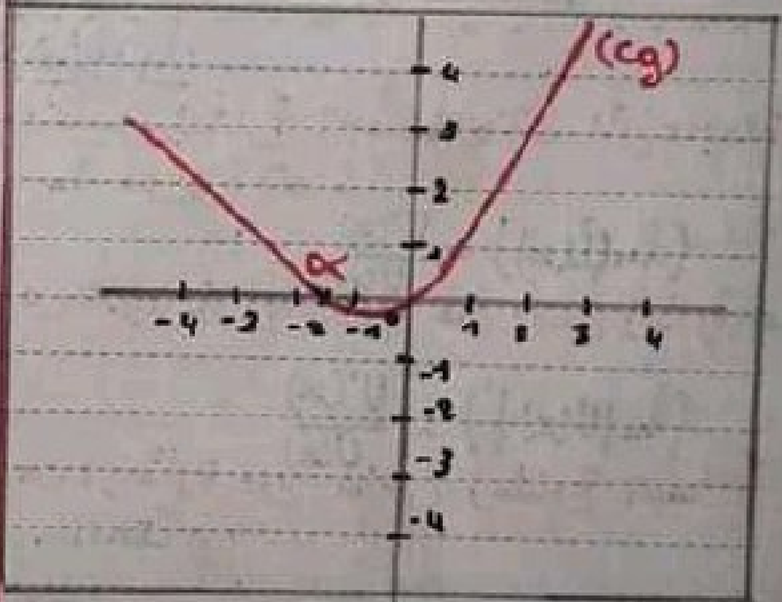
x	0	$+\infty$
$(\ln(x))'$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow +\infty$

△ الدستور:

* حالات عدم التعيين:
* $e^{(\ )}$: النشر
* لما x أو e^x : العامل المشترك
* e^{-x} ( ) : لازم نبدل $e^{x}=\frac{1}{e^{-x}}$ ونفشر
* التعامل مع المشتقة:
* $e^{(\ )}$: الداخل ( )
* $ae^{(\ )}+b$: من z
* $ae^{2x}+be^{x}+c$: بال Δ

باك حول الدالة الأسية:

I- لدينا: $g(x)=2e^{x}-x-2$



عدد حلول $g(x)=0$:

حلول المعادلة بيانيًا هي فواصل نقط تقاطع (Cg) مع محور الفواصل

حساب $g(0)$:

$*g(0)=2e^{0}-0-2=2-2=\boxed{0}$

بين أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α: $\alpha\in\,]-1,6\,;-1,5[$

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1,6\,;-1,5[$ ومن

التمثيل البياني:

$*g(-1,6)=3,39\times10^{-3}$

$*g(-1,5)=-0,05$ $\Big\}\ g(-1,6)\times g(-1,5)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]-1,6\,;-1,5[$ $\alpha\in$

إشارة الدالة:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

مثل z عكس z مثل z

II- لدينا: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

النهايات:

$*\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}=\boxed{ح.ع.ت}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-xe^{x}-e^{x}=0$

$*\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}=\boxed{ح.ع.ت}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-\frac{xe^{x}}{e^{2x}}-\frac{e^{x}}{e^{2x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$

اثبت أن: $f'(x)=e^{x}\times g(x)$

$*f'(x)=2e^{2x}-[1\times e^{x}+e^{x}(x+1)]$

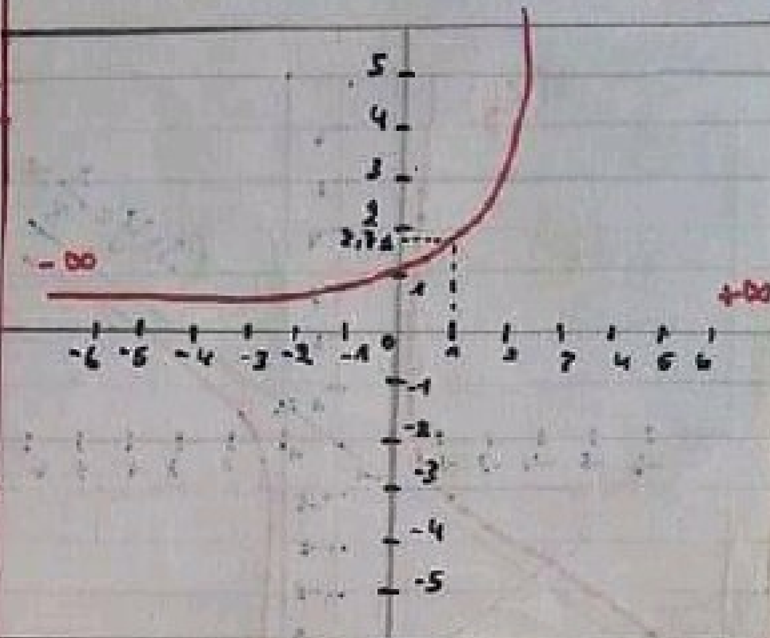
$=e^{x}(2e^{x}-1-x-1)$

$=e^{x}(2e^{x}-x-2)=\boxed{e^{x}\times g(x)}$

$e^{x}>0$ إشارتها من نفس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

II - الدالة الأسية



1- مجموعة التعريف:

$]-\infty ; +\infty[$

2- النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} e^x = \boxed{+\infty}$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = \boxed{0}$

فرع لقطع مكافئ ، و م.م $y=0$ عند $-\infty$

3- المشتقة:

$f'(x) = e^x$ (هي نفسها)

4- إتجاه التغير + جدول التغيرات + إشارة e^x:

* **إتجاه التغير:** e^x متزايدة تماما ؛ $e^{+\infty} = +\infty$ / $e^{-\infty} = 0$

* **جدول التغيرات**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

* **إشارة e^x:**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$

5- خواص الدالة الأسية:

$e^0 = 1$; $e^1 = 2,718$

$(e^x)' = e^x$

*** خواص القوى:**

* $e^{x+y} = e^x \times e^y$
* $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
* $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
* $(e^x)^y = e^{x \times y}$
* $e^0 = 1$
* $e^1 = 2,71$

للتبسيط

$e^n > 0$

ملاحظة:

نستخدمهم لحل معادلة و متراجحة:

* $e^a < e^b \Rightarrow a < b$
* $e^a > e^b \Rightarrow a > b$
* $e^a = e^b \Rightarrow a = b$

*** المشتقة:**

$(e^x)' = e^x$

$(e^{\text{دالة}})' = (\text{مشتق الدالة}) \times e^{\text{الدالة}}$

مثال:

$(e^{2x})' = 2 \times e^{2x}$

*** النهايات الشهيرة:**

* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
* $\lim_{x\to-\infty} x^n e^n = 0$
* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
* $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$
* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

أمثلة:

* $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)e^x = \boxed{+\infty}$
* $\lim_{x\to-\infty} (x^2+1)e^x$ $= \lim_{x\to-\infty} x^2e^x + e^x = \boxed{0}$

IV- ملاحظات على الدوال (حالات خاصة)

1- الدوال المركبة:

ملاحظة: الدوال المركبة تدرس وهي مركبة.

(مشتق الداخل) × (مشتق البرا)(يبقى)

1- دراسة مثال (1):

لدينا جدول التغيرات:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

استنتج إتجاه تغير الدالة $g(x)=e^{f(x)}$ على المجال $D_g :]1;+\infty[$:

* المشتقة:

$$g'(x)=f'(x)\times e^{f(x)}$$

* إشارتها:

$e^{f(x)}>0$ إشارتها من نفس إشارة $f'(x)$

(لحساب الصور نعوض صور الدالة السابقة في الدالة الجديدة)

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^5	$\searrow$	1

(لحساب النهايات نعوض نهايات الدالة السابقة في الدالة الجديدة)

* $\lim\limits_{x\to 1} e^{f(x)} = e^{-\infty} = \boxed{0}$ * $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{f(x)} = e^{0} = 1$

استنتج إذن إتجاه تغير الدالة $g(x)=f(e^x)$ على المجال $D_g :]0;+\infty[$:

* المشتقة:

$$g(x)=e^x\times f'(e^x)$$

* إشارتها:

$e^x>0$ إشارتها من نفس إشارة $f'(e^x)$

$f'(x)=0$	$x=2$	$x>2$
$f'(e^x)=0$	$e^x=2$	$e^x>2$
$f'(x)<0$	$e^x=2$	$x>\ln 2$
$f'(e^x)<0$	$\ln e^x=\ln 2$	
$f'(e^x)<0$	$x=\ln 2$	

(عند مواجهة أصغر أو أكبر نأخذ الصور نعوضها بـ x ثم نصل إلى الدالة المطلوبة)

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

* $g(\ln 2)=f(e^{\ln 2})=f(2)=5$

- دراسة مثال (2):

- لدينا جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

* $f(x)$ متزايدة تماما على المجال: $]0;1]\cup[4;+\infty[$

* $f(x)$ متناقصة تماما على المجال: $[1;2[\cup]2;4]$

* جدول التغيرات:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$1,88$	↗	$+\infty$

3) ـ f حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\ln x$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2}+\ln x-\ln x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = \boxed{0}$$

التفسير الهندسي:

C_f منحنى مقارب لـ (φ) عند $+\infty$

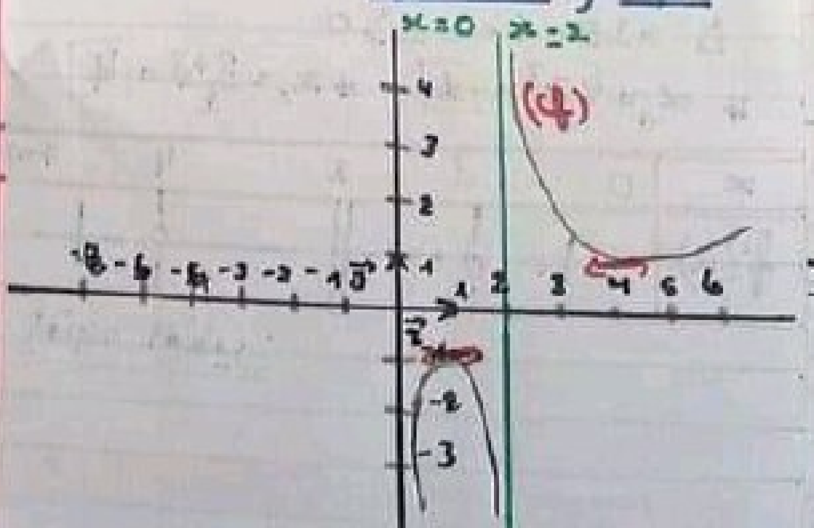
ب- دراسة وضعية المنحنى (φ):

إشارة الفرق:

$f(x)-\ln x = \boxed{\frac{1}{x-2}}$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)-\ln x$		$-$	||	$+$	
الوضعية		C_f أسفل φ	||	C_f أعلى φ	

4) رسم المنحنى C_f:



II- لدينا الدالة المعرفة على: $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ:

$$g(x)=f(-2x)$$

تعيين إتجاه تغير g:

* المشتقة:

$g'(x) = -2\times f'(-2x)$

x	$-\infty$		-2		-1		$-0,5$		0
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f'(-2x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

* $g(x)$ متزايدة تماما على المجال: $[-2;-1[\cup]-1;-\frac{1}{2}]$

* $g(x)$ متناقصة تماما على المجال: $]-\infty;-2]\cup[-0,5;0[$

جدول التغيرات:

$f'(x)=0$
$f'(-2x)=0$
$f'(x)<0$
$f'(-2x)<0$

$x=1$
$-2x=1$
$x=-\frac{1}{2}$
$1<x<2$
$1<-2x<2$
$-1<x<-\frac{1}{2}$

$x=4$
$-2x=4$
$x=-2$
$2<x<4$
$2<-2x<4$
$-2<x<-1$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1,88$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-1	↘	$-\infty$

LOGARThM

5 - قواعد حساب ln :

* $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$
* $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
* $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
* $\ln x^n = n \ln x$

---

* $f(x) = \ln x$ → n زوجية $n\ln(x)$
→ n فردية $n\ln(x)$

ملاحظات :

△ الحاجة اللي في نص ln موجبة
لكن (-) ln عندها إشارة .
إشارة $\ln x$ (مثلا) :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

$\ln e^x = x$	$e^{\ln x} = x$	$\ln(1) = 0$

△ لدراسة إشارة (-) ln نحل معادلة
و متراجحة ؟ أكبر و متراجحة ؟ أصغر

△ $\ln x$ متزايدة تماما تحفظ الترتيب :

* $\ln a = \ln b \iff a = b$
* $\ln a < \ln b \iff a < b$
* $\ln a > \ln b \iff a > b$

مثال :

لدينا : $f(x) = \ln(x+1)$ / $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

ندرس إشارة $f(x)$:

$\ln(x+1) < 0$	$\ln(x+1) > 0$	$\ln(x+1) = 0$
$x+1 < 1$	$x+1 > 1$	$x+1 = 1$
$x < 0$	$x > 0$	$x = 0$

$-1 < x < 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	

باك حول الدالة اللوغاريتمية :

لدينا : دالة عددية معرفة على :
$f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$: ب $]0;2[\cup]2;+\infty[$

1) حساب النهايات :

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{+\infty}$
* $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{-\infty}$ → $x=0$ م.م.ع
* $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{-\infty}$
* $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{+\infty}$

$x=2$ م.م.ع

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها :

* المشتقة :

* $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + x^2 + 4 - 4x}{x(x-2)^2}$

$$\boxed{= \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}}$$

* إشارتها :

* $0 < x(x-2)^2$
* $\Delta \Leftarrow x^2 - 5x + 4$

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

* $x_1 = \frac{5-3}{2} = \boxed{1}$ * $x_2 = \frac{5+3}{2} = \boxed{4}$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

اتجاه التغير

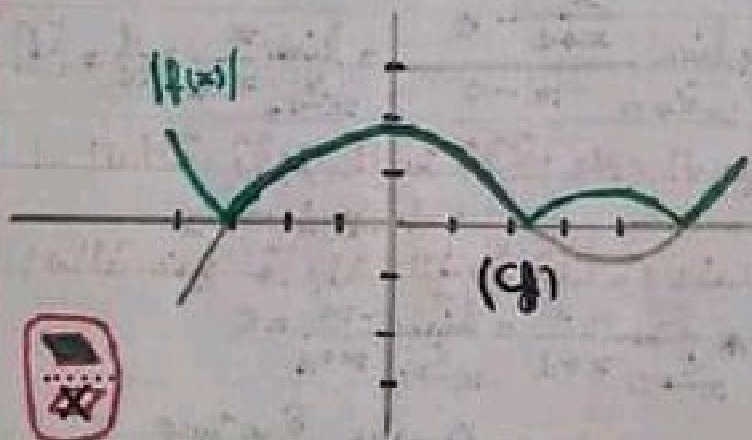
www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

IV- استنتاج تمثيلات البيانية

أ- $g(x) = |f(x)|$:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \longrightarrow f(x) \geq 0 \\ -f(x) \longrightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

$C_{|f|}$ ينطبق على جزء C_f الواقع فوق محور الفواصل ونرسم نظير جزء C_f الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل.

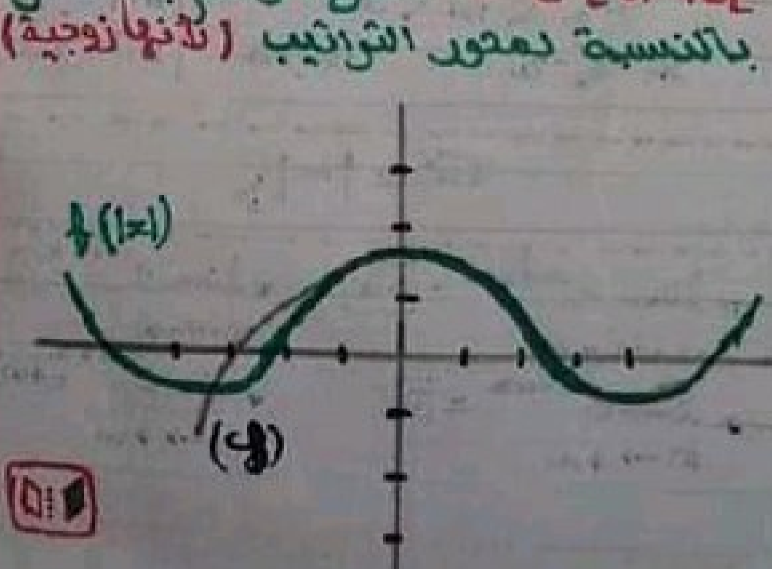


ب- $g(x) = f(|x|)$:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) \longrightarrow x \geq 0 \\ -f(x) \longrightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

$f(|x|)$ هي دالة زوجية.

$C_{f(|x|)}$ ينطبق على C_f من أجل : $x \in [0; +\infty[$ نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب (لأنها زوجية).

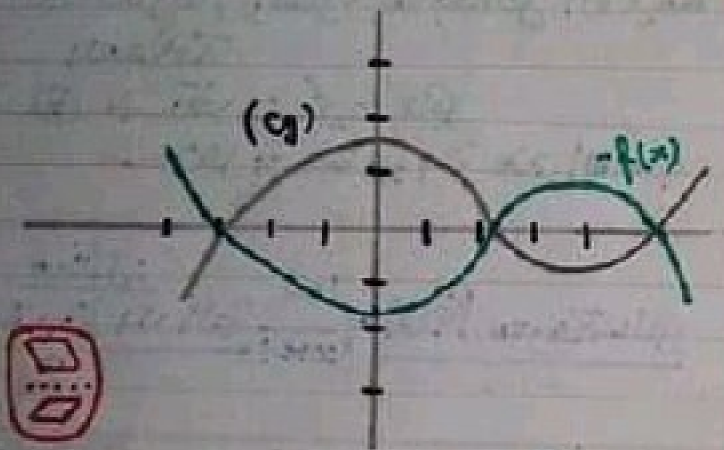


ملاحظة :

لما $g(x) = f(|x|)$ ينطبق عليه من أجل : $x \in]-\infty; 0]$ (أي العكس)

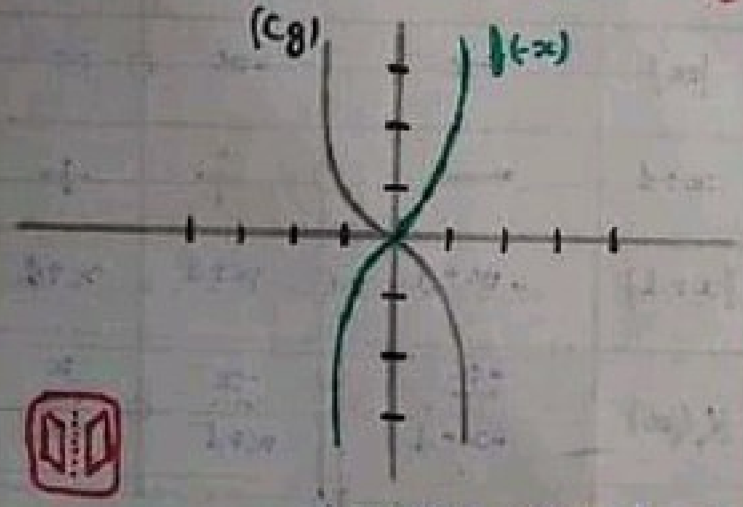
أ- $g(x) = -f(x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل



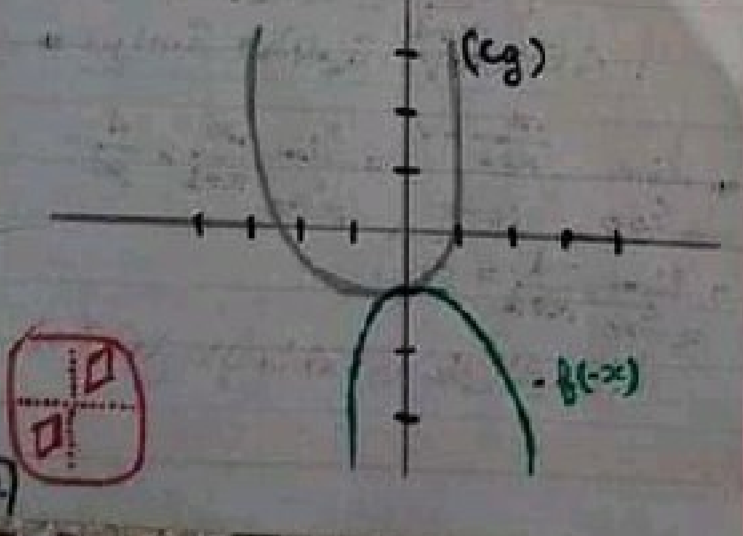
ب- $g(x) = f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



ج- $g(x) = -f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ



د- طريقة نزع القيمة المطلقة:

ملاحظة:

① ندرس إشارة ما بداخل القيمة المطلقة.

② + تخرج كيما هي

− تخرج مضروبة في السالب

مثال:

لدينا الدالة $K(x)=\frac{|x|}{|x+1|}$ معرفة على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$K(x)$		$\frac{-x}{-x-1}$	$\Vert$	$\frac{-x}{x+1}$	0	$\frac{x}{x+1}$	

$$K(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} & \in\ ]-\infty;-1[\ \cup\ ]0;+\infty[\\ \frac{-x}{x+1} & \in\ ]-1;0[\end{cases}$$

* دراسة قابلية الإشتقاق:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\frac{-x}{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{-x}{x+1}\times\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{-1}{x+1}=\boxed{-1}$$

-1 تقبل الإشتقاق على اليسار

تذكير:

الإشتقاقية: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: < عدد ! ، $\pm\infty$!

الإستمرارية: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$*\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\frac{x}{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{x}=\boxed{1}$$

1 الدالة تقبل الإشتقاق على اليمين

$-1 \neq 1$

الدالة غير قابلة للإشتقاق عند 0

$$*\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{x}{x+1}=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{-x}{x+1}=0$$

K مستمرة عند 0

ملاحظات:

$x=-\sqrt{a} \quad x=\sqrt{a} \longleftarrow x^2=a$

$-\sqrt{a}<x<\sqrt{a} \longleftarrow x^2<a$

$x<-\sqrt{a} \quad x>\sqrt{a} \longleftarrow x^2>a$

$m=-a \quad m=a \longleftarrow |m|=a$

$-a<m<a \qquad |m|<a$

$m<-a \quad m>a \qquad |m|>a$

$\sqrt{x^2}=|x|$

* $\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=\boxed{+\infty}$ * $\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=\boxed{0}$

* $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=\boxed{0}$ * $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=\boxed{+\infty}$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

استنتاج إتجاه تغير $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ على المجال $]-\infty;2[$ ،

* المشتقة :

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

* إشارتها :

$[f(x)]^2>0$ إشارتها عكس إشارة $f'(x)$

(من البسط)

x	$-\infty$		0		1		2
$g'(x)$			0		0		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e^{-2}	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\boxed{+\infty}$ / * $\lim_{x\to2}\frac{1}{f(x)}=\boxed{0}$

* $g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$
* $g(1)=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{e}=e^{-1}$

إستنتج إذن إتجاه تغير الدالة $g(x)=f(\frac{1}{x})$ على المجال $]-\infty;0[$:

* المشتقة :

$$g'(x)=\frac{-1}{x^2}\times f'(\frac{1}{x})$$

* إشارتها :

$f'(x)=0$ $f'(\frac{1}{x})=0$ $f'(x)<0$ $f'(\frac{1}{x})<0$	$x=0$ $\frac{1}{x}=0$ (لا تقبل حل)	$x=1$ $\frac{1}{x}=1$ $x=1$ $0<x<1$ $0<\frac{1}{x}<1$ $x>1$ / $\frac{1}{x}<1$

x	$-\infty$		0
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	
$f'(\frac{1}{x})$		$+$	
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	e^2	$\searrow$	0

استنتج إتجاه تغير $g(x)=[f(x)]^2$ على المجال $]-\infty;2[$!

* المشتقة :

$$g'(x)=2f(x)^{2-1}\times f'(x)$$

* إشارتها :

$2>0$

x	$-\infty$		0		1		2
$f(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^4	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^2=0$ * $\lim_{x\to2}[f(x)]^2=+\infty$

* $g(0)=[f(0)]^2=(e^2)^2=e^4$
* $g(1)=[f(1)]^2=e^2$

استنتج إتجاه تغير $g(x)=f(x^2)$ على $]-\sqrt2;\sqrt2[$ ،

* المشتقة :

$$g'(x)=2x\times f'(x^2)$$

* إشارتها :

$f'(x)=0$ $f'(x^2)=0$ $f'(x)<0$ $f'(x^2)<0$	$x=0$ $x^2=0$ $x=0$ $0<x<1$ $0<x^2<1$	$x=1$ $x^2=1$ $x=-1$; $x=1$ $x^2<1$ $-1<x<1$

x	$-\sqrt2$		-1		0		1		$\sqrt2$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

مثال (1):

أحسب: $\lim_{x\to+\infty} x^2+1+\sin x$

$-1 \le \sin x \le 1$

$x^2-1 \le x^2+\sin x \le x^2+1$

$x^2 \le x^2+1+\sin x \le x^2+2$

$x^2 \le f(x) \le x^2+2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} f(x)\ge x^2 \\ \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \end{array}\right.$

مثال (2):

أحسب: $\lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{\cos x}{x^2}$

$-1 \le \cos x \le 1$

نضرب في $\frac{1}{x^2}$:

$\frac{-1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$

$1-\frac{1}{x^2} \le 1+\frac{\cos x}{x^2} \le 1+\frac{1}{x^2}$

$1-\frac{1}{x^2} \le f(x) \le 1+\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1$ / $\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

$0 \le V_n-U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

أحسب: $\lim V_n-U_n$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$

ومنه: حسب النهايات بالمقارنة نجد: $\lim_{x\to+\infty} V_n-U_n=0$

نعرف الدالة: $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$ معرفة على $[0;+\infty[$

* المشتقة: $f'(x)=e^x-\frac{2x}{2}=e^x-x$

(لا نستطيع دراسة الإشارة)

* المشتقة $f''(x)$:

$f''(x)=e^x-1$

$e^x=1$

$x=\ln 1$

$\boxed{x=1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		0	$+$

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	1 ↗	

$f'(x)>0$ / $f'(x)>1$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	

$f(x)>0$ / $f(x)>1$

$e^x-\frac{x^2}{2}>0$

$e^x>\frac{x^2}{2}$

$\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$

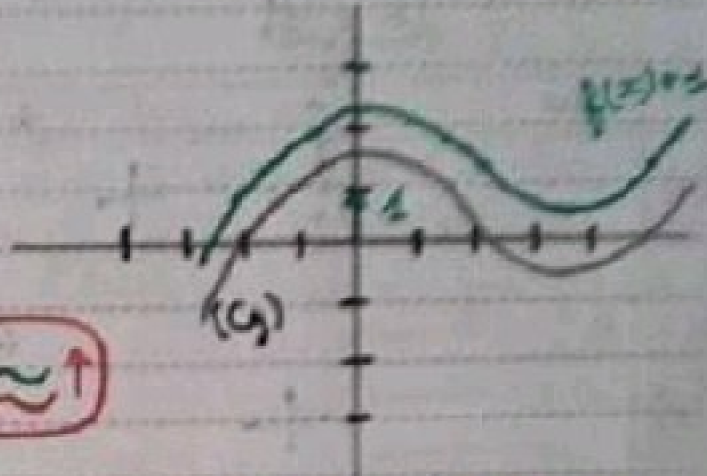
$\left.\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty\right\}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\boxed{+\infty}$

(حسب النهايات بالمقارنة)

1- $g(x)=f(x)+b$:

C_g صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\binom{0}{b}$

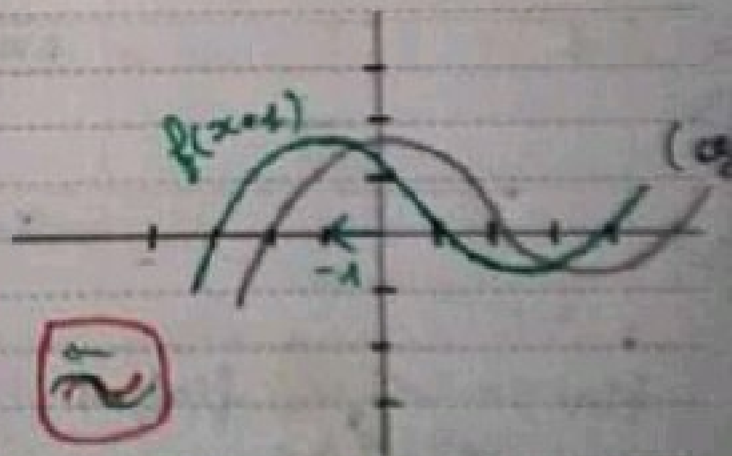
مثال: $g(x)=f(x)+1$



ب- $g(x)=f(x+a)$:

C_g صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\binom{-a}{0}$

مثال: $g(x)=f(x+1)$

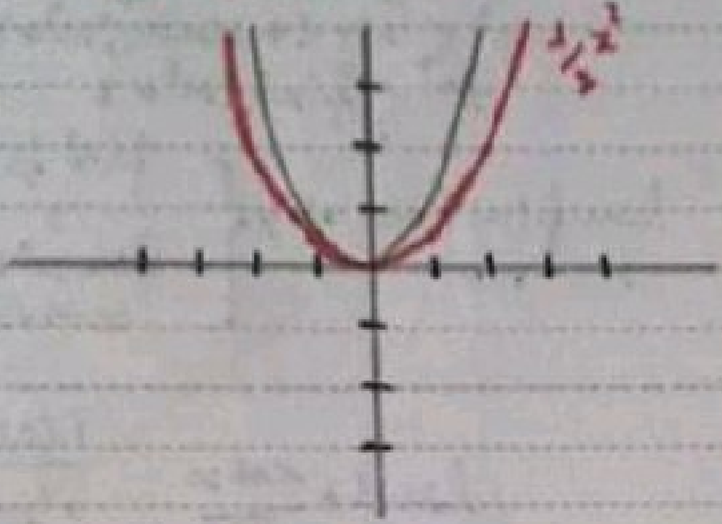


ج- $g(x)=f(x+a)+b$:

C_g صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\binom{-a}{b}$ (حسب الرسم)

د- $g(x)=\lambda f(x)$:

نستحفظ ب x نضرب y في λ



X - البرهان على النهايات

• النهايات بالمقارنة:

مبرهنة 1:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty / a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty / a} f(x) = +\infty$$

مبرهنة 2:

و: $$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty / a} g(x) = -\infty \end{cases}$$ فإن: $$\lim\limits_{x \to \pm\infty / a} f(x) = -\infty$$

مبرهنة 3:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim g(x) = \lim h(x) = a \end{cases} \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty / a} f(x) = l$$

ملاحظة:

$\cos \pm\infty$ و $\sin \pm\infty$ غير موجودة

$-1 \leq \cos x \leq 1$

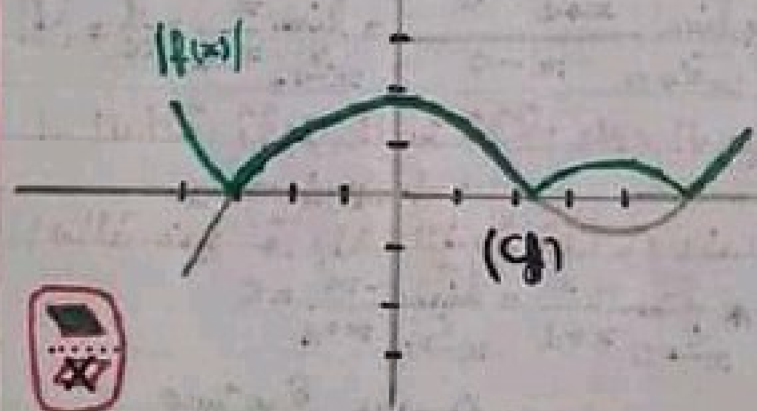
$-1 \leq \sin x \leq 1$

IV- استنتاج تمثيلات البيانية

أ- $g(x) = |f(x)|$:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \longrightarrow f(x) \geq 0 \\ -f(x) \longrightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

$C_{|f|}$ ينطبق على جزء C_f الواقع فوق محور الفواصل ونرسم نظير جزء C_f الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل.

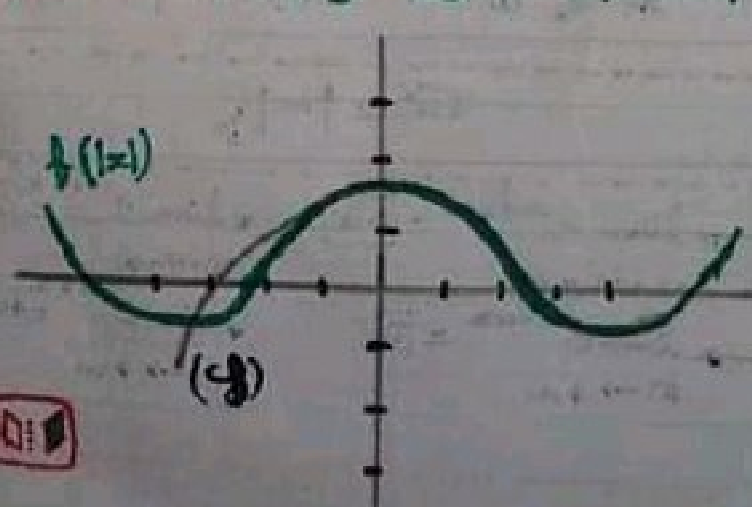


ب- $g(x) = f(|x|)$:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) \longrightarrow x \geq 0 \\ -f(x) \longrightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

$f(|x|)$ هي دالة زوجية.

$C_{f(|x|)}$ ينطبق على C_f من أجل $x \in [0;+\infty[$ نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب (لأنها زوجية).

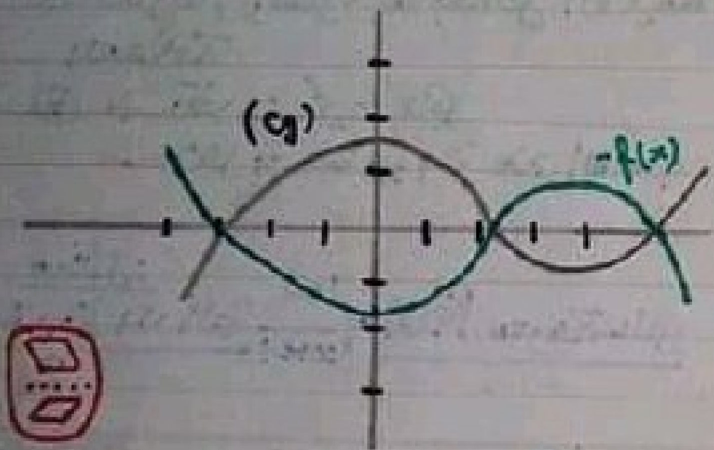


ملاحظة :

لما $g(x) = f(|x|)$ ينطبق عليه من أجل : $x \in]-\infty;0]$ (أي العكس)

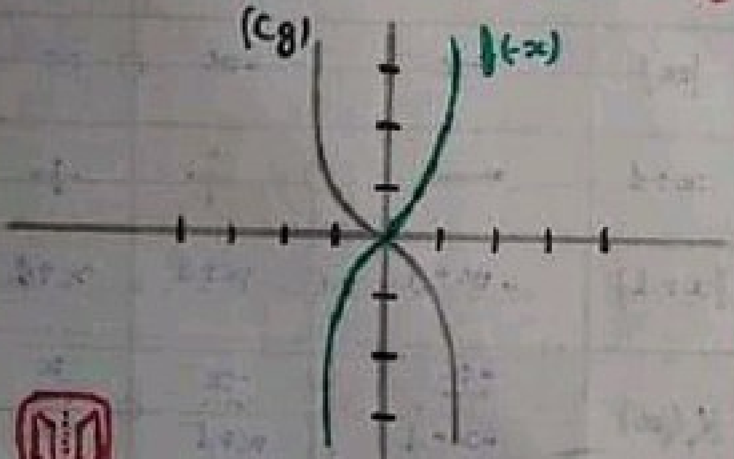
أ- $g(x) = -f(x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل



ب- $g(x) = f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



ج- $g(x) = -f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ