2024

للبكالوريا
العلمي

ACADEMY

مكثفة
الرياضيـــات

إعـداد: MK Academy

by:Hisham Labanieh
099 88 175 22

Kousay Albaba
Majd AlFaqeer

K: 0945856883
M: 0935089230

حالات عدم التعيين

تذكر: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x; & +\infty \text{ عند} \\ -x; & -\infty \text{ عند} \end{cases}$

$\frac{\infty}{\infty}$

نخرج عامل مشترك من البسط و المقام ونختصر ونوجد النهاية.

$+\infty - \infty$

مقدار $f(x) = \sqrt{\square} \pm$

ذهنياً نجذر المسيطر تحت الجذر ونقارنه مع المقدار:

إذا كان نفسو:

نضرب بالمرافق ونقسم عليه ونميز:

- $\frac{\text{عدد}}{\text{مقدار}}$ فالجواب صفر.
- $\frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}}$ نخرج عامل مشترك.

إذا كان مو نفسو:

نخرج x^2 من تحت الجذر عامل مشترك وهمي ثم x من حدود التابع عامل مشترك ثم نأخذ النهاية.

$f(x) = \sqrt{\square} - \sqrt{\square}$

ذهنياً نجذر مسيطر الجذر الأول ومسيطر الجذر الثاني ونميز:

- متشابهان: ضرب بالمرافق والقسمة عليه.
- مختلفان: عامل مشترك x^2 من تحت كل جذر ثم x من حدّي التابع.

حالة $\frac{0}{0}$ أو $0 \times \infty$

دون وجود تابع مثلثي:

نحلل بإستخدام إحدى الطرق التالية

- إخراج عامل مشترك.
- تحليل مباشر.
- تحليل باستخدام Δ
- تحليل باستخدام قسمة إقليدية.
- مطابقات.
- التجميع إلى فئات.
- الضرب بالمرافق والقسمة عليه في حالة وجود جذر.

ثم نختصر ونوجد النهاية

مع وجود تابع مثلثي:

دساتير

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

مبرهنة

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\sin(\square)}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\square}{\sin(\square)} = 1$$

مثال: احسب نهاية كل من التوابع الآتية عند a المعطاة:

① $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad a=+\infty$

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1+0}{1-0}=1$$

② $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x$ $\quad a=-\infty$

هناك عدم تعيين $(\infty-\infty)$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}=\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$

$$x\to-\infty\Rightarrow|x|=-x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\frac{2x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{2}{-1-1}=-1$$

③ $f(x)=\dfrac{x.\sin(x)}{1-\cos(x)}$ $\quad a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x.\sin(x)\,(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x.\sin(x)\,(1+\cos(x))}{1-\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x.\sin(x)\,(1+\cos(x))}{\sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{\sin(x)}(1+\cos(x))$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=1\times(1+1)=2$$

لأن: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin(x)}=1$

④ $f(x)=\dfrac{\sin(3x)-\sin(x)}{\sin(2x)}$ $\quad a=0$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{3x\frac{\sin(3x)}{3x}-x\frac{\sin(x)}{x}}{2x\frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x\left(3\times\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin(x)}{x}\right)}{2x\frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3\times\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin(x)}{x}}{2\times\frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{3\times1-1}{2\times1}=1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

⑤ $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos(x)}{x.\sin(x)}$ $\quad a=0$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{-2\sin\left(\frac{4x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x}{2}\right)}{x.\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-2\sin(2x)\sin(x)}{x.\sin(x)}=\frac{-2\sin(2x)\times2}{2x}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=-4\times1=-4$$

لأن: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

الإحاطة

الحالة ①

f و g و h ثلاث توابع تحقق:

$h(x) \le f(x) \le g(x)$

إذا كان:

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} h(x) = l \\ \lim_{x\to a} g(x) = l \end{cases}$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

سؤال: متى نحن نحصر تابع؟

الجواب: عندما نحصل على $\sin(\infty)$ أو $\cos(\infty)$ أو نهاية تابع يحوي $E(x)$ عند ∞

الحالة ②

f و g تابعان يحققان:

$|f(x) - l| \le g(x)$

إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

الحالة ③

مبرهنة

$f(x) \ge g(x)$

إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

إذا الصغير $+\infty$

الأكبر منه حصراً $+\infty$

$f(x) \le g(x)$

إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

إذا الكبير $-\infty$

الأصغر منه حصراً $-\infty$

سؤال: كيف نبدأ بحصر التابع؟

الجواب: نبدأ من إحدى عناصر الحصر التالية:

$-1 \le \sin(x) \le +1$

$-1 \le \cos(x) \le +1$

$0 \le \sin^2(x) \le +1$

$0 \le \cos^2(x) \le +1$

$0 \le |\sin(x)| \le +1$

$0 \le |\cos(x)| \le +1$

$x - 1 < E(x) \le x$

متتاليات

$-1 \le (-1)^n \le 1$

$n! \ge n$

مثال: احسب نهاية كل من التوابع الآتية عند a المعطاة:

① $f(x)=\dfrac{3E(x)+5}{x-1}$ $\quad a=+\infty$

نعلم أن: $x-1<E(x)\le x$

نضرب بـ(3) $3x-3<3E(x)\le 3x$

نضيف (5) $3x+2<3E(x)+5\le 3x+5$

نقسّم على $(x-1)$ حيث $x-1>0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{3x+2}{x-1}<\frac{3E(x)+5}{x-1}\le\frac{3x+5}{x-1}$$

$$\frac{3x+2}{x-1}<f(x)\le\frac{3x+5}{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

② $f(x)=\dfrac{x+\cos(x)}{3+2\sin(x)}$ $\quad a=+\infty$

$$-1\le\cos(x)\le+1$$

$$\Rightarrow\boxed{x-1\le x+\cos(x)\le x+1}$$

$$-1\le\sin(x)\le+1$$

$$\Rightarrow -2\le 2\sin(x)\le 2\Rightarrow 1\le 3+2\sin(x)\le 5$$

$$\Rightarrow 1\ge\frac{1}{3+2\sin(x)}\ge\frac15\Rightarrow\boxed{\frac15\le\frac{1}{3+2\sin(x)}\le 1}$$

بضرب المتراجحتين:

$$\Rightarrow\frac{x-1}{5}\le\frac{x+\cos(x)}{3+2\sin(x)}\le x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

③ $|2f(x)-3|\le x.\sin\left(\dfrac1x\right)-1$ $\quad a=+\infty$

$$g(x)=x.\frac{1}{x}\,\frac{\sin\left(\frac1x\right)}{\frac1x}-1=\frac{\sin\left(\frac1x\right)}{\frac1x}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1-1=0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim\limits_{x\to+\infty}2f(x)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac32$

مثال: ليكن f معرف على $R\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

أوجد قيمة α التي تحقق الشرط: $x\in]1-\alpha,1+\alpha[$

عندما $f(x)>10^2$

الحل:

$$f(x)>10^2\Rightarrow\frac{x}{(x-1)^2}>10^2$$

$$\Rightarrow x>10^2(x-1)^2\Rightarrow 0>10^2(x-1)^2-x$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2-x=0$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2-x+1-1=0$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2-(x-1)-1=0$$

بفرض $x-1=t$

$$\Rightarrow 10^2t^2-t-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=1-4\times10^2(-1)=401\Rightarrow\sqrt{\Delta}\simeq 20$$

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+20}{2\times100}\simeq 0.1$$

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-20}{2\times100}\simeq -0.1$$

$t=x-1$	$-\infty$		$-0{,}1$		$0{,}1$		$+\infty$
10^2t^2-t-1 $10^2(x-1)^2-x$		+	0	−	0	+	
$10^2t^2-t-1<0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$$t\in]-0.1\,,0.1[\Rightarrow x-1\in]-0.1\,,0.1[$$

$$\Rightarrow x\in]1-0.1\,,1+0.1[\Rightarrow\alpha=0{,}1=\frac{1}{10}$$

نهاية التابع المركب:

لإيجاد النهاية $\lim\limits_{x\to a}f\big(g(x)\big)$

نوجد: $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$

نوجد: $\lim\limits_{x\to b}f(x)=c$

فيكون: $\lim\limits_{x\to a}f\big(g(x)\big)=c$

تذكر: عندما يعطينا $f(x)$ أو u_n ويطلب تعيين عدد A يحقق:

إذا كان: $x>A$ فإن $f(x)\in]a,b[$

نستخدم: $|f(x)-C|<r$

$r_{\text{نصف القطر}}=\dfrac{b-a}{2}$ ، $C_{\text{مركز المجال}}=\dfrac{b+a}{2}$

مثال: ليكن f معرف على $R\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

2) عين قيمة A التي تحقق عندما: $x>A$ يكون:

$$f(x)\in]1.95\,,2.05[$$

الحل:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{5}{1}=5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x))=5$$

2) $|f(x)-C|<r$

$$C=\frac{b+a}{2}=\frac{2.05+1.95}{2}=2$$

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{2.05-1.95}{2}=\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|<\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{3}{x-1}\right|<\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{3}{x-1}<\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 60<x-1\Rightarrow 61<x$$

$$\Rightarrow A=61$$

المقاربات:

1 إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ فإن:

$y=a$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$

2 إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ فإن:

$x=a$ مقارب شاقولي نحو $oy^{\pm}$

3 إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=b$ فإن:

النقطة (a,b) نقطة مقاربة.

4 إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ فإنه:

نتوقّع وجود مقارب مائل.

المقارب المائل: معادلته: $y = ax + b$

① إثبات أن $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C للتابع f

1) نوجد $f(x) - y_\Delta$

2) نبسط الشكل

3) نوجد:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - y_\Delta)$$

ويجب أن يكون الجواب 0

② استنتاج مستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل:

إذا أخذنا:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b))$$

وكان الجواب 0

نستنتج أن:

$\Delta; y = ax + b$

مقارب مائل للخط C في جوار ∞

③ إيجاد معادلة المقارب المائل:

تابع كسري ودرجة البسط أعلى من درجة المقام بدرجة واحدة:

نجري قسمة إقليدية ونتذكر أن:

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

فيكون الناتج $\Delta: y = ax + b$ هو المقارب المائل ونثبت ذلك.

$$f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

(كثير حدود من درجة الثانية)

نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية فيصبح التابع:

$$f(x) = \sqrt{(ax+b)^2 + \text{عدد}}$$

نستنتج أن $\Delta: y = |ax + b|$ المقارب المائل ونثبت ذلك:

- عند $+\infty$: $\Delta: y = ax + b$
- عند $-\infty$: $\Delta: y = -ax - b$

تعيين الثوابت a و b

عندما نحصل على نهاية لـ f من الشكل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

نتوقع وجود مقارب مائل:

$\Delta: y = ax + b$

لحساب a: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

لحساب b: $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$

لا تحتاج إلى إثبات

مثال ①: ليكن f تابع معرف على R وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أثبت وجود عدد حقيقي يحقق: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

وأن: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$

3) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C عند $-\infty$

الحل:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1=a$$

$$f(x)+x=\sqrt{x^2+2x+4}+x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$\Rightarrow f(x)+x=\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$\Rightarrow f(x)+x=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$\Rightarrow f(x)+x=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)+x=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\frac{2}{-2}=-1=b$$

3) نستنتج أن المقارب المائل: $\Delta: y=ax+b$

$$\Rightarrow \Delta: y=-x-1$$

مثال ②: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\sqrt{4x^2-8x+10}$$

1) اكتب $4x^2-8x+10$ بالصيغة القانونية.

2) استنتج Δ المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$.

3) استنتج وضع C مع Δ

الحل:

1) $4x^2-8x+10=4(x^2-2x)+10$

$$4(x^2-2x+1-1)+10=4((x-1)^2-1)+10$$

$$4(x-1)^2-4+10=4(x-1)^2+6$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2+6=(2x-2)^2+6$$

2) $f(x)=\sqrt{(2x-2)^2+6}$

نفرض $\Delta: y=2x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(2x-2)^2+6}-(2x-2)$$

هناك عدم تعيين $+\infty-\infty$

بعد الضرب بالمرافق و القسمة عليه:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{6}{\sqrt{(2x-2)^2+6}+(2x-2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

3) ندرس إشارة:

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(2x-2)^2+6}-(2x-2)$$

$$\sqrt{(2x-2)^2+6}-(2x-2)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2x-2)^2+6}=(2x-2)$$

نربع الطرفين بشرط: $2x-2\geq 0$ أي: $x\geq 1$

$$(2x-2)^2+6=(2x-2)^2 \Rightarrow 6\neq 0$$

مستحيلة الحل، بتجريب قيمة $x=1$ بالمقدار $f(x)-y_\Delta$

نلاحظ: $f(x)-y_\Delta>0$

C فوق Δ

الاستمرار

نقول أن f مستمر عند a إذا تحقق:

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

مثال ①: ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\tan(x)}{2x}-\dfrac{1}{2} & ;x\neq 0\\ 1 & ;x=0\end{cases}$$

أثبت أن f مستمر على R

الحل:

f مستمر على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

حتّى يكون f مستمر عند 0 يجب أن يحقق:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{\sin(x)}{x.\cos(x)}-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}\times 1-\frac{1}{2}=1$$

$$\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

f مستمر عند 0 فهو مستمر على R

مثال ②: f معرف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R؟

الحل:

بما أن f مستمراً على R نجد أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$f(0)=m$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x^2(\cos(x)+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\cos^2(x)-1}{x^2(\cos(x)+1)}=\frac{-\sin^2(x)}{x^2(\cos(x)+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.\frac{\sin(x)}{x}.\frac{-1}{(\cos(x)+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\times 1\times\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

مثال ③: ليكن f معرف على $[0,2]$ وفق:

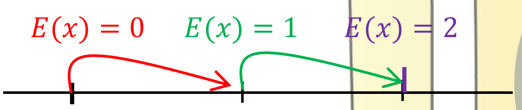
$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (أي لا تحوي $E(x)$)

2) أثبت أن f مستمر على $[0,2]$

الحل:

1)



$$f(x)=\begin{cases}0+(x-0)^2 & ;x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & ;x\in[1,2[\\ 2+(2-2)^2=2 & ;x=2\end{cases}$$

2) ندرس استمرار f عند $x=1$

$$f(1)=1+(1-1)^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0+(1-0)^2=1$$

$$\Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

فالتابع f مستمر عند $x=1$

ندرس استمرار f عند $x=2$

$$f(2)=2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=1+(2-1)^2=2$$

$$\Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

فالتابع مستمر عند $x=2$

إذا: التابع مستمر على $[0,2]$

ورقة العمل اليدوية في بحث النهايات

السؤال الأول:

جد نهاية التابع f عند a الموافقة:

① $|2f(x)+3| \leq \dfrac{3x-E(x)}{x^2+1}$ $\qquad a=+\infty$

② $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x^3-1}$ $\qquad a=1$

③ $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$ $\qquad a=-\infty$

④ $f(x)=\dfrac{|\sin(x)|-3}{x}$ $\qquad a=+\infty$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x)=\frac{1}{3+\cos(x)}$$

1) أثبت أن f محدود.

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+\cos(x)}$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{|9x^2-1|}$$

1) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أثبت أن $\Delta: y=4x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

3) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

2) عيّن قيمة α التي تحقق:

$f(x)>10^6$ عندما $x\in]1-\alpha,1+\alpha[$

السؤال الخامس:

ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x+3}{x-3}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to5}f(x)$

2) عيّن مجالاً I مركزه 5 ويحقق الشرط:

أياً كانت $x\in I$ فإن $f(x)\in]3.95\,,4.05[$

حل ورقة العمل اليدوية لبحث النهايات

السؤال الأول:

① $|2f(x)+3| \le \dfrac{3x-E(x)}{x^2+1} \qquad a=+\infty$

$$g(x)=\frac{3x-E(x)}{x^2+1}$$

$$x-1<E(x)\le x$$

$$-x+1>-E(x)\ge -x$$

$$2x+1>3x-E(x)\ge 2x$$

$$\frac{2x+1}{x^2+1}>\frac{3x-E(x)}{x^2+1}\ge\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$

② $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x^3-1} \qquad a=1$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+7}-3\right)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}{(x^3-1)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+x+7-9}{(x^3-1)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x^3-1)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+x+7}+3\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} f(x)=\frac{3}{3\times 6}=\frac{1}{6}$$

③ $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x \qquad a=-\infty$

حالة عدم تعيين $(+\infty-\infty)$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x}$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}$$

عندما $x\to-\infty$ فإن $|x|=-x$

$$f(x)=\frac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}=\frac{-x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{2}$$

④ $f(x)=\dfrac{|\sin(x)|-3}{x} \qquad a=+\infty$

$$0\le|\sin(x)|\le1$$

$$-3\le|\sin(x)|-3\le-2$$

$$-\frac{3}{x}\le\frac{|\sin(x)|-3}{x}\le-\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

السؤال الثاني:

1) $-1\le\cos(x)\le1$

$$2\le3+\cos(x)\le4$$

$$\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3+\cos(x)}\ge\frac{1}{4}$$

f محدود من الأدنى بالعدد $\frac{1}{4}$ ومحدود من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$

(2 $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+\cos(x)} \ge \frac{1}{4}$

نضرب بـx^2 حيث $x^2 > 0$

$$\frac{x^2}{2} \ge \frac{x^2}{3+\cos(x)} \ge \frac{x^2}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+\cos(x)} = +\infty$

السؤال الثالث:

(1 $f(x) = x + \sqrt{|9x^2-1|}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(2 $f(x) - y_\Delta = \sqrt{|9x^2-1|} - 3x$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta)$$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\left(\sqrt{|9x^2-1|} - 3x\right)\left(\sqrt{|9x^2-1|} + 3x\right)}{\sqrt{|9x^2-1|} + 3x}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{|9x^2-1| - 9x^2}{\sqrt{|9x^2-1|} + 3x}$$

عندما $x \to +\infty$ فإن: $|9x^2-1| = 9x^2-1$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{9x^2-1-9x^2}{\sqrt{|9x^2-1|} + 3x} = \frac{-1}{\sqrt{|9x^2-1|} + 3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

إذاً المستقيم $\Delta: y = 4x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

(3 الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{|9x^2-1|} - 3x$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{|9x^2-1|} - 3x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{|9x^2-1|} = 3x$$

نربع الطرفين مع ذكر الشرط: $\mathbf{3x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0}$

$$|9x^2-1| = 9x^2$$

نميّز حالتين:

الحالة الأولى: $|9x^2-1| = 9x^2-1$

$\Rightarrow 9x^2 - 1 = 9x^2 \Rightarrow -1 \ne 0$ مستحيلة

الحالة الثانية: $|9x^2-1| = -9x^2+1$

$$\Rightarrow -9x^2+1 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{18}$$

إما: $x = \frac{1}{3\sqrt{2}} > 0$ مقبول

أو: $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}} < 0$ مرفوض

x	$-\infty$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C		Δ تحت C

نقطة تقاطع: $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

السؤال الرابع:

(1 $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

(2 $f(x) > 10^6$

$$\frac{4}{(x-1)^2} > 10^6 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{10^6}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 < \frac{4}{10^6} \Rightarrow |x-1| < \frac{2}{10^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{10^3} < x - 1 < \frac{2}{10^3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{10^3} < x < 1 + \frac{2}{10^3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{10^3}$$

السؤال الخامس:

(1 $\lim_{x\to5} f(x) = \frac{8}{2} = 4$

(2 $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x-3 \\ -x \pm 3 & 1 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$\frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$3.95 < f(x) < 4.05$$

$$3.95 < 1 + \frac{6}{x-3} < 4.05$$

$$2.95 < \frac{6}{x-3} < 3.05 \Rightarrow \frac{2.95}{6} < \frac{1}{x-3} < \frac{3.05}{6}$$

$$\frac{6}{2.95} > x - 3 > \frac{6}{3.05} \Rightarrow 2.03 > x - 3 > 1.97$$

$$5.03 > x > 4.97 \Rightarrow I \in]4.97\,, 5.03[$$

ورقة عمل منزلية في بحق النهايات

السؤال الأول:

جد نهاية التابع f عند a الموافقة:

① $f(x) = -3 + \dfrac{\cos^2(x)}{x-1}$ $\quad a = +\infty$

② $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}$ $\quad a = 3$

③ $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - x$ $\quad a = +\infty$

④ $f(x) = \dfrac{\cos(5x) - \cos(x)}{x.\cos(x)}$ $\quad a = 0$

⑤ $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4}-2}$ $\quad a = 0$

السؤال الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

3) عين قيمة A التي تحقق عندما $x > A$ فإن:

$f(x) \in]0.9\,, 1.1[$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin(x)}{x}$$

1) أثبت أن: $f(x) \geq \frac{x^2-1}{x}$

2) استنتج نهاية f عند $+\infty$ واحسب نهاية التابع عند 0

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

هل f مستمر عند الـ0؟

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1 + \cos^2(x)}{x}$$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

2) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

حل ورقة العمل المنزلية في بحث النهايات

السؤال الأول:

$$① \; f(x) = -3 + \frac{\cos^2(x)}{x-1} \qquad a = +\infty$$

$$0 \le \cos^2(x) \le 1$$

عند $+\infty$:

$$x - 1 > 0$$

$$0 \le \frac{\cos^2(x)}{x-1} \le \frac{1}{x-1}$$

$$-3 \le -3 + \frac{\cos^2(x)}{x-1} \le -3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-3) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3 + \frac{1}{x-1}\right) = -3$$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$

$$② \; f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \qquad a = 3$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{-(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{-1}{4}$$

$$③ \; f(x) = \sqrt{4x^2+1} - x \qquad a = +\infty$$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x$$

عندما $x \to +\infty$ فإن $|x| = x$

$$f(x) = x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(2-1) = +\infty$$

$$④ \; f(x) = \frac{\cos(5x) - \cos(x)}{x.\cos(x)} \qquad a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-2\sin(3x)\sin(2x)}{x.\cos(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 \times 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = -2 \times 3 \times 1 \times 0 = 0$$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$⑤ \; f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4}-2} \qquad a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin(3x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 3 \times 1 \times 4 = 12$$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

السؤال الثاني:

(1
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$$

(2
$$\lim_{x\to1} f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = 2$$

(3
$$|f(x) - C| < r$$

$$C = \frac{b+a}{2} = \frac{1.1+0.9}{2} = 1$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{1.1-0.9}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x} > 10$$

$$\Rightarrow x > 100 \Rightarrow A = 100$$

السؤال الثالث:

1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$1 \geq -\sin(x) \geq -1$$

$$x^2+1 \geq x^2-\sin(x) \geq x^2-1$$

نقسّم على x حيث $x > 0$ عندما $x \in]0,+\infty[$

$$\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{x^2-\sin(x)}{x} \geq \frac{x^2-1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{x^2-1}{x}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{\sin(x)}{x} = x - \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 1 = -1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

السؤال الرابع:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\Leftarrow$ f مستمر عند الـ(0)

السؤال الخامس:

1) $f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2+1+\cos^2(x)}{x} - 2x$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2+1+\cos^2(x)-2x^2}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{1+\cos^2(x)}{x}$$

$$0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

$$1 \leq 1+\cos^2(x) \leq 2$$

نقسّم على x حيث $x < 0$ في جوار $-\infty$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1+\cos^2(x)}{x} \geq \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Leftarrow$ $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

2) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \frac{1+\cos^2(x)}{x} \neq 0$$

x	$-\infty$			0
$1+\cos^2(x)$		$+$	$+$	$+$
x		$-$	$-$	0
$f(x) - y_\Delta$		$-$	$-$	$\Vert$
الوضع النسبي		C تحت Δ		$\Vert$

الإشتقاق

قواعد الإشتقاق

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x).h(x)-h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$
$g(x).h(x)$	$g'(x).h(x)+h'(x).g(x)$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(g(x))$	$g'(x).\cos(g(x))$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(g(x))$	$-g'(x)\sin(g(x))$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$a(f(x))^n$	$a.n.(f(x))^{n-1}f'(x)$

معادلة المماس

شكلها:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

نحتاج إلى:

① نقطة التماس: $(a,f(a))$ أو (x_0,y_0)

② ميل: $m=f'(a)$

حالات إيجاد نقطة التماس:

① نقطة التقاطع مع محور الفواصل

$\Rightarrow f(x)=0$

نحل المعادلة: $x=a$

تكون a هي فاصلة نقطة التماس

② نقطة التقاطع مع محور التراتيب

$\Rightarrow x=0$

هي فاصلة نقطة التماس

③ مماس ميله m

$\Rightarrow f'(x)=m$

نحل المعادلة: $x=a$

تكون a هي فاصلة نقطة التماس

قابلية الإشتقاق

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\boxed{}$$

نميّز:

$\boxed{}=$ عدد $\neq 0$

f إشتقاقي عند a

$\Rightarrow f'(a)=\boxed{\text{عدد}}$

التأويل الهندسي:

C_f يقبل مماساً مائلاً عند a ميله:

$m=\boxed{\text{عدد}}$

$\boxed{}=0$

f إشتقاقي عند a

$\Rightarrow f'(a)=0$

التأويل الهندسي:

C_f يقبل مماساً أفقياً عند a معادلته:

$y=f(a)$

$\boxed{}=\infty$

f غير إشتقاقي عند a

$f'(a) \Leftarrow$ غير معرّف

التأويل الهندسي:

C_f يقبل مماساً شاقولياً عند a معادلته:

$x=a$

حالات إيجاد الميل:

① معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها a

$\Rightarrow m=f'(a)$

② معادلة المماس الأفقي:

$\Rightarrow m=0$

③ معادلة المماس الموازي لمستقيم Δ:

$\Delta: y=ax+b$

$\Rightarrow m_\Delta=m_T=a$

④ معادلة المماس الذي يعامد المستقيم Δ:

$\Delta: y=ax+b$

$\Rightarrow m_T=-\frac{1}{m_\Delta}=-\frac{1}{a}$

⑤ مماس مار من نقطتين:

$A(x_A,y_A)\,,B(x_B,y_B)$

$\Rightarrow m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

تتمّة مخطط الإشتقاق

نهاية حسب تعريف العدد المشتق

إذا عطانا تابع f وطلب:

$f'(a)\,,f'(x)\,,f(a)$

ثم طلب حساب نهاية تذكر أن:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=f'(a)$$

مشتق تابع مركّب

$$\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x)).g'(x)$$

التقريب التآلفي المحلّي

$$f(a+h)\simeq f(a)+h.f'(a)$$

لحساب:

$f(a,b)$

$a=a\ ,\quad h=0,b$

دراسة زوجية أو فردية تابع

الشرط الأول:

أياً كانت $x\in D_f$ فإن: $-x\in D_f$

الشرط الثاني:

نأخذ $f(-x)$ ونميّز:

- $f(-x)=f(x)$ التابع زوجي و C_f متناظر بالنسبة للمحور yy'
- $f(-x)=-f(x)$ التابع فردي و C_f متناظر بالنسبة للمبدأ

التابع الدوري

الشرط الأول: (في حالة الدور هو $a\pi$)

أياً كانت $x\in D_f$ فإن: $x+a\pi\in D_f$

الشرط الثاني:

$$f(x+a\pi)=f(x)$$

خطوات دراسة تغيرات تابع f:

1) نوجد مجموعة تعريف التابع إن لم تكن موجودة في نص السؤال
2) نوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف ونستنتج المقاربات الأفقية والشاقولية.
3) نشتق التابع.
4) ندرس إشارة المشتق.
5) نعين القيم الحدية إن وجد.
6) ننظم جدولاً بتغيرات التابع.

خطوات الرسم:

1) نرسم المقاربات
2) نعين النقاط المقاربة.
3) نعين القيم الحدية.
4) نوجد نقاط تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل (نحل المعادلة $f(x)=0$) ومع محور التراتيب $(f(0))$.
5) نرسم التابع بالإستفادة من جدول التغيرات.

مثال: (دورة 2023 تمرين ثاني لطلب الأول)

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

أثبت أن $f(x)=\frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$

الحل:

$$f'(x)=\frac{2x.\sqrt{x^4+1}-\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}.x^2}{x^4+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4x(x^4+1)-4x^5}{2\sqrt{x^4+1}(x^4+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^5+4x-4x^5}{2\sqrt{x^4+1}(x^4+1)}=\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}(x^4+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)=\frac{x}{2}(1+x^4).\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}(x^4+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)=f(x)$$

مثال: أوجد مشتق التابع الآتي على R^*:

$$f(x)=x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

$$f'(x)=1.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right).x\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

مشتق تابع مركّب:

مثال 1: ليكن f تابع معرف على R وفق:

$$f(x)=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

1) أوجد $f'(x)$

2) استنتج مشتق $g(x)=\frac{3\sin(x)+5}{\sin^2(x)+1}$ و $h(x)=\frac{3\sqrt{x}+5}{x+1}$

الحل:

1) $f'(x)=\frac{3(x^2+1)-2x(3x+5)}{(x^2+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2+3-6x^2-10x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-3x^2-10x+3}{(x^2+1)^2}$$

2) $g(x)=f(\sin(x))$

$$g'(x)=f'(\sin(x)).(\sin(x))'$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-3\sin^2(x)-10\sin(x)+3}{(\sin^2(x)+1)^2}.\cos(x)$$

$$h(x)=f(\sqrt{x})\Rightarrow h'(x)=f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-3x-10\sqrt{x}+3}{(x+1)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-3x-10\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

مثال 2: ليكن لدينا التابع: $f(x)=\frac{|x|+8}{2x-4}$

1) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين واستنتج معادلة نصف المماس عند الصفر من اليمين.

2) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار واستنتج معادلة نصف المماس عند الصفر من اليسار.

3) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

الحل:

1) في حالة $x>0$ فإن: $|x|=x$

$$f(x)=\frac{x+8}{2x-4}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+8}{2x-4}+2}{x}=\frac{x+8+4x-8}{x(2x-4)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{5x}{x(2x-4)}=\frac{5}{2x-4}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{5}{2x-4}=-\frac{5}{4}$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر من اليمين ونصف المماس المائل:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{5}{4}(x-0)-2\Rightarrow y=-\frac{5}{4}x-2$$

2) في حالة $x < 0$ فإن: $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{-x+8}{2x-4}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{-x+8}{2x-4}+2}{x} = \frac{-x+8+4x-8}{x(2x-4)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{3x}{x(2x-4)} = \frac{3}{2x-4}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{2x-4} = -\frac{3}{4}$$

f قابل للإشتقاق عند الصفر من اليسار ونصف المماس المائل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}(x-0) - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2$$

3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow -\frac{5}{4} \neq -\frac{3}{4}$

فالتابع f غير قابل للإشتقاق عند الصفر.

مثال ③: f معرف على $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x+5}$$

1) احسب $f(2)$ و $f'(2)$

2) استنتج $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$

3) احسب القيمة التقريبية لـ$f(2,1)$

الحل:

1) $f(2) = \sqrt{4+5} = 3$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{4+5}} = \frac{1}{3}$$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{1}{3}$

3) $f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a)$

$$a = 2 \ , \ h = 0{,}1 = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow f(2{,}1) \simeq 3 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} \simeq 3 + \frac{1}{30} \simeq \frac{91}{30}$$

مثال ④: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \cos(x)$$

أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$ وأثبت بالتدريج مهما كان $n \geq 1$ أن: $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

الحل:

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

نسمّي القضية: $E(n): f^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

نثبت صحة: $E(1): f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ محققة

نفرض صحّة: $E(n): \boxed{f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$ ... *

نثبت صحة:

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

نبدأ من *: $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

نشتق: $\left(f^{(n)}(x)\right)' = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت $n \geq 1$

مثال ⑤: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+3}{x+1}$$

عيّن a و b علماً أن التابع f يقبل قيمة حديّة عند (-2) قيمتها (-1)

الحل:

$$f(-2)=-1$$

$$\Rightarrow \frac{4a-2b+3}{-1}=-4a+2b-3$$

$$\Rightarrow -4a+2b-3=-1 \Rightarrow -4a+2b=2$$

$$\Rightarrow \boxed{b-2a=1}\ldots *$$

قيمة حدّية $\Leftarrow f'(-2)=0$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(-2)=\frac{(-4a+b)(-1)-(4a-2b+3)}{(-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{4a-b-4a+2b-3}{1}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=b-3=0 \Rightarrow b=3$$

نعوض في $(*)$: $3-2a=1 \Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

مثال ⑥: اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع $f(x)=\sqrt{2x+3}$ في نقطة ميل المماس عندها (1)

الحل:

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+3}}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+3}=1 \Rightarrow 2x+3=1 \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=1$$

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$\Rightarrow y=1(x+1)+1 \Rightarrow y=x+2$$

مثال ⑦: ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

1) أوجد $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$ ثم استنتج وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$

2) أثبت أن $\Delta_2: y=x-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

3) ادرس تغيرات f وأثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α وتحقق أن $\alpha=0$

4) ارسم كلّاً من Δ_1 و Δ_2 ثم ارسم C_f

الحل:

(1 $$f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$$

$$\Rightarrow f(x)-(x+1)=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

عندما $x\to+\infty$ فإن: $|x|=x$

$$\Rightarrow f(x)-(x+1)=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

$$\Rightarrow f(x)-(x+1)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=1-1=0$$

نستنتج أن $\Delta_1: y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

(2 $$f(x)-(x-1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1$$

$$\Rightarrow f(x)-(x-1)=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

عندما $x\to-\infty$ فإن: $|x|=-x$

$$\Rightarrow f(x)-(x-1)=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$$\Rightarrow f(x)-(x-1)=\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=-1+1=0$$

$\Leftarrow \Delta_2: y=x-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x): \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=x+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

عندما $x\to+\infty$ فإن: $|x|=x$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to-\infty} f(x) : \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

عندما $x \to -\infty$ فإن: $|x| = -x$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = x + \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.x}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$+++$	$++++$	$+++$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f معرف ومتزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$

$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]-\infty,+\infty[$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

4) لرسم $\Delta_1 : y = x + 1$

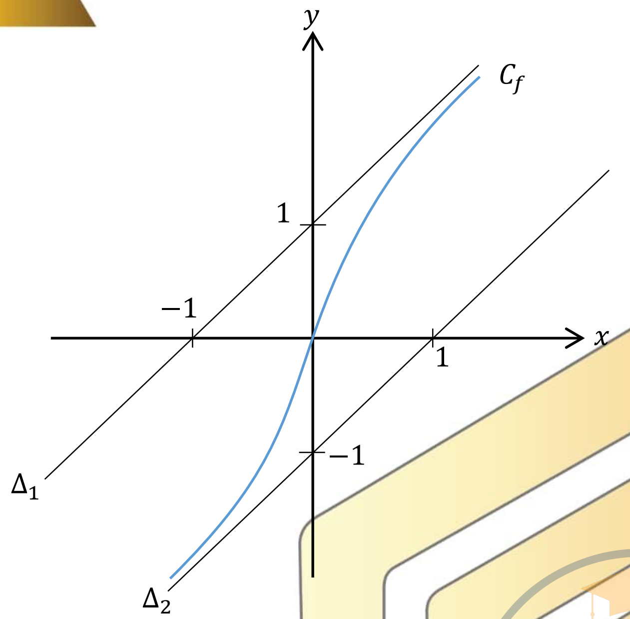
x	-1	0
y	0	1

لرسم $\Delta_2 : y = x - 1$

x	1	0
y	0	-1

نقطة تقاطع التابع مع محور التراتيب نحسب $f(0)$

$$f(0) = 0 + \frac{0}{\sqrt{0+9}} = 0$$



مثال (8): ليكن لدينا الجدول الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1) أوجد D_f و $f(D_f)$ (المستقر الفعلي)

2) أوجد معادلة المقارب الأفقي للخط C

3) اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 3

4) أوجد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

5) ما عدد حلول المعادلة $f(x) - 1 = 0$

6) أوجد $f(]-\infty,3])$

الحل:

1) $D_f =]-\infty,+\infty[$

$f(D_f) =]-\infty,3[$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

$\Rightarrow y = 3$ مقارب أفقي لـ C

3) $x = 3$ مماس شاقولي

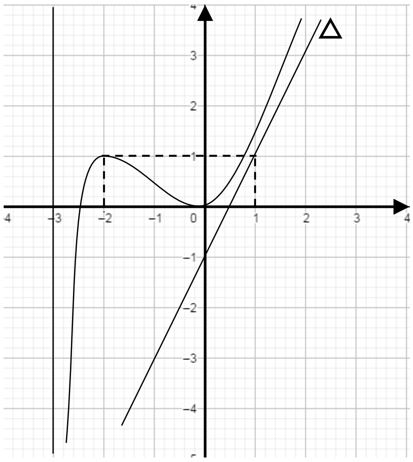
4) $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-2,3[$

5) $f(x) = 1$ لها ثلاثة حلول

6) $f(]-\infty,3]) = [-1,3[$

مثال (9): فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-3,+\infty[$

المطلوب:



1) احسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f'(-2)$

2) احسب $\lim_{x\to-3^+} f(x)$ وما التأويل الهندسي للنتيجة

3) أوجد ميل Δ

4) ما حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

5) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

6) أوجد $f([-2,0])$

7) دل على القيم الحدية وبيّن نوعها.

الحل:

1) $f(-2) = 1 \quad , \quad f(0) = 0$

$f'(-2) = 0$ (قيمة حدّية)

2) $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$

$x = -3$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

3) نختار نقطتين من Δ $\quad A(0,-1) \; , \; B(1,1)$

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-(-1)}{0-1} = \frac{1+1}{1-0}$$

$\Rightarrow m = 2$

4) $f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-2,0]$

5) $f(x) = 1$ حلّان.

6) $f([-2,0]) = [0,1]$

7) $f(0) = 0$ قيمة حدّية صغرى

$f(-2) = 1$ قيمة حدّية كبرى

ورقة عمل يدوية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$$

هل f اشتقاقي عند 2؟

السؤال الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = e^{2x}$$

أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم أثبت بالتدريج $f^{n}(x) = 2^{n}e^{2x}$ حيث $n \geq 1$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1) أثبت أن f اشتقاقي عند $x = 0$

2) احسب $f'(x)$ 3) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$$

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً يقع في المجال $]1,2[$

3) استنتج مشتق التابع g المعرف وفق:

$$g(x) = 2\sin(x) - \sqrt{\sin^2(x)+5}$$

السؤال الخامس:

ليكن التابع f المعرف وفق: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+4}-2}{x}$

1) نفرض $g(x) = \sqrt{x^2-3x+4}$ أوجد $g(0)$ و $g'(0)$ ثم استنتج نهاية $f(x)$ عند 0

2) اكتب معادلة المماس عند $x = 0$

السؤال السادس:

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

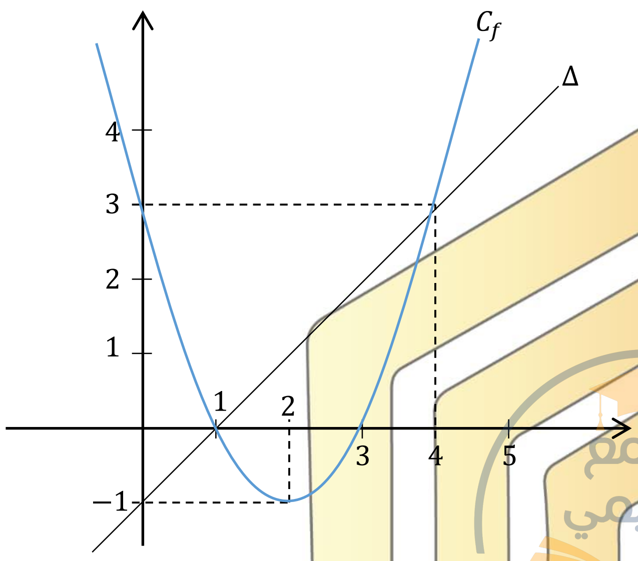
1) أثبت أن f تابع زوجي وبيّن الصفة التناظرية.

2) أثبت أن f تابع دوري ويقبل 2π دوراً له.

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R:



1) دل على القيمة الحديّة الصغرى للتابع f

2) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$

4) اكتب معادلة المستقيم Δ.

5) أوجد $f([1,3])$

6) ما هي حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

السؤال الثامن:

في الجدول الذي يمثل تغيرات f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

2) ما عدد القيم الحدية للتابع f

3) اكتب معادلة المماس للتابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$

4) أوجد $f(]0,1])$

5) ما هي حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

6) أوجد المستقر الفعلي.

حل ورقة العمل اليدوية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

$$f(2) = 2\sqrt{2(2-2)} = 0$$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}-0}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{-(2-x)} = \frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2\sqrt{2}}{-0} = -\infty$$

f غير اشتقاقي عند $x = 2$

السؤال الثاني:

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

نسمّي القضية: $E(n): f^{n}(x) = 2^{n}e^{2x}$

نثبت صحة $E(1)$:

$$E(1): f'(x) = 2e^{2x}$$

محققة

نفرض صحّة $E(n)$

$$E(n): f^{n}(x) = 2^{n}e^{2x} \ldots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1): f^{n+1}(x) = 2^{n+1}e^{2x}$$

$$f^{n+1}(x) = \left(f^{n}(x)\right)' = 2^{n}\times 2e^{2x} = 2^{n+1}e^{2x}$$

محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل أياً كانت $n \geq 1$

السؤال الثالث:

1) $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

في حالة $x > 0$

$$-x \leq x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

في حالة $x < 0$

$$-x \geq x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x) = \lim_{x\to 0^-}(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

f اشتقاقي عند الصفر

2) $$f'(x) = 2x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) هناك عدم تعيين $(\infty \times 0)$

$$f(x) = x\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

السؤال الرابع:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$

$$f(x) = \left(2x - |x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

عندما $x\to+\infty$ فإن: $|x| = x$

$$f(x) = \left(2x - x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right) = x\left(2-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(2-1) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+5}-x=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+5} = x \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = \frac{x}{2}$$

نربّع الطرفين، بشرط: $\frac{x}{2}>0 \Rightarrow x>0$

$$x^2+5 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2+20 = x^2 \Rightarrow 3x^2+20=0$$

$\Rightarrow x^2 = -\frac{20}{3}$ مستحيلة

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$$f(1) = 2-\sqrt{6} < 0$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(1)\times f(2) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ضمن المجال $]1,2[$

3) g اشتقاقي على R

$$g(x) = f(\sin(x))$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(\sin(x)).(\sin(x))'$$

$$g'(x) = \frac{\left(2\sqrt{\sin^2(x)+5}-\sin(x)\right)}{\sqrt{\sin^2(x)+5}}.\cos(x)$$

السؤال الخامس:

1) $g(0) = 2$

$$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$g'(0) = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = -\frac{3}{4}$$

2) C يقبل مماساً مائلاً عند $x=0$ ميله $m=-\frac{3}{4}$

$$y = g'(0)(x-0)+g(0)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x+2$$

السؤال السادس:

1) أياً كانت $x\in]-\infty,+\infty[$ كان: $-x\in]-\infty,+\infty[$

$$f(-x) = \cos(-x)+\sin^2(-x)$$
$$= \cos(x)+\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

f زوجي ومتناظر لمحور yy'

2) أياً كانت $x\in]-\infty,+\infty[$ كان: $x+2\pi\in]-\infty,+\infty[$

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)+\sin^2(x+2\pi)$$

$$\Rightarrow f(x+2\pi) = \cos(x)+\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow f(x+2\pi) = f(x)$$

f دوري

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,\pi]$

$$f(0)=1 \quad , \quad f(\pi)=-1$$

$$f'(x)=-\sin(x)+2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x)=\sin(x)\left(-1+2\cos(x)\right)$$

$$f'(x)=0$$

إمّا: $\sin(x)=0 \Rightarrow x=\pi k$

عند $k=0$ يكون $x=\pi(0) \Rightarrow x=0$

$$f(0)=1$$

عند $k=1$ يكون $x=\pi(1) \Rightarrow x=\pi$

$$f(\pi)=-1$$

أو: $2\cos(x)=1 \Rightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

عند $k=0$ يكون $x=\frac{\pi}{3}+2\pi(0)=\frac{\pi}{3}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

عند $k=1$ يكون $x=\frac{\pi}{3}+2\pi \notin D_f$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

السؤال السابع:

1) $f(2)=-1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3) عدد الحلول هو عدد مرّات التقاطع بين C_f و y_Δ أي: حلّين.

4) $A(1,0)\ ,\ B(4,3)$

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-0}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$\Rightarrow y-0=1(x-1) \Rightarrow \Delta: y=x-1$$

5) $f([1,3])=[-1,0]$

6) $f(x)\geq 0 \Rightarrow x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

السؤال الثامن:

1) حل وحيد

2) قيمة حدّية واحدة: $f(1)=1$

3) $x=1$

$f(1)=1\ ,\ f'(1)=0$ (مماس أفقي)

معادلته: $y=y_0 \Rightarrow y=1$

4) $f(]0,1])=]-\infty,1]$

5) $f'(x)<0 \Rightarrow x\in]1,+\infty[$

6) $f(]0,+\infty[)=]-\infty,1]$

ورقة عمل منزلية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

اشتق كلّاً من التوابع الآتية:

① $f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^4$

② $f(x) = \sin\left(\frac{3x+1}{x+5}\right)$

③ $f(x) = x.\cos(\sqrt{x})$

السؤال الثاني:

① ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

1) بفرض $g(x) = \tan(x)$، أوجد $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2) استنتج نهاية f عند $\frac{\pi}{4}$

② ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 1}{x - \pi}$$

1) بفرض $g(x) = \cos(x)$، أوجد $g(\pi)$ و $g'(\pi)$

2) استنتج نهاية f عند π

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x + 1}$$

1) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين واشرح التأويل الهندسي.

2) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار واشرح التأويل الهندسي.

3) هل f قابل للاشتقاق عند الصفر؟

السؤال الرابع:

اكتب معادلة المماس عند α في كل من الحالات الآتية:

① $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

α فاصلة نقطة تقاطع f مع محور الفواصل.

② $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

α فاصلة نقطة تقاطع f مع محور التراتيب.

السؤال الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $R\backslash\{2\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

1) أوجد مشتق التابع f

2) استنتج مشتق التوابع الآتية:

$$g(x) = \frac{x + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$h(x) = \frac{\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1}{\cos(x) - 2}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

① $f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^4$

$$f'(x) = 4(3x^2 + 2x + 7)^3(6x + 2)$$

② $f(x) = \sin\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$

$$f'(x) = \frac{3(x + 5) - 1(3x + 1)}{(x + 5)^2} . \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x + 15 - 3x - 1}{(x + 5)^2} . \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{14}{(x + 5)^2} . \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

③ $f(x) = x.\cos(\sqrt{x})$

$$f'(x) = 1.\cos(\sqrt{x}) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sin(\sqrt{x})\right).x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2}.\sin(\sqrt{x})$$

السؤال الثاني:

① 1) $g(x) = \tan(x)$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

② 1) $g(x) = \cos(x)$

$$g(\pi) = -1$$

$$g'(x) = -\sin(x) \Rightarrow g'(\pi) = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi) = 0$

السؤال الثالث:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x + 1}$$

1) عندما $x > 0$ فإن: $|x| = x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 + x}{x + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 + x}{x(x + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(x + 1)}{x(x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليمين ويقبل نصف مماس مائل عند الصفر من اليمين ميله $m = 1$

2) عندما $x < 0$ فإن: $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 - x}{x + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 - x}{x(x + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليسار ويقبل نصف مماس مائل عند الصفر من اليسار ميله $m = -1$

3) التابع غير اشتقاقي عند الصفر لأن:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

السؤال الرابع:

$$① \ f(x)=\frac{x+3}{x+1}$$

نقطة التقاطع مع محور فواصل: $f(x)=0$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x+1}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$f(-3)=0$$

$$f'(x)=\frac{1(x+1)-1(x+3)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x-3}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(-3)=-\frac{1}{2}$$

$$y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x+3)+0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$② \ g(x)=\sqrt{2x^2+1}$$

نقطة التقاطع مع محور التراتيب: $x=0$

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f'(0)=0$$

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$\Rightarrow y=1$$

السؤال الخامس:

(1 $f'(x)=\frac{(2x+3)(x-2)-1(x^2+3x+1)}{(x-2)^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x^2-4x+3x-6-x^2-3x-1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x-7}{(x-2)^2}$$

(2 $g(x)=f(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{x-4\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x-4\sqrt{x}-7}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$h(x)=f(\cos(x))$$

$$\Rightarrow h'(x)=f'(\cos(x)).(\cos(x))'$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\cos^2(x)-4\cos(x)-7}{(\cos(x)-2)^2}(-\sin(x))$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-\sin(x)\,(\cos^2(x)-4\cos(x)-7)}{(\cos(x)-2)^2}$$

مخطط المتتاليات

حسابية

هي المتتالية التي ينتج كل حد من حدودها عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد حقيقي (أساس)

$u_{n+1} = u_n + r$

لإثبات أن متتالية حسابية:
- نوجد $u_{n+1} - u_n$
- نبسّط.
- لازم ينتج عن العملية السابقة عدد حقيقي وليكن r.

لإيجاد u_n بدلالة n أو لإيجاد حد معيّن:

$u_n = u_p + (n-p)r$

وإذا كان u_0 موجود:

$u_n = u_0 + n.r$

لحساب مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية:

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

حيث: n هي عدد الحدود و a هو الحد الأول و l هي الحد الأخير.

إذا كان a و b و c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية حسابية:

$b = \frac{a+c}{2}$ الحد الأوسط

لإثبات أن متتالية حسابية:

هندسية

هي المتتالية التي ينتج كل حد من حدودها عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي (أساس)

$u_{n+1} = qu_n$

لإثبات أن متتالية حسابية:
- نوجد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
- نبسّط.
- لازم ينتج عن العملية السابقة عدد حقيقي وليكن q.

لإيجاد u_n بدلالة n أو لإيجاد حد معيّن:

$u_n = u_p q^{n-p}$

وإذا كان u_0 موجود:

$u_n = u_0 q^n$

لحساب مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية:

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حيث: n هي عدد الحدود و q هو الأساس و a هو الحد الأول.

إذا كان a و b و c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية هندسية:

$b^2 = a.c$ الحد الأوسط

لإثبات أن متتالية هندسية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in R$$

مجاميع

لحساب النهاية

نحصرها:

عدد الحدود × أصغر حد $\le u_n \le$ عدد الحدود × أكبر حد

نغير شكلها

① مجاميع حدود حسابية:

$$u_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

② مجاميع حدود هندسية:

$$u_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

③ مجاميع حدود محذوفة: نستخدم التشطيب

لمعرفة حد راجح

نغير شكلها فنحصل على:

$u_n = \boxed{} - $ عدد

عندها (عدد) هو العنصر الراجح لأن:

$u_n - = -\boxed{}$ عدد

$u_n - \le 0$ عدد

$\Rightarrow u_n \le$ عدد

لمعرفة حد قاصر

نغير شكلها فنحصل على:

$u_n = \boxed{} + $ عدد

عندها (عدد) هو العنصر القاصر لأن:

$u_n - = +\boxed{}$ عدد

$u_n - \ge 0$ عدد

$\Rightarrow u_n \ge$ عدد

فكرة: يتم دراسة التقارب في المتتاليات السابقة عن طريق النهاية:

① $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ فالمتتالية مقاربة من a

② $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ فالمتتالية متباعدة

عند حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \ , \ q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n 0 \ , \ q \le -1$ ليس لها نهاية

$q = -1$ تحتاج إحاطة

تتمة المخطط

متتالية تدريجية:

① لإثبات أن $a \leq u_n \leq b$
نستخدم الإثبات بالتدريج
② لإثبات أن u_n متزايدة:
نثبت $u_{n+1} \geq u_n$ بالتدريج
③ لإثبات أن u_n متناقصة:
نثبت $u_{n+1} \leq u_n$ بالتدريج
④ لإثبات أن u_n ثابتة:
نثبت $u_{n+1} = u_n$ بالتدريج

لمعرفة التقارب:
يجب تحقق أحد الشرطين:
① u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى
② u_n مناقصة ومحدودة من الأدنى.
لحساب النهاية:
بعد دراسة التقارب، نحل المعادلة:
$f(x) = x$
والحل المقبول هو النهاية.

حالات خاصّة:
اذا طلب إثبات أن:
$a \leq u_{n+1} \leq u_n$
نستفيد منها أن u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى.
إذا طلب إثبات أن:
$u_n \leq u_{n+1} \leq b$
نستفيد منها أن u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى.

متتالية شبيهة بتابع:

لإثبات أن a راجح
نشكّل الفرق $u_n - a$ وندرس إشارته فنجد أن:
$u_n - a \leq 0$
أي: $u_n \leq a$
لإثبات أن b قاصر:
نشكّل الفرق $u_n - b$ وندرس إشارته فنجد أن:
$u_n - b \geq 0$
أي: $u_n \geq b$
لمعرفة حدود المتتالية نحولها إلى تابع وندرس تغيراته على مجال u_n ومن جدول التغيرات في خانة $f(x)$ نجد حدود u_n

إطراد المتتالية

صريحة

تشبه تابع:
$u_n = f(n)$
ندرس إطراد التابع فيكون إطراد المتتالية نفس إطراد التابع.

مجاميع

نوجد $u_{n+1} - u_n$ ونميّز:
① $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow$ متزايدة
② $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow$ متناقصة
③ $u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow$ ثابتة

إذا كانت جميع الحدود موجبة

نوجد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونميّز:
① $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow$ متزايدة
② $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow$ متناقصة
③ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow$ ثابتة

لإثبات أن متتاليتين متجاورتين:
يجب أن يتحقق:
① إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.
② نهاية فرقهما معدومة.

مثال①: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها (3) وفيها $u_1=-2$

1) احسب u_n بدلالة n.

2) استنتج المجموع: $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{20}$

الحل:

-1 $$u_n=u_p+(n-p)r$$

$$u_n=u_1+(n-1).3 \Rightarrow u_n=-2+3n-3$$

$$u_n=3n-5$$

-2 $$S=u_1+u_2+\cdots+u_{20}$$

$$S=n.\frac{(a+l)}{2}$$

عدد الحدود $n=20-1+1=20$

$$a=u_1=-2$$

$$l=u_{20}=3(20)-5=55$$

$$S=\frac{20(-2+55)}{2}=530$$

مثال②: احسب المجموع:

$$S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\cdots+10$$

الحل:

نضرب بـ(2) للتخلص من المقام:

$$2S=2\left(\frac{1}{2}\right)+2(1)+2\left(\frac{3}{2}\right)+2(2)+\cdots+2(10)$$

$$2S=1+2+3+4+\cdots+20$$

مجموعة حدود متعاقبة لمتتالية حسابية أساسها $r=1$

حدها أول: $a=(1)$ حدها الأخير: $l=(20)$

عددها $n=20-1+1=20$

$$2S=n\left(\frac{a+l}{2}\right)=20\left(\frac{1+20}{2}\right)$$

$$2S=10(21)=210 \Rightarrow S=\frac{210}{2}=105$$

مثال③: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها (3) وفيها $u_1=-2$

1) احسب u_n بدلالة n.

2) احسب بدلالة n: $S_n=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{2n}$

3) احسب نهاية S_n.

الحل:

(1 $$u_n=u_1.q^{n-1}$$

$$u_n=-2\,.\,3^{n-1}$$

(2 $$S_n=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{2n}$$

مجموعة حدود غير متعاقبة المتتالية هندسية. (القفزة (2))
نطبق نفس القانون مع اختلاف:

$$n=\frac{\text{أول}-\text{أخير}}{\text{قفزة}}+1 \quad \text{و} \quad q'=q^{\text{قفزة}}$$

$$S=a.\frac{1-q'^n}{1-q'}$$

$$a=u_2=-2\,.\,3^{2-1}=-6$$

$$n=\frac{2n-2}{2}+1=n-1+1=n$$

$$q'=q^2=(3)^2=9$$

$$S_n=a.\frac{1-q'^n}{1-q'}$$

$$S_n=-6.\frac{1-9^n}{1-9} \Rightarrow S_n=\frac{3}{4}(1-9^n)$$

(3 $$9>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}(1-\infty)=-\infty$$

مثال ④: مجاميع مع عقدية.

لدينا: $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^6$

1- احسب المجموع بدلالة α.

2- إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ أثبت أن:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^6 = 0$$

الحل:

$$S = \alpha^0 + \alpha^1 + \cdots + \alpha^6$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \alpha$

حدها الأول: $a = \alpha^0 = 1$

عدد حدودها: $n = 6 - 0 + 1 = 7$

$$S = a.\frac{1-q^n}{1-q} = 1.\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

2- عندما: $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ لازم يطلع $S = 0$.

نحسب: $S = \frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^7}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}$

$$S = \frac{1-e^{7.\frac{2\pi}{7}i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} \Rightarrow S = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-e^{0i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = 0$$ محققة

مثال ⑤: نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \end{cases} \quad , \quad y_n = x_n + 3$$

1) a) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b) احسب y_n ثم احسب x_n بدلالة n.

2- نضع: $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$

$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$

a- احسب S_n و S'_n بدلالة n.

b- استنتج نهاية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحل:

1) a) نوجد:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n+3}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}(x_n+3)}{x_n+3}$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{3} \in R$$

إذن المتتالية y_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

b) $y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

$$y_n = y_0.q^n = y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لدينا: $y_n = x_n + 3 \Rightarrow x_n = y_n - 3$

$$x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

2) a) $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها: $q = \frac{1}{3}$

عددها: $n = n - 0 + 1 = n + 1$

حدها الأول: $y_0 = 6$

$$S_n = a.\frac{(1-q^n)}{1-q} = 6.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_n = 6.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

مجموع حدود متعاقبة ما بعرف نوعها بس بعرف نوع رفيقتها.

لدينا: $x_n = y_n - 3$

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 - 3 \\ x_1 &= y_1 - 3 \\ x_2 &= y_2 - 3 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n - 3 \end{aligned}$$

$$S'_n = S_n - 3(n+1)$$

$$S'_n = 9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - 3(n+1)$$

ملاحظة:

وجود (-3) مع كل حد فإن جمعهم هو (-3)ضرب عدد الحدود.

$$-1 < \frac{1}{3} < +1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 9(1-0) = 9$$

مثال 6: ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

في حالة n غير معدوم.

1) أوجد a و b ليكون:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

2) ليكن:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

احسب S_n بدلالة n ثم احسب نهاية S_n.

الحل:

1) لإيجاد a و b نجعل u_n بالشكل الجديد يشبه الأصلي ونقارن بينهما.

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{an + a + bn}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{a + (a+b)n}{n(n+1)}$$

نقارن مع: $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$a + (a+b)n = 1 + 0n$$

الثوابت: $a = 1 \ldots (1)$

أمثال n: $a + b = 0 \ldots (2)$

نعوض (1) في (2):

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

2) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\\
u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
u_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\
u_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\\
&\vdots\\
u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - 0 = 1$$

مثال 7: لتكن المتتالية: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1- احسب نهاية u_n.

2- نضع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

اكتب S_n بدلالة n.

3- ادرس نهاية S_n.

الحل:

1- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$

2- $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \ln(2) - \ln(1)\\
u_2 &= \ln(3) - \ln(2)\\
u_3 &= \ln(4) - \ln(3)\\
u_4 &= \ln(5) - \ln(4)\\
&\vdots\\
u_n &= \ln(n+1) - \ln(n)
\end{aligned}$$

$$S_n = -\ln(1) + \ln(n+1)$$

$$S_n = \ln(n+1)$$

3- $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

مثال 8: احسب نهاية المتتالية: $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$

الحل:

نعلم أن:

$$\boxed{-1 \le (-1)^n \le +1}$$

نضيف $(2n)$

$$2n - 1 \le 2n + (-1)^n \le 2n + 1$$

نقسم على $(3n > 0)$

$$\frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n + (-1)^n}{3n} \le \frac{2n+1}{3n}$$

$$\frac{2n-1}{3n} \le u_n \le \frac{2n+1}{3n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$$

حسب الاحاطة:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

مثال⑨: ادرس تقارب: $u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n-1}$

الحل:

هناك حالة عدم تعيين: $\frac{\infty-\infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{1^n}{3^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\boxed{-1 < \frac{2}{3} < 1}$$

$$\boxed{-1 < \frac{1}{3} < 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

u_n متقاربة نحو العدد (1).

مثال⑩: احسب نهاية: $u_n = \frac{n!-2}{n!}$

الحل:

$$u_n = \frac{n!-2}{n!} \Rightarrow u_n = 1 - \frac{2}{n!}$$

نعلم أن: $n! \geq n$:

$$\frac{n!}{2} \geq \frac{n}{2}$$

$$0 < \frac{2}{n!} \leq \frac{2}{n}$$

$$0 > -\frac{2}{n!} \geq -\frac{2}{n}$$

$$1 > 1 - \frac{2}{n!} > 1 - \frac{2}{n}$$

$$1 > u_n \geq 1 - \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = 1$$

حسب الاحاطة:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

مثال⑪: متتالية معرفة $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1- أثبت أن:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2- استنتج تقارب u_n.

الحل:

1- u_n متتالية مجاميع:

أكبرها: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

أصغرها: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

عددها: $n = n - 1 + 1 = n$

$$n.\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n.\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

-2

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

حسب الإحاطة:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

u_n متقاربة نحو (1).

المتتاليتان المتجاورتان

مثال ①: $(t_n)_{n\geq 1}$ و $(S_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad , \quad t_n = \frac{n-1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

الحل:

ندرس إطراد t_n:

بفرض: $f(x) = \frac{x-1}{x}$

f إشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x - 1(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

f متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ $\Leftarrow$ t_n متزايدة تماماً بدءاً من $n = 1$

ندرس إطراد S_n:

بفرض: $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0$$

g متناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$ $\Leftarrow$ S_n متناقصة تماماً بدءاً من $n = 1$

نوجد:

$$S_n - t_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - t_n) = 1 + 0 - 1 = 0$$

المتتاليتان t_n و S_n متجاورتان.

مثال ②: $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1- ادرس إطراد u_n.

2- إدرس إطراد v_n.

3- أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

الحل:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

u_n متزايدة تماماً بدءاً من $n = 1$

-2

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n-n-1}{n(n+1)^2} < 0$$

v_n متناقصة تماماً بدءاً من $n = 1$

3- لدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}[v_n - u_n] = 0$$

$\Leftarrow$ المتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

الإثبات بالتدريج (الإستقراء الرياضي)

مثال①: في حالة $n \geq 1$ لدينا:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

1- احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

2- أثبت بالتدريج أن: $S_n = \frac{n(n+1).(2n+1)}{6}$

الحل:

1- $S_1 = 1^2 = 1$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$
$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$
$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$
$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$
$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

2- نسمي القضية: $E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نثبت صحة $E(1)$: $l_1 = S_1 = 1$

$$l_2 = \frac{1(1+1).(2+1)}{6} = 1$$

$l_1 = l_2$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$: $S_n = \frac{n(n+1).(2n+1)}{6} \ldots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

نبدأ من l_1 ونستعين بـ* حتى نصل إلى l_2.

$$l_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$l_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$l_1 = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$l_1 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

وبالنشر للطرف الثاني:

$$l_2 = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$l_2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = l_1$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان $n \geq 1$

مثال②: ليكن $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = 2\cos\theta \quad , \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

1- احسب u_1 و u_2.

2- أثبت بالتدريج أن: $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3- احسب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$

الحل:

1- عندما يكون لدينا علاقة تدريجية للمتتالية لحساب أي حد نعوض الحد يلي قبلو.

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

$$u_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2.2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$u_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$u_2 = \sqrt{2.\left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{2.2\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$u_2 = 2.\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

تذكر: $1 + \cos\square = 2.\cos^2\left(\frac{\square}{2}\right)$

2- نسمي القضية: $E(n): u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

نثبت صحة $E(0)$: $l_1 = u_0 = 2\cos\theta$

$$l_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta = l_2$$

محققة.

نفرض صحة $E(n)$: $u_n = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \ldots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$l_1 = u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

$$l_1 = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2\left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$$

$$l_1 = \sqrt{2.2\cos^2\left(\frac{\theta}{2.2^n}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = l_2$$

محققة من اجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n عدد طبيعي.

3- $2 > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (2^n) = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\cos(0) = 2$$

مثال③: ليكن $x > -1$ في حالة عدد n طبيعي

نرمز إلى المتراجحة $E(n)$: $\quad (1+x)^n \geq 1+nx$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة.

الحل:

نثبت صحة $E(0)$:

$(1+x)^0 \geq 1+0x \Rightarrow 1 \geq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$(1+x)^n \geq 1+nx \ldots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

في إثبات صحة المتراجحات ننطلق من الفرض للوصول إلى الشكل من أجل $(n+1)$

نبدأ من $*$:

$(1+x)^n \geq (1+nx)$

نضرب بـ$(1+x)$ حيث: $1+x > 0 \Leftarrow x > -1$

$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$

حذف مقدار موجب من الطرف الصغير يعني تصغير الصغير.

نحذف $nx^2 > 0$:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n.

مثال④: أثبت بالتدريج صحة $((4^n+5$ مضاعف للعدد $3))$ مهما كان n طبيعي.

الحل:

بفرض أن $E(n)$ هي:

$4^n+5 = 3k$

نثبت $E(0)$:

$l_1 = 4^0+5 = 1+5 = 6 = 3k = l_2$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$4^n+5 = 3k \ldots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$4^{n+1}+5 = 3k'$

ساوي الأس مثل يلي بـ$*$:

$l_1 = 4^{n+1}+5 = 4.4^n+5$

من $*$ نعزل يلي له أس:

$4^n = 3k-5$

نعوض في l_1:

$l_1 = 4(3k-5)+5 = 12k-20+5$

$l_1 = 12k-15 = 3(4k-5) = 3k' = l_2$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n عدد طبيعي

و 4^n+5 مضاعف لـ(3)

تقارب المتتالية المعرفة بالتدريج

مثال①: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = 3 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$$

1- أثبت أن: $u_n > 0$ أياً يكن n.

2- المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واكتبها بدلالة n واحسب نهايتها.

3- احسب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ واستنتج أنها متقاربة.

الحل:

1- نسمي القضية: $\quad E(n): u_n > 0$

نثبت صحة $E(0)$: $\quad u_0 > 0 \Rightarrow 3 > 0$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: $\quad u_n > 0 \ldots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{2}{u_n+1} > 0$$

لإثبات أن متراجحة أكبر من الصفر يكفي إثبات أن بسطها موجب ومقامها موجب.

لدينا: $2 > 0$ بسط موجب.

من الفرض: $u_n > 0 \Leftarrow u_n+1 > 0$ مقام موجب.

$\Leftarrow \frac{\overset{\text{موجب}}{2}}{\underset{\text{موجب}}{u_n+1}} > 0$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n

-2 $\quad t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

نوجد:

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{u_n+1}-\frac{1}{1}}{\frac{2}{u_n+1}+\frac{2}{1}}$$

$$t_{n+1} = \frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}} = \frac{1-u_n}{2(u_n+2)}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{1-u_n}{2(u_n+2)}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}} = \frac{(1-u_n)}{2(u_n+2)} \times \frac{(u_n+2)}{(u_n-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = -\frac{1}{2} \in R$$

إذن t_n هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$.

$$t_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

$$t_n = t_0 . q^n \Rightarrow t_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < +1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{2}{5}(0) = 0$$

-3 $\frac{t_n}{1} = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

⇐ جداء تقاطعي لنعزل u_n:

$$t_n . u_n + 2t_n = u_n - 1$$

$$t_n . u_n - u_n = -2t_n - 1$$

$$\Rightarrow (t_n - 1)u_n = -2t_n - 1$$

$$u_n = \frac{-2t_n - 1}{t_n - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-2(0)-1}{0-1} = 1$$

⇐ u_n متقاربة نحو 1

مثال(2): نتامل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

عند كل $n \ge 0$ والمطلوب:

1- أثبت أن التابع: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2,+\infty[$

2- أثبت بالتدريج أن: $2 \le u_{n+1} \le u_n$

أياً كان العدد الطبيعي n.

3- استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

-1 $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

f اشتقاقي على $[2,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$f' \ge 0$ ⇐ f متزايد تماماً عندما $x \in [2,+\infty[$

2- نسمي القضية:

$$E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$2 \le u_1 \le u_0$$

$$2 \le \frac{u_0}{2} + \frac{2}{u_o} \le u_0$$

$$2 \le \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \le 3$$

$2 \le \frac{13}{6} \le 3$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$2 \le u_{n+1} \le u_n \ldots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

نبدأ من $*$:

$$2 \le u_{n+1} \le u_n$$

عندما يكون لدينا التابع متزايد للمتتالية التدريجية يفيدنا في الإثبات من أجل $(n+1)$ فقط نصور $*$.

f متزايد ⇐ $f(2) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$

$$2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة من أجل n.

3- المتتالية u_n تحقق $u_{n+1} \le u_n$ فهي متناقصة $2 \le u_n$ ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية يتم بحل المعادلة:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$

نضرب بـ$2x$:

$$2x.\frac{x}{2} + 2x.\frac{2}{x} = 2x.x \Rightarrow x^2 + 4 = 2x^2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

إما $x = 2$ مقبول ، أو $x = -2$ مرفوض.

$$\lim_{n\to} u_n = 2$$

مثال 3: $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن u_n متزايدة تماماً.

2- أثبت أن u_n تكتب بالشكل:

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3- استنتج أن u_n تقبل عنصراً راجحاً.

4- أثبت أن u_n متقاربة.

الحل:

-1

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

$\Leftarrow$ u_n متزايدة تماماً.

-2

$$u_n = \frac{1^0}{3^0} + \frac{1^1}{3^1} + \frac{1^2}{3^2} + \cdots + \frac{1^n}{3^n}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

أولها: $a = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

عددها: $n = n - 0 + 1 = n + 1$

$$u_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$u_n = 1\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

-3 **لازم يكون $\left(u_n < \text{عدد}\right)$**

لدينا :

$$u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < 0$$

$$u_n - \frac{3}{2} < 0$$

$$u_n < \frac{3}{2}$$

إذن $\left(\frac{3}{2}\right)$ هو حد راجح على u_n

-4 المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

مثال 4: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

-1 أثبت بالتدريج أن: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

-2 استنتج أن العدد (3) راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

-3 أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

الحل:

-1 نسمي القضية:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} \Rightarrow 1 \leq 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \ldots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

نبدأ من $*$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب المقامات بـ$(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^n.2^{-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)2^n}$$

تصغير المقام يعني تكبير الكسر $\Leftarrow$ تكبير الكبير.

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان $n \geq 1$

2- ليكون العدد (3) راجح على المتتالية لازم يتحقق:

$$u_n \le 3$$

لدينا: $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

نستفيد من المتراجحة ونعوض فيها أعداد تواصلنا إلى u_n.

$$\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^0}$$
$$\frac{1}{2!} \le \frac{1}{2^1}$$
$$\frac{1}{3!} \le \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{4!} \le \frac{1}{2^3}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

نضيف (1) للطرفين:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 1+\frac{1^0}{2^0}+\frac{1^1}{2^1}+\cdots+\frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$u_n \le 1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{S_n}$$

$$u_n \le 1+S_n \ldots **$$

حساب S_n:

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

أولها: $a=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

عددها: $n=n-1-0+1=n$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نعوض في **:

$$u_n \le 1+2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n \le 3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إلغاء السالب يعني تكبير الكبير $u_n \le 3$

إذن العدد (3) راجح على المتتالية.

3- ندرس إطراد:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

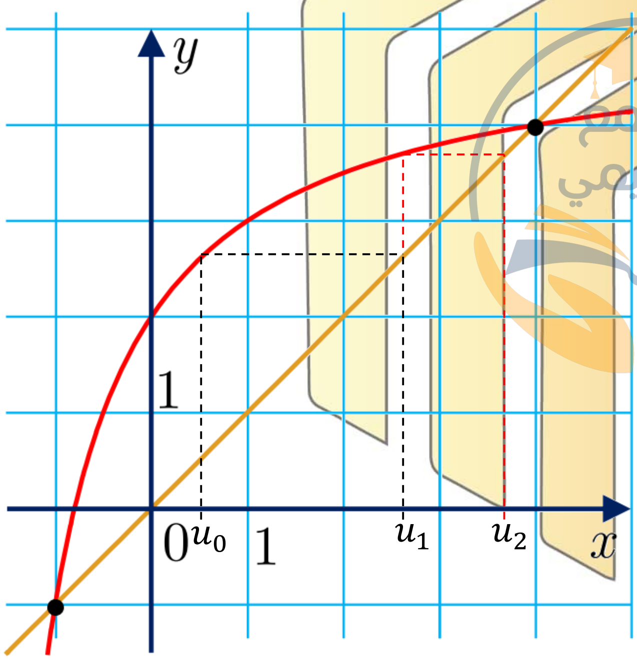
⇐ المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة نحو (3)

تعيين حدود متتالية على الرسم:

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2} \end{cases}$$

باستعمال الرسم، مثّل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3



طريقة الحل:

1) نعيّن u_0 على محور الفواصل.

2) من u_0 نرسم مستقيم شاقولي إلى الخط البياني فيقطعه بنقطة.

3) من النقطة السابقة، نرسم مستقيم أفقي إلى منصف الربعين الأول والثالث، فيقطعه بنقطة.

4) من هذه النقطة نرسم مستقيم شاقولي إلى محور الفواصل فيعيّن u_1

5) نكرر العملية لتعيين باقي الحدود.

ورقة عمل يدوية في بحث المتتاليات ونهايتها

السؤال الأول:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_1 = 4$ و $u_3 = 16$

1) اكتب u_n بدلالة n وأوجد u_5

2) نعرّف المتتالية S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

اكتب S_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

السؤال الثاني:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها q وَأن:

$3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية.

المطلوب حساب q

السؤال الثالث:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q فيها:

$$u_0 = k \ , \ \ u_1 = k+1 \ , \ \ u_2 = k+3$$

1) احسب k

2) بفرض $k = 1$ عبّر عن u_n بدلالة n

3) احسب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{19}$$

السؤال الرابع:

اكتب S_n بدلالة n في كل من الحالات الآتية:

① $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

② $S = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$

السؤال الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واكتب v_n بدلالة n

السؤال السادس:

أثبت كلّاً من القضايا الآتية مستخدماً الإستقراء الرياضي:

1) أثبت بالتدريج من أجل $n \geq 0$ أن: $10^n - 1$ من مضاعفات العدد 9

2) أثبت بالتدريج من أجل $n \geq 3$ أن: $3^n \geq (n+2)^2$

السؤال السابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \end{cases}$$

1) بفرض التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ ادرس اطراد التابع f

2) أثبت أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

3) أثبت أن u_n متناقصة

4) استنتج تقارب المتتالية

5) احسب نهاية u_n

السؤال الثامن:

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1) أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$

2) استنتج حداً راجحاً على u_n

السؤال التاسع:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1) ادرس إطراد المتتالية.

2) أثبت أن العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

3) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق:

عندما $n > n_0$ تكون: $u_n \in]1.9\,,2.1[$

السؤال العاشر:

نعرّف المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

أثبت أن 1 راجح على x_n

حل ورقة العمل اليدوية لبحث المتتاليات ونهايتها

السؤال الأول:

(1 $u_n = u_p \times q^{n-p}$

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1} \Rightarrow 16 = 4 \times q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \Rightarrow u_n = 4 \times 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = 4 \times 2^n \times 2^{-1} = \frac{4}{2} \times 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2(2)^n$$

$$u_5 = 2 \times 2^5 = 64$$

(2 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = u_1 = 4 \ , \ q = 2$$

$$n = n - 1 + 1 = n$$

$$S_n = 4\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 4 \times \frac{1-2^n}{-1}$$

$$\Rightarrow S_n = -4(1-2^n)$$

$$2 > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -4\big(1-(+\infty)\big) = +\infty$$

السؤال الثاني:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فهي تحقق:

$$b = qa \ldots (1)$$

$$c = q^2 a \ldots (2)$$

وبما أن $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية فهي تحقق:

$$2b = \frac{3a+c}{2} \Rightarrow 4b = 3a + c \ldots (3)$$

نعوّض (1) و (2) في (3):

$$4qa = 3a + q^2 a$$

نقسّم على a حيث $a \neq 0$

$$4q = 3 + q^2 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (q-3)(q-1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} q = 1 \\ q = 3 \end{matrix}$$

السؤال الثالث:

(1) $(u_1)^2 = u_0 \times u_2 \Rightarrow (k+1)^2 = k \times (k+3)$

$$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 3k \Rightarrow k = 1$$

(2) $u_2 = 4$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

$$u_1 = qu_0 \Rightarrow \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2 = q$$

$$\Rightarrow u_n = 1 \times 2^n \Rightarrow u_n = 2^n$$

(3) $S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

$$a = u_0 = 1 \ , \ q = 2$$

$$n = 19 - 0 + 1 = 20$$

$$S = 1\left(\frac{1-2^{20}}{1-2}\right) = -1 + 2^{20}$$

السؤال الرابع:

(1) $S = \frac{1}{3} + \frac{1^2}{3^2} + \cdots + \frac{1^n}{3^n}$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

(2) $S = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$

$$S = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$\Rightarrow S = 3\left(\frac{n(a+l)}{2}\right) \Rightarrow S = 3\left(\frac{n(1+n)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

السؤال الخامس:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$$

نوجد $\frac{v_{n+1}}{v_n}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{\frac{1}{5}(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)}{(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)}$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} \in R$$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1$$

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

السؤال السادس:

1) نسمّي القضية: $E(n): 10^n - 1 = 9k$

نثبت صحة: $E(0): 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

(0) من مضاعفات العدد (9) فهي محققة

نفرض صحة: $E(n): \boxed{10^n - 1 = 9k} \ldots *$

نثبت صحة: $E(n+1): \underbrace{10^{n+1} - 1}_{l_1} = \underbrace{9k'}_{l_2}$

من *: $10^n - 1 = 9k \Rightarrow 10^n = 9k + 1$

$$l_1 = 10^n \times 10 - 1 = (9k+1) \times 10 - 1$$

$$\Rightarrow l_1 = 90k + 10 - 1 = 90k + 9$$

$$\Rightarrow l_1 = 9(10k+1) = 9k' = l_2$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة من أجل أياً كانت $n \geq 0$

2) نسمّي القضية: $E(n): 3^n \geq (n+2)^2$

نثبت صحة $E(3)$: $E(3): 27 \geq (5)^2$

$\Rightarrow 27 \geq 25$ محققة

نفرض صحة: $E(n): \boxed{3^n \geq (n+2)^2} \ldots *$

نثبت صحة: $E(n+1): 3^{n+1} \geq (n+3)^2$

نبدأ من*: $3^n \geq (n+2)^2$

$$3^{n+1} \geq 3(n^2 + 4n + 4)$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2 + 2n^2 + 6n + 3$$

نحذف $(2n^2 + 6n + 3 > 0)$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت $n \geq 3$

السؤال السابع:

1) $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

f متزايد تماماً

2) نسمّي القضية: $E(n): \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

نثبت صحة: $E(0): \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$ محققة

نفرض صحة: $E(n): \boxed{\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1} \ldots *$

نثبت صحة: $E(n+1): \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

نبدأ من *: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد طبيعي

3) نسمّي القضية: $E(n): u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة: $E(0): u_1 \le u_0$

$\Rightarrow \frac{5}{8} \le 1$ محققة

نفرض صحة: $E(n): \boxed{u_{n+1} \le u_n} \dots *$

نثبت صحة: $E(n+1): u_{n+2} \le u_{n+1}$

نبدأ من *: $u_{n+1} \le u_n$

نصوّر: $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$

$u_{n+2} \le u_{n+1}$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد طبيعي

4) u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة

5) لحساب النهاية، نحل المعادلة: $f(x) = x$

$$\frac{3x+2}{2x+6} = x \Rightarrow 3x + 2 = 2x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$$

$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ مقبول

$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ مرفوض

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

السؤال الثامن:

1) نسمّي القضية: $E(n): n \le 2^n$

نثبت صحة: $E(1): 1 \le 2^1$

$\Rightarrow 1 \le 2$ محققة

نفرض صحة: $E(n): \boxed{n \le 2^n} \dots *$

نثبت صحة: $E(n+1): n+1 \le 2^{n+1}$

نبدأ من *: $n \le 2^n$

$$2n \le 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \le n + n \le 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow n + 1 \le 2^{n+1}$$

محققة من أجل n فهي محققة أياً كانت $n \ge 1$

2) لدينا $n \le 2^n$

نقسّم على $(0 < 3^n)$

$$\frac{n}{3^n} \le \frac{2^n}{3^n}$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2}{3^2} \le \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{3}{3^3} \le \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n = n \Rightarrow \frac{n}{3^n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بالجمع: $u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = \frac{2}{3} \quad , \quad q = \frac{2}{3}$$

$$n = n - 1 + 1 = n$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow u_n \le 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow u_n \le 2$$

u_n راجح على 2

السؤال التاسع:

1) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{-1\}$ فهو اشتقاقي على $[0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}>0$$

f متزايد تماماً $\Leftarrow$ u_n متزايدة تماماً.

2) يكون (2) عدد راجح عندما: $u_n\le 2$

أي: $u_n-2\le 0$

نحسب:

$$u_n-2=\frac{2n-1}{n+1}-2=\frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n-2=-\frac{3}{n+1}\le 0$$

$$\Rightarrow u_n-2\le 0\Rightarrow u_n\le 2$$

إذاً العدد (2) هو عدد راجح على المتتالية u_n

3) $\lim_{n\to+\infty} u_n=2$

$$u_n\in]1.9\,,2.1[$$

$$c=\frac{b+a}{2}=\frac{2.1+1.9}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{2.1-1.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-3}{n+1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{3}{n+1}<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 30<n+1\Rightarrow n>29\Rightarrow n_0=29$$

السؤال العاشر:

$$x_n-1=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-1$$

$$\Rightarrow x_n-1=\frac{1-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow x_n-1=\frac{\left(1-\sqrt{n^2+1}\right)\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+1}\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$\Rightarrow x_n-1=\frac{1-n^2-1}{\sqrt{n^2+1}\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$\Rightarrow x_n-1=\frac{-n^2}{\sqrt{n^2+1}\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}\le 0$$

$$\Rightarrow x_n-1\le 0\Rightarrow x_n\le 1$$

1 حد راجح على المتتالية x_n

ورقة عمل منزلية في بحث المتتاليات ونهايتها

السؤال الأول:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_3 = 8$ و $r = 2$

1) اكتب u_n بدلالة n

2) احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

السؤال الثاني:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق:

$$a \times b \times c = 125$$

$$a + b + c = 31$$

عيّن a و b و c

السؤال الثالث:

احسب المجاميع الآتية:

① $S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 32$

② $S = i + i^2 + \cdots + i^6$

③ $S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{7}{5}$

السؤال الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالعلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق: $v_n = u_n + 6$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وعيّن أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

2) لنعرّف المتتالية $(\omega_n)_{n\geq 0}$ وفق: $\omega_n = \ln(v_n)$ وأثبت أن المتتالية $(\omega_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب ω_0 ثم احسب المجموع:

$$S = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$$

السؤال الخامس:

لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{2}{v_n}$ والمطلوب:

1) أثبت أن u_n حسابية وأوجد أساسها.

2) اكتب u_n بدلالة n 3) استنتج v_n بدلالة n

4) احسب: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

السؤال السادس:

أثبت بالتدريج من أجل $n \geq 1$ أن:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

السؤال السابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$

2) أثبت أن المتتالية متزايدة

3) استنتج تقارب المتتالية u_n

4) ادرس نهاية المتتالية u_n

السؤال الثامن:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1) أوجد a و b التي تحقق:

$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

2) نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

اكتب v_n بدلالة n واحسب نهاية u_n

السؤال التاسع:

احسب نهاية كل من المتتاليات الآتية:

① $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

حيث $a > b > 1$

② $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{5n - 4}$; $n \geq 1$

③ $u_n = \frac{e^n}{\pi^n}$

السؤال الأول:

1) $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_n = u_3 + (n-3)\times 2$$

$$u_n = 8 + 2n - 6 \Rightarrow u_n = 2 + 2n$$

2) $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

$$S = n\frac{(a+l)}{2}$$

$$a = u_0 = 2\ ,\ l = u_{10} = 22$$

$$n = 10 - 0 + 1 = 11$$

$$S = 11 \times \frac{(2+22)}{2} = \frac{11\times 24}{2} = 132$$

السؤال الثاني:

$$b^2 = a \times c$$

نعوض في المعادلات:

$$a\times b\times c = 125 \Rightarrow b\times b^2 = 125$$

$$\Rightarrow b^3 = 125 \Rightarrow b = 5$$

$$a + 5 + c = 31 \Rightarrow a + c = 26 \ldots ①$$

$$a\times 5\times c = 125 \Rightarrow a\times c = 25 \ldots ②$$

إمّا: $a = 25\ ,\ b = 5\ ,\ c = 1$

أو: $a = 1\ ,\ b = 5\ ,\ c = 25$

السؤال الثالث:

① $S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 32$

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^5$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = 2\ ,\ q = 2$$

$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$

$$S = 2\left(\frac{1-2^5}{1-2}\right) = -2(1-32)$$

$$\Rightarrow S_n = -2(-31) = 62$$

② $S = i + i^2 + \cdots + i^6$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = i$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = i\ ,\ q = i$$

$$n = 6 - 1 + 1 = 6$$

$$S = i\left(\frac{1-i^6}{1-i}\right) = i\left(\frac{1-(-1)}{1-i}\right) = \frac{2i}{(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2i(1+i)}{2} = i + i^2 = i - 1$$

③ $S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{7}{5}$

$$5S = 1 + 2 + \cdots + 7$$

$$5S = n\frac{(a+l)}{2}$$

$$5S = 7\frac{(1+7)}{2} \Rightarrow 5S = \frac{7\times 8}{2} = 28$$

$$\Rightarrow S = \frac{28}{5}$$

السؤال الرابع:

1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6} = \frac{1}{2} \in R$$

$\Leftarrow$ v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$v_0 = u_0 + 6 \Rightarrow v_0 = 2 + 6 = 8$$

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2) $\omega_n = \ln(v_n)$

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$\Rightarrow \omega_{n+1} - \omega_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

ω_n متتالية حسابية أساسها $r = -\ln(2)$

$$\omega_0 = \ln(v_0) = \ln(8)$$

$$S=\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$$

$$\Rightarrow S=\frac{n(a+l)}{2}$$

$$a=\omega_0=\ln(8)$$

$$l=\omega_5=\ln(v_5)\Rightarrow l=\ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)=\ln\left(\frac{8}{32}\right)$$

$$\Rightarrow l=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln(4)$$

$$n=5-0+1=6$$

$$\Rightarrow S=\frac{6(\ln(8)-\ln(4))}{2}=3\ln(2)$$

السؤال الخامس:

1) $u_{n+1}=\frac{2}{v_{n+1}}$

$$u_{n+1}=\frac{2}{\frac{v_n}{1+v_n}}=\frac{2(1+v_n)}{v_n}=\frac{2+2v_n}{v_n}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{2}{v_n}+2$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{v_n}+2-\frac{2}{v_n}=2$$

المتتالية u_n حسابية أساسها $r=2$

2) $u_0=\frac{2}{v_0}=\frac{2}{1}=2$

$$u_n=u_0+nr\Rightarrow u_n=2+2n$$

3) لدينا $u_n=\frac{2}{v_n}\Rightarrow v_n=\frac{2}{u_n}$

$$\Rightarrow v_n=\frac{2}{2+2n}$$

4) $S=\frac{n(a+l)}{2}$

$$a=u_0=2\ ,\ \ l=u_9=2+2(9)=20$$

$$n=9-0+1=10$$

$$\Rightarrow S=\frac{10(2+20)}{2}=110$$

السؤال السادس:

نسمي القضية:

$$E(n):1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}\Rightarrow 1=\frac{4}{4}\Rightarrow 1=1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n):\boxed{1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\ldots *$$

نثبت صحة:

$$E(n+1):\underbrace{1^3+2^3+\cdots+n^3}_{*\text{من}}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3}_{l_1}=\underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}_{l_2}$$

$$l_1=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$\Rightarrow l_1=\frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4}$$

$$\Rightarrow l_1=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\Rightarrow l_1=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=l_2$$

السؤال السابع:

1) نسمّي القضية: $E(n):0\le u_n\le 2$

نثبت صحة $E(0):0\le 1\le 2$ محققة

نفرض صحة $E(n)\boxed{:0\le u_n\le 2}\ldots *$

نثبت صحة $E(n+1):0\le u_{n+1}\le 2$

نبدأ من *: $0\le u_n\le 2$

$$2\le 2+u_n\le 4$$

$$0\le\sqrt{2}\le\sqrt{2+u_n}\le 2$$

$$\Rightarrow 0\le u_{n+1}\le 2$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد طبيعي

2) u_n متزايدة $\Leftarrow u_{n+1} \geq u_n$

نسمّي القضية: $E'(n): u_{n+1} \geq u_n$

نثبت صحة: $E'(0): u_1 > u_0$

$\Rightarrow \sqrt{3} \geq 1$ محققة

نفرض صحة: $E'(n): \boxed{u_{n+1} \geq u_n} \dots *$

نثبت صحة: $E(n+1): u_{n+2} \geq u_{n+1}$

نبدأ من *: $u_{n+1} \geq u_n$

$$2 + u_{n+1} \geq 2 + u_n$$

$$\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد حقيقي.

3) u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

4) لحساب النهاية، نحل المعادلة $f(x) = x$

$$\sqrt{2 + x} = x$$

$$2 + x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow$ $x = 2$ مقبول، $x = -1$ مرفوض

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

السؤال الثامن:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+2) + b(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = a(n+2) + b(n+1)$$

$$\Rightarrow 1 = an + 2a + bn + b$$

$$\Rightarrow 0n + 1 = n(a+b) + (2a+b)$$

$$a + b = 0 \dots 1$$

$$2a + b = 1 \dots 2$$

بالطرح: $-a = -1 \Rightarrow a = 1$

نعوض في 1: $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$u_0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

بالجمع: $v_n = 1 - \frac{1}{n+2}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

السؤال التاسع:

$$① \; u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$② \; u_n = \frac{3n + (-1)^n}{5n - 4} \quad ; n \geq 1$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \leq 3n + 1$$

$$\frac{3n-1}{5n-4} \leq \frac{3n + (-1)^n}{5n-4} \leq \frac{3n+1}{5n-4}$$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3n-1}{5n-4}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3n+1}{5n-4}\right) = \frac{3}{5}$$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5}$

$$④ \; u_n = \frac{e^n}{\pi^n}$$

$$u_n = \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

$$-1 < \frac{e}{\pi} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

التكامل

حالة ① : دساتير التكامل

	$f(x)$	$F(x)$
1	a	ax
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
4	$\frac{a}{bx+c}$	$\frac{a}{b}\ln\lvert bx+c\rvert$
5	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\times\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$
6	e^x	e^x
7	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}\times e^{ax+b}$
8	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
9	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
10	$u'.u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
11	$u'.e^u$	e^u

حالة ② : تكاملات مثلثية

	$f(x)$	$F(x)$
12	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
13	$\cos(x)$	$\sin(x)$
14	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
15	$1+\cot^2(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
16	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
17	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
18	$1+\tan^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
19	$1+\cot^2(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
20	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
21	$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

دساتير مثلثية:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2(x)=1-\cos^2(x)\\ \cos^2(x)=1-\sin^2(x)\end{cases}$$

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow 1-\cos(2x)=2\sin^2(x)$$

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow 1+\cos(2x)=2\cos^2(x)$$

$$\sin(x).\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\sin(a).\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

$$\cos(a).\sin(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$$

$$\cos(a).\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$

$$\sin(a).\sin(b)=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$$

حالة ③ : التجزئة:

نستخدم:

1) التكاملات اللوغاريتمية

2) تكاملات جداء تابعين من طبيعتين مختلفتين

$$\int_a^b u.v'\,dx=[u.v]_a^b-\int_a^b u'.v\,dx$$

يصلح لأربع حالات:

❶ $\underbrace{\text{أسي}}_{v'} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{u}$

❷ $\underbrace{\text{مثلثي}}_{v'} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{u}$

❸ $\underbrace{\text{مثلثي}}_{v'} \times \underbrace{\text{أسي}}_{u}$

❹ $\underbrace{\text{لوغاريتمي}}_{u} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{v'}$

حالة ④ : توابع كسرية حدودية:

أس بسط ≥ أس مقام
قسمة إقليدية

أس بسط < أس مقام
تفرقة كسور

❶ نحلل المقام إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

❷ نضع:

$$\frac{\boxed{}}{(f)(g)}=\frac{a}{f}+\frac{b}{g}$$

❸ نوحّد المقامات ونحذفها ثم نبحث عن قيم a و b.

مثال: أوجد تابعاً أصلياً للتابع f:

① $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} - e^{2x+1}$ $\quad I =]0, +\infty[$

الحل:

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \ln|x| - \frac{1}{2}e^{2x+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = x^3 - \ln(x) - \frac{1}{2}e^{2x+1}$$

② $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^2}$ $\quad I = R\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$

الحل:

$$f(x) = (2x-3)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(2x-3)}$$

③ $f(x) = \frac{5}{2x-1}$ $\quad I =]-\infty, \frac{1}{2}[$

الحل:

$$F(x) = \frac{5}{2}\ln|2x-1|$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2}\ln(1-2x)$$

④ $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$ $\quad I = R$

الحل:

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x-1)^5}$$

⑤ $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^3$ $\quad I = R$

الحل:

$$F(x) = \frac{(x^2-x)^4}{4}$$

⑥ $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\quad I =]0, +\infty[$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

$$F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

⑦ $f(x) = x.\sqrt{x^2+1}$ $\quad I = R$

الحل:

$$f(x) = x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$$

⑧ $f(x) = xe^{x^2+1}$ $\quad I = R$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$$

⑨ $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-3x}}$ $\quad I =]-\infty, \frac{2}{3}[$

الحل:

$$f(x) = -\frac{5}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{2-3x}}$$

$$F(x) = -\frac{5}{3} \times 2\sqrt{2-3x} = -\frac{10}{3}\sqrt{2-3x}$$

⑩ $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ $\quad I = R$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = -\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$F(x) = -\ln(1+e^{-x})$$

مثال: توابع مثلثية، أوجد تابعاً أصلياً للتابع f:

① $f(x) = \sin(5x-1)$

الحل:

$$F(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x-1)$$

② $f(x) = \tan^2(3x)$

الحل:

$$f(x) = 1 + \tan^2(3x) - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\tan(3x) - x$$

③ $f(x) = x.\sin(1-x^2)$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{-2}(-2x)\sin(1-x^2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cos(1-x^2)$$

④ $f(x) = \tan(x)$ $\quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

الحل:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$F(x) = -\ln|cos(x)|$$

عندما $x \in I$ كان: $\cos(x) > 0$

$$\Rightarrow F(x) = -\ln(cos(x))$$

⑤ $f(x) = \sin^3(x)$

الحل:

$$f(x) = \sin(x).\sin^2(x) = \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(x) - \sin(x).\cos^2(x)$$

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}$$

⑥ $f(x) = \cos^4(x)$

الحل:

$$f(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\times\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{8}x+\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(4x)}{32}$$

⑦ $f(x) = \sin(5x)\sin(x)$

الحل:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\cos(6x)-\cos(4x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\cos(6x)+\frac{1}{2}\cos(4x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{\sin(6x)}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{\sin(6x)}{12}+\frac{\sin(4x)}{8}$$

⑧ $f(x) = \sqrt{2-2\cos(2x)}$ $\quad I =]0, \frac{\pi}{2}[$

الحل:

$$f(x) = \sqrt{2(1-\cos(2x))} = \sqrt{2\times 2\sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{4\sin^2(x)} = 2|\sin(x)|$$

عندما $x \in I$ كان: $\sin(x) > 0$ أي: $|\sin(x)| = \sin(x)$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sin(x)$$

$$F(x) = -2\cos(x)$$

مثال: احسب كلاً من التكاملات الآتية:

① $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$

الحل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{\pi}{4}-0\right)-0 = \frac{\pi}{4}$$

$$② \ I = \int_0^2 x|x-1|\,dx$$

الحل:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0		1		2
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$x-1$	

$$I = \int_0^1 x(-x+1)\,dx + \int_1^2 x(x-1)\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (-x^2+x)\,dx + \int_1^2 (x^2-x)\,dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = 1$$

مثال: احسب كلّاً من التكاملات الآتية:

$$① \ I = \int_0^1 (x+2)e^x\,dx$$

الحل:

$$u = x + 2 \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$I = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = (3e-2) - (e-1) \Rightarrow I = 2e - 1$$

$$② \ I = \int_1^e x.\ln(x)\,dx$$

الحل:

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow I = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$③ \ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(x)\,dx$$

الحل:

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin(x) \rightarrow v = -\cos(x)$$

$$I = [-x.\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

$$\Rightarrow I = [-x.\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = (-0-0) + (1-0) \Rightarrow I = 1$$

$$④ \ I = \int_3^4 \frac{12}{x^2-4}\,dx$$

الحل:

$$\frac{12}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

نوحد المقامات ونحذفها:

$$12 = a(x+2) + b(x-2)$$

لإيجاد a نعوّض $x = 2$: $12 = 4a \Rightarrow a = 3$

لإيجاد b نعوّض $x = -2$: $12 = -4b \Rightarrow b = -3$

$$I = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2}\right) dx$$

$$\Rightarrow I = [3\ln(x-2) - 3\ln(x+2)]_3^4 = \left[3\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]_3^4$$

$$\Rightarrow I = 3\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3\ln\left(\frac{1}{5}\right) = 3\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

ورقة عمل يدوية في بحث التكامل

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \sqrt[5]{(3x-2)^3}$$

أوجد تابعاً أصلياً للتابع f

السؤال الثاني:

احسب كلّاً من التكاملات الآتية:

$$① \; I = \int_{-1}^{2} |x^2 - x| \, dx$$

$$② \; I = \int_{0}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$③ \; I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x.\sin(3x) \, dx$$

$$④ \; I = \int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$$

$$⑤ \; I = \int_{0}^{1} x^2 e^x \, dx$$

$$⑥ \; I = \int_{0}^{2} \frac{x^2+3x+3}{x+1} dx$$

السؤال الثالث:

أوجد التابع الأصلي F الذي يحقق الشرط:

$$① \; f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \; ; F(1) = 0$$

$$x \in]0, +\infty[$$

$$② \; f(x) = \frac{2x}{(2x^2+3)^3} \; ; F(0) = 0$$

$$x \in R$$

السؤال الرابع:

لدينا:

$$J = \int_{0}^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+2} dx \quad , \quad I = \int_{0}^{\ln(2)} \frac{2}{e^x+2}$$

احسب J ثم احسب $I + J$ ثم استنتج I

حل ورقة العمل اليدوية في بحث التكامل

السؤال الأول:

$$f(x) = (3x-2)^{\frac{3}{5}}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \frac{(3x-2)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{24} \sqrt[5]{(3x-2)^8}$$

السؤال الثاني:

$$① \; I = \int_{-1}^{2} |x^2 - x| \, dx$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

أما: $x = 0$ أو $x = 1$

x	-1		0		1		2
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 - x \rvert$		$x^2 - x$		$x - x^2$		$x^2 - x$	

ومنه نجد:

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 - x \, dx + \int_{0}^{1} x - x^2 \, dx + \int_{1}^{2} x^2 - x \, dx$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$I = \left[0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

$$② \; I = \int_{0}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

البسط هو u' و المقام u ومنه:

$$I = [ln(e^x + e^{-x})]_0^1 = ln(e + e^{-1}) - ln(1+1)$$

$$I = ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - ln(2) = ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right) - ln(2)$$

$$\Rightarrow I = ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

③ $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x.\sin(3x)\,dx$

$$u = x \to u' = 1$$

$$v' = \sin(3x) \to v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$$

$$I = \left[-\frac{1}{3}x.\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x)\,dx$$

$$I = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}[0-0] = \frac{\pi}{9}$$

---

④ $I = \int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$

$$I = \int_0^1 x(x^2-4)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2-4)^{-2}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-4)^{-1}}{-1}\right]_0^1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2-4}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{-3} - \left(-\frac{1}{-4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\right] = \frac{1}{24}$$

---

⑤ $I = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$

$$u = x^2 \to u' = 2x$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$I = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx$$

$$u = 2x \to u' = 2$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$\Rightarrow I = [x^2e^x]_0^1 - \left([2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\right)$$

$$\Rightarrow I = [x^2e^x]_0^1 - [2xe^x]_0^1 + [2e^x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = e - 0 - (2e - 0) + 2e - 2$$

$$\Rightarrow I = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

⑥ $I = \int_0^2 \frac{x^2+3x+3}{x+1}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x+1 & x^2+3x+3 \\ & \underline{x^2+x} \\ & 2x+3 \\ & \underline{2x+2} \\ & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x+1)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow I = 2 + 4 + \ln(3) - 0 \Rightarrow I = 6 + \ln(3)$$

السؤال الثالث:

① $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x}.\ln(x) \Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

$$F(1) = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

---

② $f(x) = \frac{2x}{(2x^2+3)^3}$

$$f(x) = 2x(2x^2+3)^{-3} = \frac{1}{2}.4x(2x^2+3)^{-3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x^2+3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2x^2+3)^2} + C$$

$$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4\times 9} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4(2x^2+3)^2} + \frac{1}{36}$$

السؤال الرابع:

حساب J: $J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

$$\Rightarrow J = [\ln(e^x+2)]_0^{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow J = \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right) - \ln(e^0+2) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

حساب $(I+J)$

$$I + J = \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x}{e^x+2} + \frac{2}{e^x+2}\right) dx$$

$$\Rightarrow I + J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x+2}{e^x+2}\,dx = \int_0^{\ln(2)} 1\,dx$$

$$\Rightarrow I + J = [x]_0^{\ln(2)} = \ln(2)$$

إستنتاج I:

$$I + J = \ln(2) \Rightarrow I = \ln(2) - J$$

$$\Rightarrow I = \ln(2) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

ورقة عمل منزلية في بحث التكامل

السؤال الأول:

احسب كلّاً من التكاملات الآتية:

① $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$

② $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$

③ $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

④ $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

⑤ $I = \int_0^1 \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} dx$

السؤال الثاني:

أوجد تابعاً أصلياً للتابع f:

$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \qquad I =]2, +\infty[$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التكامل

السؤال الأول:

① $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$

$$I = [\ln(\cos(x) + \sin(x))]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln(cos(0) + sin(0))$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1) = \ln(\sqrt{2})$$

---

② $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 1} xd = \left[\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(1) = \frac{1}{4}\ln(2)$$

---

③ $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2}$$

$$\Rightarrow I = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$$

---

④ $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

$$I = \int_1^e x^{-2} \ln(x)\, dx$$

$$u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \to v = -\frac{1}{x}$$

$$I = \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{e} + 0\right] + \left[-\frac{1}{e} + 1\right] = 1 - \frac{2}{e}$$

$$⑤\ \boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,dx}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2x+4-4-1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2x+4}{(x+2)^2}\,dx - 5\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2(x+2)}{(x+2)^2}\,dx - 5\int_0^1 (x+2)^{-2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx - 5\int_0^1 (x+2)^{-2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = 2[\ln(x+2)]_0^1 - 5\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = 2[\ln(3)-\ln(2)] - 5\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{6}$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2} \qquad I =]2,+\infty[$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
x^2-x-2 & x^3 \\
 & \underline{x^3-x^2-2x} \\
 & x^2+2x \\
 & \underline{x^2-x-2} \\
 & 3x+2
\end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

$$I(x) = \frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

نوحّد المقامات ونحذفها:

$$3x+2 = a(x+1) + b(x-2)$$

لإيجاد a نضع $x = 2$: $\quad 8 = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{3}$

لإيجاد b نضع $x = -1$: $\quad -1 = -3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+1+\frac{8}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$$

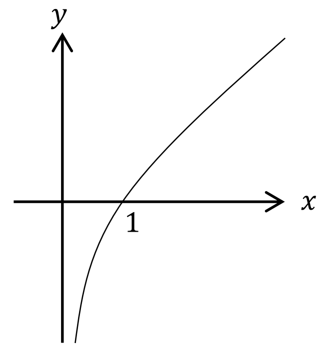
التابع اللوغاريتمي

تابعه المرجعي

$f(x)=\ln(x)$

معرّف على: $x>0 \Rightarrow$ $]0,+\infty[$

$\ln(x):]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$



خواصه

$a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$

$a\geq b \Leftrightarrow \ln(a)\geq \ln(b)$

$a\leq b \Leftrightarrow \ln(a)\leq \ln(b)$

$\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$

$\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$b.\ln(a)=\ln(a^b)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

$\frac{1}{2}\ln(a)=\ln(\sqrt{a})$

مجموعة تعريفه

① $f(x)=\ln(g(x))$

$\Rightarrow g(x)>0$

② $f(x)=\ln|g(x)|$

$\Rightarrow g(x)\neq 0$

معادلات

لحل معادلة لوغارتمية:

① نوجد شرط الحل.

② نطبّق الخواص إن وجدت.

③ نزيل اللوغاريتمات ونحل المعادلة.

حالة خاصّة:

إذا كانت المعادلة تحوي على $\ln^2(x)$

تحل المعادلة إما بالتحليل المباشر أو باستخدام المحلل Δ

المتراجحات

حل المتراجحة:

① نوجد شرط الحل.

② نطبّق الخواص إن وجدت.

③ نزيل اللوغاريتمات ونحل المتراجحة.

④ نقاطع الحلول مع شرط الحل.

إثبات صحة متراجحة:

نضع الفرق بين حدّي المتراجحة ونسمّيه $h(x)$ وندرس إطراد $h(x)$ ومن جدول الإطراد نستنتج إشارة $h(x)$ ثم إشارة الفرق ويتم إثبات المتراجحة.

المبرهنات

$\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(x)}=+\infty$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$

$\lim_{x\to 0^+}x.\ln(x)=0^-$

الإشتقاق

$f(x)=\ln(g(x))$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال ① : حل المعادلات والمتراجحات الآتية:

① $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$

الحل:

$$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \Rightarrow D_1 = \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$$

$$6-x>0 \Rightarrow 6>x \Rightarrow D_2 =]-\infty,6[$$

$$x>0 \Rightarrow D_3 =]0,+\infty[$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \left]\frac{3}{2},6\right[$$

$$\ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \ln\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln\left(\frac{6-x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x-3} = \frac{6-x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{2x^2-3x} = 6-x$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x = 36-12x+x^2$$

$$\Rightarrow x^2+9x-36=0 \Rightarrow (x+12)(x-3)=0$$

إما: $x=-12$ مرفوض أو: $x=3$ مقبول

② $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

الحل:

$$D_1 = R\backslash\{-2\} \quad , \quad D_2 = R\backslash\{2\}$$

$$D = D_1 \cap D_2 = R\backslash\{-2,+2\}$$

المعادلة تكافئ:

$$\ln[|x+2|.|x-2|] = \ln(1)$$

تذكر أن: $\ln(1)=0$

$$|(x+2)(x-2)| = 1 \Rightarrow |x^2-4| = 1$$

إما: $x^2-4=1 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow \begin{matrix} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{matrix} \in D$

أو: $x^2-4=-1 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{matrix} \in D$

$$S = \{-\sqrt{3},-\sqrt{5},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$$

③ $\ln(x^2-3x) \geq 2\ln(6-x)$

الحل:

$$x^2-3x>0$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2-3x=0$	+	+	0	−	0	+	+
$x^2-3x>0$	م		غ.م		م		

$$D_1 =]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$$

$$6-x>0 \Rightarrow 6>x \Rightarrow D_2 =]-\infty,6[$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \Rightarrow D =]-\infty,0[\cup]3,6[$$

المتراجحة تكافئ: $ln(x^2-3x) \geq ln(6-x)^2$

$$x^2-3x \geq 36-12x+x^2$$

$$\Rightarrow 9x \geq 36 \Rightarrow x \geq 4$$

$$I = [4,+\infty[$$

$$\Rightarrow S = D \cap I \Rightarrow S = [4,6[$$

④ $\ln^2(x) - 6\ln(x) + 8 = 0$

الحل:

$$x>0 \Rightarrow D =]0,+\infty[$$

$$(\ln(x)-4)(\ln(x)-2)=0$$

إمّا: $\ln(x)=2 \Rightarrow x=e^2$

أو: $\ln(x)=4 \Rightarrow x=e^4$

مثال ②: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(3) \end{cases}$$

الحل:

مجموعة التعريف:

$$x\in]0,+\infty[\ ,\ \ y\in]0,+\infty[$$

المعادلة (2) تكافئ:

$$ln(x.y)=ln(3)\Rightarrow x.y=3$$

الجملة تكافئ:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x.y=3 \end{cases}$$

من (2) نجد: $y=\frac{3}{x}$ نعوض في (1):

$$x^2+\frac{9}{x^2}=10\Rightarrow\frac{x^4+9}{x^2}=10$$

$$x^4+9=10x^2\Rightarrow x^4-10x^2+9=0$$

$$(x^2-9)(x^2-1)=0$$

إما: $x^2=9\Rightarrow$ $x=3\Rightarrow y=1$ مقبول
$x=-3\Rightarrow y=-1$ مرفوض

أو: $x^2=1\Rightarrow$ $x=1\Rightarrow y=3$ مقبول
$x=-1\Rightarrow y=-3$ مرفوض

الحلول: $(3,1)$, $(1,3)$

مثال ①: ليكن لدينا الخطان البيانيان C_f و C_g للتابعين f و g المعرفين على $]-\infty,1[$ وفق:

$$f(x)=\ln(1-x)\quad,\quad g(x)=\frac{-x}{1-x}$$

1) أثبت أن $f(x)\geq g(x)$ أياً كانت $x<1$

2) اكتب معادلة المماس المشترك للخطين البيانيين للتابعين f و g في نقطة فاصلتها الصفر.

الحل:

1) $f(x)\geq g(x)\Rightarrow\ln(1-x)\geq\frac{-x}{1-x}$

$$\Rightarrow\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\geq0$$

$$h(x)=\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}$$

h معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,1[$

$$h'(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{1(1-x)-(-1)(x)}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$h'(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow h(0)=0$$

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$h(x)$		↘	0	↗	‖
إشارة $h(x)$		$+$	0	$+$	‖

$$h(x)\geq0\Rightarrow\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\geq0$$

$$\Rightarrow\ln(1-x)\geq\frac{-x}{1-x}\Rightarrow f(x)\geq g(x)$$

المتراجحة محققة أياً كانت $x<1$

2) $x=0$

$$f(0)=0\quad,\quad g(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{-1}{1-x}\quad,\quad g'(x)=\frac{-1}{(1-x)^2}$$

$$f'(0)=-1\quad,\quad g'(0)=-1$$

$$\Rightarrow T:y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$T:y=g'(0)(x-0)+g(0)$$

$$\Rightarrow T:y=-x$$

مثال ②: أوجد نهاية التابع f عند a المعطاة:

① $f(x)=\dfrac{\ln(x)+\ln(3)}{\sqrt{3x}}$ $\quad a=+\infty$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\ln(3x)}{\sqrt{3x}}=\frac{\ln\left(\sqrt{3x}^2\right)}{\sqrt{3x}}=\frac{2\ln(\sqrt{3x})}{\sqrt{3x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2\times0=0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

② $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{5x}$ $\quad a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2}{5}\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

لأن: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

---

③ $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$ $\quad a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2}{3}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\frac{3x}{\sin(3x)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3} \times 1 \times 1 = \frac{2}{3}$$

لأن: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

---

④ $f(x) = x + x(\ln(x))^2$ $\quad a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $0 \times \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{x}^2(\ln(x))^2 = x + \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + (2\times 0)^2 = 0$$

لأن: $\lim_{x\to 0} x.\ln(x) = 0$

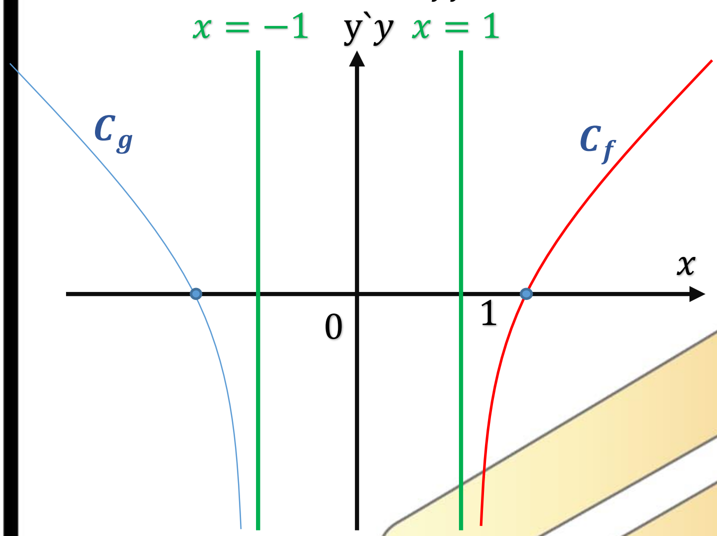
استنتاج رسم خط بياني:

① $g(x) = f(-x)$

C_g ينتج عن C_f وفق تناظر بالنسبة لمحور yy'

بس نغير إشارة x

تناظر بالنسبة للمحور yy'

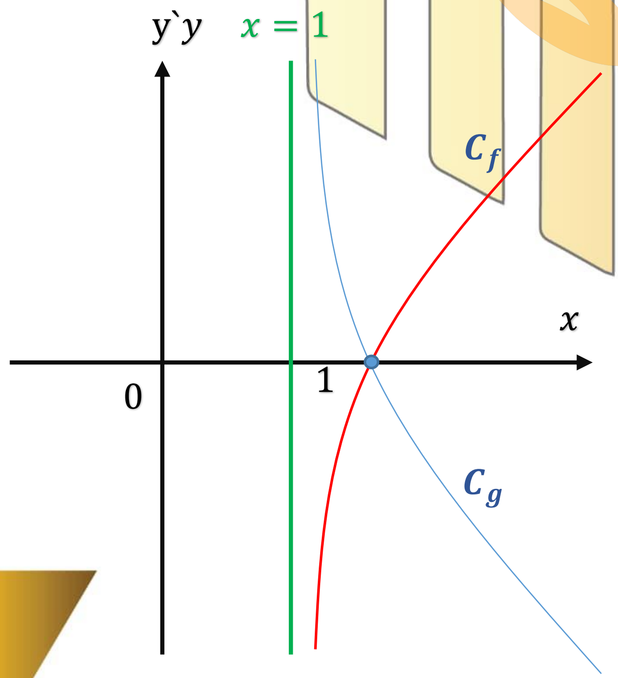


② $g(x) = -f(x)$

C_g ينتج عن C_f وفق تناظر بالنسبة لمحور xx'

بس نغير إشارة y

تناظر بالنسبة للمحور xx'

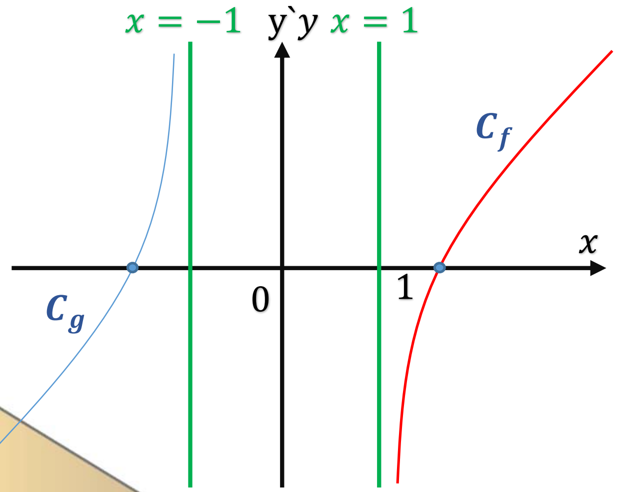


③ $g(x) = -f(-x)$

C_g ينتج عن C_fوفق تناظر بالنسبة للمبدأ O

بس نغير إشارة x و y

تناظر بالنسبة للمبدأ O

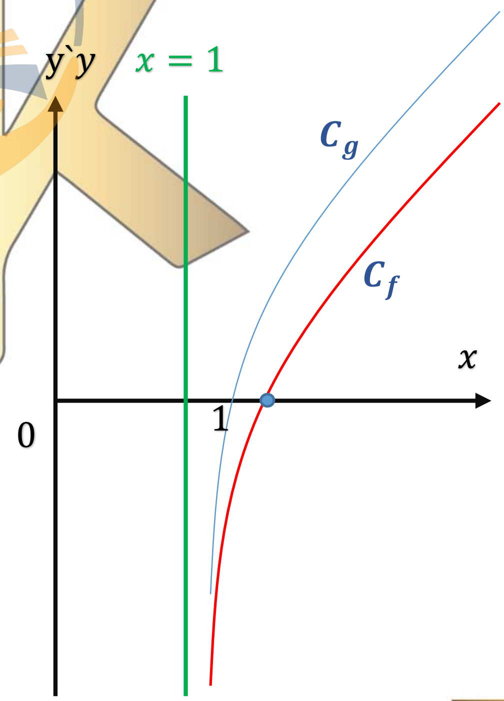


④ $g(x) = f(x) + k$

C_g ينتج عن C_fوفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(0, +k)$

إضافة أو طرح للورايات

انسحاب $\vec{u}(0, \pm k)$

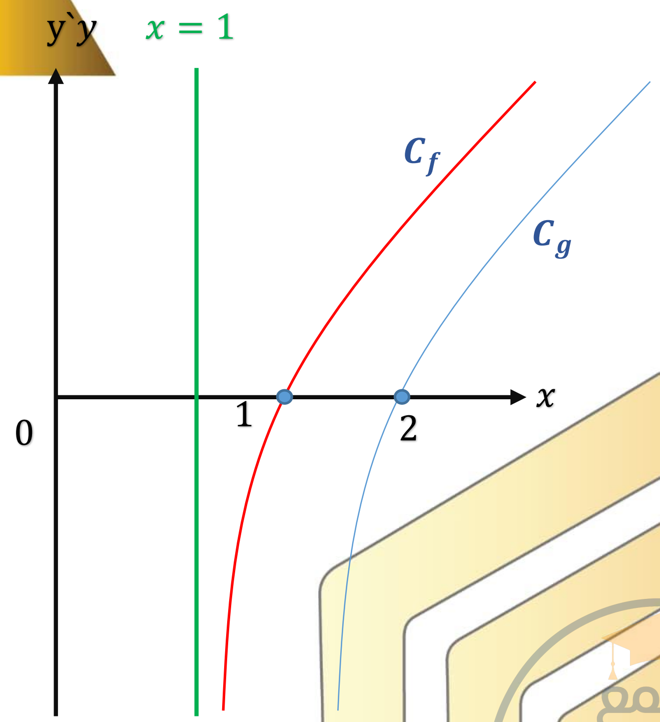


⑤ $g(x) = f(x + k)$

C_g ينتج عن C_fوفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(-k, 0)$

إضافة أو طرح للإكسات

إنسحاب $\vec{u}(-k, 0)$ (عكس الإشارة)

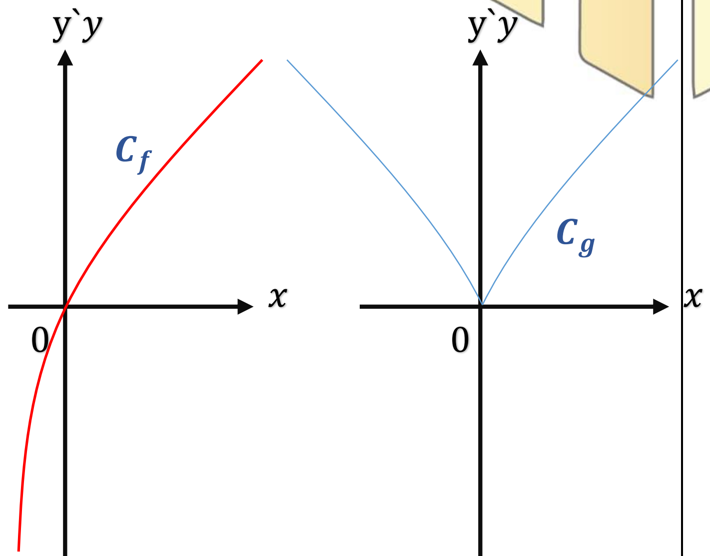


⑥ $g(x) = f(|x|)$

التابع g تابع زوجي

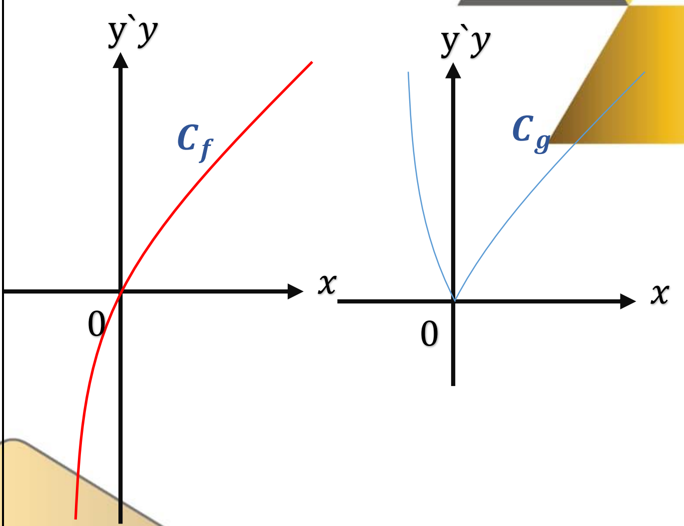
نأخذ الجزء من C_f المقابل للمجال $]0, +\infty[$

ونوجد نظيره بالنسبة للمحور yy'



⑦ $g(x)=|f(x)|$

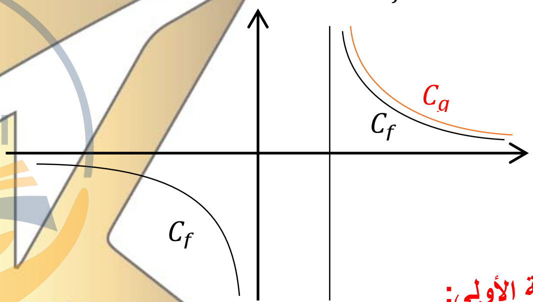
ينتج C_g عن اجتماع نقاط C_f ذات التراتيب الموجبة مع نظائر نقاط C_f ذات التراتيب السالبة بالنسبة لمحور الفواصل.



⑧ $g(x)=f(x)$

حيث $g(x)$ مقصور $f(x)$

ينتج C_g بأخذ نقاط C_f على مجال تعريف التابع $g(x)$



المسألة الأولى:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[$ وفق:

$$f(x)=x-2+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

1) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $d: y=x-2$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي

2) ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x)=\lambda$ حل وحيد حيث $\lambda\in R$

4) ارسم المستقيم d والخط البياني C

5) استنتج رسم التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=2-x+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

6) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق:

$$u_n=f(n)-n+2$$

ولنضع المجموع: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

أثبت بالتدريج أن: $S_n=\ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)$

الحل:

1) $f(x)-y_d=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=\ln(1)=0$$

$\Leftarrow$ $d: y=x-2$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة:

$$f(x)-y_d=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$f(x)-y_d=0\Rightarrow\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+2}=1\Rightarrow x=x+2\Rightarrow 0\neq2$$

$f(x)-y_d$ لا ينعدم، له إشارة واحدة نجدها بتعويض أي قيمة من مجموعة التعريف: $x=-3$

$$f(x)-y_d=\ln\left(\frac{-3}{-3+2}\right)=\ln(3)>0$$

$$\Rightarrow f(x)-y_d>0$$

C فوق d

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,-2[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+0=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-4+\ln\left(\frac{-2}{0^-}\right)=+\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي نحو oy^+ و C يقع يسار المقارب.

$$f'(x)=1+\frac{\frac{1(x+2)-1x}{(x+2)^2}}{\frac{x}{x+2}}=1+\frac{2}{x(x+2)}>0$$

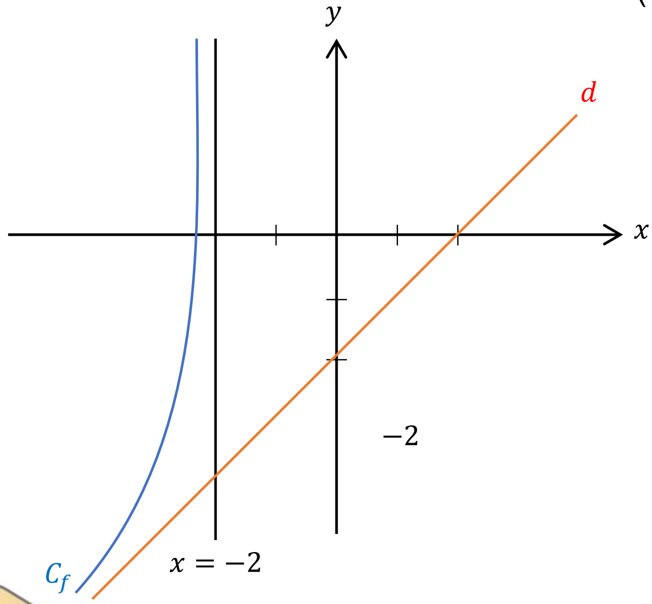
x	$-\infty$		α		-2
$f'(x)$		$+$	$+$ | $+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	λ	$\nearrow$	$+\infty$

3) f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,-2[$ مهما كانت $\lambda\in R$

$$f(]-\infty,-2[)=]-\infty,+\infty[$$

إن للمعادلة $f(x)=\lambda$ حل وحيد

(4



(5 $g(x) = -x + 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-1}$

$$g(x) = -x + 2 - \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\left(x - 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل xx'

(6 $u_n = n - 2 + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) - n + 2 = \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$

نسمي القضية:

$$E(n): S_n = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)$$

نثبت صحة: $E(1)$

$$l_1 = S_1 = u_1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$l_2 = \ln\left(\frac{2}{(1+2)(1+1)}\right) = \ln\left(\frac{2}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow l_1 = l_2$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1): \underbrace{S_{n+1}}_{l_1} = \underbrace{\ln\left(\frac{2}{(n+3)(n+2)}\right)}_{l_2}$$

$$l_1 = S_{n+1} = \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{S_n \text{ من الفرض}} + u_{n+1}$$

$$l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)} \times \frac{(n+1)}{(n+3}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+3)}\right) = l_2$$

محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل أياً كانت $n \geq 1$

المسألة الثانية: الخط البياني C_f للتابع f المعرف على R_+^* وفق:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) اكتب معادلة المماس T المار من المبدأ للخط C للتابع f

3) ارسم C_f

4) ناقش بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{1 - x + \ln(x)}{x}$$

الحل:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$y = 0$ مقارب افقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - 1(1 + \ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	1	$\searrow 0$	

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

2) المماس المار من المبدأ ⇐* ... $T: \boxed{y = mx}$

$$f(x) = f'(x)x \Rightarrow \frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{-\ln(x)}{x^2}x$$

$$\Rightarrow \frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{-\ln(x)}{x} \Rightarrow 1+\ln(x) = -\ln(x)$$

$$\Rightarrow 2\ln(x) = -1 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{-\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{e}}$$

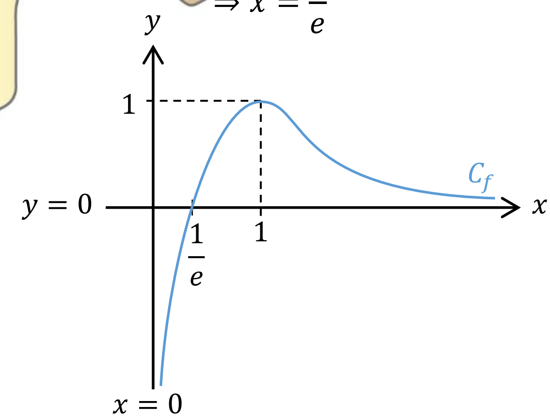
$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{e}{2}$$

نعوض في $(*)$: $T: y = \frac{e}{2}x$

3) نوجد تقاطع C مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1+\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{e}$$



4) عندما $m \in]-\infty, 0]$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]0,1[$ للمعادلة $f(x) = m$ حلّان.

عندما $m = 1$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]1, +\infty[$ ليس للمعادلة $f(x) = m$ أي حل.

5) $$f(x) - g(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{1-x+\ln(x)}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1+\ln(x)-1+x-\ln(x)}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - 1$$

C_g هو انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(0,-1)$

المسألة الثالثة: C_f و C_g الخطّان البيانيان للتابعين f و g المعرفان على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = (x+1)\ln(x)$$

$$g(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x}$$

1) ادرس تغيرات g واستنتج اشارته.

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$

4) ارسم C_f

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور xx' والمستقيم $x = e$

6) استنتج رسم C_h الخط البياني للتابع h المعرف وفق:

$$h(x) = x.\ln(x-1)$$

الحل:

1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} g(x)$ حالة عدم تعيين

$$g(x) = \frac{x\ln(x)+x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{0^- + 0^+ + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow g(1) = 2$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$	
إشارة $g(x)$		$+$	$+$	$+$	

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1\times \ln(x) + \frac{1}{x}(x+1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x} = g(x)$$

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	

3) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

$$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α على المجال $]0,+\infty[$

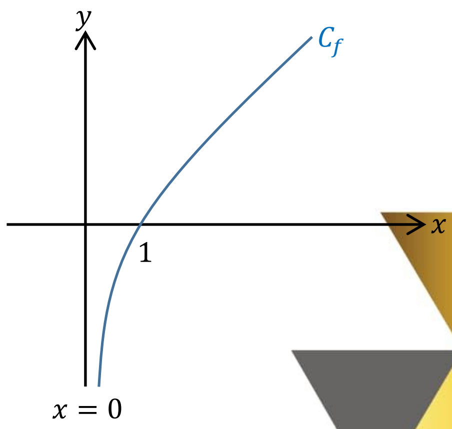
$$\Rightarrow f(1) = (1+1)\ln(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

4) نوجد تقاطع C مع محور الفواصل:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x+1)\ln(x) = 0$$

إما: $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin D_f$

أو: $\ln(x)=0 \Rightarrow x=1$



5) $S = \int_1^e f(x)\,dx \Rightarrow S = \int_1^e (x+1)\ln(x)\,dx$

$$u=\ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x+1 \to v = \frac{x^2}{2}+x$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(e)\left(\frac{e^2}{2}+e\right)\right] - [0] - \left[\left[\frac{e^2}{4}+e\right] - \left[\frac{1}{4}+1\right]\right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{e^2+5}{4}$$

6) $h(x) = x.\ln(x-1)$

$$f(x) = (x+1)\ln(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x-1)$$

C_h ينتج عن انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(1,0)$

ورقة عمل يدوية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

f تابع معرف على R_+^* وفق:

$$f(x) = ax^2 + bx - \ln(x)$$

عيّن a و b حتّى يقبل الخط البياني C للتابع f قيمة حدّية عند الواحد قيمتها (2)

السؤال الثاني:

f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$$

احسب: $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

السؤال الثالث:

f التابع المعرف على $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + x$$

1) أثبت أن $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C للتابع f بجوار $+\infty$

2) ادرس الوضع النسبي بين C_f و Δ

السؤال الرابع:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على:

$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1) أثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية لخطّه البياني

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها على المجال $]1, +\infty[$

3) ارسم C_f على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

4) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

السؤال الخامس:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]e, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) ارسم C_f

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f والمحور xx' والمستقيمين $x = e^2$ و $x = e^3$

4) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x.|1-\ln(x)|}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

قمية حدّية عند (1): $\quad f'(1) = 0$

قيمتها (2): $\quad f(1) = 2$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 2a + b - 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b - 1 = 0 \dots (1)$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b - 0 = 2$$

$$\Rightarrow a + b - 2 = 0 \dots (2)$$

بطرح (2) من (1): $\quad a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

نعوضها في (2): $\quad -1 + b - 2 = 0 \Rightarrow b = 3$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$$

السؤال الثاني:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

هناك عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$$

السؤال الثالث:

1) $f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$$

$\Leftarrow$ $\Delta: y = x$ مقارب مائل في للخط C في جوار $+\infty$

2) لدراسة الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = x + 1 \Rightarrow 0 \neq 1$ مستحيلة

$f(x) - y_\Delta$ له إشارة واحدة نوجدها بتجريب قيمة ولتكن $x = 1$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \Delta$ تحت C

السؤال الرابع:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

أياً كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

فإن: $-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

$\Leftarrow$ f تابع فردي، خطّه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C نحو oy^+ و C يقع يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(1)=0$$

$y=0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

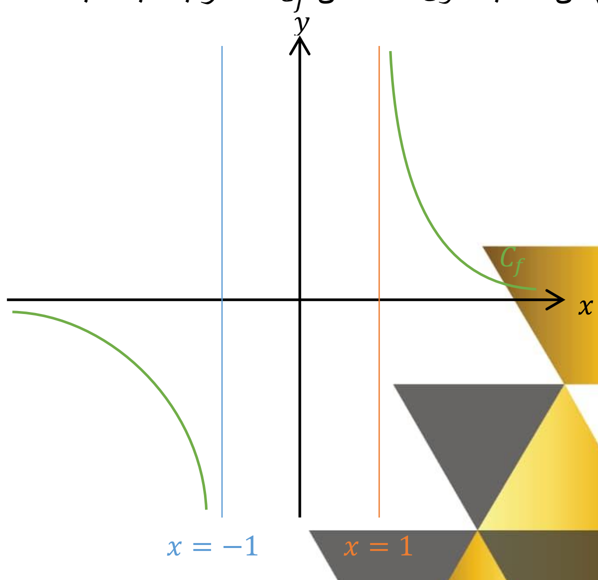
$$f'(x)=\frac{\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$f'(x)<0$ عندما $x\in D_f$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

3) من الطلب الأول نلاحظ أن C_f متناظر بالنسبة للمبدأ



4) $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

$$x+1>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow D_1=]-1,+\infty[$$

$$x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow D_2=]1,+\infty[$$

$$D_g=D_1\cap D_2=]1,+\infty[$$

g هو مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ و C_g هو ذاته C_f على المجال $]1,+\infty[$

السؤال الخامس:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]e,+\infty[$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=-\infty$$

$x=e$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

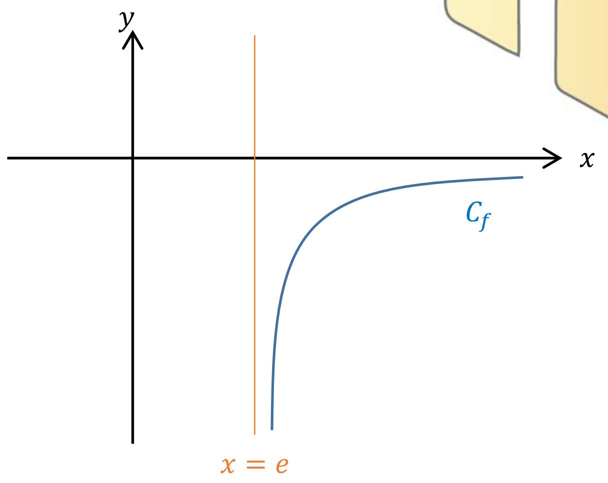
$$f'(x)=\frac{-\left[1(1-\ln(x))+\left(-\frac{1}{x}\right)x\right]}{\left(x(1-\ln(x))\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1+\ln(x)+1}{\left(x(1-\ln(x))\right)^2}=\frac{\ln(x)}{\left(x(1-\ln(x))\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)=0\Rightarrow x=1\notin D_f$$

x	e	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0

2)



3) $S = \int_{e^2}^{e^3} -f(x)\,dx$

$$\Rightarrow S = \int_{e^2}^{e^3} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln(x)}dx = [\ln|1-ln(x)|]_{e^2}^{e^3}$$

$$\Rightarrow S = [\ln|1-ln(e^3)|] - [\ln|1-ln(e^2)|]$$

$$\Rightarrow S = \ln|1-3| - \ln|1-2| = \ln|-2| - \ln|-1|$$

$$\Rightarrow S = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

4) $g(x) = \frac{1}{x|1-\ln(x)|}$

$$x \in]e,+\infty[\Rightarrow |x| = x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{|1|}{|x|.|1-\ln(x)|} = \left|\frac{1}{x(1-\ln(x))}\right|$$

$$\Rightarrow g(x) = |f(x)|$$

C_g ينتج بالحفاظ على نقاط C_f ذات التراتيب الموجبة وأخذ نظائر نقاط C_f ذات التراتيب السالبة بالنسبة لمحور xx'

ورقة عمل منزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x.\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ m+2 & ; x = 0 \end{cases}$$

عيّن قيمة m التي يكون عندها التابع f مستمراً على R

السؤال الثاني:

أثبت أنه مهما كان $x \geq 0$:

$$\ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1)$$

السؤال الثالث:

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحققان:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$

السؤال الرابع:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على:

$]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{x}{2}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها على المجال $]1,+\infty[$

2) a) أثبت أن: $1-x \in D_f$

b) أثبت أن: $f(1-x)+f(x) = -\frac{1}{2}$

ثم استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط البياني C_f

3) أثبت أن $\Delta: y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C_f و Δ

4) ارسم C_f و Δ على المجال $]1,+\infty[$

5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1$$

السؤال الخامس:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) اكتب معادلة المماس T للخط C_f عند القيمة الحدّية.

3) ارسم C_f و T

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f والمحور xx' والمستقيمين $x=2$ و $x=e$

5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{1+x.\ln(x)}{x.\ln(x)}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

حتّى يكون التابع مستمراً على R يجب أن يكون مستمراً عند الصفر، أي أنه يجب أن يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = m+2$$

عند 0 هناك عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$f(x) = \frac{x.\ln(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x.\ln(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x.\ln(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\times 2 = 2$$

$$\Rightarrow m+2 = 2 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

السؤال الثاني:

$$ln(x) - 2\left(\sqrt{x}-1\right) \le 0$$

نفرض: $f(x) = ln(x) - 2\left(\sqrt{x}-1\right)$

$$\boldsymbol{f(x)} = ln(x) - 2\sqrt{\boldsymbol{x}} + 2$$

تصبح المتراجحة: $f(x) \le 0$

ندرس إطراد التابع f على المجال $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = ln(1) - 2\sqrt{1} + 2 = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	
$f(x) \le 0$	‖	محققة		محققة	

مهما كانت $x > 0$ فإن $f(x) \le 0$

السؤال الثالث:

$$\underbrace{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{l_1} = \underbrace{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}}_{l_2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\ln(a\times b)}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(a\times b)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{ab}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = 1}$$

السؤال الرابع:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-x+1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow$ $x = 2 \in D_f$ مقبول

$x = -1 \notin D_f$ مرفوض

$$f(2) = -1 - \ln(2)$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

(2 a) $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$$\Rightarrow -x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow 1-x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\text{ محققة}$$

(b $$\underbrace{f(1-x)+f(x)}_{l_1} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{l_2}$$

$$l_1 = \ln\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right) - \frac{1-x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{-1+x-x}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-x}{(1-x)} \times \frac{(x-1)}{x}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-1}{-1}\right) - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = l_2 \text{ محققة}$$

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$2x_0 - x = 2\left(\frac{1}{2}\right) - x = 1 - x \in D_f \text{ محققة}$$

$$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$$

$$\Rightarrow f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2} \text{ محققة}$$

ومنه فإن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للتابع f

(3 $$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_\Delta\right) = \ln(1) = 0$$

$\Leftarrow$ $\Delta: y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = x$$

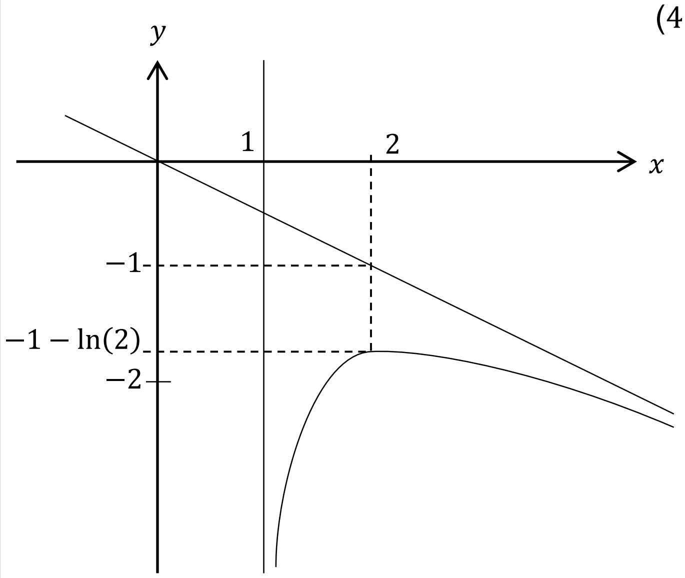
$$\Rightarrow -1 \neq 0 \text{ مستحيلة}$$

$\Leftarrow$ $f(x) - y_\Delta$ لا ينعدم له إشارة واحدة نعرفها بتجريب قيمة ولتكن $x = 2$

$$\ln\left(\frac{2-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - y_\Delta < 0$$

C تحت Δ

(4



(5 $$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1$$

$$f(x+2) = \ln\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right) - \frac{(x+2)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x+2)$$

C_g ينتج عن C_f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(-2,0)$

السؤال الخامس:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

لأن: $\lim_{x\to0^+} x.\ln(x)=0^-$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يمين المقارب.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{1(0^-)}=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يسار المقارب.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{1(0^+)}=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو oy^+ و C يقع يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{-\left[1\times\ln(x)+\left(\frac{1}{x}\right)(x)\right]}{(x.\ln(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-(\ln(x)+1)}{(x.\ln(x))^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow-(\ln(x)+1)=0$$

$$\Rightarrow \ln(x)+1=0\Rightarrow\ln(x)=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{\frac{1}{e}(-1)}=-e$$

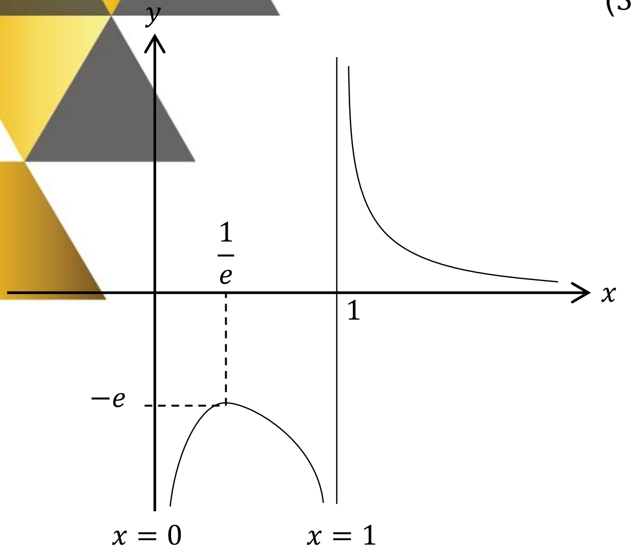
x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$ قيمة حدّية كبرى

2) عند القيمة الحدّية (مماس أفقي): $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

$$T: y=y_0\Rightarrow T: y=-e$$

3)



4) $S=\int_2^e f(x)\,dx$

$$\Rightarrow S=\int_2^e\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx\Rightarrow S=[\ln(ln(x))]_2^e$$

$$\Rightarrow S=[\ln(\ln(e))]-[\ln(\ln(2))]$$

$$\Rightarrow S=\ln(1)-\ln(ln(2))$$

$$\Rightarrow S=0-\ln(ln(2))=-\ln(ln(2))$$

5) $g(x)=\frac{1+x.\ln(x)}{x.\ln(x)}$

$$g(x)=\frac{1}{x.\ln(x)}+\frac{x.\ln(x)}{x.\ln(x)}=f(x)+1$$

C_g ينتج عن C_f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(0,1)$

التابع الأسي

شكله

$f(x) = e^{g(x)}$

أو: $f(x) = \exp(g(x))$

مجموعة تعريفه هي D_g

خواصه

$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$

$a \geq b \Leftrightarrow e^a \geq e^b$

$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$

$e^a . e^b = e^{a+b}$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$(e^a)^n = e^{an}$

$\sqrt[k]{e^n} = e^{\frac{n}{k}}$

$e^{\ln(a)} = a$

$\ln(e^a) = a$

معادلات

① $e^{f(x)} = e^{g(x)}$

1) نوجد مجموعة التعريف: $D = D_f \cap D_g$

2) نأخذ ln للطرفين: $\Rightarrow f(x) = g(x)$

3) نحل المعادلة ونقبل أو نرفض من مجموعة التعريف.

② $e^{f(x)} = a$

1) نوجد مجموعة تعريف D_f حيث أن: $a > 0$ موجب

2) نأخذ ln للطرفين:

$f(x) = \ln(a)$

3) نحل المعادلة ونقبل أو نرفض من مجموعة التعريف.

③ $ae^{2x} + be^x + c = 0$

تحليل مباشر أو عن طريق المحلل Δ

حالة خاصة:

$ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$

نضرب بـ(e^{2x}) فتصبح:

$a + be^x + ce^{2x} = 0$

نعود إلى الحالة ③

④ حل معادلة بمجهولين:

1) حذف بالجمع أو حذف بالتعويض

2) يمكن استخدام خواص التابع الأسي في بعض الحالات.

متراجحات

① $e^{f(x)} \leq e^{g(x)}$

1) نوجد مجموعة التعريف:

$D = D_f \cap D_g$

2) نأخذ ln للطرفين:

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$

3) بحل المتراجحة نحصل على مجال I ويكون حل المتراجحة المقبول هو:

$S = D \cap I$

② $e^{f(x)} \geq a$

إذا كان a موجب، يمكن حل المتراجحة بأخذ ln للطرفين

إذا كان a سالب، المتراجحة مستحيلة الحل في R

③ $e^{f(x)} \leq a$

إذا كان a موجب، يمكن حل المتراجحة بأخذ ln للطرفين

إذا كان a سالب، المتراجحة مستحيلة الحل في R

④ $ae^{2x} + be^x + c \leq 0$

تحل بإستخدام التحليل المباشر أو المميز Δ وجدول إشارة

نهايات

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} x^n . e^x = 0^-$

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

الإشتقاق

$f(x) = e^{g(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$

تتمّة مخطط التابع الأسي

دراسة تابع a^x

دراسة التغيرات $a >$

$$f(x) = a^x = e^{x.\ln(a)}$$

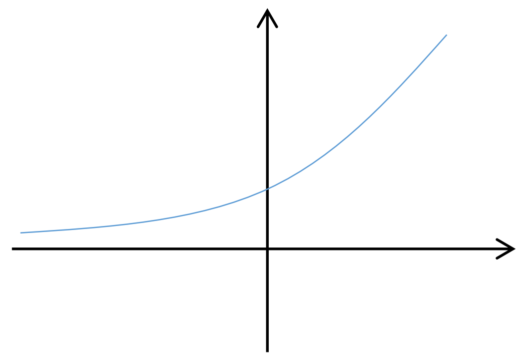
f معرّف ومستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln(a) \, . \, e^{x.\ln(a)} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



حل المعادلات والمتراجحات

بنفس اسلوب حل معادلات ومتراجحات التابع الأسي e^x

المعادلات التفاضلية

من الشكل:

$$y' = ay$$

حلّها: $f(x) = k.e^{ax}$

من الشكل:

$$y' = ay + b$$

حلّها: $f(x) = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$

ملاحظة:

نوجد k عن طريق شرط معطى بالشكل:

1. C_f يمر بالنقطة $A(x_0, f(x_0))$
2. C_f يقبل مماساً ميله m في النقطة x

المعادلات والمتراجحات:

① $e^{3-x} = 1$

الحل:

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln(e^{3-x}) = \ln(1) \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

② $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$

الحل:

نضرب بـ(e^x): $e^{2x} + e = (1+e)e^x$

$$e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$$

$$(e^x - e)(e^x - 1) = 0$$

إمّا: $e^x = e \Rightarrow x = 1$

أو: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

③ $e^x + 4e^{-x} \leq 5$

الحل:

نضرب بـ(e^x):

$$e^{2x} + 4 \leq 5e^x \Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \Rightarrow (e^x - 4)(e^x - 1) = 0$$

إمّا: $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4) \Rightarrow x = \ln(2^2)$

$$\Rightarrow x = 2\ln(2)$$

أو: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0		$2\ln(2)$	$+\infty$
$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$	غير محققة	0	محققة	0	غير محققة

$$\Rightarrow x \in [0, 2\ln(2)]$$

حل جملة معادلتين:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \ldots ① \\ e^x + \frac{1}{2}e^y = 2 + \frac{e}{2} \ldots ② \end{cases}$$

الحل:

نضرب المعادلة ① بالعدد (e)

نضرب المعادلة ② بالعدد (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} e.e^x - e^y = e \ldots ① \\ 2e^x + e^y = 4 + e \ldots ② \end{cases}$$

بالجمع: $e.e^x + 2e^x = 4 + 2e$

$$\Rightarrow e^x(e+2) = 2(2+e) \Rightarrow e^x = 2$$

$$\Rightarrow x = \ln(2)$$

نعوض في ②: $2(2) + e^y = 4 + e \Rightarrow e^y = e$

$$\Rightarrow y = 1$$

الحل المشترك جملة المعادلتين: $(\ln(2), 1)$

تعلّم:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} \Rightarrow a^x = e^{x.\ln(a)}$$

$$3^x = e^{x.\ln(3)}$$

حل المتراجحة الآتية:

$9^x + 3^{x+1} - 4 \leq 0$

الحل:

$$(3^2)^x + 3^1.3^x - 4 \leq 0$$

$$3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x + 4)(3^x - 1) = 0$$

إمّا: $3^x = -4$ مستحيلة

أو: $3^x = 1 \Rightarrow \ln(3^x) = \ln(1)$

$$\Rightarrow x.\ln(3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0$	$-$	0	$+$
$3^{2x} + 3.3^x - 4 \leq 0$	محققة	0	غير محققة

$$S =]-\infty, 0]$$

المعادلات التفاضلية:

$y' = ay + b$	$y' = ay$
$f(x) = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$	$f(x) = k.e^{ax}$

حل المعادلة التفاضلية:

① $2y + 3y' - 1 = 0$

الحل:

$$y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

$$f(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$$

---

② $2y' + 3y = 0$

والخط البياني للحل C يمر بالنقطة $A(\ln(4), 1)$

الحل:

$$y' = -\frac{3}{2}y$$

$$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$$

$$A(\ln(4), 1) \in C_f$$

$$f(\ln(4)) = 1 \Rightarrow k.e^{-\frac{3}{2}\ln(4)} = 1$$

$$\Rightarrow k.e^{\frac{-3\times 2\ln(2)}{2}} = 1 \Rightarrow k.e^{-3\ln(2)} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{e^{-3\ln(2)}} = e^{3\ln(2)} \Rightarrow k = e^{\ln(2^3)}$$

$$\Rightarrow k = e^{\ln(8)} \Rightarrow k = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = 8.e^{-\frac{3}{2}x}$$

مثال: جد نهاية f عند a:

① $f(x) = \ln(x) - e^x \qquad a = +\infty$

الحل:

هناك عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = x.\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(0 - \infty) = -\infty$$

---

② $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x} \qquad a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \times 1 = 3$$

النهاية المميزة:

الحصول على 1^∞

مثال: جد نهاية f عند a:

① $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad a = +\infty$

الحل:

هناك عدم تعيين 1^∞

$$f(x) = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x.\frac{1}{x}.\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$$

لأن: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

لازم يكون عنّا $(1 + \boxed{})$ شغلة نزرع e و $\ln$

---

② $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} \qquad a = +\infty$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+3 \\ & \underline{x-1} \\ & 4 \end{array} \quad \text{(ناتج القسمة } 1\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{x}{2}.\frac{4}{x-1}.\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}} = e^{\frac{4x}{2x-2}.\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{2\times 1} = e^2$$

لأن: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

مسألة ①: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالصيغة: $f: x \to x.e^{-x}$ والمطلوب:

1) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس إطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعيّن قمته الحدية ثم ارسم C_f.

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' والمستقيمين الذين معادلتهما $x=0$ و $x=1$

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، ثم ادرس تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

1) $$f(x) = x.e^{-x}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty \times 0$

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

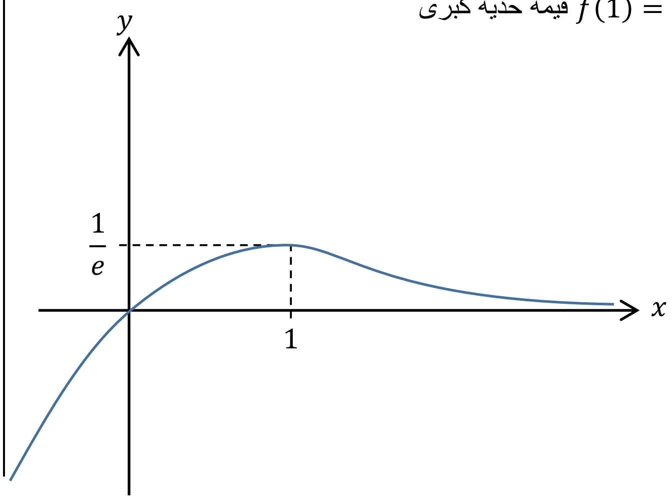
$$f'(x) = 1.e^{-x} + (-e^{-x}).x = (1-x).e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1.e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى



2) $$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x.e^{-x}\,dx$$

$$u = x \to u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \to v = -e^{-x}$$

$$S = [-x.e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx = [-x.e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$\Rightarrow S = (-1 \times e^{-1} - 0) - (e^{-1} - 1)$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \Rightarrow S = 1 - \frac{2}{e}$$

3) $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

a) نسمّي القضية $E(n)$:

$$E(n): 0 < u_n \leq 1$$

نثبت صحة $E(0)$:

$E(0): 0 < u_0 \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n): \boxed{0 < u_n \leq 1}\ \dots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$E(n+1): 0 < u_{n+1} \leq 1$$

$$0 < u_n.e^{-u_n} \leq 1$$

نبدأ من *: $0 < u_n \leq 1$

بما أن f متزايد: $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$

$$0 < f(u_n) \leq \frac{1}{e} \leq 1$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n عدد طبيعي

b) نثبت بالتدريج صحة القضية:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$u_1 \leq u_0 \Rightarrow u_0 e^{-u_0} \leq 1$$

$1.e^{-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n): \boxed{u_{n+1} \leq u_n}\ \dots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$u_{n+1}.e^{-u_{n+1}} \leq u_n.e^{-u_n}$$

نبدأ من *:

$$u_{n+1} \le u_n$$

بما أن f متزايد: $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$

$$u_{n+1}.e^{-u_{n+1}} \le u_n.e^{-u_n}$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n عدد طبيعي

$\Leftarrow$ u_n متناقصة

وهي محدودة من الأدنى بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب النهاية:

$$f(x)=x \Rightarrow x.e^{-x}=x \Rightarrow e^{-x}=1$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-x})=\ln(1) \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

مسألة ②: C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$$

1) أثبت أن: $d: y=x-1$ مقارب عند $+\infty$ وادرس وضع C مع d

2) أثبت أن: $d': y=x+3$ مقارب عند $-\infty$ وادرس وضع C مع d'

3) ادرس تغيرات f

4) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

5) ادرس وضع C مع T ثم ارسم d و d' و C و T.

الحل:

1) $f(x)-y_d = \frac{4}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\frac{4}{+\infty}=0$$

$d: y=x-1$ مقارب عند $+\infty$

ونلاحظ أن: $f(x)-y_d>0 \Leftarrow C$ فوق d

2) $f(x)-y_{d'} = \frac{4}{e^x+1}-4$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{d'})=\frac{4}{0+1}-4=0$$

$d': y=x+3$ مقارب مائل عند $-\infty$

ونلاحظ أن: $f(x)-y_{d'}<0 \Leftarrow C$ تحت d'

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty-1+4=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-1+0=+\infty$$

$$f'(x)=1+\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\ge 0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (e^x-1)^2=0 \Rightarrow e^x-1=0$$

$$\Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

$$f(0)=0-1+\frac{4}{1+1}=1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-y_T$ $=f(x)-1$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
إشارة: $f(x)-y_T$		$-$	0	$+$	
وضع C مع T		C تحت T		C فوق T	

نقطة تقاطع: $(0,1)$

4) تقاطع C مع yy' $\Leftarrow x=0$

من الجدول: $f(0)=1$, $f'(0)=0$

مماس أفقي: $y=y_0$

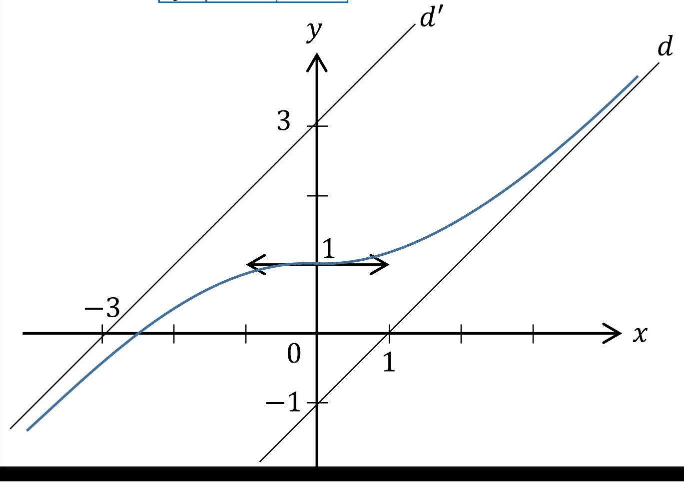
$$T: y=1$$

5) لرسم $d: y=x-1$

x	0	1
y	-1	0

لرسم $d': y=x+3$

x	0	-3
y	3	0



مسألة ③: C هو الخط للتابع f المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln|x|$$

وليكن g التابع المعرف على R وفق:

$$g(x) = xe^x + 1$$

1) ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $R\backslash\{0\}$

2) ادرس تغيرات f وارسم C_f

الحل:

1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 + 1 = 1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(+\infty) + 1 = +\infty$$

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = -1.e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 \simeq 0.7$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

دراسة اشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	$+$	$+$	
إشارة x		$-$	0	$+$	
إشارة $\frac{g(x)}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 1 - \infty = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$$

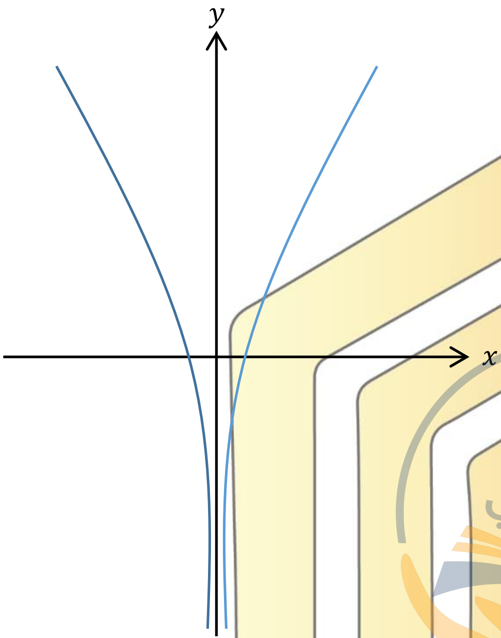
$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب

$]-\infty,0[$	$]0,+\infty[$
$f(x) = e^x + \ln(-x)$	$f(x) = e^x + \ln(x)$
$f'(x) = e^x - \frac{1}{-x}$	$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x + 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$\|\|$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



مسألة ④: ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x.2^{-x}$$

ادرس تغيرات التابع f ثم ارسم C_f

الحل:

التابع يكافئ:

$$f(x) = xe^{\ln(2^{-x})} = x.e^{-x\ln(2)}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(+\infty \times 0)$

$$f(x) = \frac{x}{e^{x\ln(2)}} = \frac{1}{\ln(2)}.\frac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \times 0 = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = 1\left(e^{-x\ln(2)}\right) + \left(-\ln(2)\,e^{-x\ln(2)}\right)x$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x\ln(2)} - x\ln(2)\,e^{-x\ln(2)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x\ln(2)}(1 - x\ln(2))$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x\ln(2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(2)} \simeq 1{,}4$$

$$f\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}.e^{-\frac{1}{\ln(2)}\times\ln(2)}$$

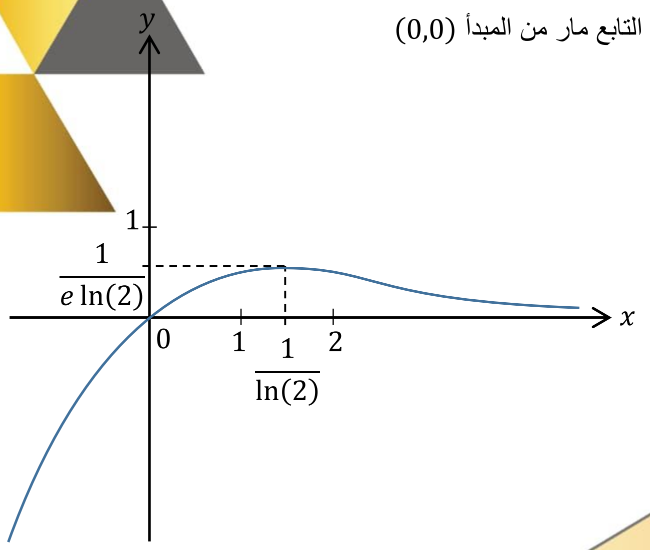
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}e^{-1} = \frac{1}{e\ln(2)} \simeq 0.5$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln(2)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln(2)}$	$\searrow$	0

لحساب نقطة التقاطع مع محور التراتيب:

$$f(0) = 0e^{-0\ln(2)} = 0$$

التابع مار من المبدأ $(0,0)$



ورقة عمل يدوية في بحث التابع الأسي

السؤال الأول:

حل المعادلات والمتراجحات الآتية:

① $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

② $2^{x+1}\geq 3^x$

③ $4^x+2^{x+1}-3=0$

السؤال الثاني:

حل في R جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 3^x\times 3^y=9 \\ 3^x+3^y=10 \end{cases}$$

السؤال الثالث:

أوجد مشتق التابع: $f(x)=x^x$

السؤال الرابع:

احسب نهاية كل تابع عند a:

① $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \qquad a=+\infty$

② $f(x)=\frac{e^x-1}{\sin(x)} \qquad a=0$

السؤال الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

1) أثبت أن f فردي وما الصفة التناظرية لخطّه البياني.

2) ادرس تغيرات f.

3) أوجد معادلة المماس T في المبدأ وادرس الوضع النسبي بين C و T

4) ارسم T و C

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و T والمستقيمين $x=0$ و $x=\ln(2)$.

6) أثبت أن التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية: $y-y'=-\frac{1}{e^x}$

السؤال السادس:

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$$

1) a) أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبيّن ما له من مقاربات.

b) أثبت أن: $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$

c) استنتج معادلة المقارب المائل عند $-\infty$

2) ادرس تغيرات التابع ثم ارسم خطّه البياني.

3) نرمز إلى نقاط من C التي فواصلها 0 و 1 و -1 بالرموز A وB وD

أثبت أن مماس C في A يوازي (BD)

حل ورقة العمل اليدوية لبحث التابع الأسي

السؤال الأول:

① $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$$e^{x+1}\left(e^{2x}+4e^x-5\right)=0$$

إمّا: $e^{x+1}\neq 0$ مستحيلة

أو: $e^{2x}+4e^x-5=0$

$$\Rightarrow (e^x+5)(e^x-1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} e^x\neq -5 \text{ مستحيلة} \\ e^x=1\Rightarrow x=0 \end{matrix}$$

② $2^{x+1}\geq 3^x$

بأخذ لوغاريتم:

$$\ln(2^{x+1})\geq \ln(3^x)\Rightarrow (x+1)\ln(2)\geq x.\ln(3)$$

$$x.\ln(2)+\ln(2)\geq x.\ln(3)$$

$$\Rightarrow x.\ln(2)-x.\ln(3)\geq -\ln(2)$$

$$\Rightarrow x(\ln(2)-\ln(3))\geq -\ln(2)$$

$$\Rightarrow x\leq \frac{-\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\Rightarrow S=\left]-\infty,\frac{-\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\right]$$

③ $4^x+2^{x+1}-3=0$

$$2^{2x}+2\times 2^x-3=0\Rightarrow (2^x+3)(2^x-1)=0$$

إمّا: $2^x\neq -3$ مستحيلة

أو: $2^x=1\Rightarrow x=0$

السؤال الثاني:

$$\begin{cases} 3^x\times 3^y=9 \ldots ① \\ 3^x+3^y=10 \ldots ② \end{cases}$$

من ①: $3^x=\frac{9}{3^y}$

نعوّض في ②: $\frac{9}{3^y}+3^y=10\Rightarrow 9+3^{2y}=10\times 3^y$

$$\Rightarrow 3^{2y}-10\times 3^y+9=0$$

$$\Rightarrow (3^y-9)(3^y-1)=0$$

إمّا: $3^y=1\Rightarrow y=0$

نعوّض في ①: $3^x\times 3^0=9\Rightarrow 3^x=3^2$

$$\Rightarrow x=2$$

أو: $3^y=9\Rightarrow 3^y=3^2\Rightarrow y=2$

نعوّض في ①: $3^x\times 3^2=9\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0$

$$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (2,0)$$

السؤال الثالث:

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} \Rightarrow f(x) = e^{x.\ln(x)}$$

$$f'(x) = [x.\ln(x)]' e^{x.\ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[1.\ln(x) + \frac{1}{x} \times x\right] e^{x.\ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\ln(x) + 1) e^{x.\ln(x)}$$

السؤال الرابع:

$$① \; f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \qquad a = +\infty$$

هناك عدم تعيين 1^∞

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ \hline & 1 \\ & x-1 \\ \hline & 2 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x} = e^{x.\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x \times \frac{2}{x-1} \times \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}}} = e^{\frac{2x}{x-1} \times \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{2 \times 1} = e^2$$

لأن: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$② \; f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \qquad a = 0$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \times 1 = 1$$

لأن: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

السؤال الخامس:

1) أياً كانت $x \in]-\infty, +\infty[$ كان: $-x \in]-\infty, +\infty[$ محقق.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

f تابع فردي وخطّه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(+\infty - 0) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) مماس في المبدأ: $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow T: y = x$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y_T$

$$f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

قاعدة:

لدراسة إشارة مقدار يحوي تابعين من طبيعتين مختلفتين:

1- نسمّي هذا المقدار تابع $h(x)$.

2- ندرس إطراد التابع $h(x)$ (إشارة $h'(x)$).

3- ننظم جدول إطراد لـ$h(x)$.

4- نستنتج إشارة $h(x)$ من الجدول وهي ذاتها إشارة $f(x) - y_T$

$$h(x) = f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

h اشتقاقي على R

$$h'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

نضرب بـ(2): $e^x + e^{-x} - 2 = 0$

نضرب بـ(e^x): $e^{2x} + 1 - 2e^x = 0$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

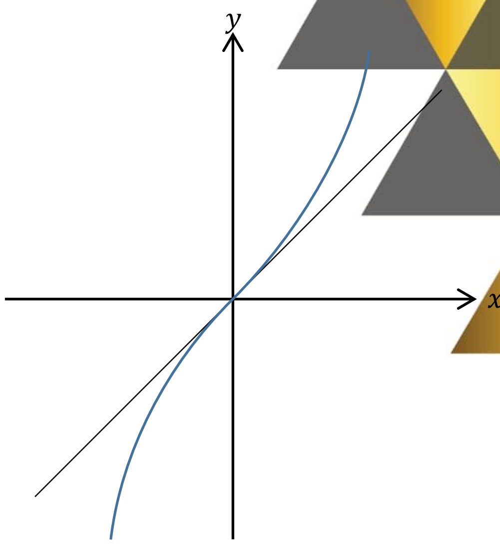
$$\Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$h(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
إشارة h	$-$	$-$	0	$+$	$+$
الوضع النسبي		C تحت T		C فوق T	

نقطة التماس: $(0,0)$

(4



(5 $S=\int_0^{\ln(2)}(f(x)-y_T)\,dx$

$$S=\int_0^{\ln(2)}\left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-x\right)dx$$

$$S=\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow S=\left[\frac{1}{2}\left(e^{\ln(2)}+e^{-\ln(2)}\right)-\frac{\ln^2(2)}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}(e^0+e^0)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)-\frac{\ln^2(2)}{2}-\frac{1}{2}(2)=1+\frac{1}{4}-\frac{\ln^2(2)}{2}-1$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}-\frac{\ln^2(2)}{2}$$

(6

$$y-y'=f(x)-f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\Rightarrow y-y'=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$\Rightarrow y-y'=-e^{-x}=-\dfrac{1}{e^x}$ محققة

$\Leftarrow$ $f(x)$ هو حل للمعادلة.

السؤال السادس:

(1 (a $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

(b $f(x)=\ln\left(e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)\right)$

$$f(x)=\ln(e^{-x})+\ln\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=-x+\ln(1+e^x)$$

(c بفرض $d: y=-x$ هو المقارب المائل عند $-\infty$

$$f(x)-y_d=\ln(1+e^x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-y_d=\ln(1)=0$$

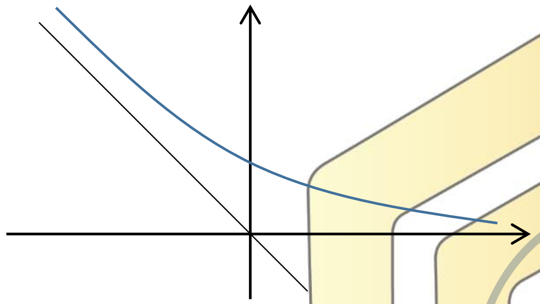
إذاً $d: y=-x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

(2 $f'(x)=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

لحساب نقطة تقاطع C_f مع محور التراتيب:

$$f(0)=\ln(1+1)=\ln(2)$$



(3 $A(0,f(0))$, $B(1,f(1))$, $C(-1,f(-1))$

$$f(0)=\ln(2)\Rightarrow A(0,\ln(2))$$

$$f(1)=\ln(e^{-1}+1)\Rightarrow B(1,\ln(e^{-1}+1))$$

$$f(-1)=\ln(e+1)\Rightarrow C(-1,\ln(e+1))$$

$$m_T=f'(0)=\frac{-e^0}{e^0+1}=-\frac{1}{2}$$

$$m_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{\ln(e+1)-\ln(e^{-1}+1)}{-1-1}$$

$$\Rightarrow m_{BD}=\frac{\ln\left(\frac{e+1}{e^{-1}+1}\right)}{-2}=\frac{\ln\left(\frac{e+1}{\frac{1}{e}+1}\right)}{-2}=\frac{\ln\left(\frac{e+1}{\frac{e+1}{e}}\right)}{-2}$$

$$\Rightarrow m_{BD}=\frac{\ln\left((e+1)\times\frac{e}{(e+1)}\right)}{-2}=\frac{\ln(e)}{-2}=-\frac{1}{2}=m_T$$

$\Leftarrow$ T يوازي BD

ورقة عمل منزلية في بحث التابع الأسي

السؤال الأول:

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right)$$

1) احسب نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أوجد معادلة المقارب المائل Δ.

3) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

السؤال الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = (x-1)e^{x}$$

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) ارسم C_f واستنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{x+1}{e^{x}}$$

3) أثبت بالتدريج أن:

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1).e^{x}$$

أياً كان $n \geq 1$.

السؤال الثالث:

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = (ax+b).e^{-x}$$

أوجد a و b علماً أن f يقبل قيمة حدّية عند (-1) قيمتها e

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$$

1) أثبت أن التابع f فردي.

2) ادرس تغيرات التابع f وارسم C_f.

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' والمستقيمين $x = -\ln(2)$ و $x = \ln(2)$

4) استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{2}{1+e^{x}}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع الأسي

السؤال الأول:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2)
$$f(x) = \ln\left(e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(e^{-2x}+1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + \ln(e^{-2x}+1)$$

نفرض: $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \ln(e^{-2x}+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \ln(1) = 0$$

$\Leftarrow$ $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3) ندرس اشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \ln(e^{-2x}+1) = 0$$

$\Rightarrow e^{-2x} + 1 = 1 \Rightarrow e^{-2x} \neq 0$ مستحيلة

$f(x) - y_\Delta$ لا ينعدم وله إشارة واحدة نوجدها بالتجريب:

$$x = 0 \Rightarrow \ln(e^{0}+1) = \ln(2) > 0$$

C فوق Δ

السؤال الثاني:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

هناك عدم تعيين $(0 \times \infty)$

$$f(x) = xe^{x} - e^{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$y = 0$ مقارب افقي في جوار $-\infty$

$$f'(x) = e^{x} + e^{x}(x-1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x}(1+x-1) = xe^{x}$$

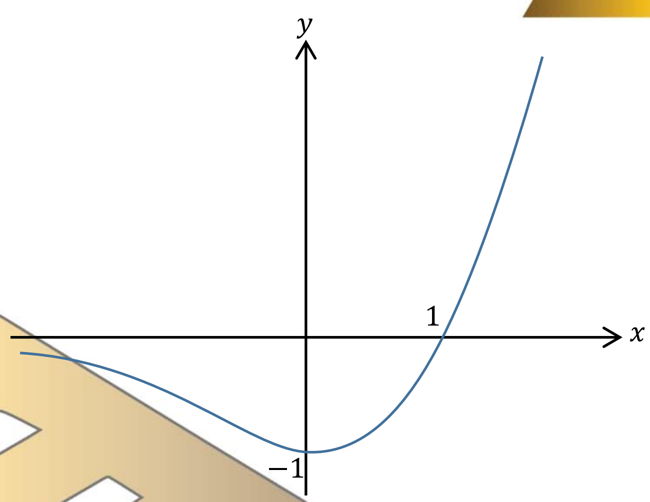
$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = -1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) لمعرفة نقطة التقاطع مع محور الفواصل: $f(x)=0$

$$\Rightarrow (x-1)e^x = 0 \Rightarrow x = 1$$



$$g(x) = (x+1)e^{-x} = -\big((-x)-1\big)e^{-x}$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(-x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

3) نفرض العلاقة:

$$E(n): f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

نثبت صحة $E(1)$:

$E(1): f'(x) = (x+1-1)e^x = xe^x$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n): \boxed{f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x} \ldots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = (x+n)e^x$$

نبدأ من *:

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

نشتق: $\left(f^{(n)}(x)\right)' = e^x + e^x(x+n-1)$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x(1+x+n-1)$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x(x+n)$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت $n \geq 1$

السؤال الثالث:

قيمة حدّية: $f'(-1) = 0 \Leftarrow$

قيمتها e: $f(-1) = e$

$$f(-1) = (-a+b)e = e \Rightarrow -a+b = 1 \ldots (1)$$

f اشتقاقي على R: $f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax+b)$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$$

$$f'(-1) = e(a+a-b) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \ldots (2)$$

نجمع (1) و (2) نجد: $a = 1$ نعوّض في (1) نجد: $b = 2$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)e^{-x}$$

السؤال الرابع:

1) أياً كانت $x \in R$ فإن $-x \in R$ محقق:

$$f(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$f(-x) = \frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$f(-x) = \dfrac{-(1-e^x)}{1+e^x} = -f(x) \Rightarrow$ الشرط الثاني محقق

$f \Leftarrow$ فردي (خطه متناظر بالنسبة لـO)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x) = \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$y = -1$ مقارب أفقي عند $+\infty$

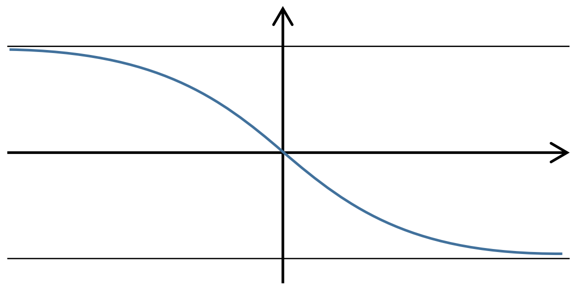
$$f'(x) = \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x[1+e^x+1-e^x]}{(1+e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$f'(x) < 0 \Leftarrow f$ متناقص تماماً.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

$$f(0)=\frac{1-1}{1+1}=0\ ,(0,0)\in C_f$$



(3 $$S=\int_{-\ln(2)}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\ln(2)}-f(x)\,dx$$

$$S=2\int_{0}^{\ln(2)}-f(x)\,dx=2\int_{0}^{\ln(2)}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx$$

$$S=2\int_{0}^{\ln(2)}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$S=2\int_{0}^{\ln(2)}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{(e^x+1-e^x)}{e^x+1}\right)dx$$

$$S=2\int_{0}^{\ln(2)}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$S=2\int_{0}^{\ln(2)}\left(2\frac{e^x}{e^x+1}-1\right)dx$$

$$S=2[2\ln(e^x+1)-x]_0^{\ln(2)}$$

$$S=2\left[\left(2.\ln\left(e^{ln(2)}+1\right)-\ln(2)\right)-(2\ln(2))\right]$$

$$S=2[2\ln(3)-\ln(2)-2\ln(2)]$$

$$S=2[\ln(9)-\ln(8)]=2\ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

(4 $$f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}\quad ,\quad g(x)=\frac{2}{1+e^x}$$

$$f(x)-g(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}-\frac{2}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{-1-e^x}{1+e^x}=\frac{-(1+e^x)}{1+e^x}=-1$$

$$\Rightarrow g(x)=f(x)+1$$

C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(0,1)$

أشكال الأعداد العقدية

الشكل الجبري

$z = x + yi$

الطويلة: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

المرافق: $\bar{z} = x - yi$

المعاكس: $-z = -x - yi$

قاعدة: $z.\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

إذا كان لدينا z حقيقي، نستنتج:

$Im(z) = 0$ ، $\arg(z) = 0$ أو π ، $\bar{z} = z$

إذا كان لدينا z تخيلي بحت، نستنتج:

$Re(z) = 0$ ، $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ ، $\bar{z} = -z$

ملاحظة: في القسمة على عدد عقدي نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

فائدة:

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^{4n} = 1$

الشكل المثلثي

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$

$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

العمليات على الشكل المثلثي:

بفرض: $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$

$z_2 = r_2(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_2))$

يكون:

1. $z_1.z_2 = r_1.r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
3. $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ دوموافر
4. $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$

ملاحظة:

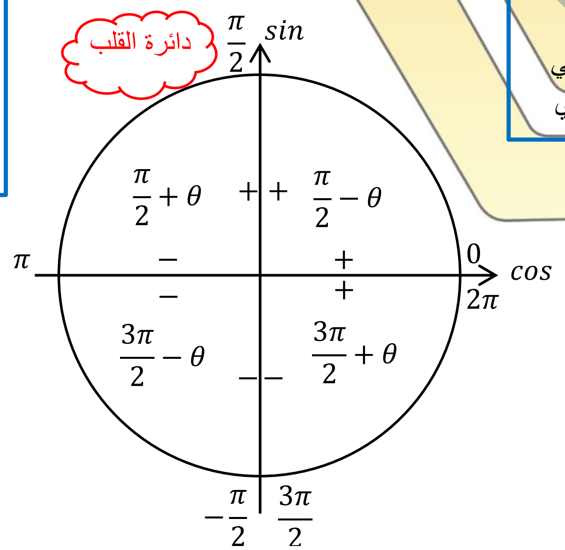
عدد زوجي $\times \pi = 0$

عدد فردي $\times \pi = \pi$

الزوايا الشهيرة حسب الأرباع

ربع أول	ربع ثاني	ربع ثالث	ربع رابع
θ	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$-\theta = 2\pi - \theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
تكون الزاوية على حالها	يكون البسط أقل من المقام بواحد	يكون البسط أعلى من المقام بواحد	البسط أقل من ضعف المقام بواحد أو مضروبة بناقص

دائرة القلب



الشكل الأسي

$z = re^{\theta i}$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$

$\bar{z} = re^{-\theta i}$

العمليات على الشكل الأسي:

بفرض: $z_1 = r_1e^{\theta_1 i}$

$z_2 = r_2e^{\theta_2 i}$

يكون:

1. $z_1.z_2 = r_1.r_2e^{\theta_1+\theta_2}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{\theta_1-\theta_2}$
3. $z^n = r^ne^{n\theta i}$
4. $-z = re^{(\pi+\theta)i}$

أويلر:

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$e^{-\theta i} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

$e^{\theta i} + e^{-\theta i} = 2\cos(\theta)$

$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = 2i\sin(\theta)$

التحويلات الصاروخية:

$e^{0i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

الشكل المثلثي:

مثال①: ليكن لدينا العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-i}$

1) اكتب $\omega_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$ و $\omega_2 = \sqrt{3}-i$ بالشكل المثلثي

2) اكتب z بالشكل المثلثي والجبري.

3) استنتج $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

4) أثبت أن z^{24} هو عدد حقيقي.

الحل:

(1
$$\omega_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{3}-i$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(2
$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$z = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}-i)} \times \frac{(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}+i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i+\sqrt{6}i-\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

(3
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad , \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(4
$$z^{24} = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^{24}$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos\left(24\times\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(24\times\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos(10\pi) + i\sin(10\pi)$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 + i0 = 1 \in R$$

مثال②: اكتب z بالشكل المثلثي:

$$z_1 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^7$$

$$z_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

الحل:

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right)^7$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)^7$$

$$\Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{21\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{10}\right)$$

ملاحظة:

إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام، نقوم بتعديل الزاوية:

1) موجبة: نطرح 2π 2) سالبة: نضيف 2π

بما أن $\theta = \frac{21\pi}{10}$ فهي تكافئ: $\theta = \frac{21\pi}{10} - 2\pi = \frac{\pi}{10}$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$$

الشكل الأسي:

مثال①: اكتب بالشكل الأسي: $z = \frac{(-1+i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$

الحل:

بفرض: $\omega_1 = -1+i$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow \omega_1^4 = 4e^{3\pi i}$$

$$\omega_2 = 1-\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\omega_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow \omega_2^5 = 32e^{-\frac{5\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\omega_1)^4}{(\omega_2)^5} = \frac{4e^{3\pi i}}{32e^{-\frac{5\pi}{3}i}} = \frac{1}{8}e^{\left(3\pi-\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{8}e^{\frac{14\pi}{3}i} = \frac{1}{8}e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

تعلم: $z = re^{\theta i}$

r عدد حقيقي موجب تماماً

للتخلص من $\boxed{-}$ نضيف π إلى θ

للتخلص من $\boxed{i}$ نضيف $\frac{\pi}{2}$ إلى θ

للتخلص من $\boxed{-i}$ نضيف $-\frac{\pi}{2}$ إلى θ

مثال②: اكتب بالشكل الأسي:

$$z_1 = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 2i\, e^{\frac{\pi}{5}i}$$

الحل:

$$z_1 = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 2ie^{\frac{\pi}{5}i} \Rightarrow z_2 = 2e^{\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)i}$$

$$\Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{10}i}$$

مثال③: اكتب z بالشكل الأسي:

$$z = 1 - e^{2\theta i} \quad ; \theta \in]0,\pi[$$

الحل:

$$z = e^{\theta i}\left(\frac{1}{e^{\theta i}} - e^{\theta i}\right) \Rightarrow z = e^{\theta i}\left(e^{-\theta i} - e^{\theta i}\right)$$

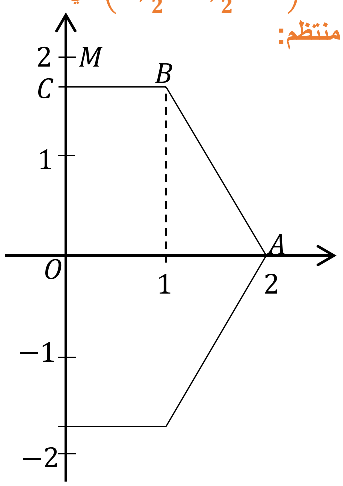
$$\Rightarrow z = -e^{\theta i}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right) \Rightarrow z = -e^{\theta i}2i\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow z = 2\sin(\theta)\, e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}$$

و هو الشكل الأسي حيث:

$$\theta \in]0,\pi[\Rightarrow \sin(\theta) > 0$$

مثال④: نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\right)$ في الشكل المرسوم جانباً نصف مسدّس منتظم:



اكتب الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A و B و C بالشكل الأسي.

الحل:

$$z_A = 2 \Rightarrow z_A = 2e^{0i}$$

بما أن الشكل مسدّس منتظم فتمر بروؤسه دائرة

$$\arg(z_B) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{OB}}\right| = 2 \Rightarrow z_B = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

لو كتبنا z_B بالشكل الجبري:

$$z_B = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z_B = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$$

C لها نفس تراتيب النقطة B، C مسقط B على محور oy فلها نفس تراتيب B، أي:

$$z_C = \sqrt{3}i \Rightarrow z_C = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

مثال⑤: ليكن لدينا العدد العقدي $z = (2-2i)e^{\frac{\pi}{3}i}$

1) اكتب z بالشكل الأسي.

2) اكتب z بالشكل الجبري.

3) استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

1) $z_1 = 2-2i$

$$\Rightarrow r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$z = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$$

2) $z = (2-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\Rightarrow z = 1+\sqrt{3}i - i + \sqrt{3} = 1+\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)i$$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

حل المعادلات العقدية

الدرجة الأولى

نأخذ مرافق للمعادلة ونحل معادلتين بمجهولين

الدرجة الثانية

$az^2 + bz + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$

لها حلّان مختلفان:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$

لها حل وحيد(جذر مضاعف):

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0$

لها حلّان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Δ عدد عقدي

لحساب $\sqrt{\Delta}$:

$\Delta = a + bi$

نفرض: $\sqrt{\Delta} = x + yi$

نحل المعادلات:

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (1)$

$x^2 - y^2 = a \dots (2)$

$2xy = b \dots (3)$

نجمع (1) و (2) لإيجاد x

نعوّض في (3) لإيجاد y

نعوّض في الشكل:

$\sqrt{\Delta} = x + yi$

ويكون حل المعادلة:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

تعلّم: لإيجاد عددين p و q يحققان:

$az^2 + pz + q = 0$

وعلم حلّي المعادلة z_1 و z_2:

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$

الدرجة ثالثة

بالقسمة الإقليدية

إذا كانت معادلة من الدرجة الثالثة تحوي مجاهيل a و b و c وتقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

نجعل أمثال z^3 هي الواحد وبفرض الحل $z = ai$ ونكتب المعادلة:

$(z - ai)(z^2 + bz + c) = 0$

ننشر ونقارن حتّى نوجد المجاهيل.

الدرجة الرابعة

بالقسمة الإقليدية أو نشر ومقارنة لإيجاد الثوابت

لإيجاد جذور عدد عقدي:

$z^2 = a + bi$

نفرض $z = x + yi$

نحل المعادلات:

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (1)$

$x^2 - y^2 = a \dots (2)$

$2xy = b \dots (3)$

نجمع (1) و (2) لإيجاد x

نعوّض في (3) لإيجاد y

نعوّض في الشكل:

$z = x + yi$

المعادلات:

مثال①: ليكن لدينا $3z^2 - pz + q = 0$
عيّن p و q علماً أنّ جذري المعادلة هما:

$$z_1 = 1 - i \;,\; z_2 = 3 + i$$

الحل:

$$a = 3 \;,\; b = -p \;,\; c = q$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 1 - i + 3 + i = \frac{-(-p)}{3}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{p}{3} \Rightarrow \boxed{p = 12}$$

$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (1-i)(3+i) = \frac{q}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + i - 3i + 1 = \frac{q}{3} \Rightarrow \boxed{q = 12 - 6i}$$

$$\Rightarrow 3z^2 - 12z + 12 - 6i = 0$$

مثال②: حل في C المعادلة الآتية:

$$z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0$$

الحل:

$$a = 1 \;,\; b = 1 + 8i \;,\; c = -17 + i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + 8i)^2 - 4(1)(-17 + i)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + 16i - 64 + 68 - 4i = 5 + 12i$$

نفرض: $\sqrt{\Delta} = x + iy$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \ldots ①$$

$$x^2 - y^2 = 5 \ldots ②$$

$$2xy = 12 \ldots ③$$

بالجمع ① و ②: $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9$

إمّا: $x = 3 \xrightarrow{\text{نعوّض في } ③} 2(3)y = 12 \Rightarrow y = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$$

أو: $x = -3 \xrightarrow{\text{نعوّض في } ③} 2(-3)y = 12 \Rightarrow y = -2$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_2} = -3 - 2i$$

نختار $\sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 8i + 3 + 2i}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 8i - 3 - 2i}{2}$$

$$\Rightarrow z_2 = -2 - 5i$$

مثال③: حل المعادلة علماً أنها تقبل حلّاً تخيلياً بحتاً:

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$$

الحل:

نفترض أن أحد الحلول: $z = ai$

فالمقدار يقبل القسمة على $(z - ai)$، بإجراء القسمة الإقليدية نجد:

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$$

يكافئ $\Rightarrow (z - ai)(z^2 + bz + c) = 0$

بالنشر والمقارنة نجد:

$$z^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - abiz - aic = 0$$

$$\Rightarrow z^3 + (b - ai)z^2 + (c - abi)z - aic = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة الأساسية:

$$b - ai = -2 - i \ldots ①$$
$$c - abi = 2 + 2i \ldots ②$$
$$-aci = -2i \ldots ③$$

من ① نجد: $b = -2 \;,\; a = 1$

من ② نجد: $c = 2$

نتحقق في ③: $-(1)(2)i = -2i \Rightarrow -2i = -2i$ محققة

$$\Rightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

إمّا: $z_1 = i$

أو: $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

للمعادلة حلّان عقديان مترافقان: $\Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_3 = \bar{z}_2 = 1 - i$$

مجموعة الحلول: $S = \{i, 1 + i, 1 - i\}$

مثال هام في الشكل الجبري:

ليكن لدينا $\omega = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ و $u \neq 1$ إذا كان ω حقيقي، أثبت أنه إمّا $|u| = 1$ أو z حقيقي.

الحل:

بما أن ω حقيقي: $\omega = \bar{\omega}$

$$\frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

$$\Rightarrow (\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) = (z - u\bar{z})(1 - \bar{u})$$

$$\Rightarrow \bar{z} - u\bar{z} - \bar{u}z + u\bar{u}z = z - \bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{u}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \bar{z} + u\bar{u}z - z - u\bar{u}\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} - z + u\bar{u}z - u\bar{u}\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} - z + u\bar{u}(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow \bar{z} - z - u\bar{u}(\bar{z} - z) = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{z} - z)(1 - u\bar{u}) = 0$$

إمّا: $1 - u\bar{u} = 0 \Rightarrow u\bar{u} = 1$

$$\Rightarrow |u|^2 = 1 \Rightarrow |u| = 1$$

أو: $\bar{z} - z = 0 \Rightarrow \bar{z} = z \Rightarrow z$ حقيقي

ورقة عمل يدوية في بحث الأعداد العقدية

السؤال الأول:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

① $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

② $z=(\sqrt{3}+i)(1+i)$

③ $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^5$

④ $z=-\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)-i\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

السؤال الثاني:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الأسي:

① $z=-2e^{\frac{\pi}{3}i}$

② $z=(\sqrt{3}+i)e^{\frac{\pi}{4}i}$

③ $z=\left(4e^{2\theta i}-4\right)^2$

السؤال الثالث:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الجبري:

$z=e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

② $z=\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2$

السؤال الرابع:

أثبت صحة العلاقة:

$$|z+\omega|^2+|z-\omega|^2=2|z|^2+2|\omega|^2$$

السؤال الخامس:

حل المعادلة الآتية: $2iz+\bar{z}=3+3i$

السؤال السادس:

حل جملة المعادلتين الآتية، ثم اكتب z و ω بالشكل الأسي:

$$\begin{cases}2z+3\omega=2+3i \;\ldots ① \\ 3z-\omega=3-i \;\ldots ②\end{cases}$$

السؤال السابع:

حل المعادلة الآتية:

$$z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$$

السؤال الثامن:

ليكن لدينا المقدار المعرّف بالشكل:

$$P(z)=z^3-\alpha z^2+\alpha z+7$$

1) عيّن α إذا علمت أن $P(-1)=0$

2) بفرض $\alpha=3$، عيّن $Q(z)$ الذي يحقق: $P(z)=(z+1)Q(z)$

3) حل المعادلة $P(z)=0$

حل ورقة العمل اليدوية في بحث الأعداد العقدية

السؤال الأول:

① $\boldsymbol{z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

$$r=\sqrt{2+2}\Rightarrow r=2$$

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

② $\boldsymbol{z=(\sqrt{3}+i)(1+i)}$

$$\omega_1=\sqrt{3}+i$$

$$r=\sqrt{3+1}\Rightarrow r=2$$

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\omega_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\omega_2=1+i$$

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z=\omega_1.\omega_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

③ $\boldsymbol{z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^5}$

$$\omega_1=1+\sqrt{3}i$$

$$r=\sqrt{1+3}\Rightarrow r=2$$

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\omega_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{2+2} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^5 = \left(\frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^5$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$④\ \boldsymbol{z = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

السؤال الثاني:

$$①\ \boldsymbol{z = -2e^{\frac{\pi}{3}i}}$$

$$\Rightarrow z = 2e^{\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$②\ \boldsymbol{z = \left(\sqrt{3}+i\right)e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

بفرض: $\omega = \sqrt{3} + i$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\Rightarrow z = 2e^{\frac{\pi}{6}i} . e^{\frac{\pi}{4}i} = 2e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)i} \Rightarrow z = 2e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

$$③\ \boldsymbol{z = \left(4e^{2\theta i} - 4\right)^2}$$

$$z = 4^2\left(e^{2\theta i} - 1\right)^2 = 16\left(e^{\theta i}\left(e^{\theta i} - \frac{1}{e^{\theta i}}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow z = 16\left(e^{\theta i}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right)\right)^2 = 16\left(e^{\theta i}(2i\sin(\theta))\right)^2$$

$$\Rightarrow z = 16e^{2\theta i}\left(-4\sin^2(\theta)\right) = -64\sin^2(\theta)\, e^{2\theta i}$$

$$\Rightarrow z = 64\sin^2(\theta)\, e^{(\pi+2\theta)i}$$

السؤال الثالث:

$$①\ \boldsymbol{z = e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$$

$$z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$②\ \boldsymbol{z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z = 0 - i \Rightarrow z = -i$$

السؤال الرابع:

$$\underbrace{|z+\omega|^2 + |z-\omega|^2}_{l_1} = \underbrace{2|z|^2 + 2|\omega|^2}_{l_2}$$

$$\Rightarrow l_1 = |z+\omega|^2 + |z-\omega|^2$$

$$\Rightarrow l_1 = (z+\omega)(\bar{z}+\bar{\omega}) + (z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega})$$

$$\Rightarrow l_1 = z\bar{z} + z\bar{\omega} + \omega\bar{z} + \omega\bar{\omega} + z\bar{z} - z\bar{\omega} - \omega\bar{z} + \omega\bar{\omega}$$

$\Rightarrow l_1 = 2z\bar{z} + 2\omega\bar{\omega} = 2|z|^2 + 2|\omega|^2 = l_2$ محققة

السؤال الخامس:

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \ldots ①$$

بأخذ مرافق للمعادلة: $-2i\bar{z} + z = 3 - 3i \ldots ②$

نضرب ② بـ$-2i$:

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \ldots ①$$

$$-4\bar{z} - 2iz = -6i - 6 \ldots ②$$

بجمع ① و ② نجد: $-3\bar{z} = -3i - 3$

$$\Rightarrow \bar{z} = 1 + i \Rightarrow z = 1 - i$$

السؤال السادس:

$$\begin{cases} 2z + 3\omega = 2 + 3i \ldots ① \\ 3z - \omega = 3 - i \ldots ② \end{cases}$$

نضرب ② بـ(3): $\begin{cases} 2z + 3\omega = 2 + 3i \ldots ① \\ 9z - 3\omega = 9 - 3i \ldots ② \end{cases}$

بجمع ① و ②: $11z = 11 \Rightarrow z = 1$

نعوّض في ①: $2 + 3\omega = 2 + 3i \Rightarrow \omega = i$

$z = e^{0i}$ أو $e^{2\pi i}$, $\omega = e^{\frac{\pi}{2}i}$

السؤال السابع:

$$z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$$

$$a = 1\ ,\ \ b = -2 - 2\sqrt{2}\ ,\ \ c = 2\sqrt{2} + 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2 - 2\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(2\sqrt{2}+4)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 16 = -4 < 0$$

للمعادلة حلّان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = 2$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2} - 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} - i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + \sqrt{2} + i$$

السؤال الثامن:

1) $P(-1) = (-1)^3 - \alpha(-1)^2 + \alpha(-1) + 7 = 0$

$$\Rightarrow -1 - \alpha - \alpha + 7 = 0 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3$$

2) $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 4z + 7 \\
\hline
z+1 & z^3 - 3z^2 + 3z + 7 \\
 & -z^3 - z^2 \\
\hline
 & -4z^2 + 3z + 7 \\
 & +4z^2 + 4z \\
\hline
 & 7z + 7 \\
 & -7z - 7 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

3) إمّا: $z_1 = -1$

أو: $z^2 - 4z + 7 = 0$

$$a = 1\ ,\ \ b = -4\ ,\ \ c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$$

للمعادلة حلّان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12}$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{12}i}{2}$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = \bar{z}_2 = 2 + \sqrt{3}i$$

ورقة عمل منزلية في بحث الأعداد العقدية

السؤال الأول:

اكتب كلّاً من الاعداد الآتية بالشكل المثلثي:

1) $z = \sqrt{3} - i$

2) $z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$

3) $z = -3\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

السؤال الثاني:

اكتب كلّاً من الاعداد الآتية بالشكل الأسي:

1) $z = \dfrac{\cos(x) + i\sin(x)}{\cos(x) - i\sin(x)}$

2) $z = -8ie^{\frac{\pi}{6}i}$

3) $z = 8 + 8e^{\frac{\pi}{12}i}$

السؤال الثالث:

اكتب كلّاً من الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

1) $z = \dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} - \dfrac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$

2) $z = (1 + i)^8$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا $u = \frac{z - \omega}{1 + z\omega}$ أثبت أن u تخيلي علماً أن:

$$|\omega| = 1\ , |z| = 1\ \ ,\ \ \omega . z \neq -1$$

السؤال الخامس:

لتكن لدينا المعادلة:

$$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$$

1) أثبت أن $z_1 = \sqrt{3}i$ حل للمعادلة واستنتج الحل الآخر.

2) علماً أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$$(z^2 + 3)(z^2 + az + b) = 0$$

أوجد قيم a و b ثم أوجد الحلّين الآخرين للمعادلة.

حل ورقة العمل المنزلية في بحث الأعداد العقدية

السؤال الأول:

① $\boldsymbol{z = \sqrt{3} - i}$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

---

② $\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}}$

$$\omega_1 = \sqrt{3} + i$$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\omega_2 = 1 + i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

---

③ $\boldsymbol{z = -3\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}$

$$z = 3\left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)$$

السؤال الثاني:

① $\boldsymbol{z = \dfrac{\cos(x) + i\sin(x)}{\cos(x) - i\sin(x)}}$

$$z = \frac{e^{xi}}{e^{-xi}} = e^{2xi}$$

---

② $\boldsymbol{z = -8ie^{\frac{\pi}{6}i}}$

$$z = 8e^{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)i} = 8e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

---

③ $\boldsymbol{z = 8 + 8e^{\frac{\pi}{12}i}}$

$$z = 8\left(1 + e^{\frac{\pi}{12}i}\right) \Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{24}i}} + e^{\frac{\pi}{24}i}\right)$$

$$\Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i}\left(e^{-\frac{\pi}{24}i} + e^{\frac{\pi}{24}i}\right) = 8e^{\frac{\pi}{24}i}\left(e^{\frac{\pi}{24}i} + e^{-\frac{\pi}{24}i}\right)$$

$$\Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 16e^{\frac{\pi}{24}i}\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

السؤال الثالث:

① $\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} - \dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}}$

$$z = \frac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2 - \left(\sqrt{2}-i\right)^2}{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 - \left(2 - 2\sqrt{2}i - 1\right)}{2+1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 - 2 + 2\sqrt{2}i + 1}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{4\sqrt{2}i}{3} \Rightarrow z = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

---

② $\boldsymbol{z = (1+i)^8}$

$$z = \left((1+i)^2\right)^4 = (1 + 2i - 1)^4 = (2i)^4$$

$$\Rightarrow z = 16 \Rightarrow z = 16(\cos(0) + i\sin(0))$$

السؤال الرابع:

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} - \bar{\omega}}{1 + \bar{z}\bar{\omega}} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\omega}}{1 + \frac{1}{z\omega}} = \frac{\frac{\omega - z}{z\omega}}{\frac{z\omega + 1}{z\omega}}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{\omega - z}{z\omega + 1} = \frac{-(z - \omega)}{1 + z\omega}$$

$\Rightarrow \bar{u} = -u \Rightarrow$ تخيلي u

السؤال الخامس:

1) نعوّض $\sqrt{3}i$ في المعادلة:

$$\left(\sqrt{3}i\right)^4 - 6\left(\sqrt{3}i\right)^3 + 24\left(\sqrt{3}i\right)^2 - 18\left(\sqrt{3}i\right) + 63 = 0$$

$9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ محققة

$\Leftarrow z_1 = \sqrt{3}i$ حل للمعادلة

بما أن أمثال المعادلة السابقة أعداد حقيقية فالحل الآخر هو مرافق z_1:

$$z_2 = \bar{z}_1 = -\sqrt{3}i$$

2) $(z^2 + 3)(z^2 + az + b) = 0$

$$z^4 + az^3 + bz^2 + 3z^2 + 3az + 3b = 0$$

$$\Rightarrow z^4 + az^3 + (b+3)z^2 + 3az + 3b = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة الأساسية:

$$a = -6\ ,\ \ b + 3 = 24 \Rightarrow b = 21$$

$$\Rightarrow (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$$

إمّا: $z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z^2 = -3$

$$\Rightarrow z^2 = 3i^2 \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = \sqrt{3}i \\ z_2 = -\sqrt{3}i \end{matrix}$$

أو: $z^2 - 6z + 21 = 0$

$$a = 1\ ,\ \ b = -6\ ,\ \ c = 21$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 36 - 4(1)(21) = -48 < 0$$

لها حلّان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{48}$

$$z_3 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{48}i}{2}$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{6 + 4\sqrt{3}i}{2} = 3 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_4 = \bar{z}_3 = 3 - 2\sqrt{3}i$$

تطبيقات الأعداد العقدية

القوانين الهندسية

① كل نقطة $M(x,y)$ تمثّل بعدد عقدي:

$$z = x + yi$$

② العدد العقدي الممثل لشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$z_A = x_A + iy_A$$

$$z_B = x_B + iy_B$$

$$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

③ طول الشعاع:

$$|z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

④ إذا كانت I منتصف AB:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

⑤ إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC:

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

⑥ إذا كانت H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)$

$$z_H = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \delta z_C}{\alpha + \beta + \delta}$$

⑦ النسبة الذهبية:

$$\text{مقدار} = \frac{b-a}{c-a}$$

نستفيد منها:

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{AB}{AC}$$

تفيدنا النسبة الذهبية بـ:

1) إثبات مثلث قائم ومتساوي الساقين.

2) إثبات تساوي وتوازي مستقيمين.

3) إثبات مثلث متساوي الأضلاع (قياس الزاوية $\frac{\pi}{3}$).

حالات خاصة:

① لإثبات أن رباعي هو متوازي أضلاع:

نثبت تساوي شعاعين متقابلين

② لإثبات أن $ABCD$ هو مربّع:

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$$

التحويلات الهندسية

① الإنسحاب: T

$$z' = z + b_{\vec{\omega}}$$

حيث $b_{\vec{\omega}}$ هو العدد العقدي الممثل لشعاع الإنسحاب.

② التحاكي: H

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

حيث ω العدد العقدي الممثل للمركز.

③ الدوران: R

$$z' - \omega = e^{\theta i}(z - \omega)$$

④ التناظر المركزي: S_O

$$z' - \omega = -(z - \omega)$$

⑤ التناظر المحوري:

1) بالنسبة للمحور ox:

$$z' = \bar{z}$$

2) بالنسبة للمحور oy:

$$z' = -\bar{z}$$

مثال: لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثيلها الأعداد العقدية:
$a = 2 + i\,, b = 3 + 2i\,, c = 1 + 2i$

والمطلوب:

1) اكتب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.
2) احسب أطوال أضلاع المثلث ABC واستنتج أن المثلث متساوي الساقين.
3) احسب $\frac{c-a}{b-a}$ واستنتج قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ وهل ABC قائم؟
4) أوجد الأعداد العقدية الممثلة لـ I و J منتصفات $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.
5) اوجد العدد العقدي الممثل لـ G مركز ثقل المثلث ABC.
6) أوجد العدد العقدي الممثل لـ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$

الحل:

(1 $z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = 1 + i$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = -1 + i$$
$$z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = -2$$

(2 $|z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$|z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$|z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{4} = 2$$

المثلث متساوي الساقين $AB = AC$

(3 $\frac{c-a}{b-a} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i+1}{1+1}$

$$\frac{c-a}{b-a} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A.

(4 $z_I = \frac{a+c}{2} = \frac{2+i+1+2i}{2} = \frac{3+3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

$$z_J = \frac{a+b}{2} = \frac{5+3i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

(5 $z_G = \frac{a+b+c}{3} = \frac{6+5i}{3} = 2 + \frac{5}{3}i$

(6 $z_M = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$

$$z_M = \frac{1.a + 2.b + 3.c}{6} = \frac{2 + i + 6 + 4i + 3 + 6i}{6}$$
$$z_M = \frac{11 + 11i}{6} = \frac{11}{6} + \frac{11}{6}i$$

التحويلات الهندسية:

مثال 1: بفرض $z_A = 1 + 3i$ والشعاع $\vec{\omega} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{\omega}$.

الحل:

$$b = 2 - 3i$$
$$z' = z_A + b = 1 + 3i + 2 - 3i \Rightarrow z' = 3$$

مثال 2: بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 1 + 2i$ جد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\omega(1 - i)$ ونسبته $k = 3$.

الحل:

$$z' - \omega = K(z - \omega)$$
$$z' - 1 + i = 3(1 + 2i - 1 + i)$$
$$z' - 1 + i = 3(3i) \Rightarrow z' = 9i + 1 - i$$
$$z' = 1 + 8i$$

مثال 3: بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 3 + 2i$ جد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه $\omega(3 - i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

الحل:

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$
$$z' - 3 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(3 + 2i - 3 + i)$$
$$z' - 3 + i = i(3i)$$
$$z' = -3 + 3 - i = -i$$

مثال 4: بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 1 - 5i$ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق تناظر مركزه $\omega(1 + i)$

الحل:

$$z_A' - \omega = -1(z_A - \omega)$$
$$z_A' - 1 - i = -1(1 - 5i - 1 - i)$$
$$z_A' = 6i + 1 + i \Rightarrow z_A' = 1 + 7i$$

مثال 5: بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 3 + 2i$

a) أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة B صورة A وفق تناظر محوره xx'
b) أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة C صورة A وفق تناظر محوره yy'

الحل:

(a $z_B = \bar{z}_A \Rightarrow z_B = 3 - 2i$

(b $z_C = -\bar{z}_A \Rightarrow z_C = -3 + 2i$

تمرين①: دورة 2021 أولى

في المستوى $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C تمثلها الأعداد:

$$a = 8\ ,\ \ b = -4+4i\ ,\ \ c = -4i$$

والمطلوب:

1) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) جد العدد d الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3) جد العدد العقدي الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً.

الحل:

1) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i}$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{(-4+8i)}{(8+4i)}\cdot\frac{(8-4i)}{(8-4i)}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-32+16i+64i+32}{64+16} = \frac{80i}{80}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = i$$

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) \Rightarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| \Rightarrow \frac{CB}{CA} = 1 \Rightarrow CB = CA$$

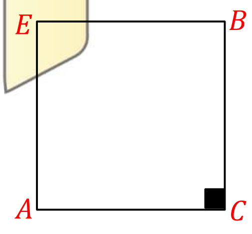
إذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) $z_D - z_O = e^{\theta i}(z_A - z_O)$

$$d = e^{\frac{\pi}{4}i}(8)$$

$$d = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$d = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

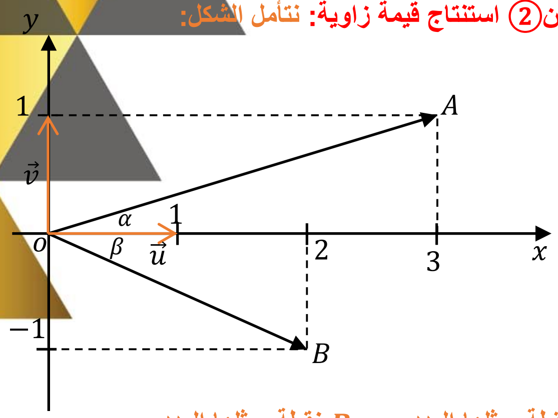


3) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow z_{\overrightarrow{AE}} = z_{\overrightarrow{CB}}$

$$e - a = b - c \Rightarrow e = a + b - c$$

$$e = 8 - 4 + 4i + 4i \Rightarrow e = 4 + 8i$$

تمرين②: استنتاج قيمة زاوية: نتأمل الشكل:



A نقطة يمثلها العدد z_A و B نقطة يمثلها العدد z_B

$$\arg(z_B) = \beta\quad ,\quad \arg(z_A) = \alpha$$

1) عين العددين z_A و z_B اللذان يمثلان النقطتين A و B.

2) احسب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري.

3) احسب بدلالة α و β المقدار $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الأسي واستنتج $\alpha - \beta$

الحل:

1) $A(3,1) \Rightarrow z_A = 3+i\ ,\ B(2,-1) \Rightarrow z_B = 2-i$

2)

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(3+i)}{(2-i)}\cdot\frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{6+3i+2i-1}{4+1}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

3)

$$z_A = 3+i$$

$$r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\ ,\ \theta = \alpha$$

$$z_A = \sqrt{10}.e^{\alpha i}$$

$$z_B = 2-i$$

$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ ,\ \theta = \beta$$

$$z_B = \sqrt{5}.e^{\beta i}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}e^{(\alpha-\beta)i} = \sqrt{2}e^{(\alpha-\beta)i}$$

$$\alpha - \beta = \arg(z_A) - \arg(z_B) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(1+i)$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

تمرين③: نتأمل في المستوى مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً، لتكن M منتصف $[BC]$ وليكن AFB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين.

نختار معلم مباشر مبدأه النقطة A ونرمز بالرمزين b وc إلى العددين العقديين الذين يمثلان B و C.

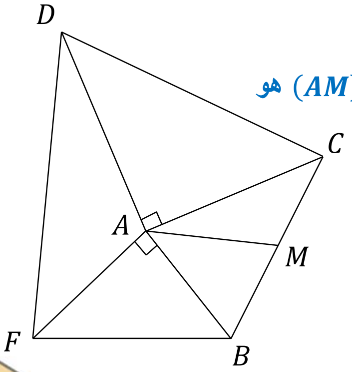
1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية f وd وm الممثلة للنقاط F وD وM بالترتيب.

2) احسب $\frac{d-f}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع فيالمثلث AFD وأن:

$FD = 2AM$

3) نفرض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,2)$ و$(F,3)$ و$(C,1)$ و$(B,1)$ احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس $\widehat{BAC}$.



الحل:

1) باعتبار A مركز للدوران نجد:

$$f = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b) \Rightarrow f = -ib$$

$$d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \Rightarrow d = ic \Rightarrow m = \frac{b+c}{2}$$

2) $$\frac{d-f}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = 2i$$

$$\arg\left(\frac{d-f}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{FD}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AM \perp FD$$

إذاً (AM) هو إرتفاع في المثلث AFD

$$\left|\frac{d-f}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{FD}{AM} = 2 \Rightarrow FD = 2AM$$

3) $$a = \frac{2d+3f+c+b}{7} = \frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(1+2i)c + (1-3i)b}{7} = 0$$

$$\Rightarrow (1+2i)c + (1-3i)b = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1-3i}{1+2i}b$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b} = -\frac{1-3i}{1+2i}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} == 1+i$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

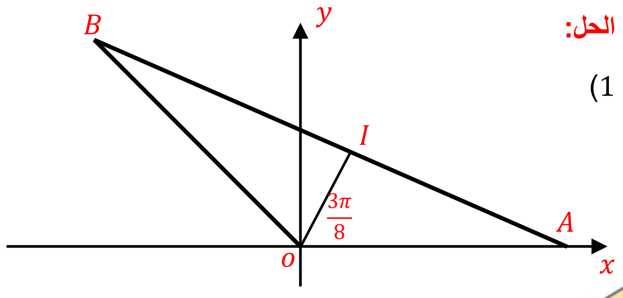
تمرين④: نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددين $a = 2$ و $b = 2.e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1) ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB ثم استنتج قياس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$

2) احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج كلاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

الحل:

(1



نلاحظ أن $OA = OB = 2$ فالمثلث AOB متساوي الساقين، OI متوسط في المثلث AOB فهو منصف للزاوية AOB ومنه:

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

2) I منتصف AB، نحول العدد b إلى الشكل الجبري:

$$b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow b = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow b = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

الجبري:

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

الأسي:

$$r = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2+2}{4}}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\Rightarrow z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}.e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{x}{r} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

مجموعات نقطية وعددية:

مجموعة النقاط $M(z)$:

- $|z-a|=r$

$M(z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها r.

- $|z-a|=|z-b|$

$M(z)$ تمثل مستقيم محور القطعة $[AB]$

- $Re(z)=$ عدد

$M(z)$ تمثل مستقيم شاقولي $(x=$ عدد$)$

- $Im(z)=$ عدد

$M(z)$ تمثل مستقيم أفقي $(y=$ عدد$)$

- $\arg(z)=\theta$

$M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ يصنع الزاوية θ مع محور الفواصل (ox)

- $\arg(z)=0$

$M(z)$ تمثل القسم الموجب من محور الفواصل (ox)

تذكر:

- $\arg(z_1.z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$
- $\arg(z^n)=n.\arg(z)$

مثال ①: ليكن $z_1=2.e^{\frac{\pi}{4}i}$

1) عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق كل من:

$$\arg(z.z_1)=\frac{\pi}{2} \quad , \quad \arg\left(\frac{z}{i}\right)=\frac{\pi}{2}$$

الحل: $\arg(z.z_1)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \arg(z)+\arg(z_1)=\frac{\pi}{2}$

$$\arg(z)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{4}$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ

يصنع الزاوية $\frac{\pi}{4}$ مع (ox)

$$\arg\left(\frac{z}{i}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \arg(z)-\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ ويصنع الزاوية π مع (ox)

2) بفرض: $a=1-i \ , \ b=-2+3i$

و $|z-1+i|=|z+2-3i|$

الحل: $|z-a|=|z-b|$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل محور القطعة $[AB]$

إذا طلب إيجاد معادلته:

إيجاد معادلته نفرض $z=x+iy$

$$|x+iy-1+i|=|x+iy+2-3i|$$

$$|(x-1)+(y+1)i|=|(x+2)+(y-3)i|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$$

نربع الطرفين وننشر:

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2+4x+4+y^2-6y+9$$

$$-2x+2y+2=4x+4-6y+9$$

$$6x-8y+11=0$$

3) $|z-1+i|=5$

الحل: $|z-a|=5$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=5$

مثال ②: عين مجموعة الأعداد العقدية z $(z+1)(\bar{z}-2)$ علماً أن المقدار السابق حقيقي.

الحل: $(z+1)(\bar{z}-2)=(\bar{z}+1)(z-2)$

$$z\bar{z}-2z+\bar{z}-2=z\bar{z}-2\bar{z}+z-2$$

$$-2z+\bar{z}=-2\bar{z}+z$$

$$-3z=-3\bar{z}\Rightarrow z=\bar{z}$$

مجموعة الأعداد يحقق مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال ③: بفرض: $w=\frac{z}{1+\bar{z}}$ حيث:

$z\neq -1$ و $w=X+Yi$ و $z=x+yi$

1) اكتب بدلالة x و y كل من X و Y.

2) أثبت أنه إذا كان w تخيلياً بحتاً كانت مجموعة النقاط $M(z)$ هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

1) $w=\frac{(x-iy)}{(1+x-iy)}\times\frac{(1+x+iy)}{(1+x+iy)}$

$$w=\frac{x+x^2+xyi-yi-xyi+y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$w=\frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}+\frac{-y}{(1+x)^2+y^2}i$$

ومنه $Y=\frac{-y}{(1+x)^2+y^2}$, $X=\frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}$

2) حتى يكون w تخيلياً بحتاً يجب أن يكون: $X=0$

$$x^2+x+y^2=0$$

نتمم: $x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ونصف

قطرها $r=\frac{1}{2}$ ولكن ما عدا النقطة $(-1,0)$

ورقة عمل يدوية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A ننشئ خارجه مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين ABJ و ACF ولتكن الأعداد العقدية:

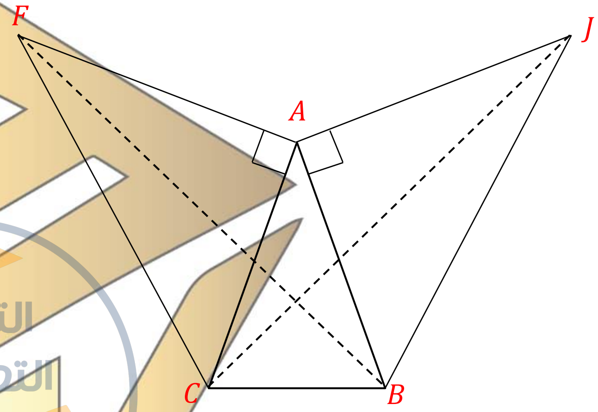
f و j و c و b و a تمثل النقاط: F و J و C و B و A بالترتيب، نتخذ معلم مبدأه النقطة A والمطلوب:

1) احسب بدلالة b و c العددين j و f

2) اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.

3) أثبت أن: $JC = BF$ وأن المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

4) بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(J,2)$ و $(F,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$ احسب $\frac{c}{b}$ واستنتج قياس الزاوية $\widehat{BAC}$



السؤال الثاني:

لتكن A و B و C النقاط التي تمثلها الأعداد العقدية

$c=-i$ و $b=-1-2i$ و $a=2+i$ والمطلوب:

أوجد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A و B و C على إستقامة واحدة.

السؤال الثالث:

لتكن النقطتان A و B الممثلة للأعداد العقدية:

$$z_A=-\sqrt{3}+i\,,\,z_B=-2i$$

1) أثبت أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

2) اكتب z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC.

3) أثبت أن:

$$z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$$

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

السؤال الرابع:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z=2-3i$

جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يلي:

1) T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}=\vec{u}+2\vec{v}$

2) H التحاكي الذي مركزه $A(1+i)$ ونسبته 2

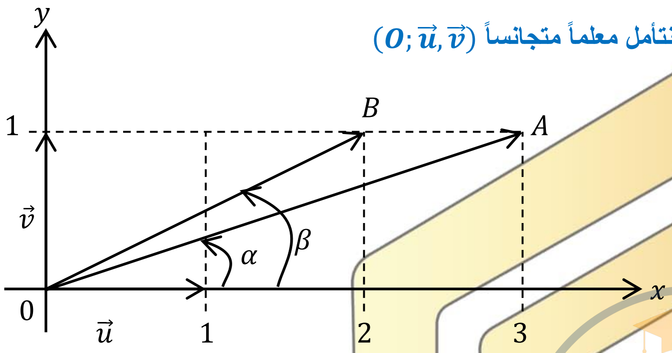
3) R الدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

4) S التناظر الذي مركزه $A(-1+2i)$

5) S التناظر المحوري الذي محوره ox

السؤال الخامس:

نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$



1) اكتب بالشكل الجبري كل من العددين z_A و z_B الممثلين للنقاط A و B

2) احسب $z=z_A.z_B$ بالشكل الجبري.

3) احسب قيمة $\alpha+\beta$

السؤال السادس:

تمثّل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D

أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان:

$$a+c=b+d$$

حل ورقة العمل اليدوية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

$a=0$ مبدأ.

1) J صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$j-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow j=ib$$

F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$f-a=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)\Rightarrow f=-ic$$

2) $$\frac{f-b}{c-j}=\frac{-ic-b}{c-ib}=\frac{(-b-ic)}{(c-ib)}.\frac{(c+ib)}{(c+ib)}$$

$$\frac{f-b}{c-j}=\frac{-bc-b^2i-c^2i+bc}{c^2+b^2}=\frac{-i(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)}$$

$$\frac{f-b}{c-j}=-i$$

3) $$\arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right)=\arg(-i)\Rightarrow\left(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{BF}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

(BF) و (CJ) متعامدان

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right|=|-i|\Rightarrow \frac{BF}{JC}=1\Rightarrow BF=JC$$

4) $$a=\frac{1b+1c+3f+2j}{1+1+3+2}$$

$$0=\frac{b+c+3(-ic)+2(ib)}{7}$$

$$b+c-3ic+2ib=0\Rightarrow c-3ic=-b-2ib$$

$$(1-3i).c=(-1-2i).b$$

$$\frac{c}{b}=\frac{(-1-2i)}{(1-3i)}.\frac{(1+3i)}{(1+3i)}$$

$$\frac{c}{b}=\frac{-1-3i-2i+6}{1+9}=\frac{5-5i}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\widehat{BAC}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

$$\widehat{BAC}=\arg\left(\frac{c}{b}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\widehat{BAC}=-\frac{\pi}{4}$$

السؤال الثاني:

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-1-2i-2-i}{-i-2-i}=\frac{-3-3i}{-2-2i}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{(-3-3i)}{(-2-2i)}\times\frac{(-2+2i)}{(-2+2i)}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{6-6i+6i+6}{4+4}=\frac{3}{2}$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\arg\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=0$$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً ومنه A و B و C تقع على إستقامة واحدة.

السؤال الثالث:

1) $$|z_{\overrightarrow{OA}}|=\sqrt{3+1}=2\,,|z_{\overrightarrow{OB}}|=\sqrt{4}=2$$

مما يعني أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

2) $$z_A=-\sqrt{3}+i\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

$$z_A=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2.e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_O=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

$$0=\frac{-\sqrt{3}+i-2i+z_C}{3}\Rightarrow z_C=\sqrt{3}+i$$

3) $$l_1=z_C-z_A=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i=2\sqrt{3}$$

$$l_2=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$$

$$l_2=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-2i+\sqrt{3}-i\right)$$

$$l_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-3i\right)$$

$$l_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}+i\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$l_1=l_2$ محققة

وهذا يعني أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\left(+\frac{\pi}{3}\right)$ والمثلث ABC متساوي الأضلاع.

السؤال الرابع:

(1 $z' = 2 - 3i + 1 + 2i \Rightarrow z' = 3 - i$

(2 $z' - 1 - i = 2(2 - 3i - 1 - i)$

$\Rightarrow z' - 1 - i = 2 - 8i \Rightarrow z' = 3 - 7i$

(3 $z' = e^{-\frac{\pi}{2}i}(2 - 3i)$

$\Rightarrow z' = -i(2 - 3i) \Rightarrow z' = -3 - 2i$

(4 $z' + 1 - 2i = -(2 - 3i + 1 - 2i)$

$\Rightarrow z' + 1 - 2i = -3 + 5i \Rightarrow z' = -4 + 7i$

(5 $z' = \bar{z} = 2 + 3i$

السؤال الخامس:

(1 $A(3,1) \Rightarrow z_A = 3 + i$

$B(2,1) \Rightarrow z_B = 2 + i$

(2 $z = (3 + i)(2 + i)$

$\Rightarrow z = 6 + 3i + 2i - 1 \Rightarrow z = 5 + 5i$

$z_A = 3 + i$

$r = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\theta_A = \alpha \Rightarrow z_A = \sqrt{10}e^{i\alpha}$

$z_B = 2 + i$

$r = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\theta_B = \beta \Rightarrow z_B = \sqrt{5}e^{i\beta}$

$z = \sqrt{10}e^{i\alpha}.\sqrt{5}e^{i\beta} = \sqrt{50}e^{(\alpha+\beta)i}$

$\Rightarrow z = 5\sqrt{2}e^{(\alpha+\beta)i}$

(3 بالمقارنة بين الشكلين الجبري والأسي:

$$5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{(\alpha+\beta)i}$$

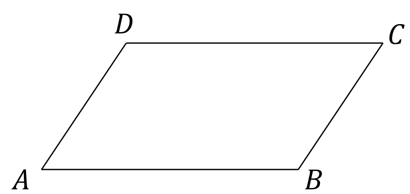
نقسّم الطرفين على 5:

$$\sqrt{2}e^{(\alpha+\beta)i} = 1 + i \Rightarrow e^{(\alpha+\beta)i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$e^{(\alpha+\beta)i} = 1e^{\frac{\pi}{4}i}$$

بالمقارنة نجد: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

السؤال السادس:



$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Rightarrow b - a = c - d \Rightarrow a + c = b + d$$

ورقة عمل منزلية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

لتكن النقاط A وB وC وD التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$\boldsymbol{a = 2 - 2i\,,\, b = -1 + 7i}$$

$$\boldsymbol{c = 4 + 2i\,,\, d = -4 - 2i}$$

1) لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$ أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها 5.

2) ليكن العدد e الممثل للنقطة E منتصف AB أحسب e ثم برهن أن:

$$\frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e}$$

3) ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC.

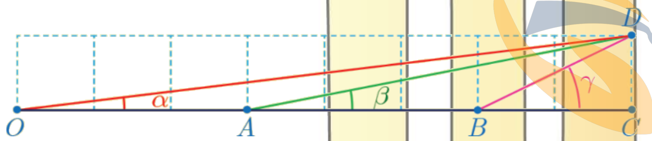
السؤال الثاني:

تأمل الشكل حيث λ وβ وα هي قياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$.

1) اكتب بالشكل الجبري الأعداد العقدية الممثلة للنقاط: O و A و B و D

2) اكتب الأعداد العقدية الممثلة للأشعة $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}$ بالشكلين الجبري والأسي (بدلالة α و β و γ)

3) استنتج قيمة $\alpha + \beta + \gamma$



السؤال الثالث:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقاط A وB وM التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية:

$$\boldsymbol{a = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\boldsymbol{b = 1 + i\,,\, m = 1}$$

1) جد العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-1,0)$

السؤال الرابع:

في معلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ونعرف النقطتين A و B الممثلتان بالعددين العقديين $a = -2$ و $b = i$ ونفرض كل نقطة $M(z)$

$$z = \frac{z_M - a}{z_M - b}$$

حيث $z \neq i$ عيّن T مجموعة النقاط M التي يكون عندها z تخيلياً بحتاً.

حل ورقة العمل المنزلية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

1) المركز $\Omega(-1,2)$ ونصف القطر $r = 5$

معادلة الدائرة: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

نجرب $A(2,-2)$:

$$(2+1)^2 + (-2-2)^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذاً A تنتمي إلى الدائرة.

نجرب $B(-1,7)$:

$$(-1+1)^2 + (7-2)^2 = 25$$

$$0 + 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذاً B تنتمي إلى الدائرة.

نجرب $C(4,2)$:

$$(4+1)^2 + (2-2)^2 = 25$$

$$25 = 25 \text{ محققة}$$

إذاً C تنتمي إلى الدائرة.

نجرب D:

$$(-4+1)^2 + (-2-2)^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذاً D تنتمي إلى الدائرة.

2) $e = \frac{a+b}{2}$

$$e = \frac{2-2i-1+7i}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$(a-e)^2 = (d-e)(c-e)$$

$$l_1 = (a-e)^2 = \left(2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{2}i\right) + \left(\frac{9}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \frac{9}{4} - \frac{54}{4}i - \frac{81}{4}$$

$$l_1 = -\frac{72}{4} - \frac{54}{4}i = -18 - \frac{27}{2}i$$

$$l_2 = (c-e)(d-e)$$

$$l_2 = \left(4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)\left(-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)$$

$$l_2 = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}i\right)$$

$$l_2 = -\frac{63}{4} - \frac{63}{4}i + \frac{9}{4}i - \frac{9}{4}$$

$$l_2 = -\frac{72}{4} - \frac{54}{4}i = -18 - \frac{27}{2}i$$

$$l_1 = l_2 \text{ محققة}$$

3) وجدنا أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

$$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

نستنتج (EA) منصف داخلي للزاوية $\widehat{DEC}$

السؤال الثاني:

1) $O(0,0) \Rightarrow z_O = 0$

$$A(3,0) \Rightarrow z_A = 3$$
$$B(6,0) \Rightarrow z_B = 6$$
$$D(8,1) \Rightarrow z_D = 8 + i$$

2) $z_{\overrightarrow{OD}} = 8 + i$

$$r = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$
$$\theta = \alpha \Rightarrow z_{\overrightarrow{OD}} = \sqrt{65}e^{i\alpha}$$
$$z_{\overrightarrow{AD}} = 5 + i$$
$$r = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$
$$\theta = \beta \Rightarrow z_{\overrightarrow{AD}} = \sqrt{26}e^{i\beta}$$
$$z_{\overrightarrow{BD}} = 2 + i$$
$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\theta = \gamma \Rightarrow z_{\overrightarrow{BD}} = \sqrt{5}e^{i\gamma}$$

3) بالمقارنة بين الشكلين الجبري الأسي:

$$\sqrt{65}e^{i\alpha}.\sqrt{26}e^{i\beta}.\sqrt{5}e^{i\gamma} = (8+i)(5+i)(2+i)$$

$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 26 \times 5}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = (40 + 8i + 5i)(2+i)$$
$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 130}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = (39 + 13i)(2+i)$$
$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 65 \times 2}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = 78 + 39i + 26i - 13$$
$$\Rightarrow 65\sqrt{2}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = 65 + 65i$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$$

السؤال الثالث:

1) $c - m = i(a - m)$

$$c - 1 = i\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2} - i$$

$$c - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2) $d = b - 1 \Rightarrow d = i$

السؤال الرابع:

طريقة أولى:

z' تخيلي بحت $\Leftarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$

$$z = \frac{z_M - a}{z_M - b}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_M - a}{z_M - b}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2}$$

M_z تمثل دائرة قطرها AB ما عدا النقطة $(0,1)$

طريقة ثانية:

بفرض $z = x + yi$

$$z = \frac{(x + iy + 2)}{(x + iy - i)} \cdot \frac{(x - iy + i)}{(x - iy + i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2 - iyx + ix + iyx + y^2 - y + 2x - 2iy + 2i}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2 + 2x + y^2 - y + ix - 2iy + 2i}{x^2 + (y-1)^2}$$

يكون المقدار تخيلي عندما:

$$x^2 + 2x + y^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

تمثّل دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$

التحليل التوافقي

قوانين الحساب

العاملي

$n!$

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 3\times 2\times 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

يستخدم عند الإختصار ودائماً نبدأ من الكبير لنصل إلى الصغير

$1! = 1 \quad , \quad 0! = 1$

التراتيب

$$n, r \in N^* \Rightarrow n \geq r \geq 1$$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$P_n^1 = n \quad , \quad P_n^n = n!$

التوافيق

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

يستخدم عندما تكون r مجهولة

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

يستخدم في تبسيط الحساب عندما:

$$r > \frac{n}{2}$$

$\binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{0} = 1$

ملاحظة:

عند تعيين قيم مجاهيل (حل معادلة) يجب أن نكتب شرط الحل:

تراتيب: فوق $\geq$ تحت

توافيق: فوق $\leq$ تحت

متراجحتين أكبر (تقاطعهن كبير)

متراجحتين أصغر (تقاطعهن صغير)

متى لا نضرب بالتباديل:

1. إذا كان السحب معاً.
2. إذا كانت عناصر النتيجة متشابهة.
3. إذا ذكر ترتيب معين في الطلب.

كيف نضرب بالتباديل؟

عناصر مختلفة

$\boxed{\text{الكلي!}}$

$(a,b,c) = 3!$

$(a,b) = 2!$

إذا وجد عناصر متشابهة

$\dfrac{\text{الكلي!}}{\text{المتشابه!}}$

$$(a,a,b) = \frac{3!}{2!\times 1!} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 3$$

$$(a,a,a,b,b) = \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$$

منشور ذي الحدين

$$(a+b)^n = T_0 + T_1 + \cdots + T_n$$

كيفية أيجاد أحد الحلول في منشور ذي الحدين:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{(n-r)} b^r$$

يستخدم:

1) إيجاد أمثال x^n أو الحد الذي يحوي x^n

2) إيجاد الحد الثابت المستقل عن x (أمثال x^0)

ملاحظة:

في مسائل حساب عدد الطرق (نتائج) إذا وجد في صيغة السؤال:

1. على الأقل: منها وطالع.
2. على الأكثر: منها ونازل.

مسائل السحب

على التتالي مع إعادة — **على التتالي دون إعادة**

نستخدم المبدأ الأساسي في العد

ولا ننسى أن نضرب بتباديل المجموعات المؤلفة من عناصر مختلفة

لا يوجد تناقص — يوجد تناقص

معاً

نستخدم قانون التوافيق ولا نضرب بالتباديل

ملاحظات في مسائل تشكيل الأعداد:

1. إذا كانت المجموعة الكلّية تحوي الصفر، يجب الإنتباه إلى عدم وضع الصفر في أكبر خانة
2. عندما يكون لدينا أكثر من شرط، والمطلوب أعداد مختلفة الأرقام، نناقش السؤال بصورة عامة ثم نميز حالات.

التحليل التوافقي:

مثال(1):

اختزل المقادير الآتية:

1) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ 2) $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n)!-(n-1)!}$

الحل:

1) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n.(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1).n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

2) $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n)!-(n-1)!}=\frac{2n.(2n-1)!-(2n-1)!}{2n.(n-1)!-(n-1)!}$

$$\Rightarrow \frac{(2n-1)!.[2n-1]}{(n-1)!.[2n-1]}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

- **التراتيب: P_n^r**

$$P_5^2=5\times 4=20$$

$$P_{10}^3=10\times 9\times 8=720$$

$$P_{n+1}^3=(n+1).(n).(n-1)$$

مثال(1): عين n التي تحقق: $P_{n+2}^4=14P_n^3$

الحل:

شرط الحل: $n+2\geq 4$ $\quad n\geq 3 \cap n\geq 2$

$$\Rightarrow n\geq 3$$

$$(n+2).(n+1).n.(n-1)=14n.(n-1).(n-2)$$

$$n^2+n+2n+2=14n-28$$

$$n^2-11n+30=0$$

$$(n-6).(n-5)=0$$

إما: $n-6=0\Rightarrow n=6$ مقبول

أو: $n-5=0\Rightarrow n=5$ مقبول

- **التوافيق: $\binom{n}{r}$**

$$\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$$

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$

مثال(1): عين قيمة n في كل حالة:

1) $P_{n+3}^3=16\binom{n+2}{2}$

2) $\binom{15}{2n}=\binom{15}{n+3}$

الحل:

1) شرط الحل: $n+2\geq 2 \quad n+3\geq 3$ $\quad n\geq 0 \cap n\geq 0$

$$(n+3)(n+2)(n+1)=16\times\frac{(n+2)(n+1)}{2\times 1}$$

$n+3=8\Rightarrow n=5$ محققة

2) شرط الحل: $15\geq 3+n\geq 0 \quad , \quad 15\geq 2n\geq 0$

إما : تحت = تحت

$\Rightarrow 2n=n+3\Rightarrow n=3\Rightarrow$ مقبول

أو: فوق = تحت + تحت

$\Rightarrow 2n+n+3=15\Rightarrow 3n=12\Rightarrow n=4\Rightarrow$ مقبول

مثال(2): أثبت صحة العلاقة:

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}$$

الحل:

$$L_1=\frac{\frac{(n+1)!}{(n-r)!.(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!.r!}}=\frac{(n+1)!}{(r+1)!}.\frac{r!}{n!}$$

$$=\frac{n+1}{r+1}=L_2$$

محققة.

منشور ذي الحدّين:

مثال ①: انشر ما يلي $(1-i)^5$

الحل:

$$+\binom{5}{0}.1^5.i^0 = 1$$

$$-\binom{5}{1}.1^4.i^1 = -5i$$

$$+\binom{5}{2}.1^3.i^2 = -10$$

$$-\binom{5}{3}.1^2.i^3 = +10i$$

$$+\binom{5}{4}.1^1.i^4 = +5$$

$$-\binom{5}{5}.1^0.i^5 = -i$$

$$\Rightarrow (1-i)^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i$$

$$\Rightarrow (1-i)^5 = -4 + 4i$$

مثال ②: ما هي أمثال الحد $x^2.y$ **في منشور** $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r = \binom{8}{r}(y^2.x^{-1})^{8-r}(x.y^{-1})^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} y^{16-2r}.x^{-8+r}.x^r.y^{-r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} y^{16-3r}x^{-8+2r}$$

حتى نحصل على x^2 يجب تحقق: $-8+2r = 2 \Rightarrow r = 5$

حتى نحصل على y يجب تحقق: $16-3r = 1 \Rightarrow r = 5$

r المحققة للمنشور هي $r = 5$

$$T_5 = \binom{8}{5} y^{16-15}x^{-8+10} = 56x^2.y$$

أمثال $x^2.y$ هي 56

المبدأ الأساسي في العد:

مثال ①: يتألف مجلس إدارة نادي من خمس أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر للنادي؟

الحل:

طريقة $5 \times 4 \times 3 = 60$

مثال ②: رف يحوي خمس كتب لمؤلفين ثلاث كتب للمؤلف A وكتابان للمؤلف B.

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف.

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون أول كتابين للمؤلف A.

3) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف بشرط أن لا نضع كتابين متجاورين لنفس المؤلف.

الحل:

1) طريقة $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2) طريقة $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$

3) طريقة $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$

مثال ③: يحتوي صندوق على خمس كرات مرقمة $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب كرتين على التالي مع إعادة.

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب.

2) كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي.

الحل:

1) نتيجة $5 \times 5 = 25$

2) نتيجة $2 \times 3 \times 2 = 12 \Rightarrow 2\{\text{للتباديل}\} \times (\text{ز, ف})$

مثال ④: نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب ومدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً أنه في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها؟

الحل:

نفرض أن A و B متخاصمان و C, C, C غير متخاصمين

حتى ما يجتمع A و B في نفس اللجنة هناك ثلاث حالات:

إما: $(C, C, C) \Rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$

أو: $(A, C, C) \times 3 \Rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 3 = 18$

أو: $(B, C, C) \times 3 \Rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 3 = 18$

عدد الطرق الكلية $= 6 + 18 + 18 = 42$ طريقة

مثال⑤: لتكن المجموعة: $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

1) كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلفة الأرقام يمكن تشكيله من S؟

2) كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله؟

3) كم عدداً زوجيا ومختلف الأرقام مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله

4) كم عدداً فردياً مؤلفاً من ثلاث منازل وهو أكبر تماماً من 200 يمكن تشكيله؟

5) كم عدداً فردياً مؤلف من ثلاث منازل مختلفة الأرقام وهو أكبر تماماً من 200 يمكن تشكيله؟

الحل:

1) عدد $5 \times 4 \times 3 = 60$

2) عدد $5 \times 5 \times 2 = 50$

3) عدد $4 \times 3 \times 2 = 24$

4) عدد $4 \times 5 \times 3 = 60$

5) حالة (1): $4 \times 3 \times 1 = 12$

حالة (2): $3 \times 3 \times 1 = 9$

حالة (3): $3 \times 3 \times 1 = 9$

عدد $12 + 9 + 9 = 30$ = نتيجة الأعداد

استخدام قانون التوافيق:

نستخدم قانون التوافيق في المسائل التي لا تهتم بالترتيب مثل:

1) تشكيل لجان نشاط (عمل) $\binom{\text{كلي}}{\text{مطلوب}}$

2) تشكيل مثلثات من نقاط على دائرة $\binom{\text{عدد النقاط}}{3}$

3) تشكيل قطع مستقيمة $\binom{\text{عدد النقاط}}{2}$

4) تشكيل الأشعة غير الصفرية $2 \times \binom{\text{عدد النقاط}}{2}$

5) عدد المضلّعات الرباعية من نقاط على دائرة: $\binom{\text{عدد النقاط}}{4}$

6) عدد المستطيلات من نقاط على دائرة: $\binom{\text{عدد أقطار الدائرة}}{2}$

7) المصافحة $\binom{\text{الأشخاص}}{2}$

8) تشكيل مجموعات جزئية $\binom{\text{الكلّي}}{\text{المطلوب}}$

9) السحب معاً $\binom{\text{الكلّي}}{\text{المطلوب}}$

10) اختيار أسئلة في امتحان.

11) تشكيل متوازيات أضلاع أو مستطيلات في شبكة

$$\binom{\text{أفقي}}{2} \times \binom{\text{شاقولي}}{2}$$

12) عدد أقطار مضلع محدب مؤلّف من n رأس، يحسب بالشكل:

$$\binom{n}{2} - n$$

13) توزيع هدايا على أشخاص (عدد الهدايا نفس عدد الاشخاص)

$$(\text{الأشخاص})!$$

14) توزيع هدايا على أشخاص (عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد)

$$\binom{\text{الهدايا}}{2} \times (\text{الأشخاص})!$$

15) عدد نقاط تلاقي أقطار مضلّع محدّب مؤلف من n رأس حيث $n \geq 5$

$$\text{عدد النقاط} = \binom{n}{4} + n$$

مثال①: في احد مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمسة عمال، كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الخدمة؟

الحل: $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} = 3 \times 10 = 30$

مثال②: نريد تأليف لجنة نشاط مؤلفة من ثلاث أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي 4 شباب و3 بنات.

1) كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها.

2) كم لجنة مؤلفة من شب وبنتين يمكن تأليفها.

الحل:

1) ما حدد النوع نعتمد على العدد الكلي

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ لجنة}$$

2) $\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12$ لجنة

مثال③: يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 بيضاء و 2 سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً.

1) بكم طريقة نستطيع سحب كرتين حمراويين فقط.

2) بكم طريقة يمكن سحب كرتين بيضاء على الأقل.

الحل:

1) (R, R, R')

$$\text{عدد الطرق} = \binom{3}{2} \times \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18 \text{ طريقة}$$

2) (w, w, w') أو (w, w, w)

$$\text{عدد الطرق} = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 34$$

مثال④: لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة ثلاث عناصر.
2) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة من عنصرين مجموعهما فردي.
3) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة من عنصرين مجموعهما زوجي.

الحل:

1) $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ طريقة

2) مجموعهما فردي يعني لازم واحد فردي وواحد زوجي

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 6$$

3) إما: العنصرين زوجي أو: العنصرين فردي.

$$\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 4$$

مثال⑤: التقى عشر أصدقاء في حفل، كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل إذا كل شخص صافح الأشخاص التسعة الآخرين؟

الحل: $\binom{10}{2} = 45$ مصافحة

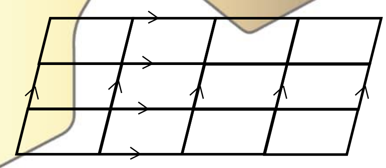
مثال⑥: بكم طريقة يستطيع طالب أن يجيب عن 5 أسئلة من أصل 8؟ وبكم طريقة يمكن أن يختار طالب 5 أسئلة من 8 علماً أن أول سؤالين حلّهما إجباري؟

الحل:

$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ طريقة

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ طريقة

مثال⑦: كم عدد متوازيات الأضلاع في الشكل المجاور: متوازي الأضلاع يحتاج مستقيمين أفقيين ومستقيمين شاقوليين

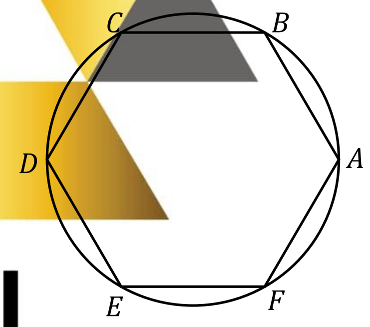


الحل:

$\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$ متوازي أضلاع

مثال⑧: في الشكل السابق $ABCDEF$ مسدس منتظم.

1) ما عدد القطع المستقيمة الواصلة بين رأسين مختلفين في المسدس؟
2) ما عدد الأشعة الغير صفرية التي يمكن تشكيلها؟
3) ما عدد المثلثات الواصلة بين ثلاث رؤوس؟
4) ما عدد المضلعات الرباعية التي يمكن تشكيلها من النقاط الموجودة على الدائرة؟
5) ما عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من النقاط الموجودة على الدائرة؟



الحل:

1) القطعة المستقيمة تحتاج رأسين

$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ قطعة

2) أيضاً الشعاع يحتاج رأسين لكن نضرب بـ2 لأنه هناك اتجاهين

$\binom{6}{2} \times 2 = 15 \times 2 = 30$ شعاع

3) المثلث يحتاج ثلاث رؤوس

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ مثلث

4) عدد المضلعات الرباعية: $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ مضلّع

5) عدد المستطيلات: $\binom{\text{عدد أقطار الدائرة}}{2} = \binom{3}{2} = 3$ مستطيل

مثال⑨:

1) يريد معلم توزيع 5 هدايا على 5 طلاب، بكم طريقة يمكنه التوزيع؟
2) يريد معلم توزيع 5 هدايا على 4 طلاب، بحيث يحصل كل طالب على هدية واحدة على الأقل، ما عدد النتائج لهذه العملية؟

الحل:

1) توزيع n شغلة على n شخص يتم بطرق $n!$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة

2) $\binom{\text{هدايا}}{2} \times$!أشخاص

$\Rightarrow \binom{5}{2} \times 4! = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240$ نتيجة

مثال⑩: أثبت أن عدد اقطار مضلع محدب عدد رؤوس $n \geq 4$ يعطى بالصيغة: $\frac{n(n-3)}{2}$

الحل:

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{\text{عدد الرؤوس}}{2} - \text{عدد الرؤوس}$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n \times (n-1)}{2 \times 1} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n^2 - n}{2} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

ورقة عمل يدوية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

مجموعة أشخاص في مدرسة مؤلفة من أربع طلاب واستاذين:

1- بكم طريقة يمكن ترتيب المجموعة برتل أحادي حيث يكون أستاذ في بداية الرتل وأستاذ في نهاية الرتل.
2- كم عدد المصافحات التي يمكن أن تجري بين جميع الأشخاص.
3- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من أستاذ وطالبين.

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المنشور $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ أوجد الحد الذي يحوي x^4

السؤال الثالث:

عيّن قيمة n التي تحقق:

$$3\binom{2n}{3} = 6P_n^2$$

السؤال الرابع:

صندوق يحوي 5 كرات (ثلاثة منهم حمراء وكرة بيضاء وكرة سوداء) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة، بكم طريقة يمكن السحب في الحالات:

1) الكرات الثلاثة من لون واحد.

2) الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء.

السؤال الخامس:

لدينا المجموعة $S=\{1,2,3,4,5\}$

1) كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين مختلفتين يمكن تشكيله من S

2) كم عدداً فردياً وأصغر من 300 من ثلاث منازل مختلفة يمكن تشكيله من S

حل ورقة العمل اليدوية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

1) $2\times4\times3\times2\times1\times1=48$ طريقة

2) $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$ مصافحة

3) $\binom{2}{1}\times\binom{4}{2}=2\times\frac{4\times3}{2\times1}=12$ لجنة

السؤال الثاني:

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \Rightarrow T_r=\binom{10}{r}(2x)^{10-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r=\binom{10}{r}2^{10-r}x^{10-r}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r=\binom{10}{r}2^{10-r}x^{10-r}x^{-\frac{r}{2}}$$

$$\Rightarrow T_r=\binom{10}{r}2^{10-r}x^{10-\frac{3}{2}r}$$

نبحث عن الحد الذي يحوي x^4

$$10-\frac{3}{2}r=4 \Rightarrow 20-3r=8 \Rightarrow r=4$$

$$T_4=\binom{10}{4}2^6x^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times64\times x^4$$

$$\Rightarrow T_4=13440x^4$$

السؤال الثالث:

$$3\binom{2n}{3}=6P_n^2$$

$$2n\ge3\Rightarrow n\ge\frac{3}{2}\cap n\ge2\Rightarrow n\ge2$$

$$3\times\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\times2\times1}=6\times n(n-1)$$

$$\frac{(2n-1)2(n-1)}{6}=n-1\Rightarrow\frac{2n-1}{3}=1$$

$\Rightarrow 2n-1=3\Rightarrow n=2$ محققة

السؤال الرابع:

1) سحب ثلاث كرات من نفس اللون:

(R,R,R)أو(W,W,W)أو(B,B,B)

$(3\times3\times3)+(1\times1\times1)+(1\times1\times1)=29$ طريقة

2) الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء:

لا نضرب بالتباديل (لأنه حدد لنا الترتيب)

$3\times1\times1=3$ طريقة

السؤال الخامس:

1) $4\times2=8$

2) $1\times3\times2=6$ إمّا

$1\times3\times3=9$ أو

عدد الطرق $=6+9=15$

ورقة عمل منزلية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1) كم عدداً مختلف الأرقام مؤلف من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

2) إذا أردنا أن نضع رمز موبايل مكوّن من أربع خانات مختلفة مثنى مثنى مأخوذين من المجموعة S، بكم طريقة يمكن أن نضع هذا الرمز.

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المقدار:

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$$

ما الشرط حتى يحوي المنشور السابق على حد مستقل عن x

السؤال الثالث:

نملئ عشوائياً كل خانة من الخانات الخمسة الآتية بأخذ العددين -2 , 3

1) بكم طريقة يمكن أن نملئ الخانات الخمسة.

2) بكم طريقة يمكن أن نملئ الخانات الخمسة بحيث يكون مجموع الأعداد عشرة.

السؤال الرابع:

مغلف يحوي 7 متماثلة مرقمة $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ نسحب ثلاث بطاقات معاً

1) ما عدد النتائج الممكنة للسحب.

2) ما عدد النتائج المختلفة لظهور ثلاث ارقام مجموعها من مضاعفات العدد 2

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

1)

الناتج	آحاد	عشرات	مئآت
48	3	4	4
	بقي ثلاث أعداد	يمكن أخذ أي عدد من الأربعة الباقية	1,2,3,4 لا يمكن اختيار الصفر

2) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ رمز

السؤال الثاني:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} (x^{-2})^r \Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} x^{-2r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-3r}$$

$$n - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{3} n$$

الشرط: n من مضاعفات العدد 3

السؤال الثالث:

1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

2) $(3,3,3,3,-2)$

$5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5$

السؤال الرابع:

1) $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

2) (ز, ز, ز) + (ف, ف, ز)

$\binom{3}{3} + \binom{4}{2}\binom{3}{1} = 19$

الإحتمالات

إحتمال الحدث

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

حيث $n(\Omega)$ (عدد نتائج فضاء العيّنة) هي جميع النتائج التي يمكن أن نحصل عليها عند إجراء تجربة ما.

الحدث المستحيل

$P(\phi) = 0$

الحدث الأكيد

$P(\Omega) = 1$

الاستقلال الإحتمالي لحدثين A و B

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

الحدث المعاكس

$P(A') = 1 - P(A)$

احتمال A علماً أن B قد وقع

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

قوانين دومورغان

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cap B)$

فائدة:

عند سحب شغلتين: يمكن إنشاء جدول يضم جميع النتائج (فضاء العينة) ونميّز:

- على التتالي مع إعادة ← الجدول كامل
- على التتالي دون إعادة ← نحذف القطر الرئيسي
- معاً ← نحذف القطر الرئيسي وما تحته
- كل شغلة من صندوق ← الجدول كامل

الإستقلال الإحتمالي لمتحولين عشوائيين x, y

1. نكتب فضاء العينة
2. نعيّن قيم المتحول x والمتحول y
3. نكتب جدول قانونهما الاحتمالي
4. نكتب جدول قانون احتمالي يضم x و y

المتحول العشوائي

هو أن نربط كل نتيجة لتجربة احتمالية عشوائية بعدد ما.

لحل مسألة متحول عشوائي:

1. نعيّن قيم لـx
2. نكتب جدول قانون احتمالي.

التوقع الرياضي: $E(x) = \Sigma x.P(x)$

التباين: $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

الإنحراف المعياري: $\sigma x = \sqrt{V(x)}$

عند سحب ثلاث شغلات: إذا كان السحب

- معاً ← لا نهتم بالترتيب ← نستخدم التوافيق:

$$P(A) = \frac{\text{نتائج الحدث} \binom{\text{كلي}}{\text{مطلوب}}}{\text{جميع النتائج} \binom{\text{كلي}}{\text{مطلوب}}}$$

- على التتالي بدون إعادة ← نهتم بالترتيب ← جداء كسور متناقصة
- على التتالي مع إعادة ← نهتم بالترتيب ← جداء كسور غير متناقصة

برنولي

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

يستخدم عند سحب ثلاث مرات أو أكثر على التتالي مع إعادة أو عند تكرار تجربة ثلاث مرات أو أكثر (مثل تجربة رمي قطعة نقود وأحجار النرد)

لحل مسائل برنولي: نعرّف

عدد مرات التكرار $= n$

احتمال النجاح المطلوب(في المرة الواحدة) $= p$

$q = 1 - p$

عدد مرات النجاح المطلوبة $k = x$

التوقع الرياضي: $E(x) = n.p$

التباين: $V(x) = n.p.q$

تمرين ①: يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 0 و 1 و 2 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الارقام 0 و 1 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة.

1) الحدث A: الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته، احسب $P(A)$

2) الحدث B: جداء رقمي الكرتين هو صفر، والمطلوب:

a) احسب احتمال الحدث B.

b) احسب احتمال B علماً أن A قد وقع.

c) هل A و B مستقلين احتمالياً؟

3) نعرف متحولاً عشوائياً x يدل على مجموع رقمي الكرتين المستحوبتين، عيّن مجموعة قيم المتحول x واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي، وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل:

نكتب جدول فضاء العينة:

	R_0	R_1	R_2	W_0	W_1
R_0		(R_0,R_1)	(R_0,R_2)	(R_0,W_0)	(R_0,W_1)
R_1	(R_1,R_0)		(R_1,R_2)	(R_1,W_0)	(R_1,W_1)
R_2	(R_2,R_0)	(R_2,R_1)		(R_2,W_0)	(R_2,W_1)
W_0	(W_0,R_0)	(W_0,R_1)	(W_0,R_2)		(W_0,W_1)
W_1	(W_1,R_0)	(W_1,R_1)	(W_1,R_2)	(W_1,W_0)	

$n(\Omega) = 20$

1) $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

2) a) $P(B) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

b) $P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$

c) $P(A\cap B) = \frac{6}{20}$

$$P(A)\times P(B) = \frac{4}{10}\times\frac{7}{10} = \frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$$

الحدثين غير مستقلّين احتمالياً.

3) يهمنا المجموع للعددين:

	R_0	R_1	R_2	W_0	W_1
R_0		1	2	0	1
R_1	1		3	1	2
R_2	2	3		2	3
W_0	0	1	2		1
W_1	1	2	3	1	

$n(\Omega) = 20$, $X = \{0,1,2,3\}$

$$P(x=0) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} , P(x=1) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$

$$P(x=2) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} , P(x=3) = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

x	0	1	2	3	ε
P_x	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
$x.P_x$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$	$E(x) = \frac{16}{10}$
$x^2.P_x$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{18}{10}$	$E(x^2) = \frac{34}{10}$

التوقع الرياضي:

$$E(x) = \Sigma x.P_x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

التباين:

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$V(x) = \frac{17}{5} - \frac{64}{25} = \frac{85-64}{25} = \frac{21}{25}$$

الانحراف المعياري: $\sigma x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{21}{25}}$

تمرين ②: نتأمل صندوق u_1 يحوي على ثلاث كرات مرقمة 1 و 2 و 3 وصندوق u_2 يحوي على ثلاث كرات مرقمة 4 و 5 و 6.

نسحب كرة من الصندوق الاول ثم كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

1- اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.

2- نعرّف الحدث A: سحب كرتين إحداهما على الأقل من مضاعفات العدد (3).

نعرّف الحدث B: سحب كرتين مجموع رقميهما أكبر تماماً من 7

هل A و B مستقلان احتمالياً؟

3- x متحول عشوائي يدل بكل نتيجة سحب على العدد الأصغر.

a- ما هي مجموعة قيم المتحول x.

b- ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي x.

c- احسب التوقع الرياضي $E(x)$.

الحل:

-1

	4	5	6
1	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,4)	(3,5)	(3,6)

$n(\Omega) = 9$

-2 $P(A) = \frac{5}{9}$, $P(B) = \frac{3}{9}$, $P(A\cap B) = \frac{3}{9}$

$$P(A).P(B) = \frac{5}{9}\times\frac{3}{9} = \frac{5}{27}$$

$$P(A\cap B) \neq P(A).P(B)$$

A و B غير مستقلين إحتمالياً.

-3 $x=\{1,2,3\}$

x	1	2	3	ε
P_x	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	1
$x.P_x$	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{9}{9}$	$E(x)=2$

$$E(x)=\Sigma x P_x=2$$

تمرين③: يحتوي صندوق على ثلاث كرات زرقاء وكرتين خضراء وكرة حمراء

نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن x المتحول الذي يمثل عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

1- ما هي مجموعة قيم x.

2- اكتب جدول قانون x الإحتمالي.

3- احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

1) $x=\left\{\underbrace{0}_{(G',G',G')}\ ,\ \underbrace{1}_{(G,G',G')}\ ,\ \underbrace{2}_{(G,G,G')}\right\}$

2)

$$P(x=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$$

$$P(x=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{6\times 2}{20}=\frac{6}{10}$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{4\times 1}{20}=\frac{2}{10}$$

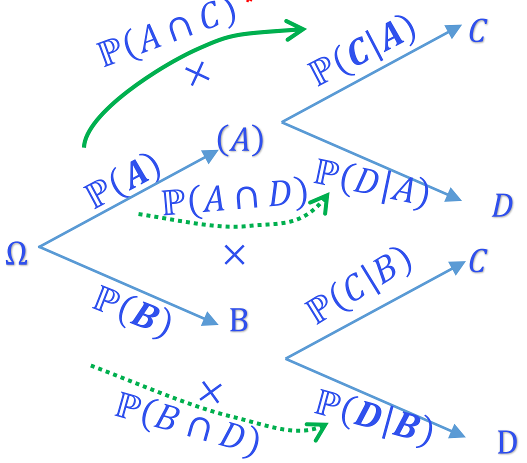
x	0	1	2	ε
P_x	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
$x.P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$E(x)=1$
$x^2.P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	$E(x^2)=\frac{14}{10}$

التوقع الرياضي: $E(x)=\Sigma x.P_x=1$

التباين: $V(x)=E(x^2)-\big(E(x)\big)^2=\frac{14}{10}-1=\frac{4}{10}$

الإنحراف المعياري: $\sigma x=\sqrt{V(x)}=\frac{2}{\sqrt{10}}$

المخطط الشجري



$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$

فكرة الإحتمال الشرطي:

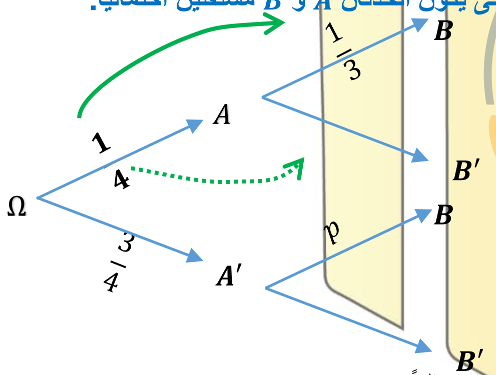
لقد سحبنا.... ⇐ B معلوم

فما احتمال..... ⇐ u مطلوب

$$P(\text{مطلوب}\backslash\text{معلوم})=\frac{P(\text{مطلوب}\cap\text{معلوم})}{P(\text{معلوم})}$$

مثال①: A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور.

عين قيمة P حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً.



الحل:

A و B مستقلان احتمالياً.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\ \dots *$$

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$$

$$P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}p$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

نعوض في *: $\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{4}p\right)\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}p$

$$\frac{3}{4}p=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$$

نضرب بـ12: $9p=4-1\Rightarrow 9p=3\Rightarrow p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

مثال②: لدينا صندوق يحوي على كرتين سوداء وكرة حمراء نسحب من الصندوق كرة ونسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب مجدداً كرة:

1) أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

2) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء.

3) إذا علمت أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء؟

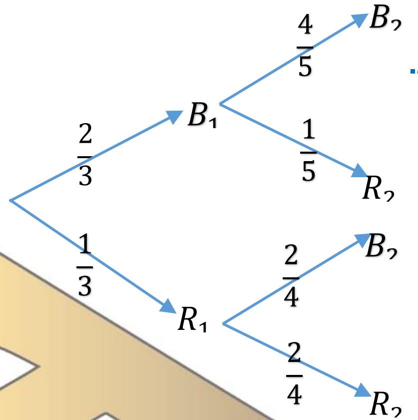
4) x متحول عشوائي يربط بكل نتيجة للسحب عدد الكرات السوداء المسحوبة:

a- ما هي مجموعة قيم x.

b- احسب $P(x=1)$.

الحل:

(1



(2

$$P(R_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

3) احتمال شرطي $\Rightarrow$ R_2 معلوم، B_1 مطلوب

$$P(B_1\backslash R_2)=\frac{P(B_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{4}{9}$$

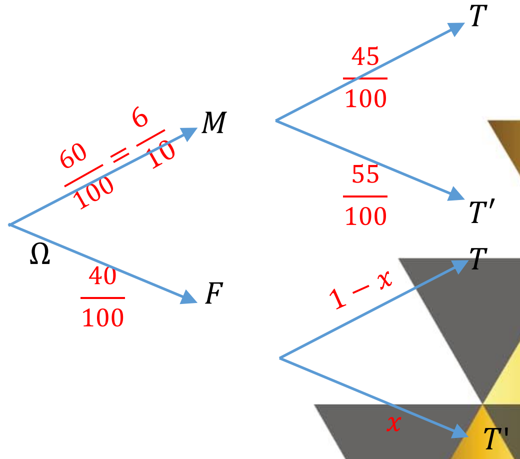
4) -a $x=\{0,1,2\}$

-b $P(x=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}$

$$P(x=1)=\frac{9}{30}$$

مثال③: في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب، نرمز بالرمز M اختيار طالب ذكر ونرمز بالرمز F اختيار طالبة انثى ونرمز بالرمز T اختيار طالب يلعب كرة المضرب، عند اختيار أحد الطلّاب الموجودين في المدرسة، أعط مخططاً شجرياً للتجربة، واحسب $P(F\cap T')$

الحل:



$$P(T)=\frac{30}{100}$$

المطلوب: $F(T'\backslash F)=x$

لدينا: $P(T)=\frac{30}{100}$

$$\frac{6}{10}\times\frac{45}{100}+\frac{4}{10}(1-x)=\frac{30}{100}$$

$$\frac{270}{1000}+\frac{40}{100}(1-x)=\frac{30}{100}$$

$$27+40-40x=30\Rightarrow 40x=37\Rightarrow x=\frac{37}{40}$$

$$P(T'\backslash F)=\frac{37}{40}$$

$$P(F\cap T')=\frac{40}{100}\times\frac{37}{40}=\frac{37}{100}$$

الإستقلال الإحتمالي لمتحولين:

تمرين①: صندوق يحوي على ثلاث كرات واحدة حمراء تحمل الرقم (1) واثنتان زرقاوين تحملان الرقمين (2) و (3) نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع اعادة:

① x متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء، اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

② y متحول عشوائي يدل على مجموع رقمين الكرتين، اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

③ اكتب جدول قانون احتمالي مشترك المتحولين x, y.

④ هل المتحولين x, y مستقلان احتمالياً.

الحل:

$II \backslash I$	R_1	B_2	B_3
R_1	(R_1,R_1)	(R_1,B_2)	(R_1,B_3)
B_2	(B_2,R_1)	(B_2,B_2)	(B_2,B_3)
B_3	(B_3,R_1)	(B_3,B_2)	(B_3,B_3)

$$n(\Omega)=9$$

①

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

②

y_i	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

③

$x \backslash y$	2	3	4	5	6	$\mathbb{P}x$
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}\mathbb{P}(x=0)$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}\mathbb{P}(x=1)$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}\mathbb{P}(x=2)$
$\mathbb{P}y$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
	$\mathbb{P}(y=2)$	$\mathbb{P}(y=3)$	$\mathbb{P}(y=4)$	$\mathbb{P}(y=5)$	$\mathbb{P}(y=6)$	

④ $\mathbb{P}[(x=0)\cap(y=2)] = \frac{1}{9}$

$$\mathbb{P}(x=0)\times\mathbb{P}(y=2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}[(x=0)\cap(y=2)] \neq \mathbb{P}(x=0)\times\mathbb{P}(y=2)$$

إذن x , y غير مستقلان احتمالياً.

مثال②: 2023 تكميلي:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً.

x \ y	0	1	2	قانون x
0				0.3
1			0.14	
قانون y		0.4		1

الحل:

1) $P(x=1) = 0.7$

بما أن x و y مستقلين إحتمالياً:

$$P(x=1\cap y=2) = P(x=1)\times P(y=2)$$

$$\Rightarrow \frac{14}{100} = \frac{7}{10}\times P(y=2) \Rightarrow P(y=2) = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow P(y=0) = \frac{4}{10}$$

$$P(x=0\cap y=0) = P(x=0)\times P(y=0)$$

$$\Rightarrow P(x=0\cap y=0) = 0.3\times 0.4 = 0.12$$

$$P(x=0\cap y=1) = 0.3\times 0.4 = 0.12$$

$$P(x=0\cap y=2) = 0.3\times 0.2 = 0.06$$

$$P(x=1\cap y=0) = 0.7\times 0.4 = 0.28$$

$$P(x=1\cap y=1) = 0.7\times 0.4 = 0.28$$

برنولي:

مثال①: نكرّر عشر مرات تجربة إلقاء لقطعتي نقود متوازنتين.

نسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين، احسب احتمال الحدث:

A: الحصول على وجهين H مرة واحدة على الأقل.

الحل:

فضاء العينة لرمي قطعتين:

$$\Omega = \{(H,H),(T,H),(H,T),(T,T)\}$$

تجربة برنولية: $n = 10$: عدد الرميات.

$p = \frac{1}{4}$: احتمال ظهور وجهين H في مرة واحدة.

$q = \frac{3}{4}$: احتمال عدم ظهور وجهين H.

$K = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$: المرات المطلوبة.

$k' = 0$

$$P(A') = P(x=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

مثال②: يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة الطائرة المكونة من خمسة أشواط.

يكسب الفريق A الشوط الواحد باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$ يربح الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط.

ما احتمال أن يربح الفريق B في اللعبة؟

A	B
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

الحل:

تجربة برنولية:

$n = 5$

$p_A = \frac{1}{4}, q_A = \frac{3}{4}$

$k_A = 0,1,2$

$$P(B) = P(x_A=0) + P(x_A=1) + P(x_A=2)$$

$$P(B) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(B) = \frac{243}{1024} + \frac{405}{1024} + \frac{270}{1024} = \frac{918}{1024}$$

مثال③: دورة 2017 أولى:

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرّات متتالية، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية $\frac{1}{3}$، نعرّف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار، اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي x واكتب جدول قانونه الإحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$n = 3 \;,\; p = \frac{1}{3} \;,\; q = \frac{2}{3} \;,\; k = x$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$P(x=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(x=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

x	0	1	2	3	ε
P_x	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

التوقع الرياضي: $E(x) = n.p = 3\times\frac{1}{3} = 1$

التباين: $V(x) = n.p.q = 3\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ورقة عمل يدوية في بحث الإحتمالات

السؤال الأول:

يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء وكرتان بيضاء.

نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق نسمي x المتحول الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عين مجموعة قيم x واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

السؤال الثاني:

إذا كان $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

1) احسب: $P(B')$ و $P(A\cup B)$ و $P(A'\cap B')$ و $P(A\backslash B)$

2) هل A و B مستقلان احتمالياً؟

السؤال الثالث:

لدينا صندوقين، الصندوق u_1 يحتوي على كرة سوداء وكرتين بيضاء، ويحتوي الصندوق u_2 على كرتين سوداء وكرتين بيضاء وكرة حمراء.

نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة. نسمي B حدث سحب كرة سوداء والمطلوب:

1) أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

2) احسب $P(B)$

3) لقد سحبنا كرة سوداء ما احتمال أن تكون من u_1.

السؤال الرابع:

يحوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاث أضعاف عدد الكرات البيضاء.

1) عند سحب كرة من الصندوق ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء وما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

2) نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة نعرّف x متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة:

a- ما هي قيم المتحول x.

b- اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

c- احسب التوقع الرياضي والتباين.

السؤال الخامس:

نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين، ليكن x المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي x واحسب توقعه الرياضي.

السؤال السادس:

الجدول المجاور هو جدول القانون الاحتمالي لزوج المتحولين (x,y) من المتحولات العشوائية.

أكمل الجدول علماً أن x و y مستقلان احتمالياً.

	0	1	2	P_x
0				**0.4**
1			**0.04**	
2				**0.4**
P_y	**0.3**			

حل ورقة العمل اليدوية في بحث الإحتمالات

السؤال الأول:

	B	B	B	W	W
B		(B,B)	(B,B)	(B,W)	(B,W)
B			(B,B)	(B,W)	(B,W)
B				(B,W)	(B,W)
W					(W,W)
W					

$$n(\Omega)=10$$

x يهتم فقط بعدد الكرات البيضاء.

$$x=\{0,1,2\}$$

$$P(x=0)=\frac{3}{10}\quad,\quad P(x=1)=\frac{6}{10}$$

$$P(x=2)=\frac{1}{10}$$

x	0	1	2	ε
P_x	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$x.P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$E(x)=\frac{8}{10}$
$x^2.P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$E(x^2)=1$

التوقع الرياضي: $E(x)=\Sigma x.P_x=\frac{8}{10}$

التباين: $V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

$$V(x)=1-\left(\frac{8}{10}\right)^2=\frac{36}{100}$$

الانحراف المعياري: $\sigma x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\frac{6}{10}$

السؤال الثاني:

1) $P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=\frac{7}{20}$$

$$P(A\backslash B)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{10}$$

2) $P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

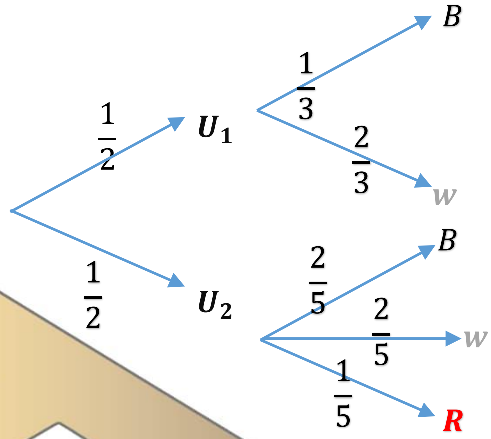
$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

A و B غير مستقلين احتمالياً

السؤال الثالث:

1)



2) $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30}$

3) احتمال شرطي ⇐ B معلوم
u_1 مطلوب

$$P(u_1 \backslash B) = \frac{P(u_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

السؤال الرابع:

1) بفرض عدد الكرات البيضاء a

إذن فعدد الكرات الحمراء $3a$

⇐ عدد الكرات الكلية $4a$.

$$P(R) = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4} \quad , \quad P(W) = \frac{1}{4}$$

$$\Omega = \left\{ \left(\underset{0}{W,W,W}\right), \left(\underset{1}{W,W,R}\right), \left(\underset{2}{W,R,R}\right), \left(\underset{3}{R,R,R}\right) \right\}$$

عدد السحبات $n = 3$

نجاح الأحمر $p = \frac{3}{4}$

$$q = \frac{1}{4}, k = x = \{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(x=1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(x=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(x=3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

x	0	1	2	3
P_x	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$E(x) = n.p = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$V(x) = n.p.q = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

السؤال الخامس:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$x = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_x	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$x.P_x$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$

التوقع الرياضي: $E(x) = \Sigma x.P_x = \frac{252}{36}$

السؤال السادس:

	0	1	2	P_x
0	0.12	0.2	0.08	**0.4**
1	0.06	0.1	**0.04**	0.2
2	0.12	0.2	0.08	**0.4**
P_y	**0.3**	0.5	0.2	1

خطوة أولى:

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1$$
$$0.4 + P(x=1) + 0.4 = 1 \Rightarrow P(x=1) = 0.2$$

خطوة ثانية: بما أن x و y مستقلان احتمالياً.

$$P[(x=1) \cap (y=2)] = P(x=1) \times P(y=2)$$
$$0.04 = 0.2 \times P(y=2) \Rightarrow P(y=2) = \frac{0.04}{0.2} = 0.2$$

خطوة ثالثة:

$$P(y=1) = 1 - P(x=0) - P(x=2)$$
$$P(y=1) = 1 - 0.3 - 0.2 = 0.5$$

خطوة رابعة:

بما أن x و y مستقلان احتمالياً.

$$P[(x=0) \cap (y=0)] = P(x=0) \times P(y=0)$$
$$P[(x=0) \cap (y=0)] = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

وبنفس الأسلوب نوجد جميع احتمالات التقاطعات.

ورقة عمل منزلية في بحث الإحتمالات

السؤال الأول:

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث خضراء وواحدة صفراء.

نسحب عشوائياًوفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن x المتحول الذي يمثل عدد الألوان بين الكرات المسحوبة.

1- ما هي مجموعة قيم x.

2- احسب كلاً من: $P(x=1)$, $P(x=3)$

3- استنتج: $P(x=2)$

4- اسحب التوقع الرياضي.

السؤال الثاني:

نلقي حجر نرد مرتين متتاليتين فيه وجهان مرقمان بالرقم 1 ووجهان مرقمان بالرقم 2 ووجهان مرقمان بالرقم 3.

1- اكتب فضاء العينة.

2- ما احتمال الحصول على وجهين مجموعهما زوجي.

3- ما احتمال الحصول على وجهين مجموعهما من مضاعفات العدد 3.

السؤال الثالث:

تتألف عائلة من ثلاث أطفال ونقبل عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة انثى ونفرض أن الولادات هي أحداث مستقلة احتمالياً والمطلوب:

1- ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة لهم نفس الجنس؟

2- ما احتمال كون الطفل الثالث ذكر؟

3- نعرف x متحول عشوائي يقرن بكل نتيجة عدد الأطفال الذكور لدى العائلة، أوجد x واكتب قانونه الاحتمالي.

السؤال الرابع:

صندوق يحوي ثلاث كرات، 2 حمراء وواحدة زرقاء، نسحب من الصندوق كرة ثم نعيدها ونضيف 3 كرات من لونها والمطلوب:

1- أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

2- ما احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية.

3- اذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى زرقاء

حل ورقة العمل المنزلية في بحث الإحتمالات

السؤال الأول:

نتائج سحب ثلاث كرات ممكن أن تكون:

$$(B,B,B),(G,G,G)$$
$$(B,B,G),(B,B,Y),(G,G,B),(G,G,Y)$$
$$(B,G,Y)$$

1- $x=\{1,2,3\}$

2- $P(x=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{56}$

$$P(x=3)=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{12}{56}$$

3- $P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)=1$

$$P(x=2)=1-P(x=1)-P(x=3)$$
$$P(x=2)=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$$

x	1	2	3	ε
P_x	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$	1
$x.P_x$	$\frac{5}{56}$	$\frac{78}{56}$	$\frac{36}{56}$	$E(x)=\frac{119}{56}$

التوقع الرياضي: $E(x)=\Sigma x.P_x=\frac{119}{56}$

السؤال الثاني:

	1	1	2	2	3	3
1	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)	(3,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)	(3,3)

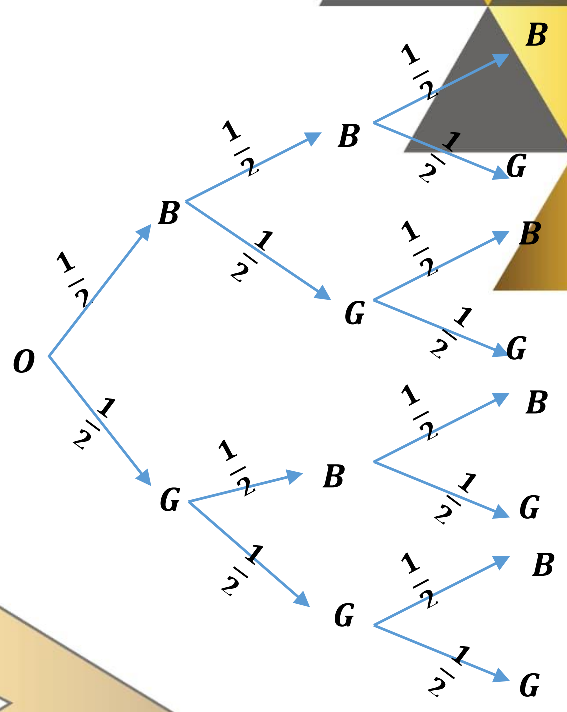
A: الحصول على وجهين مجموعهما زوجي:

$$P(A)=\frac{20}{36}$$

B: الحصول على وجهين مجموعهما من مضاعفات العدد 3:

$$P(B)=\frac{12}{36}$$

السؤال الثالث:



A: الأطفال الثلاث ن نفس الجنس:

$$P(A)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

C: الطفل الثالث ذكر:

$$P(C)=\frac{1}{2}$$

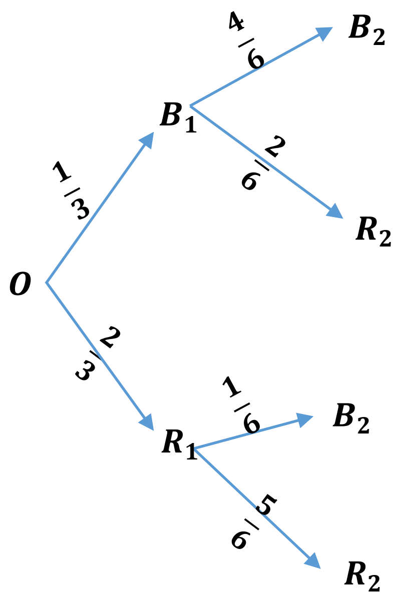
$$x=\{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0)=\frac{1}{8}\ ,P(x=1)=\frac{3}{8}$$

$$P(x=2)=\frac{3}{8}\ ,P(x=3)=\frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

السؤال الرابع:



$$P(R_2)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{10}{18}+\frac{2}{18}=\frac{12}{18}$$

$$P(B_1\backslash R_2)=\frac{P(R_2\cap B_1)}{P(R_2)}=\frac{\frac{2}{18}}{\frac{12}{18}}=\frac{1}{6}$$

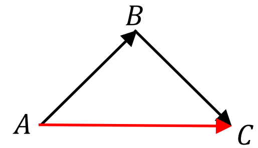
الأشعة في الفراغ

جمع الأشعة

طريقة شال

نستخدمها عندما تكون الأشعة متعاقبة

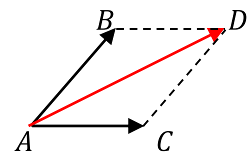
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



طريقة متوازي الأضلاع

نستخدمها عندما يكون للشعاعين البداية ذاتها ويكون ناتج الجمع هو شعاع قطر متوازي الأضلاع المنطلق من نفس البداية.

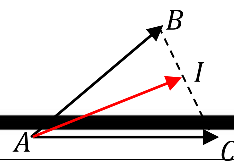
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



طريقة المتوسّط

عندما يكون لدينا شعاعين لهما البداية ذاتها في مثلث يكون جمعهما هو شعاع المتوسط المنطلق من البداية ذاتها مضروب بـ2

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$



قوانين

① مركبات شعاع:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

② I منتصف $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

③ G مركز ثقل المثلث ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

④ حساب طول قطعة $[AB]$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

⑤ نظيم الشعاع $\vec{u}(x, y, z)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

⑥ لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$، M نظيرة A بالنسبة للمبدأ:

$$M(-x_A, -y_A, -z_A)$$

⑦ ايجاد احداثيات مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$$

$$M\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$$

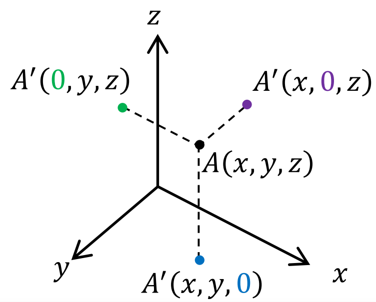
⑧ نقطة تنتمي إلى محور إحداثيات:

1- $M \in (ox) \Rightarrow M(x, 0, 0)$

2- $M \in (oy) \Rightarrow M(0, y, 0)$

3- $M \in (oz) \Rightarrow M(0, 0, z)$

⑨ مسقط نقطة على المستويات الرئيسية:



الإرتباط الخطّي

شعاعين

يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي، أي:

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّياً إذا تناسبت مركبات الشعاعين

$$\vec{u}(x, y, z)$$

$$\vec{v}(x', y', z')$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

تفيد في:

A و B و C ثلاث نقاط

إذا كان: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مرتبطين خطّياً

⇐ A و B و C تقع على إستقامة واحدة

⇐ النقاط A و B و C لا تشكّل مستوي

⇐ النقطة A تقع على المستقيم (BC)

إذا كان: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين غير مرتبطين خطّياً

⇐ A و B و C لا تقع على إستقامة واحدة

⇐ النقاط A و B و C تشكّل مستوي

ثلاث أشعة

الشكل الأول:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

حيث $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّياً

تفيد في:

الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ تقع في مستوٍ واحد

النقاط A و B و C و M تقع في مستوٍ واحد

الشكل الثاني:

$$\vec{\omega} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطّياً

تفيد في:

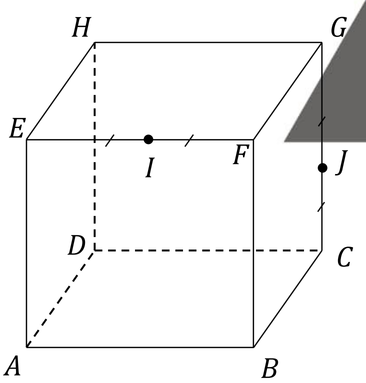
المستقيم الحامل للشعاع $\vec{\omega}$ يوازي المستوي الذي يحوي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

حالة خاصّة

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين مرتبطين خطّياً

⇐ يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{\omega}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطّياً أياً كان $\vec{\omega}$ من الفراغ

مثال①: $ABCDEFGH$ مكعب، والمطلوب:



1) عبّر عن المجموع الشعاعي بدلالة شعاع واحد

$$\vec{l} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} - 2\,\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{DH}$$

2) عين موقع M التي تحقق العلاقة:

$$\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\,\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{BM}$$

الحل:

1) $\vec{l} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} - 2\,\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{DH}$

$$\vec{l} = 2\,\overrightarrow{AI} + 2\,\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{DH} = 2\,\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{DH}$$
$$\vec{l} = 2\,\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{CG} = 2\,\overrightarrow{AJ} - 2\,\overrightarrow{CJ}$$
$$\vec{l} = 2\,\overrightarrow{AJ} + 2\,\overrightarrow{JC} = 2\,\overrightarrow{AC}$$

2) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\,\overrightarrow{HE}$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\left(2\,\overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{ADG} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}\right)$$
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{BJ}\right) = \overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BJ}$$

M تنطبق على J

مثال②: نتأمل النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$ والمطلوب:

1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) عيّن قيمة الوسيط m لتنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC).

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستوي.

2) $M \in (ABC)$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$m - 3 = -2\alpha \ldots ①$$
$$-1 = -\beta \ldots ②$$
$$2 = -\alpha - 3\beta \ldots ③$$

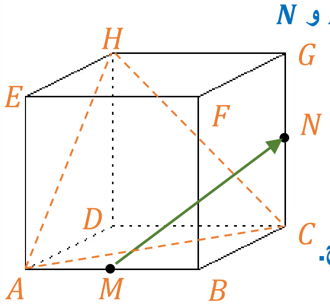
من ②: $\beta = 1$

نعوض في ③: $2 = -\alpha - 3 \Rightarrow \alpha = -5$

نعوض في ①: $m - 3 = -2(-5) \Rightarrow m = 13$

مثال③: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (1) نتخذ معلم متجانس: $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ والمطلوب:

1) أوجد إحداثيات A و C و H و M و N و حيث: M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[CG]$



2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AH}$ غير مرتبطين خطياً.

3) ادرس الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{MN}$ وماذا تستنتج.

الحل:

1) $H(0,1,1)$ ، $A(0,0,0)$ ، $C(1,1,0)$

$N\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ ، $M\left(\frac{1}{2},0,0\right)$

2) $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ ، $\overrightarrow{AH}(0,1,1)$

$$\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً فالشعاعان يشكلان مستوي (AHC)

3) $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AH}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} = \alpha \ldots ①$$
$$1 = \alpha + \beta \ldots ②$$
$$\frac{1}{2} = \beta \ldots ③$$

نجد α و β من ① و ③:

نتحقق في ②: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 1$ محققة.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$

إذن الأشعة $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AH}$ مرتبطة خطياً.

ومنه نستنتج أن المستقيم الحامل لـ$\overrightarrow{MN}$ يوازي المستوي (ACH)

مركز الأبعاد المتناسبة

قاعدة الإنشاء

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) عندئذٍ:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

حيث $\alpha + \beta \neq 0$

تعيين الأثقال

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) عندئذٍ:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

خاصية الإختزال

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) عندئذٍ:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

تفيد في:

تعيين مجموعات النقاط

تفيد في:

1. تعيين موقع نقطة
2. وقوع نقاط على إستقامة واحدة
3. إثبات أن نقطة تقع على قطعة مستقيمة

حالات خاصة

- إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC ⇐ تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1),(B,1),(C,1)$
- إذا كانت G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ ⇐ تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1),(B,1)$ $(C,1),(D,1)$
- إذا كانت I منتصف $[AB]$ ⇐ تكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1),(B,1)$

تعريف الكرة: مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة ولتكن A بعداً ثابتاً وليكن R

تذكّر: $MA = R$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثّل كرة مركزها A و نصف قطرها R

تعريف المستوي المحوري للقطعة المستقيم $[AB]$: هو المستوي العمودي على القطعة المستقيمة $[AB]$ في منتصفها، أي نقطة من نقاط المستوي المحوري تبعد عن طرفي القطعة المستقيمة بعداً متساوياً

تذكّر: $MA = MB$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثّل المستوي المحور للقطعة المستقيمة $[AB]$

الجداء السلّمي

$\vec{u}(x,y,z)$

$\vec{v}(x',y',z')$

1. $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$
2. $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$
3. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$
4. لا يتغير الجداء السلمي لشعاعين إذا استبدلنا أحدهما بمسقطه القائم على حامل الآخر.

1 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً وبنفس الجهة

$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

2 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً وبعكس الجهة:

$\theta = \pi \Rightarrow \cos\pi = -1$

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

3 $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان:

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

مركز الأبعاد المتناسبة:

مثال①: لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ والمطلوب:

أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

الحل:

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{GC}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{GC}$ مرتبطان خطياً ⇐ المستقيمان (AB) و (CG) متوازيان.

مثال②: لتكن M تحقق: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

عبر عن M بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).

الحل:

نضرب بـ3:

$$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$$

$$-3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{AM}+4\overrightarrow{MC}$$

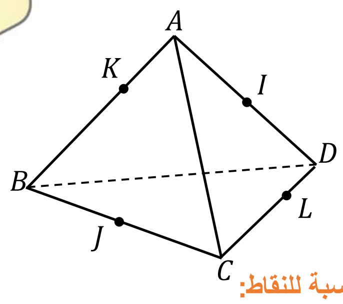
$$-3\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MC}$$

$$-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=0$$

⇐ M مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,-2)$ و $(B,1)$ و $(C,4)$

$\gamma=4\ ,\beta=1\ ,\alpha=-2$

مثال③: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ فيه:



k تحقق: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

L تحقق: $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

I منتصف: $[AD]$

J منتصف: $[BC]$

نعرّف: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط G و I و J واقعة على استقامة واحدة.

2- أثبت أن النقاط G و K وL واقعة على استقامة واحدة.

3- استنتج وقوع I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل:

1) I منتصف $[AD]$ ⇐ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(A,2)$

J منتصف $[BC]$ ⇐ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$ و $(I,4)$ ⇐ G و I و J واقعة على استقامة واحدة.

2- $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ⇐ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(A,2)$

$\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ⇐ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(C,1)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(L,3)$ ⇐ G و K و L واقعة على استقامة واحدة.

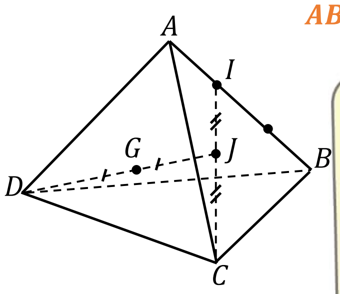
3- من الطلب الأول: $G\in(IJ)$

ومن الطلب الثاني: $G\in(LK)$

⇐ المستقيمان (IJ) و (LK) متقاطعان في النقطة G فهما يعينان مستوٍ

⇐ النقاط L و K و J و I واقعة في مستوٍ واحد.

مثال④: في رباعي الوجوه $ABCD$



عين α و β و γ و δ لتكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ).

الحل:

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ⇐ $(I,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$و$(B,1)$

J منتصف $[CI]$ ⇐ $(J,6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,3)$و$(I,3)$

حسب عكس التجميعية:

$(J,6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط: $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

G منتصف $[DJ]$ ⇐ $(G,12)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(D,6)$ و $(J,6)$

حسب عكس التجميعية:

$(G,12)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$ و $(D,6)$

$\delta=6\ ,\gamma=3\ ,\beta=1\ ,\alpha=2$

مثال⑤: لتكن M مجموعة نقاط، ولدينا G مركز ثقل المثلث BCD.

جد مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث BCD ⇐ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

حسب خاصية الإختزال:

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)\right\|$$

$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right\|$$

$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\| \Rightarrow MG = GA$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R = GA$

الجداء السلّمي:

مثال①: نتأمل الهرم S_ABCD

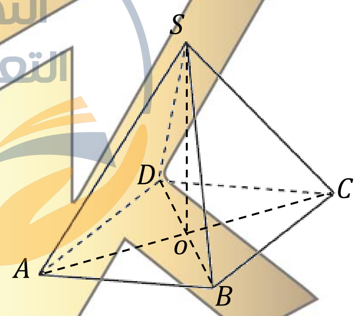
قاعدته مربع طول ضلعه 4

ورأسه S وطول كل حرف

من حروفه الجانبية يساوي 4

النقطة O هي المرتسم القائم

للنقطة S على القاعدة.



والمطلوب:

1) احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

2) احسب طول CA ثم $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$

3) عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A,2)$و $(B,3)$و $(S,1)$

الحل:

1) المثلث SAB متساوي الأضلاع ⇐ $\widehat{ASB} = \frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \left\|\overrightarrow{SA}\right\|.\left\|\overrightarrow{SB}\right\|.\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 4\times 4\times\frac{1}{2} = 8$$

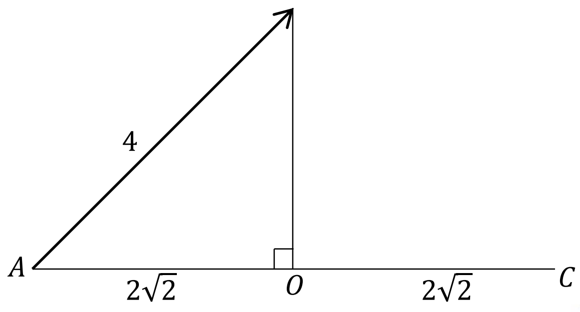
2) حسب فيثاغورث:

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

$$CA^2 = 16+16 = 32$$

$$CA = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\left\|\overrightarrow{AS}\right\|\cos\left(\widehat{CAS}\right)$$



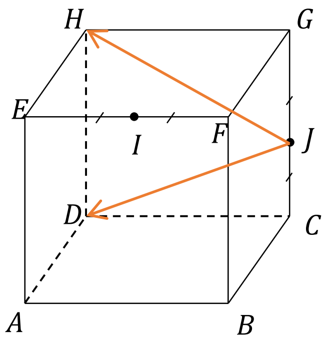
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS} = 4\sqrt{2}\times 4\times\frac{2\sqrt{2}}{4} = 16$$

3) بفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(S,1)$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(B,3)$ ⇐ G منتصف $[BI]$

مثال②: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a



1- احسب $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$

2- أثبت أن $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \frac{3}{4}a^2$

الحل:

-1 $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = 0$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = 0$

لأن $\overrightarrow{EI}$ يعامد الوجه $BCGF$ فهو يعامد أي شعاع فيه

-2 $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \left(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH}\right)\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \underbrace{\overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD}}_{\text{متعامدان}} + \underbrace{\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC}}_{\text{متعامدان}} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD} = \frac{-a}{2}\times\frac{a}{2} + a\times a$$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = -\frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

معادلة الكرة S

نحتاج إلى:
- مركز: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
- نصف قطر: R

شكلها: $S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

حالات كتابة معادلة كرة

① علم المركز ونصف القطر
فقط نعوّض في المعادلة

② علم مركز A وتمر من نقطة B
- المركز: A
- نصف القطر: $R = AB$

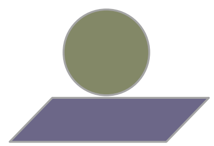
③ علم قطرها $[AB]$
- المركز: I منتصف $[AB]$
- نصف القطر: $\frac{AB}{2}$

④ علم مركزها A وتمس المستوي P
- المركز: A
- نصف القطر: $dist(A, P)$

الوضع النسبي بين كرة مستوي

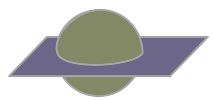
① كرة لا تشترك مع المستوي بأية نقطة:

$R < dist(A, P)$



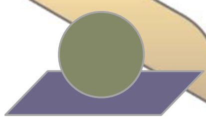
② كرة يقطعها مستوي:

$R > dist(A, P)$



③ كرة تمس مستوي:

$R = dist(A, P)$



مثال①: اكتب معادلة الكرة التي مركزها $A(3, 0, 1)$ نصف قطرها 5

الحل:

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$$

مثال②: اكتب معادلة الكرة التي مركزها $A(1, 1, -2)$ وتمر بالنقطة $B(3, 1, 0)$.

الحل:

$$R = AB = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 8$$

معادلة المستوي

نحتاج:
① نقطة $A(x_0 y_0, z_0)$
② ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

قبل النشر:
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

بعد النشر:
$ax+by+cz+d=0$

حالة ①:

علم الناظم والنقطة:

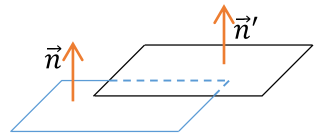
a) اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة ...... ويقبل الشعاع ..... ناظماً له

b) اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة ...... ويوازي المستوي

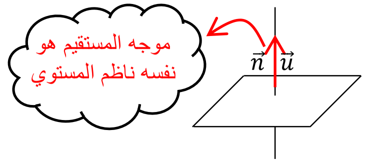
$P: ax+by+cz+d=0$

ملاحظة: مستوي يوازي مستوي آخر:

$\vec{n}=\vec{n}'(a,b,c)$

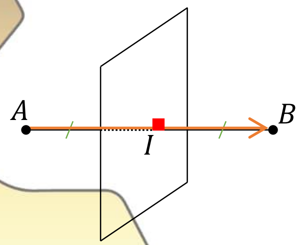


c) مستوي مار بنقطة ...... ويعامد المستقيم ......



حالة ②:

المستوي المحوري:



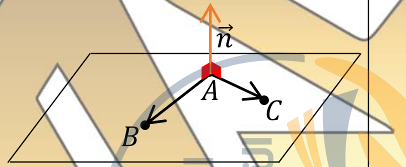
الناظم نفسه شعاع القطعة: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$

النقطة هي نقطة المنتصف.

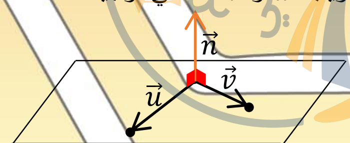
حالة ③:

الناظم مجهول:

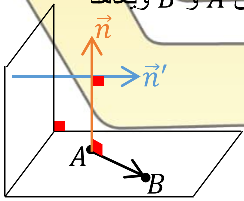
a) مستوي مار بثلاث نقاط:



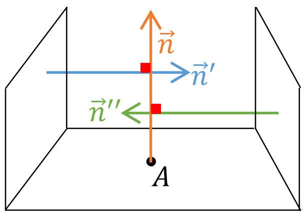
b) مستوي مار بنقطة .... ويقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه له.



c) مار بنقطتين A و B ويعامد مستوي:



d) مستوي مار بنقطة ويعامد مستويين:



كيف نوجد الناظم؟؟؟
نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
نوجده من خلال معرفة شعاعين غير مرتبطان خطياً يعامدهما الناظم.

$\vec{n}\perp\boxed{1}\Rightarrow\vec{n}.\boxed{1}=0$

$\boxed{\text{معادلة}}$ ... ①

$\vec{n}\perp\boxed{2}\Rightarrow\vec{n}.\boxed{2}=0$

$\boxed{\text{معادلة}}$ ... ②

ينتج معادلتين بثلاث مجاهيل، نفرض أحد المجاهيل ونوجد المجهولين الآخرين.
فيصبح الناظم معلوم ☺

الوضع النسبي لمستويين P و Q:

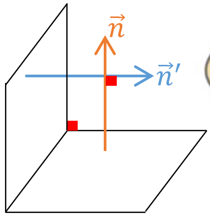
بدراسة الإرتباط الخطّي لـ $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطّياً:

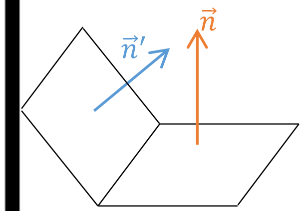
P و Q متقاطعان:

بدراسة الجداء السلّمي بين $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$:

- $\vec{n}_P.\vec{n}_Q=0$: P و Q متعامدان



- $\vec{n}_P.\vec{n}_Q\neq0$: P و Q غير متعامدان



P و Q يشتركان بفصل مشترك

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ مرتبطان خطّياً:

- منطبقان:
نسب المركبات:
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$

- متوازيان:
نسب المركبات:
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$

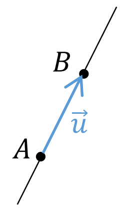
معادلة المستقيم

شكلها:

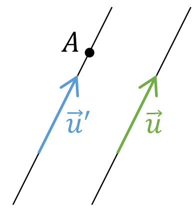
$$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \,;\, t \in \boxed{\;} \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{مستقيم } R \\ \text{نصف مستقيم } [0,+\infty[\\ \text{قطعة مستقيمة } [0,1] \end{cases}$$

نحتاج:
① نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$
② موجّه $\vec{u}(a,b,c)$

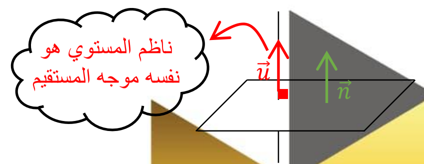
حالة ①:
علم الموجّه والنقطة:
a) اكتب معادلة المستقيم المار من النقطة .... ويقبل الشعاع .... موجّهاً له.
b) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين ...... و ....
(نختار احد النقاط
ويكون الموجّه $\overrightarrow{AB}$)



c) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة ....
ويوازي المستقيم ....
الموجهان مرتبطان خطّياً.



d) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة ......
ويعامد المستوي ....

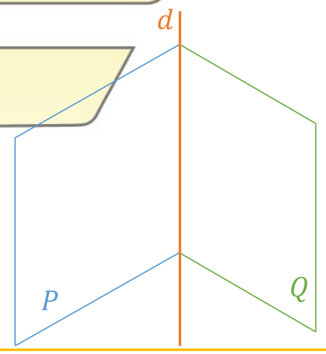


حالة ②:
مستقيم الفصل المشترك لمستويين:

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

$$Q: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

1) نفرض أحد المجاهيل t
2) نعوّض هذا المجهول في المعادلتين.
3) بالحل المشترك للمعادلتين نوجد المجهولين الآخرين بدلالة t.
4) فيصبح لدينا x و y و z بدلالة t.
5) نكتب معادلة المستقيم.



الوضع النسبي لمستقيمين d و d':

بدراسة الإرتباط الخطّي للموجهين $\vec{u}$ و $\vec{u}'$:

$\vec{u}$ و $\vec{u}'$ مرتبطين خطّياً:

- d و d' متوازيان: نأخذ نقطة من d بفرض قيمة لـt، نعوض النقطة في d'، إذا تحققت معادلات d' يكون:
- d و d' منطبقان

$\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطّياً:

$$d:\begin{cases} x_1 = at + x_0 \\ y_1 = bt + y_0 \\ z_1 = ct + z_0 \end{cases} \quad , \quad d':\begin{cases} x_2 = as + x_0 \\ y_2 = bs + y_0 \\ z_2 = cs + z_0 \end{cases}$$

بالحل المشترك لـd و d':

$$x_1 = x_2$$
$$y_1 = y_2$$
$$z_1 = z_2$$

- إذا نتج قيمة لـt أو s ← d و d' متقاطعان بنقطة نوجدها بتعويض t في d أو s في d'.
- إذا نتج معادلة مستحيلة. ← d و d' متخالفان

الوضع النسبي لثلاث مستويات:

$P: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
$R: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
$Q: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$

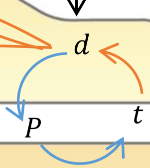
نختار مستويين وندرس الوضع النسبي بينهما ونميّز:

متوازيان

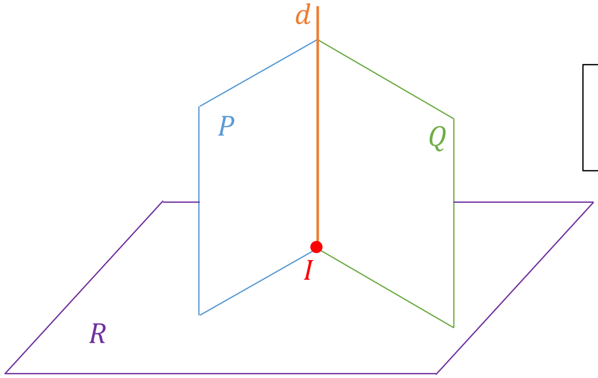
المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة

متقاطعان بفصل مشترك

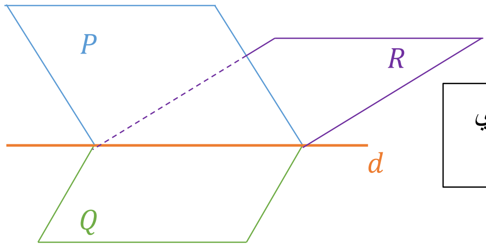
ندرس الوضع النسبي بين مستقيم الفصل المشترك والمستوي الثالث



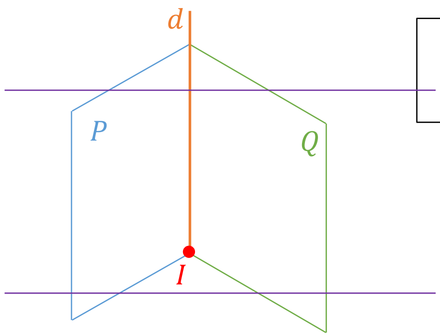
① ($t =$ عدد) ينتج نقطة I هي نقطة تقاطع المستويات الثلاث.



② (عدد = عدد) معادلة محققة دوماً، أي المستويات الثلاثة تشترك بفصل مشترك.



③ (عدد = 0) معادلة مستحيلة الحل، أي المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة.



الوضع النسبي بين مستقيم d ومستوي P

بدراسة الجداء السلّمي للناظم $\vec{n}$ و الموجّه

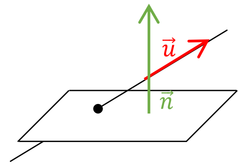
$\vec{u}.\vec{n} = 0$

المستقيم يوازي المستوي

$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$

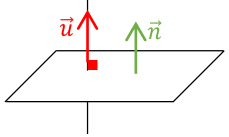
المستقيم يقطع المستوي

الناظم والموجه غير مرتبطين خطّياً.



المستقيم والمستوي غير متعامدان

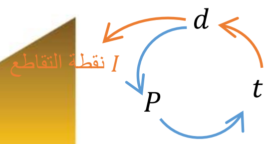
الناظم والموجه مرتبطين خطّياً.



المستقيم والمستوي متعامدان.

إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي:

1) نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي.
2) تنتج معادلة بمجهول واحد t، نوجد قيمة t.
3) نعوّض قيمة t في التمثيلات الوسيطية فتنتج نقطة التقاطع.



السؤال الأول: اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(0,1,-2)$ و يقبل $\vec{n}(1,-4,2)$ ناظماً له ثم احسب بعد النقطة $B(-1,2,4)$ عن المستوي P

الحل:

ناظم $\vec{n}\,(1,-4,2)$ نقطة $A\,(0,1,-2)$

$$P:(x-0)-4\,(y-1)+2(z+2)=0$$
$$P: x-4y+4+2z+4=0$$
$$P: x-4y+2z+8=0$$
$$dist\,(B,P)=\frac{|-1-4(2)+2(4)+8|}{\sqrt{1+16+4}}=\frac{7}{\sqrt{21}}$$
$$\Rightarrow dist(B,P)=\frac{7\sqrt{21}}{21}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

السؤال الثاني: نتأمل معلماً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فيه النقاط

$$A(1,0,1)\quad B(-2,3,1)\quad C(2,1,-1)$$

1- أثبت أن النقاط A , B , C تعين مستوي، اكتب معادلته.

2- أثبت أن الكرة S

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{1}{3}$$

تمس المستوي P

الحل:

$$\overrightarrow{AB}\,(-3,3,0)\quad \overrightarrow{AC}\,(1,1,2)$$
$$\frac{-3}{1}\neq\frac{3}{1}\neq\frac{0}{-2}$$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ A,B,C تعين مستو

$$\vec{n}\,(a,b,c)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -3a+3b=0\;...(1)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow a+b-2c=0\;...(2)$$

نفرض $b=1$ نعوض في (1):

$$\Rightarrow -3a+3=0\Rightarrow a=1$$

نعوض في (2): $1+1-2c=0\Rightarrow c=1$

نختار $A(1,0,1)$ ، $\vec{n}(1,1,1)$

$$(ABC):1(x-1)+1(y-0)+1(z-1)=0$$
$$(ABC):x+y+z-2=0$$

2) $S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{1}{3}$

مركزها $\Omega\,(1,-1,3,)$ نصف قطرها $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$dist\,(\Omega,(ABC))=\frac{|1-1+3-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$dist\,(\Omega,(ABC))=\frac{1}{\sqrt{3}}=R\Rightarrow$ الكرة S تمس (ABC)

السؤال الثالث: لدينا المستويين P و Q المعرفين وفق:

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z=0$$

والنقطة $A(1,1,2)$ والمطلوب:

1) أثبت أن Q و P متقاطعان بفصل مشترك d

2) اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد المستويين Q و P

الحل:

$$\vec{n}_P\,(1,-1,2)\quad \vec{n}_Q\,(2,1,1)$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$$

$\vec{n}_P$, $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ P,Q متقاطعان بمستقيم d

2- معادلة المستوي R

نقطة $A(1,1,2)$ وناظم $\vec{n}_R(a,b,c)$

$$\vec{n}_R\perp\vec{n}_P\Rightarrow\vec{n}_R.\vec{n}_P=0\Rightarrow a-b+2c=0\;...(1)$$
$$\vec{n}_R\perp\vec{n}_Q\Rightarrow\vec{n}_R.\vec{n}_Q=0\Rightarrow 2a+b+c=0\;...(2)$$

نفرض $c=1$

$$a-b+2=0\;...(1)$$
$$2a+b+1=0\;...(2)$$

نجمع (1) مع (2): $3a=-3\Rightarrow a=-1$

نعوض في (1): $-1-b+2=0\Rightarrow b=1$

$$\Rightarrow\vec{n}_R(-1,1,1)$$
$$R:-1(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$$
$$\Rightarrow -x+y+z-2=0$$

السؤال الرابع: لتكن لدينا النقطتان: $A(1,0,-1)$ و $B(3,1,0)$

1) اكتب معادلة المستوي P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

2) ليكن لدينا المستوي Q معادلته:

$$Q: 4x+2y+2z-5=0$$

ادرس الوضع النسبي للمستويين P و Q

الحل:

1) النقطة I منتصف $[AB]$: $I\left(2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

الناظم: $\vec{n}_P=\overrightarrow{AB}(2,1,1)$

$$P:2(x-2)+1\left(y-\frac{1}{2}\right)+1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Rightarrow P:2x+y+z-4=0$$

-2 $\vec{n}_P(2,1,1)$ ، $\vec{n}_Q\,(4,2,2)$

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ P,Q متوازيان

السؤال الخامس: لتكن النقاط: $A(0,1,-1)$ $B(2,1,-2)$

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

2- أثبت أن المستقيم (AB) يوازي المستقيم d

$$d:\begin{cases} x=t+2\\ y=4\\ z=-\dfrac{t}{2}+4\end{cases};t\in R$$

الحل:

$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ $\quad A(0,1,-1)$

-1

$$(AB):\begin{cases} x=2t\\ y=1\\ z=-t-1\end{cases};t\in R$$

-2

$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ $\quad \vec{u}\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$

$2\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

⇐ $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً

⇐ (AB) و d متوازيان

السؤال السادس: ليكن المستوي P المعرف بالعلاقة:

$P: x+y+z=0$

و النقطتين $B(0,1,1)$ $A(1,0,0)$ والمطلوب:

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم AB

2- أثبت أن المستقيم (AB) لا يعامد المستوي P

3- اكتب معادلة المستوي Q المار من A,B و يعامد المستوي P

الحل:

1- المستقيم AB

نقطة $A(1,0,0)$ و موجه $\overrightarrow{AB}=\vec{u}(-1,1,1)$

$$(AB):\begin{cases} x=-t+1\\ y=t\\ z=t\end{cases};t\in R$$

-2 $\vec{n}(1,1,1)$ $\quad \vec{u}(-1,1,1)$

$$\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{1}{1}$$

$\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطياً ⇐ d,P غير متعامدان

$\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_Q\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}_Q.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -a+b+c=0\ ...①$

$\vec{n}_Q\perp\vec{n}_P\ \Rightarrow\ \vec{n}_Q.\vec{n}_P=0\Rightarrow a+b+c=0\ ...②$

بفرض $c=1$

$\Rightarrow\ -a+b+1=0\ ...①$

$a+b+1=0\ ...②$

بجمع ① مع ②: $2b+2=0\Rightarrow b=-1$

نعوض في ②: $a-1+1=0\Rightarrow a=0$

نختار $A(1,0,0)$ $\quad \vec{n}(0,-1,1)$

$\Rightarrow 0(x-1)-1(y-0)+1(z-0)=0$

$Q:\ -y+z=0$

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(-1,2,-2)$ و $B(-1,-1,1)$ و $N(3,3,3)$ والمطلوب:

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A و يقبل $\vec{u}(2,-1,1)$ شعاعاً موجهاً له، ثم اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من B و يقبل $\vec{v}(1,1,-1)$ شعاعاً موجهاً له

2- أثبت أن المستقيمان Δ وd متقاطعان بنقطة C يطلب تعيين إحداثياتها

3- اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d و Δ

4- أثبت أن المثلث ABC قائم في C واحسب مساحته

5- احسب حجم الرباعي $NABC$

6- أثبت أن المثلث CBN قائم في C استنتج بعد النقطة A عن المستوي (CBN)

الحل:

المستقيم Δ

النقطة $A(-1,2,-2)$ و الشعاع الموجه $\vec{u}(2,-1,1)$

$$\Delta:\begin{cases} x=2t-1\\ y=-t+2\\ z=t-2\end{cases}:t\in R$$

المستقيم d

النقطة $B(-1,-1,1)$ و الشعاع الموجه $\vec{v}(1,1,-1)$

$$d:\begin{cases} x=s-1\\ y=s-1\\ z=-s+1\end{cases}:s\in R$$

-2 $\vec{v}(1,1,-1)$ $\quad \vec{u}(2,-1,1)$

$$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

$\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ⇐ Δ,d غير متوازيان

$2t-1=s-1\ ...①$

$-t+2=s-1\ ...②$

$t-2=-s+1\ ...③$

نضرب ② بـ(-1) و نجمع مع ①

$3t-3=0\Rightarrow 3t=3\Rightarrow t=1$

نعوض في ②: $-1+2=s-1\Rightarrow 1=s-1\Rightarrow s=2$

نتحقق في ③: $1-2=-2+1\Rightarrow\ -1=-1$ محققة

نعوض $t=1$ في Δ

$$\left.\begin{matrix} x=2-1\\ y=-1+2\\ z=1-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow C(1,1,-1)$$

3- المستوى P

نقطة $C(1,1,-1)$ و ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}\perp\vec{u}\Rightarrow \vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow 2a-b+c=0\ ...①$$

$$\vec{n}\perp\vec{v}\Rightarrow \vec{n}.\vec{v}=0\Rightarrow\ a+b-c=0\ ...②$$

بفرض $b=1$

$$2a-1+c=0\ ...①$$

$$a+1-c=0\ ...②$$

نجمع ① مع ②: $3a=0\Rightarrow a=0$

نعوض في ①: $c=1$

$$\vec{n}(0,1,1)\quad C(1,1,-1)$$

$$P:0(x-1)+1\,(y-1)+1(z+1)=0$$

$$P:y+z=0$$

$$\overrightarrow{CA}\,(-2\,,1\,,-1)\quad \overrightarrow{CB}\,(\,-2,-2{,}2)$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{CA}\,.\overrightarrow{CB}=4-2-2=0$$

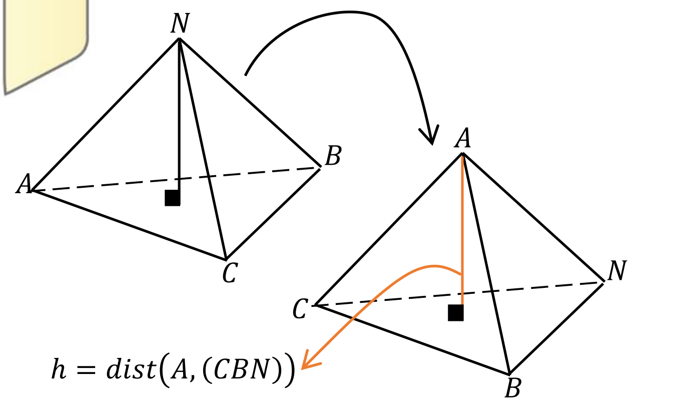
⇐ ABC قائم في C

$$S=\frac{CA\,.CB}{2}=\frac{\sqrt{4+1+1}\times\sqrt{4+4+4}}{2}$$

$$S=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{12}}{2}=\frac{\sqrt{72}}{2}=\frac{\sqrt{2\times 36}}{2}=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

5) $dist(N,P)=h=\frac{|3+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{6}{\sqrt{2}}\Rightarrow V=6$$



$h=dist\big(A,(CBN)\big)$

6) $V=\frac{1}{3}S_{CBN}h$

$$\overrightarrow{CB}(-2,-2{,}2)\ \ ,\ \ \overrightarrow{CN}(2{,}2{,}4)$$

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB}=-4-4+8=0$$

$$S_{CBN}=\frac{CB\times CN}{2}=\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{2}=\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{12}\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{CBN}=6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}S_{CBN}\times dist\big(A,(CBN)\big)$$

$$\Rightarrow 6=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{2}\times dist\big(A,(CBN)\big)$$

$$\Rightarrow dist\big(A,(CBN)\big)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

المسألة الثانية: في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(2,1,0),B(0,1,2),C(3,-3,3)$

1- أثبت أن النقاط C,B,A تعين مستوي يطلب إيجاد معادلته

2- اكتب معادلة المستقيم d المار من $D(-2,1,1)$ و يعامد المستوي (ABC)

3- جد D' مسقط D على المستوي (ABC)

4- استنتج بعد النقطة D في المستوي (ABC)

5- اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$

الحل:

1- $\overrightarrow{AC}\,(\,1,-4{,}3)\qquad \overrightarrow{AB}(\,-2\,,0\,,2\,)$

$$\frac{-2}{1}\neq\frac{0}{-4}\neq\frac{2}{3}$$

⇐ $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

⇐ C,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستو

$$\vec{n}\,(\,a,b,c)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow\ -2a+2c=0\ ...①$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow a-4b+3c=0\ ...②$$

بفرض $a=1$

نعوض في ① $-2+2c=0\Rightarrow c=1$

نعوض في ② $1-4b+3=0\Rightarrow b=1$

$$\vec{n}(1{,}1{,}1)\qquad A(2{,}1{,}0)$$

$$(ABC):(x-2\,)+(y-1\,)+(z-0)=0$$

$$(ABC)\ x+y+z-3=0$$

2- المستقيم d

$D\,(\,-2{,}1{,}1)$ و الموجه هو $\vec{u}=\vec{n}(1{,}1{,}1)$

$$d:\begin{cases}x=t-2\\ y=t+1\ \ ;t\in R\\ z=t+1\end{cases}$$

-3

$$D' \leftarrow d$$
$$\swarrow \quad \nwarrow$$
$$(ABC) \rightarrow t$$

$$t-2+t+1+t+1-3=0$$
$$3t-3=0 \Rightarrow t=1$$
$$\left.\begin{matrix} x=1-2 \\ y=1+1 \\ z=1+1 \end{matrix}\right\} D'(-1,2,2)$$

-4 $dist\,(D,ABC)=DD'$
$$DD'=\sqrt{(-1+2)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}$$
$$DD'=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

-5 الكرة S

I منتصف $[AB] \Leftarrow I\,(1,1,1)$
$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{4+0+4}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$
$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$$

المسألة الثالثة: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(2,-1,2)$ والمستويان:

$P: 2x-y+z-4=0$

$Q: x+y+2z-5=0$

والمطلوب:

1) أثبت أن P و Q متقاطعان بمستقيم d، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

2) اكتب معادلة المستوى R المار بالنقطة A ويعامد الفصل المشترك للمستويين P و Q

3) جد إحداثيات A' مسقط A على المستقيم d

4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم d

الحل:

1) $\vec{n}_P(2,-1,1)\ ,\ \vec{n}_Q(1,1,2)$
$$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{2}$$
$\Leftarrow$ $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطّياً $\Leftarrow$ P و Q متقاطعان بفصل مشترك

إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم d:
$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \ldots (1) \\ x+y+2z-5=0 \ldots (2) \end{cases}$$
بفرض $z=t$:
$$\begin{cases} 2x-y+t-4=0 \ldots (1) \\ x+y+2t-5=0 \ldots (2) \end{cases}$$
بجمع المعادلتين (1) و (2): $3x+3t-9=0 \Rightarrow x=3-t$

نعوّض في (2): $3-t+y+2t-5=0 \Rightarrow y=2-t$
$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \quad ;t\in R \\ z=t \end{cases}$$

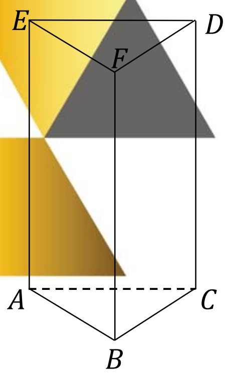
2) النقطة: $A(2,-1,2)$ الناظم: $\vec{n}=\vec{u}(-1,-1,1)$
$$R:-(x-2)-(y+1)+(z-2)=0$$
$$\Rightarrow R:-x-y+z-1=0$$

3)
$$A' \leftarrow d$$
$$\swarrow \quad \nwarrow$$
$$R \rightarrow t$$
$$-3+t-2+t+t-1=0 \Rightarrow t=2$$
$$\left.\begin{matrix} x=3-2 \\ y=2-2 \\ z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'(1,0,2)$$

4) $dist(A,d)=AA'$
$$AA'=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$$

المسألة الرابعة:

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:



$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}\ ,\overrightarrow{AC}=3\vec{j}\ ,\ \ \overrightarrow{AE}=3\vec{k}$

1) جد إحداثيات النقاط A و B و C و D و E.

2) جد إحداثيات L مركز ثقل المثلث (BCE) ثم أثبت أن (AL) يعامد المستوي (BCE) واكتب معادلته.

3) جد تمثيل وسيطي للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCE).

4) جد إحداثيات A' مسقط A على المستوي (BCE).

5) استنتج بعد A عن المستوي (BCE).

6) استنتج أن معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس المستوي (BCE) هي من الشكل: $x^2+y^2+z^2=3$

7) احسب حجم رباعي الوجوه $(E-ABC)$.

الحل:

(1 $A(0,0,0)\,,B(3,0,0)\,,C(0,3,0)$
$D(0,3,3)\,,E(0,0,3)$

(2 L مركز ثقل (BCE):
$$L(1,1,1)$$
$$\overrightarrow{BC}(-3,3,0)\,,\overrightarrow{BE}(-3,0,3)$$
$$\frac{-3}{-3}\neq\frac{0}{3}$$ غير مرتبطين خطياً
$$\overrightarrow{AL}(1,1,1)$$
$$\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{BE}=-3+0+3=0\Rightarrow \overrightarrow{AL}\perp\overrightarrow{BE}$$
$$\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{BC}=-3+3+0=0\Rightarrow \overrightarrow{AL}\perp\overrightarrow{BC}$$
(AL) عمودي على المستوي (BCE).

معادلة المستوي (BCE)، نختار $B(3,0,0)$:

(AL) يعامد (BCE): $\vec{n}=\overrightarrow{AL}$
$$1(x-3)+1(y-0)+1(z-0)=0$$
$$(BCE): x+y+z-3=0$$

(3 النقطة: $A(0,0,0)$ والموجه: $\vec{u}=\overrightarrow{AL}(1,1,1)$
$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=t\ ;t\in R \\ z=t \end{cases}$$

(4 A' نقطة تقاطع Δ والمستوي (BCE):
$$t+t+t-3=0\Rightarrow t=1$$
نعوض في Δ: $x=1\,,y=1\,,z=1\Rightarrow A'(1,1,1)$

(5 $dist(A,BCE)=[AA']$
$$[AA']=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow dist(A,BCE)=\sqrt{3}$$

6) المركز: $A(0,0,0)$ ونصف القطر: $r=[AA']=\sqrt{3}$

$$S:(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$S:x^2+y^2+z^2=3$$

7) $V=\frac{1}{3}S.h \Rightarrow S_{ABC}=\frac{[AB][AC]}{2}=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$

$$h=[EA]=3 \Rightarrow V=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3=\frac{9}{2}$$

المسألة الخامسة:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا: $A(2,1,2)$ والمستويان:

$$P:x+y-2z-1=0$$

$$Q:x+y+z=0$$

1) أثبت أن P و Q متعامدان.
2) احسب بعد A عن كل من المستويين P و Q.
3) استنتج بعد A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q.
4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك للمستويين P و Q.
5) اكتب معادلة المستوي R المار من $B\,(4,1,2)$ ويعامد d.
6) جد B' نقطة تقاطع P و Q و R.
7) عين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

الحل:

-1 $\vec{n}_P(1,1,-2)\quad,\quad \vec{n}_Q(1,1,1)$

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=1+1-2=0$$

$\Leftarrow$ المستويان متعامدان.

-2

$$dist\,(A,P)=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$dist\,(A,Q)=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

-3 $dist\,(A,d)^2=\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2$

$$dist(A,d)^2=\frac{25}{3}+\frac{4}{6}=\frac{27}{3}=9$$

$$dist(A,d)=\sqrt{9}=3$$

-4 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

بفرض: $x=t$

$$t+y-2z-1=0 \dots ①$$

$$t+y+z=0 \dots ②$$

نطرح ② من ①:

$$-3z-1=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$$

نعوض في ②: $t+y-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow y=-t+\frac{1}{3}$

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=-t+\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad : t\in R$$

-5 $B(4,1,2)\quad,\quad \vec{n}=\vec{u}(1,-1,0)$

$$R:(x-4)-1(y-1)+0(z-2)=0$$

$$R:x-y-3=0$$

-6 نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي $B`$ مسقط B على المستقيم d

$\Leftarrow$ $B`$ نقطة تقاطع R و d

$$\begin{array}{ccc} B` & \Leftarrow & d \\ \swarrow & & \nwarrow \\ R & \Rightarrow & t \end{array}$$

$$t+t-\frac{1}{3}-3=0 \Rightarrow 2t=\frac{10}{3} \Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ y=-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow B`\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

-7 $A(2,1,2)\quad,\quad B(4,1,2)\quad,\quad M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{MA}\big((2-x),(1-y),(2-z)\big)$$

$$\overrightarrow{MB}\big((4-x),(1-y),(2-z)\big)$$

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$$

$$(2-x)(4-x)+(1-y)^2+(2-z)^2=0$$

$$8-2x-4x+x^2+1-2y+y^2+4-2z+z^2=0$$

$$x^2-6x+9-9+8+y^2-2y+1+z^2-2z+4=0$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$$

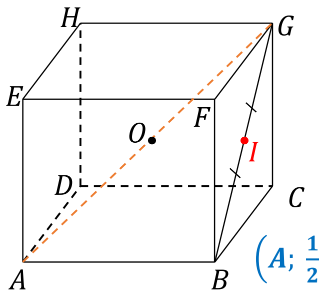
مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $(3,1,2)$ نصف قطرها (1).

المسألة السادسة:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 2، I منتصف $[BG]$

O تحقق العلاقة: $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AG}$

نختار معلماً: $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$



1. جد إحداثيات رؤوس المكعب وجد إحداثيات النقاط O , I.
2. اكتب معادلة المستوي (OBG).
3. اكتب Q معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BG]$
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (OI)
5. أثبت أن (OI) هو الفصل المشترك للمستويين Q , (OBG)
6. احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos(\widehat{GOB})$

الحل:

(1

$A(0,0,0) \quad B(2,0,0) \quad C(2,2,0) \quad D(0,2,0)$

$E(0,0,2) \quad F(2,0,2) \quad G(2,2,2) \quad H(0,2,2)$

$$O(x,y,z)$$

$$2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AG}$$

$$2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2x = 2 & \Rightarrow & x = 1 \\ 2y = 2 & \Rightarrow & y = 1 \\ 2z = 2 & \Rightarrow & z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow O(1,1,1)$$

$$I\left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow I(2,1,1)$$

(2 $\quad \overrightarrow{OB}\,(1,-1,-1) \quad , \quad \overrightarrow{OG}\,(1,1,1)$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$$

$\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ غير مرتبطين خطياً.

$$O(1,1,1) \quad , \quad \vec{n}(a,b,c)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow a - b - c = 0 \ldots (1)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \ldots (2)$$

بفرض $c = 1$

$$a - b - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$a + b + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد: $2a = 0 \Rightarrow a = 0$

نعوض في (2): $0 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$$\vec{n}(0,-1,1) \qquad O(1,1,1)$$

$$(OBG): 0(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0$$

$$(OBG): -y + z = 0$$

3) النقطة I منتصف BG

$$I(2,1,1) \quad , \quad \vec{n} = \overrightarrow{BG}(0,2,2)$$

$$Q: 0(x-2) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$Q: 2y + 2z - 4 = 0$$

4) $\quad O(1,1,1) \quad , \quad \vec{u} = \overrightarrow{OI}(1,0,0)$

$$(OI): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} : t \in R$$

5) نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم (OI) في معادلة المستوي (OBG)

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \text{محققة}$$

OI محتوى في المستوي (OBG) نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم (OI) في معادلة المستوي Q

$$\Rightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \text{محققة}$$

OI محتوى في المستوي Q

المستقيم (OI) هو الفصل المشترك للمستويين Q , (OBG)

6) $\quad \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OG} = 1 - 1 - 1 = -1$

$$\cos(\widehat{GOB}) = \frac{\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\|\,.\,\|\overrightarrow{OG}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

معادلة الأسطوانة:

1- محورها $(o,\vec{i})$:

مركزا قاعدتيها $A(a,0,0)$ و $B(b,0,0)$ ونصف قطرها r

$h=|b-a|$

معادلتها: $y^2+z^2=r^2$

شرطها: $a\le x\le b$

2- محورها $(o,\vec{j})$:

مركزا قاعدتيها $A(0,a,0)$ و $B(0,b,0)$ ونصف قطرها r

معادلتها: $x^2+z^2=r^2$

شرطها: $a\le y\le b$

3- محورها $(o,\vec{k})$:

مركزا قاعدتيها $A(0,0,a)$ و $B(0,0,b)$ ونصف قطرها r

معادلتها: $x^2+y^2=r^2$

شرطها: $a\le z\le b$

ملاحظة: لا تحوي معادلة الاسطوانة على متغير المحور.

مثال: اكتب معادلة اسطوانة محورها $(o,\vec{j})$ ومركزا قاعدتيها $O(0,0,0)$ و $Q(0,8,0)$ ونصف قطرها 2.

الحل:

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_o\le y\le y_Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ 0\le y\le 8 \end{cases}$$

مثال: اكتب معادلة اسطوانة محورها $(o,\vec{i})$ ومركز قاعدتها (o) ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

الحل:

$$y^2+z^2=r^2$$

$$y^2+z^2=6$$

مثال: اكتب معادلة اسطوانة محورها $(o,\vec{k})$ ومركزا قاعدتيها $O(0,0,0)$ و $A(0,0,7)$ ونصف قطرها 3 ثم بين أي النقاط التالية تنتمي للاسطوانة: $D(3,0,3)$ و $Q(\sqrt{6},\sqrt{3},9)$

الحل:

معادلة الاسطوانة:

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_o\le z\le z_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 0\le z\le 7 \end{cases}$$

اختبار $D(3,0,3)$:

$$(3)^2+(0)^2=9$$

$\Rightarrow 9=9\Rightarrow$ محققة

$0\le z_D=3\le 7\Rightarrow$ محققة

D تنتمي إلى الاسطوانة

اختبار $Q(\sqrt{6},\sqrt{3},9)$:

$$(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2=9$$

$\Rightarrow 9=9\Rightarrow$ محققة

$0\le z_Q=9\le 7\Rightarrow$ غير محققة

Q لا تنتمي للاسطوانة

مثال: صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 1\le z\le 4 \end{cases}$$

الحل:

مجموعة النقاط M تمثل اسطوانة محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها $r=5$ ومركزا قاعدتيها $A(0,0,1)$ و $B(0,0,4)$

معادلة المخروط:

1- محوره $(o,\vec{i})$:

رأسه o ومركز قاعدته $A(h,0,0)$ ونصف قطرها r.

معادلته: $y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0$

شرطه: $0\le x\le h$

2- محوره $(o,\vec{j})$:

رأسه o ومركز قاعدته $A(0,h,0)$ ونصف قطرها r.

معادلته: $x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0$

شرطه: $0\le y\le h$

3- محوره $(o,\vec{k})$:

رأسه o ومركز قاعدته $A(0,0,h)$ ونصف قطرها r.

معادلته: $x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0$

شرطه: $0\le z\le h$

مثال: اكتب معادلة المخروط الذي رأسه o ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

الحل:

$$h=4\ ,\quad r=3$$

$$\begin{cases} y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0 \\ 0\le x\le h \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2-\frac{9}{16}x^2=0 \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$$

مثال: اكتب معادلة المخروط الذي رأسه o ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,5)$ نصف قطرها 2 ثم بين إن كانت النقطتان $Q(2,0,5)$ و $T(2,2\sqrt{3},10)$ تنتميان إلى المخروط أم لا؟

الحل:

$$h=5\ ,\quad r=2$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0 \\ 0\le z\le h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0 \\ 0\le z\le 5 \end{cases}$$

ندرس انتماء Q:

$$(2)^2+(0)^2-\frac{4}{25}(5)^2=0$$

$\Rightarrow 4-4=0\Rightarrow$ محققة

$0\le 5\le 5\Rightarrow$ محققة

$Q\in$ المخروط

ندرس انتماء T: $(2)^2+(2\sqrt{3})^2-\frac{4}{25}(10)^2=0$

$\Rightarrow 16-16=0\Rightarrow$ محققة

$0\le 10\le 5\Rightarrow$ غير محققة

$T\notin$ المخروط

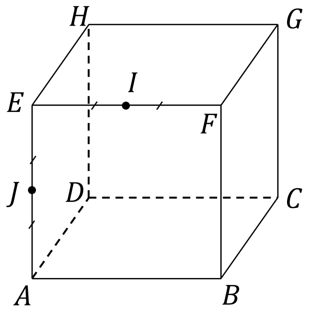
ورقة عمل يدوية هندسة 1

السؤال الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب،

I منتصف EF

وJ منتصف AE



-1 عبّر عن المجموع الشعاعي بدلالة شعاع واحد:

$a)\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{EF}$

$b)\ 2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$

-2 عين موقع M التي تحقق:

$a)\ 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{IF}$

$b)\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IJ}$

السؤال الثاني: عيّن النقطة H الواقعة على محور التراتيب، تبعد عن A و B بعداً متساوياً حيث: $A(2,1,1)\quad ,\quad B(-1,0,2)$

السؤال الثالث: عيّن a و b لتقع النقاط:

$B(3,2,1)\quad ,\quad A(2,3,0)\quad ,\quad M(a,b,2)$

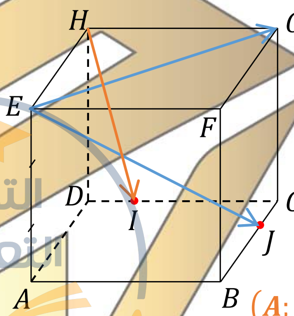
على استقامة واحدة.

السؤال الرابع:

$ABCDEFGH$ مكعب،

J تحقق $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

I تحقق $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$



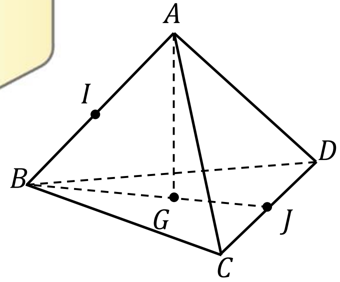
نتخذ معلماً متجانساً $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1. أثبت أن النقاط G و J و E تعين مستوي.
2. ادرس الارتباط الخطي للأشعة: $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$
3. ماذا تستنتج فيما يخص المستقيم (HI) والمستوي (EGJ)

السؤال الخامس:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم

طول ضلعه 4 والمطلوب:



-1 احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

-2 أثبت أن AB يعامد CD.

-3 نضع I منتصف $[AB]$، وJ منتصف $[CD]$

أثبت أن: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ثم تحقق أن: $AB\perp IJ$

-4 نضع O مركز ثقل الرباعي $ABCD$، و G مركز ثقل المثلث (BCD) أثبت أن A و O و G على استقامة واحدة.

-5 حدد موقع M التي تحقق: $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})-\overrightarrow{BI}$

حل ورقة عمل يدوية هندسة 1

السؤال الأول:

(1 a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AE}$

(b $2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$

(2 a) $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{IF}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{IF}\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IF}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F

(b $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IJ}\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BJ}$

M تنطبق على J

السؤال الثاني:

$H(0,y,0)$

$HA=HB$

$\sqrt{4+(1-y)^2+1}=\sqrt{1+y^2+4}$

$\Rightarrow \sqrt{(1-y)^2+5}=\sqrt{y^2+5}\Rightarrow (1-y)^2+5=y^2+5$

$\Rightarrow 1-2y+y^2+5=y^2+5\Rightarrow 1=2y\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$H\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

السؤال الثالث:

$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)\ ,\ \overrightarrow{AM}(a-2,b-3,2)$

$$\underbrace{\frac{1}{a-2}}_{1}=\underbrace{\frac{-1}{b-3}}_{2}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{3}$$

من 1 و 2: $\frac{1}{2}=\frac{-1}{b-3}\Rightarrow b-3=-2\Rightarrow b=1$

من 1 و 3: $\frac{1}{a-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2=a-2\Rightarrow a=4$

السؤال الرابع:

1) $E(0,0,1)\ ,\ G(1,1,1)\ ,\ J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$

$I\left(\frac{1}{4},1,0\right)\ ,\ H(0,1,1)$

$\overrightarrow{EG}(1,1,0)\ ,\ \overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},1\right)$

$$\frac{1}{1}\neq\frac{1}{\frac{3}{4}}\neq\frac{0}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطّياً $\Leftarrow$ النقاط تعيّن مستوي.

2) $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4},0,-1\right)$

$$\overrightarrow{HI}=\alpha\overrightarrow{EG}+\beta\overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}=\alpha+\beta\ ...\ 1$$

$$\Rightarrow 0=\alpha+\frac{3}{4}\beta\ ...\ 2$$

$$\Rightarrow -1=-\beta\ ...\ 3$$

من 3 نجد: $\beta=1$

نعوّض في 1: $\frac{1}{4}=\alpha+1\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{4}$

نتحقق في 2: $0=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\Rightarrow 0=0$ محققة

$\Leftarrow$ الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً

3) المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

السؤال الخامس:

1- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4\times4\times\cos(60)=8$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos(60)=8$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos(60)=8$$

2- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4\times4\times\cos(60)-4\times4\times\cos(60)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=8-8=0$$

$\Leftarrow$ (AB) و (CD) متعامدان.

3- $l_1=\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$

$$\Rightarrow l_1=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=l_2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(4)^2-8+\frac{1}{2}(0)=8-8+0=0$$

$\Leftarrow$ $(\overrightarrow{AB})$ و $(\overrightarrow{IJ})$ متعامدان.

4- لدينا G مركز ثقل BCD $\Leftarrow$ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

و O مركز ثقل $ABCD$ $\Leftarrow$ O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

حسب الخاصية التجميعية: O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(G,3)$ $\Leftarrow$ A و O و G واقعة على استقامة واحدة.

5- $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{DI})-\overrightarrow{BI}\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DB}$$

النقطة M تنطبق على B

ورقة عمل يدوية هندسة ②

السؤال الأول: لدينا في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط:

$$A(1,1,0)\quad,\quad B(1,2,1)\quad,\quad C(4,0,0)$$

والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط A و B و C تعين مستوي.
2- أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x+3y-3z-4=0$$

3- ليكن المستويان P , Q:

$$P: x+2y-z-4=0$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d التمثيلات الوسيطية التالية:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}\quad ;t\in R$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P , Q , (ABC)

السؤال الثاني:

ليكن ليدنا المستقيمين d و d':

$$d:\begin{cases} x=3S+2 \\ y=-S-1 \\ z=S+1 \end{cases} : S\in R\quad,\quad d':\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3 \\ z=-t+2 \end{cases} : t\in R$$

1. أثبت أن d , d\` متقاطعان بنقطة I جد إحداثياتها.
2. اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d , d\`.

السؤال الثالث:

ليكن: $A(1,1,1)$

$$P: x-y+3z-1=0$$

$$Q: -2x+2y-6z+5=0$$

1- اكتب معادلة المستوي R المار من A ويوازي P.
2- أثبت أن Q يوازي المستوي R.

السؤال الرابع:

لتكن $A(0,1,2)$ $\quad B(4,2,1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB).
2. اكتب معادلة المستوي المار من A ويعامد (AB).
3. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمر من A.

السؤال الخامس:

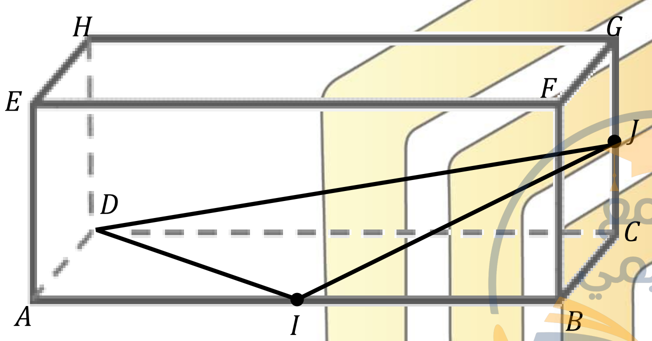
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$$AE=AD=1\ ,\ AB=2$$

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CG]$

نتخذ معلم: $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) أوجد إحداثيات I و J و D.
2) أثبت أن (DI) و (IJ) متعامدان واحسب $\cos\widehat{IJD}$
3) احسب مساحة المثلث DIJ.
4) اكتب معادلة المستوي (DIJ).
5) احسب بعد H عن المستوي (DIJ).
6) احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.
7) استنتج بعد J عن المستوي (HDI).



حل ورقة عمل يدوية هندسة 2

السؤال الأول:

1) $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$

$$\frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطّياً ⇐ النقاط تعيّن مستوي

2) $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow b + c = 0 \ldots ①$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow 3a - b = 0 \ldots ②$

بفرض $c = 1$ نعوّض في ①: $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

نعوض في ②: $3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \vec{n}\left(-\frac{1}{3}, -1, 1\right) \Rightarrow \vec{n}(-1,-3,3)$$

$$(ABC): 1(x-4) + 3(y-0) - 3(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (ABC): x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3) $x + 2y - z - 4 = 0$

$2x + 3y - 2z - 5 = 0$

بفرض $z = t$:

$x + 2y - t - 4 = 0$

$2x + 3y - 2t - 5 = 0$

نضرب ① بـ(-2) ونجمع مع ②:

$-y + 8 - 5 = 0 \Rightarrow y = 3$

نعوض في ①: $x + 6 - t - 4 = 0 \Rightarrow x = t - 2$

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in R$$

4)

$I \leftarrow d$

$(ABC) \rightarrow t$

$t - 2 + 9 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - 2 \\ y &= 3 \\ z &= \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

السؤال الثاني:

$\vec{u}(3,-1,1)$, $\vec{v}(1,2,-1)$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطّياً ⇐ d و d' غير متوازيين.

$3s + 2 = t + 1 \ldots ①$

$-s - 1 = 2t - 3 \ldots ②$

$s + 1 = -t + 2 \ldots ③$

نجمع ② و ③: $0 = t - 1 \Rightarrow t = 1$

نعوّض في ③: $S + 1 = -1 + 2 \Rightarrow S = 0$

نتحقق في ①: $0 + 2 = 1 + 1 \Rightarrow 2 = 2$ محققة

نعوّض S في معادلة d:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(2,-1,1)$$

بفرض: $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 3a - b + c = 0 \ldots ①$

$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n}.\vec{v} = 0 \Rightarrow a + 2b - c = 0 \ldots ②$

بفرض $a = 1$:

$3 - b + c = 0 \ldots ①$

$1 + 2b - c = 0 \ldots ②$

بجمع ① و ②: $4 + B = 0 \Rightarrow B = -4$

نعوض في ①: $3 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -7$

$\vec{n}(1,-4,-7)$, $I(2,-1,1)$

$$P: (x-2) - 4(y+1) - 7(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow P: x - 4y - 7z + 1 = 0$$

السؤال الثالث:

1) $A(1,1,1)$, $\vec{n}_P = \vec{n}_R(1,-1,3)$

$$R: 1(x-1) - 1(y-1) + 3(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow R: x - y + 3z - 3 = 0$$

2) $\vec{n}_R(1,-1,3)$, $\vec{n}_Q(-2,2,-6)$

$$\frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow -2 = -2 = -2$$

الأشعة مرتبطة خطياً والمستويان متوازيان.

السؤال الرابع:

1) $A(0,1,2)$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}(4,1,-1)$

$$(AB) \begin{cases} x = 4t \\ y = t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} ; t \in R$$

2) $A(0,1,2)$, $\vec{n} = \vec{u}(4,1,-1)$

$$P: 4(x-0) + (y-1) - (z-2) = 0$$

$$\Rightarrow P: 4x + y - z + 1 = 0$$

3) $B(4,2,1)$, $R = BA = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$

$$S: (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 18$$

السؤال الخامس:

1) $I(1,0,0)$, $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$, $D(0,1,0)$

2) $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} = 1 - 1 + 0 = 0$$

المستقيمان (DI) و (IJ) متعامدان فالمثلث DIJ قائم.

$$\cos \widehat{IJD} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{IJ}{DJ}$$

$$IJ = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$DJ = \sqrt{4 + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\cos \widehat{IJD} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

3) المثلث DIJ قائم في I.

$$DI = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{DI \times IJ}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

4) $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$ غير مرتبطين خطياً

بفرض: $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \ldots (1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow a + b + \frac{1}{2}c = 0 \ldots (2)$$

بفرض $b = 1 \Leftarrow a = 1$

نعوض في (2):

$$1 + 1 + \frac{1}{2}c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$\vec{n}(1,1,-4)$$

نختار: $I(1,0,0)$

معادلة (DIJ)

$$1(x-1) + 1(y-0) - 4(z-0) = 0$$

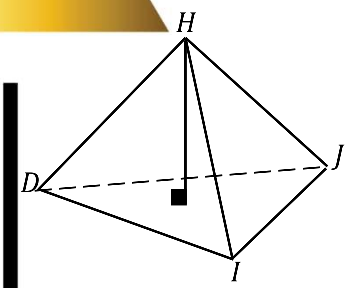
$$(DIJ): x + y - 4z - 1 = 0$$

5) $H(0,1,1)$

$$dist(H, DIJ) = \frac{|0 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}}$$

$$dist(H, DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

6) $v = \frac{1}{3} S_{DIJ} \times h$

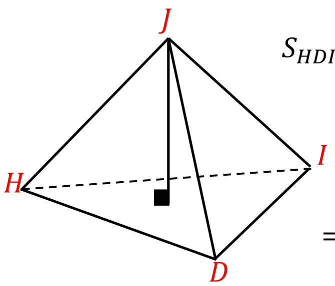


$$h = dist(H, DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

7) $v = \frac{1}{3} S_{HDI}.dist(J, HDI)$

نحسب مساحة المثلث HDI القائم في D.



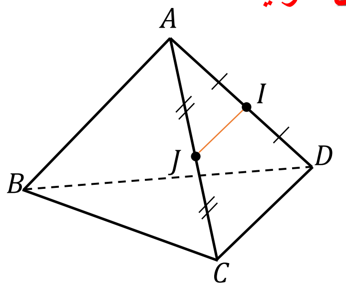
$$S_{HDI} = \frac{HD \times DI}{2} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} S_{HDI}.dist(J, HDI)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times dist(J, HDI)$$

$$dist(J, HDI) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ورقة عمل منزلية هندسة



السؤال الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه فيه I منتصف $[AD]$

و J منتصف $[AC]$:

أثبت أن:

$$a)\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CA}$$

$$b)\ -\left(\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{CJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

السؤال الثاني: $ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه:

$AB=2$, $BC=CG=1$ وقياس الزاوية $D\hat{A}B$ يساوي $45°$ و I منتصف $[EF]$ المطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$

2- عين موقع M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال الثالث: إذا علمت أن $(\vec{u}+\vec{v})$ يعامد $(\vec{u}-\vec{v})$ أثبت أن $\vec{u}\,,\,\vec{v}$ لهما نفس الطول.

السؤال الرابع: في معلم متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان:

$A(2,1,-2), B(-1,2,1)$ والمستوي:

$P: 3x-y-3z-8=0$

1- أثبت أن (AB) يعامد المستوي P.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين `A المسقط القائم للنقطة A على P.

السؤال الخامس: ادرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث:

$$P: -x+2y+3z-5=0$$

$$Q: 3x-y-4z+5=0$$

$$R: 2x+3y-2z+2=0$$

السؤال السادس: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(2,4,3)\ ,B(4,-2,3)$

$C(1,-1,1)\ ,D(3,3,-3)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C لا تقع على إستقامة واحدة

2) اكتب معادلة المستوي (ABC).

3) اكتب معادلة المستقيم Δ المار من D والعمود على (ABC).

4) استنتج D' مسقط D على المستوي (ABC).

5) عين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

حل ورقة عمل منزلية هندسة

السؤال الأول:

(a
$$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$$

(b
$$\underbrace{-\left(\overrightarrow{CD}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{CJ}}_{l_1}=\underbrace{-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}}_{l_2}$$

$$l_1=-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DI})+\overrightarrow{CJ}=-\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{CJ}$$

$$\Rightarrow l_1=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IJ}$$

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الثالثة وتساوي نصف طولها:

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=l_2$$

$\Rightarrow l_1=l_2$ محققة

السؤال الثاني:

(1
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=2\times1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

(2
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}$$

M منطبق على I

السؤال الثالث:

بما أن $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان أي:

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0\Rightarrow\vec{u}^2-\vec{v}^2=0$$

$$\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0\Rightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$$

السؤال الرابع:

(1
$$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)\ ,\ \vec{n}(3,-1,-3)$$

$$\frac{-3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{-3}\Rightarrow-1=-1=-1$$

$\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً والمستقيم (AB) يعامد المستوي

(2
$$A(2,1,-2)\quad,\quad\vec{u}(3,-1,-3)$$

$$(AB):\begin{cases}x=3t+2\\y=-t+1\quad;t\in R\\z=-3t-2\end{cases}$$

السؤال الخامس:

لندرس تقاطع المستويين P و Q:

$$\vec{n}_P(-1,2,3)\ ,\ \vec{n}_Q(3,-1,-4)$$

$$-\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً $\Leftarrow$ P و Q متقاطعين في d

$$-x+2y+3z-5=0\ \dots\ ①$$

$$3x-y-4z+5=0\ \dots\ ②$$

نضرب ① بـ3:

$$-3x+6y+9z-15=0\ \dots\ ①$$

$$3x-y-4z+5=0\ \dots\ ②$$

بجمع ① و ②:

$$5y+5z-10=0\ \dots\ ③$$

بقسمة ③ على 5:

$$y+z-2=0\ \dots\ ③$$

نفرض $z=t$:

$$y=2-t$$

نعوض في ①:

$$-x+4-2t+3t-5=0$$

$$\Rightarrow x=t-1$$

$$d:\begin{cases}x=t-1\\ y=2-t\ ;t\in R\\ z=t\end{cases}$$

ندرس تقاطع d مع R بتعويض معادلات d في معادلة R:

$$-2+2t+6-3t-2t+2=0$$

$$\Rightarrow t=2$$

نعوض t في d:

$$x=-1+2=1$$

$$y=2-2=0$$

$$z=2$$

P و Q و R تتقاطع في $I(1,0,2)$

السؤال السادس:

1) $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)\ ,\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

$$\frac{2}{-1}\neq\frac{-6}{-5}\neq\frac{0}{-2}$$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على إستقامة واحدة.

2) $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$\Rightarrow 2a-6b=0\ \dots\ ①$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$\Rightarrow -a-5b-2c=0\ \dots\ ②$$

نفرض $b=1$:

$$2a-6(1)=0\Rightarrow a=3$$

نعوض في ②:

$$-3-5-2c=0\Rightarrow c=-4$$

$$\vec{n}(3,1,-4)$$

نختار: $C(1,-1,1)$

$$(ABC):3(x-1)+1(y+1)-4(z-1)=0$$

$$(ABC):3x+y-4z+2=0$$

3) النقطة: $D(3,3,3)$ والناظم: $\vec{u}=\vec{n}(3,1,-4)$

$$\Delta:\begin{cases}x=3t+3\\ y=t+3\quad ;t\in R\\ z=-4t-3\end{cases}$$

4) D' تقاطع Δ مع (ABC):

$$9+9t+3+t+2+16t+2=0$$

$$\Rightarrow 26t=-26\Rightarrow t=-1$$

نعوض في Δ:

$$x=0\,,y=4\,,z=1\Rightarrow D'(0,4,1)$$

5) $\overrightarrow{MA}(2-x,4-y,3-z)$

$$\overrightarrow{MB}(4-x,-2-y,3-z)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

$$(2-x)(4-x)+(4-y)(-2-y)+(3-z)^2=0$$

$$x^2-6x+y^2-2y+z^2-6z+9=0$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $(-3,1,3)$

ونصف قطرها $\sqrt{10}$