الدرس

2

2

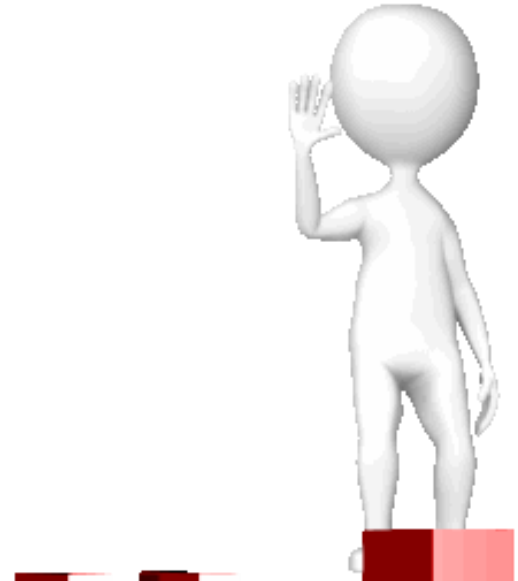
2

2

2

1

القطوع الناقصة و الدوائر
ELLIPSES AND CIRCLES



Welcome

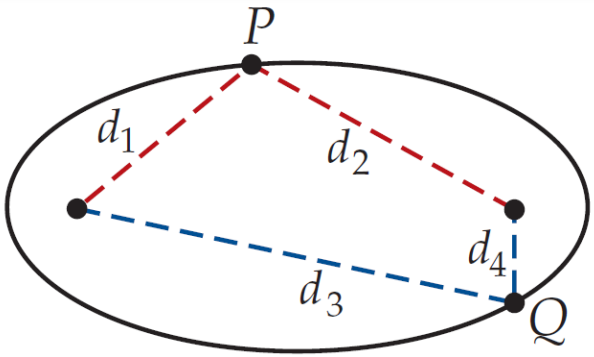
لماذا ؟

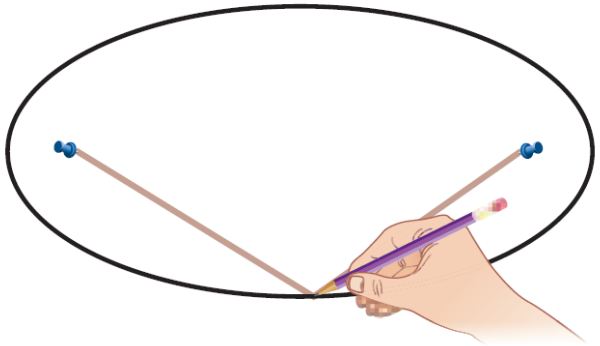
يدور كوكب عطارد كيفية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ داره شكلاً إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

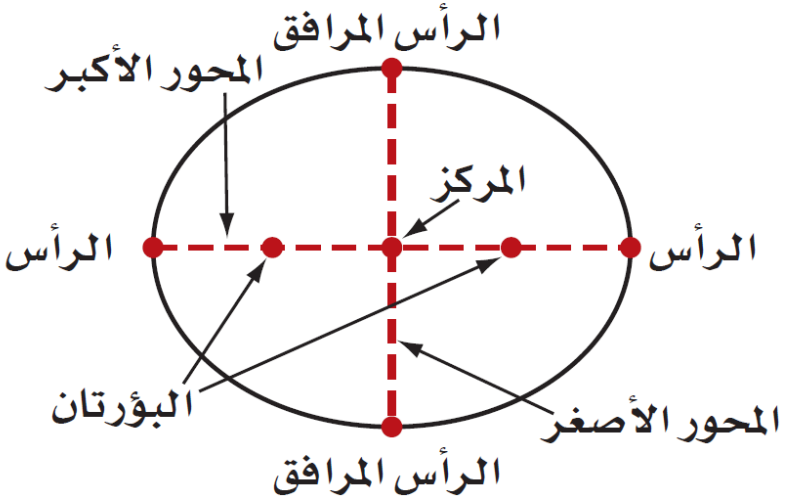
تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا:

القطع الناقص تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان البؤرتين. ولتوضيح هذا المفهوم تخيل وجود خيط مربوط من طرفيه عند البؤرتين، حيث يمكنك أن ترسم قطعًا ناقصًا باستعمال قلم على أن يبقى الخيط مشدودًا. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$

و هذا مقدار ثابت .



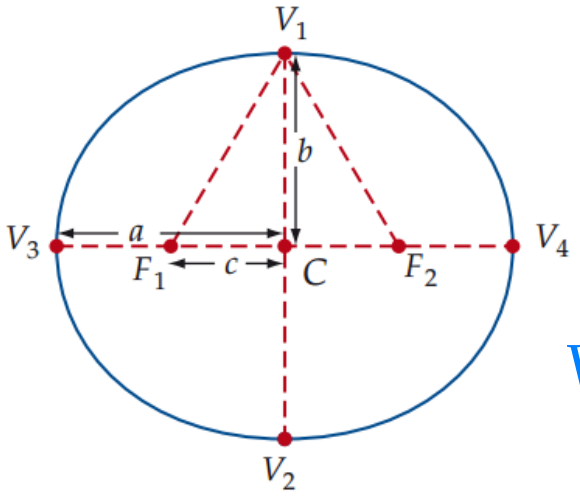




تُسمى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر**، وتسمى نقطة منتصف المحور **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتُسمى **المحور الأصغر**، وتُسمى نهايتا المحور الأكبر الرأسين، بينما تسمّى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

بما أن $\Delta F_1V_1C \cong \Delta F_2V_1C$ حسب نظرية التطابق ساق – ساق في المثلث القائم الزاوية فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$ و يمكننا استعمال تعريف القطع الناقص ؛ لإيجاد طولي $V_1F_1 \cong V_1F_2$ بدلالة الأطوال a , b , c



تعريف القطع الناقص

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_2F_2$$

$$V_2F_2 = V_4F_1$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_4F_1$$

$$V_2F_1 + V_4F_1 = V_2V_4$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2V_4$$

$$V_2V_4 = 2a$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$$

$$V_1F_1 = V_1F_2$$

$$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$$

بالتبسيط

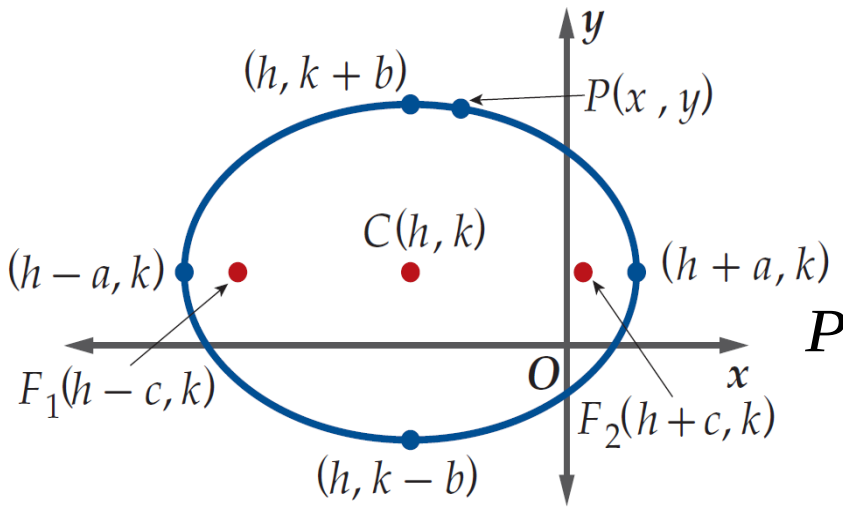
$$2(V_1F_1) = 2a$$

بالقسمة

$$V_1F = a$$

بما أن $V_1F_1 = 2a$ و ΔF_1V_1C قائم الزاوية ، فإن $b^2 + c^2 = a^2$ حسب نظرية فيثاغورس .

افترض أن P(x, y) نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه C (h, k) ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور، وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن



المنحني عن البؤرتين ثابت ، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$

تعريف القطع الناقص

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} + \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$

الخاصية التجميعية

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + \sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a$$

بالطرح

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

بتربيع الطرفين

$$(x-h)^2-2c+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$
$$+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بالتبسيط

$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$

بقسمة كلا الطرفين علي 4

$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$

بتربيع الطرفين

$$a^2\left[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2\right]+(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيع

$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2+(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بالتبسيط

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$a^2-c^2=b^2$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

بقسمة كلا الطرفين علي a^2b^2

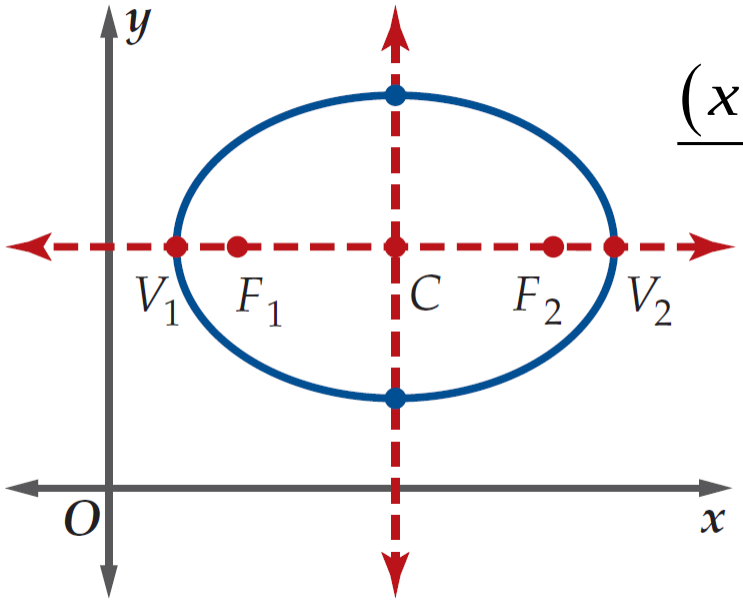
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h,k) حيث $a>b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

و يكون المحور الأكبر عندها أفقياً ، و في الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسياً .

مفهوم أساسي

خصائص القطع الناقص



المعادلة في الصورة القياسية : $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h,k)

البؤرتان : $(h,k\pm c)$

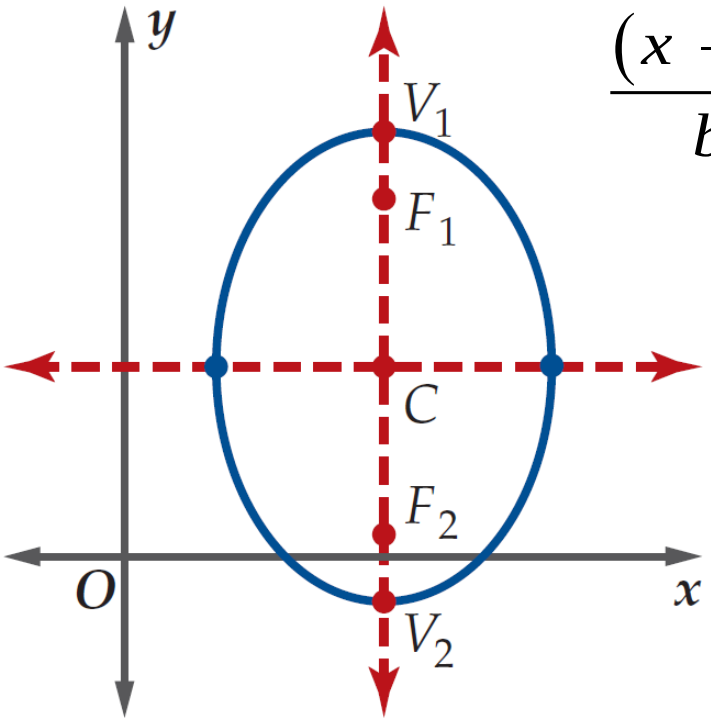
الرأسان : $(h,k\pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h\pm b,k)$

المحور الأكبر : $y=k$ و طوله $2k=$

المحور الأصغر : $x=h$ و طوله $2h=$

العلاقة بين : a,b,c : $c^2=a^2-b^2$ أو $c=\sqrt{a^2-b^2}$



المعادلة في الصورة القياسية : $\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ و طوله $2h =$

المحور الأصغر : $y = k$ و طوله $2k =$

العلاقة بين : a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص و تمثيل منحناه بيانياً

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلّ مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًّا :

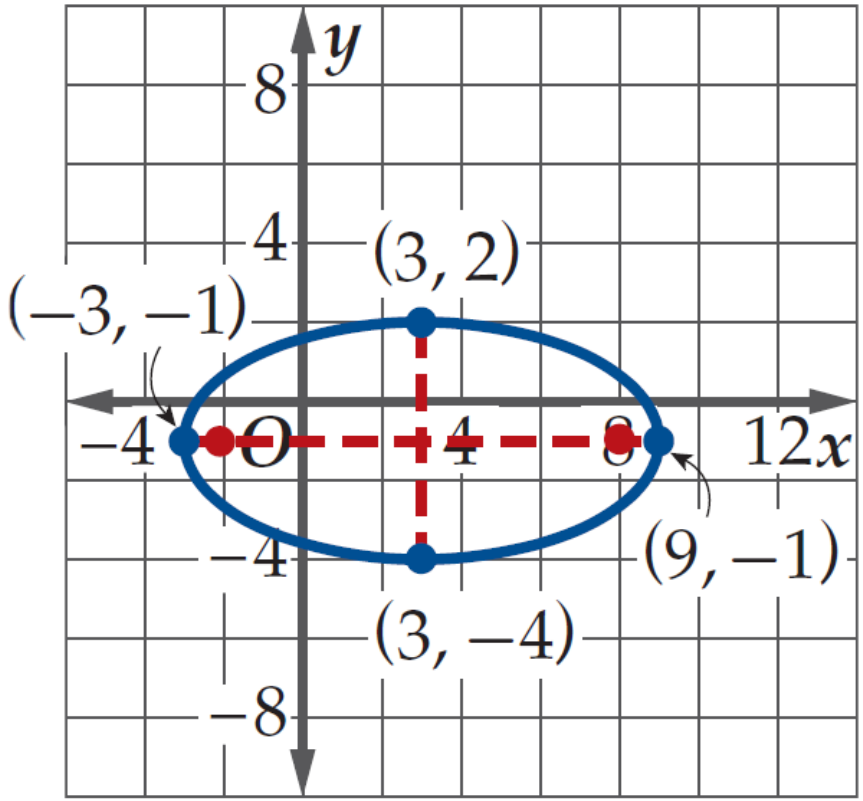
(a $\frac{(x-3)^2}{36}=\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h=3,k=-1,a=\sqrt{36}=6,b=\sqrt{9}=3,c=3\sqrt{3}$

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص :

الاتجاه :	أفقي	$(x-h)^2$ مقسوماً علي a^2
المركز :	$(3,-1)$	(h,k)
البؤرتان:	$(3\pm3\sqrt{3},-1)$	$(h\pm c,k)$
الرأسان :	$(9,-1),(-3,-1)$	$(h\pm a,k)$
الرأسان المرافقان :	$(3,2),(3,-4)$	$(h,k\pm b)$
المحور الأكبر :	$y=-1$	$y=k$
المحور الأصغر :	$x=3$	$x=h$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلاً حول المحورين الأكبر والأصغر.



(b $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

المعادلة الأصلية $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

بتجميع الحدود المتشابهة $(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$

بالتحليل $4(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -24$

بإكمال المربعين $4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$

بالتحليل و التبسيط $4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

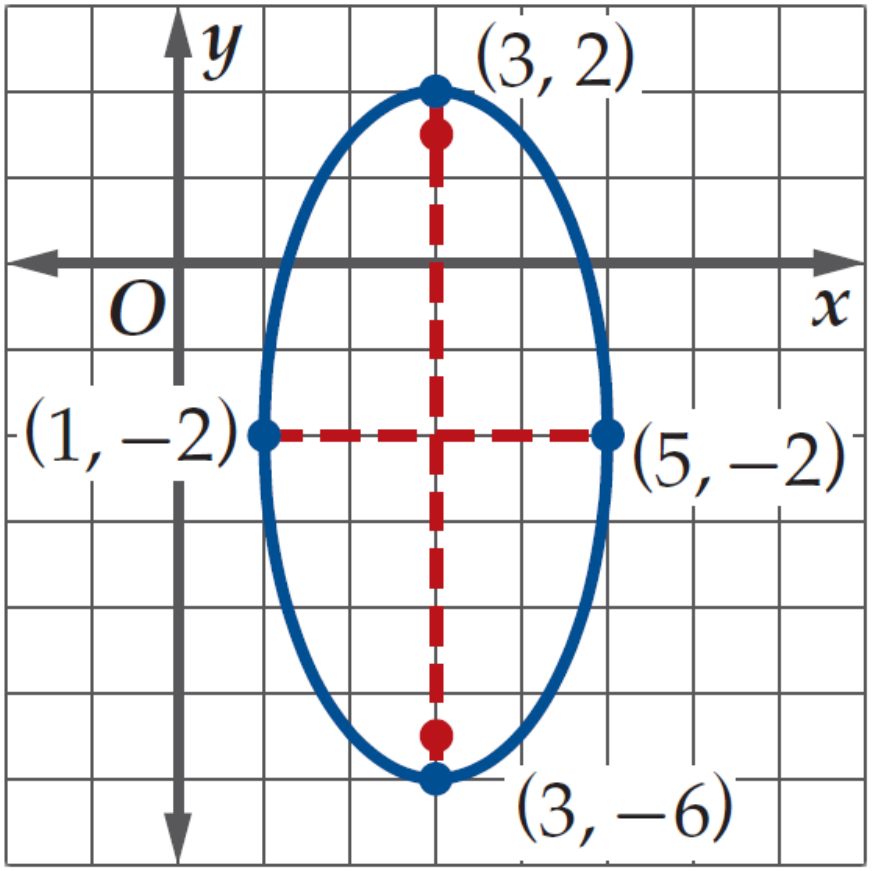
بقسمة الطرفين علي 16 $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = 2\sqrt{3}$

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص :

الاتجاه :	رأسي	a^2 مقسوماً علي $(y-k)^2$
المركز :	$(3,-2)$	(h,k)
البؤرتان:	$(3,-2,3\sqrt{3})$	$(h,k\pm c)$
الرأسان :	$(3,2),(3,-6)$	$(h,k\pm a)$
الرأسان المرافقان :	$(1,-2),(5,-2)$	$(h\pm b,k)$
المحور الأكبر :	$x=3$	$x=h$
المحور الأصغر :	$y=-2$	$y=k$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلاً حول المحورين الأكبر والأصغر.



تحقق من نفسك

(1A $\frac{(x-6)^2}{9}=\frac{(y+3)^2}{16}=1$

الاتجاه : رأسي

المركز : $(6,-3)$

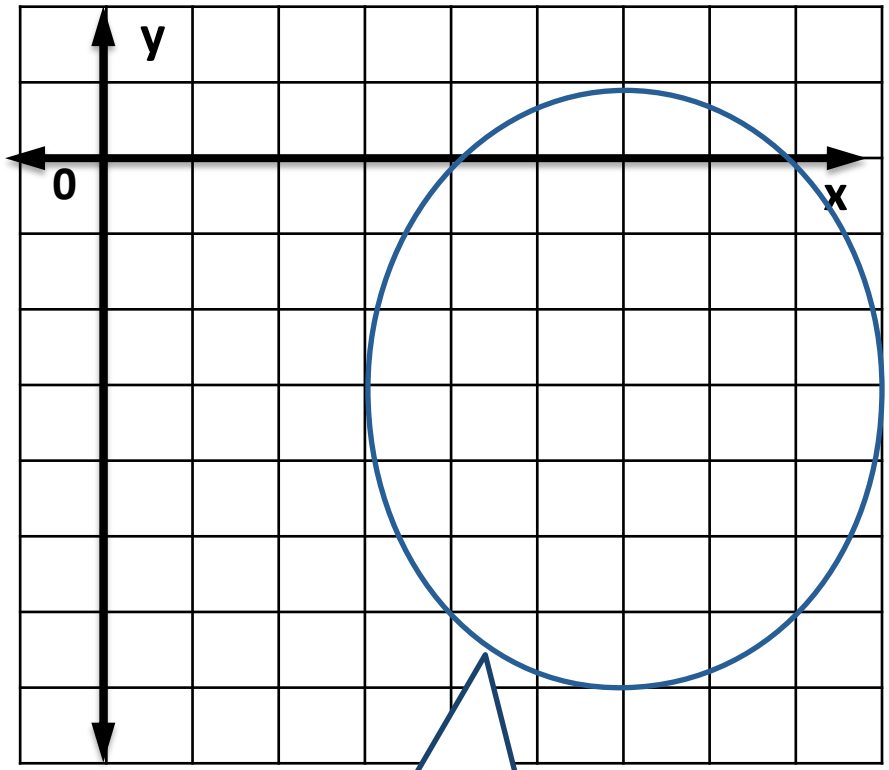
البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان : $(6,-7),(6,1)$

الرأسان المرافقان : $(3,-3),(9,-3)$

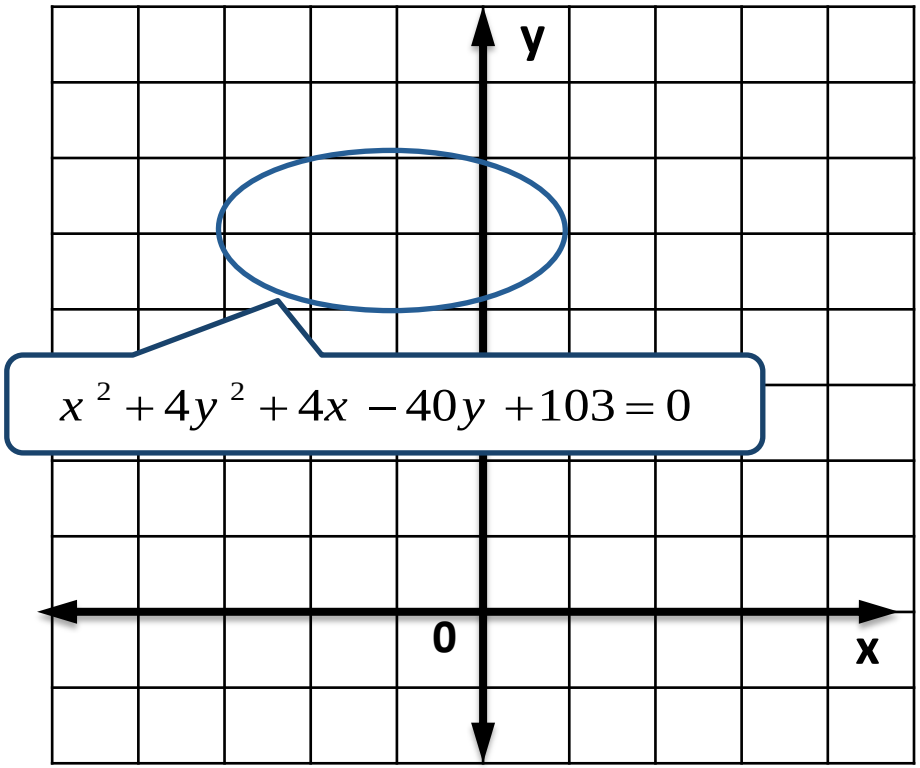
المحور الأكبر : $x=6$

المحور الأصغر : $y=-2$



$$\frac{(x-6)^2}{9}=\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

$x^2+4y^2+4x-40y+103=0$ (1B



الاتجاه : أفقي

المركز : $(-2,5)$

البؤرتان: $\left(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},5\right)$

الرأسان : $(-3,5),(-1,5)$

الرأسان المرافقان : $(-2,5.5),(-2,4.5)$

المحور الأكبر : $y=5$

المحور الأصغر : $x=-2$

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا علمت بعض خصائصه

اكتب المعادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي :

a) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(-6,2),(-6,-8)$

، و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-3,-3),(-9,-3)$

استعمل المحور الأكبر و المحور الأصغر لتحديد a , b

نصف طول المحور الأكبر

$$a=\frac{2-(-8)}{2}=5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$b=\frac{-3-(-9)}{2}=3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

صيغة نقطة المنتصف

$$(h,k)=\left(\frac{-6+(-6)}{2},\frac{-6+(-8)}{2}\right)$$

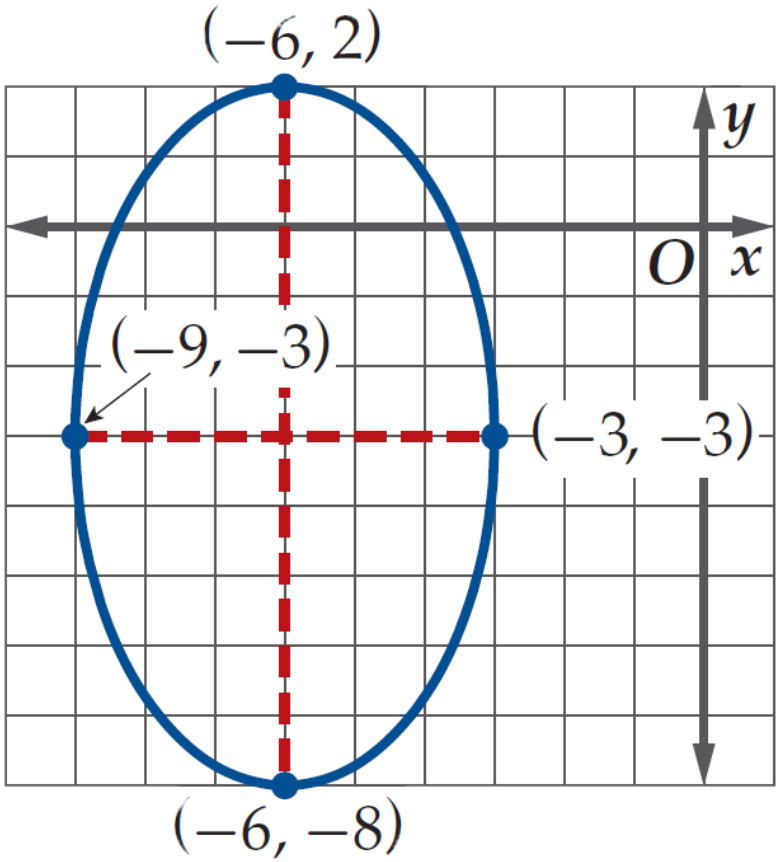
بالتبسيط

$$(-6,-3)$$

و بما أن الإحداثيين لنهايتي المحور الأكبر متساويان ، فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{(y+3)^2}{25}+\frac{(x+6)^2}{9}=1$$

و التمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1



b) الرأسان $(6,4),(-4,4)$ ، البؤرتان $(4,4),(-2,4)$

طول المحور الأكبر $2a$ و هي المسافة بين الرأسين .

صيغة المسافة $2a=\sqrt{(-4-6)^2+(4-4)^2}$

بالتبسيط $a=5$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

قانون المسافة $2c=\sqrt{(-2-4)^2+(4-4)^2}$

بالتبسيط $c=3$

أوجد قيمة b

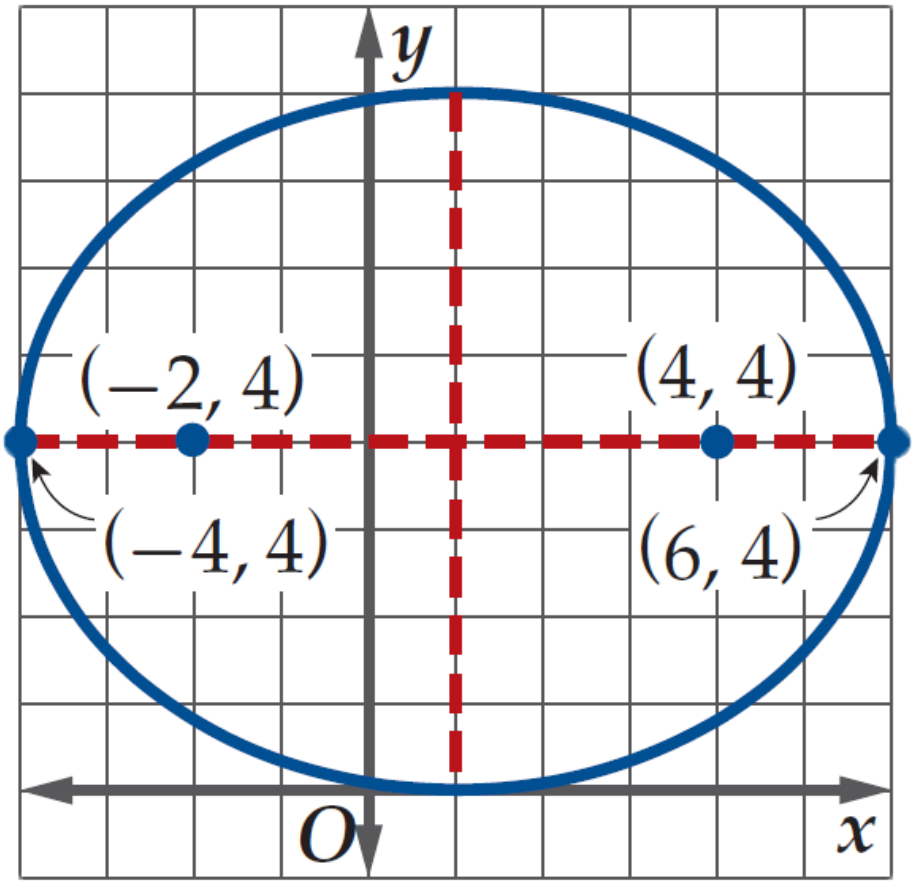
العلاقة a , b , c $c^2=a^2-b^2$

$a=5,c=3$ $3^2=5^2-b^2$

بالتبسيط $b=4$

و بما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان ، فإن المحور الأكبر أفقي ، و معادلة القطع

4.2.2 و التمثيل البياني كما في الشكل $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ الناقص هي :



تحقق من نفسك

2A) البؤرتان $(19,3),(-7,3)$ و طول المحور الأكبر **30** وحدة .

$$\frac{(x-6)^2}{225}+\frac{(y-3)^2}{56}=1$$

2B) الرأسان $(19,3),(-7,3)$ و طول المحور الأصغر **10** وحدة .

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a. وتقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي

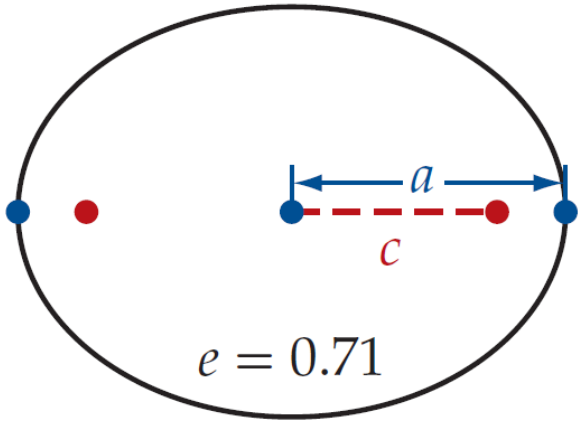
القطوع الناقصة و الدوائر

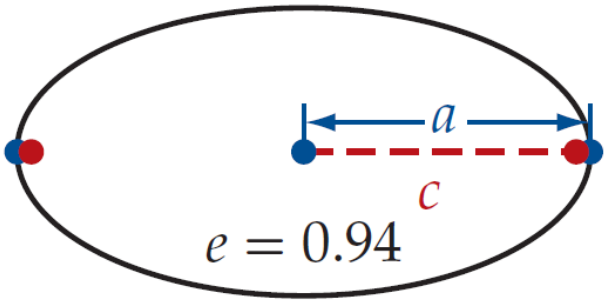
لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

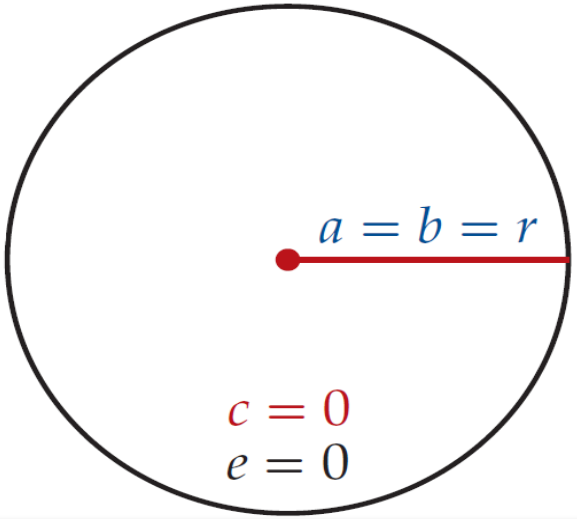
حيث $c^2=a^2-b^2$

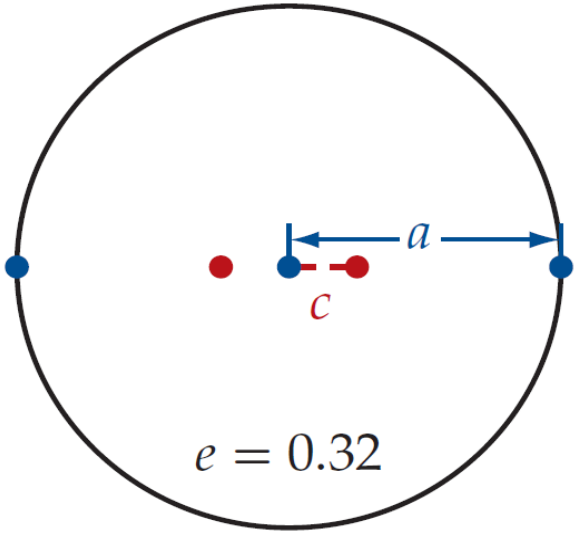
فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e=\frac{c}{a}$

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص، وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلاً من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.









مثال 3

تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

أولاً : تحديد قيمة c .

العلاقة a , b , c $c^2=a^2-b^2$

$a^2=100, b^2=9$ $c^2=100-9$

بالتبسيط $c=\sqrt{91}$

تستعمل قيمتي a , c لنجد الاختلاف المركزي .

صيغة الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

$a=10, b=3$ $e=\frac{\sqrt{91}}{10}\approx 0.95$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا

تحقق من نفسك

$$\frac{x^3}{18}+\frac{(y+8)^2}{48}=1$$ (3A

0.79

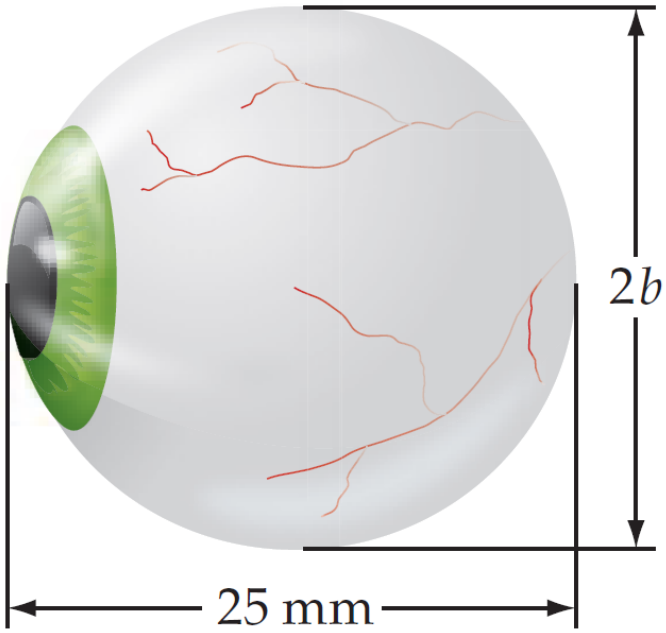
$$\frac{(x-4)^2}{19}+\frac{(y+7)^2}{17}=1$$ (3B

0.32

استعمال الاختلاف المركزي

مثال 4 من واقع الحياة

بصريات : يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد، حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي **0.28**. فإذا كان عمق العين يساوي **25mm** تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

تعريف الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = 0.28, a = 12.5$$

$$0.28 = \frac{c}{12.5}$$

بالضرب

$$c = 3.5$$

استعمل قيم a و c لتحديد قيم b .

العلاقة a , b , c	$c^2 = a^2 - b^2$
$c = 3.5, a = 12.5$	$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$
بسط	$b = 12$

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين 2b، ويساوي 24mm تقريبًا.

تحقق من نفسك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39. فإذا كان عمق العين 25mm، فما ارتفاعها؟

$$23.02\,mm$$

معادلة الدائرة : يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

عندما $a=b$ $e=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

بضرب كلا الطرفين في a^2 $x^2+y^2=a^2$

a نصف قطر الدائرة $x^2+y^2=r^2$

مفهوم أساسي

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h , k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

مثال 5

كتابة معادلة دائرة مركزها و قطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (2 ,1-) وقطرها 8.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(h,k)=(-1,2), r=\frac{8}{2}=4$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$$

بالتبسيط

$$(x-1)^2+(y-2)^2=16$$

تحقق من نفسك

5A) المركز (0, 0)، ونصف القطر 3

$$x^2 + y^2 = 9$$

5B) المركز (0, 0)، ونصف القطر 3

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25$$

مثال 6

كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها (-8, -1) , (6, 7) .

الخطوة 1: أوجد المركز .

صيغة نقطة المنتصف

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_1}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(x_1,y_1)=(7,6),(x_2,y_2)=(-1,-8)$$

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2},\frac{6+(-8)}{2}\right)$$

بالجمع

$$=\left(\frac{6}{2},\frac{-2}{2}\right)$$

بالجمع

$$=(3,-1)$$

الخطوة 2: أوجد المركز .

صيغة المسافة بين نقطتين

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$(x_1,y_1)=(7,6),(x_2,y_2)=(-1,-8)$

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2}$$

بالطرح

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}$$

بالجمع

$$=\sqrt{65}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة ، لذا فإن $r^2=\sqrt{65}$ عوض عن $h\ ,k\ ,r$

في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$

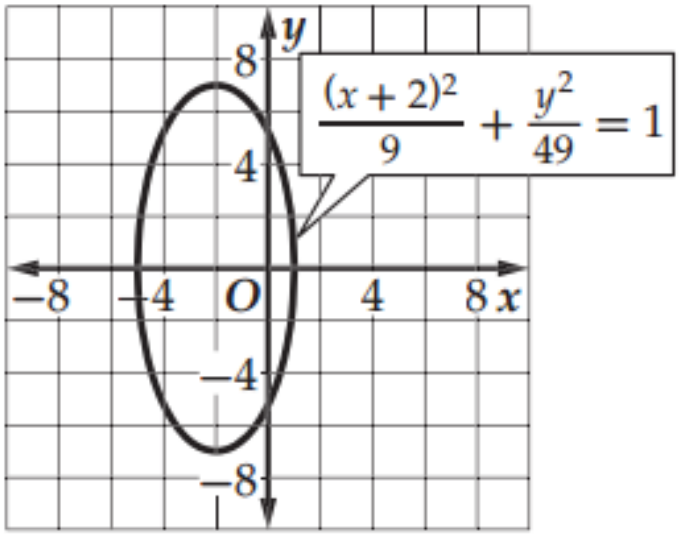
تحقق من نفسك

6) أوجد معادلة الدائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها $(3, -3), (1, 5)$.

$$(x-2)^2+(y-1)^2=17$$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$



الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2, 0)$

البؤرتان: $(-2, \mp 2\sqrt{10})$

الرأسان: $(-2, \mp 7)$

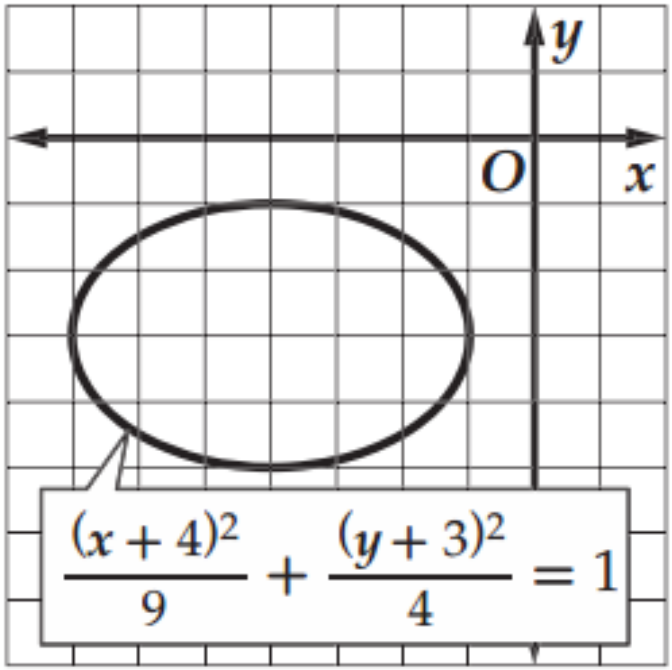
الرأسان المرافقان:

$(-5, 0)$، $(1, 0)$

المحور الأكبر: $x = -2$

المحور الأصغر: $y = 0$

(2 $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$



الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, -3)$

البؤرتان: $(-4 \mp \sqrt{5}, -3)$

الرأسان:

$(-7, -3)$ $(-1, -3)$

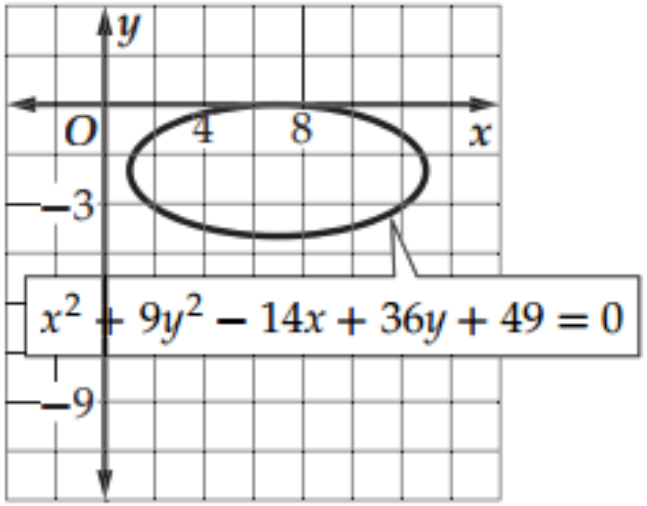
الرأسان المرافقان:

$(-4, -1)$، $(-4, -5)$

المحور الأكبر: $y=-3$

المحور الأصغر: $x=-4$

3 $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$



الاتجاه: أفقي

المركز: $(7, -2)$

البؤرتان: $(7 \mp 4\sqrt{2}, -2)$

الرأسان:

$(1, -2)$، $(13, -2)$

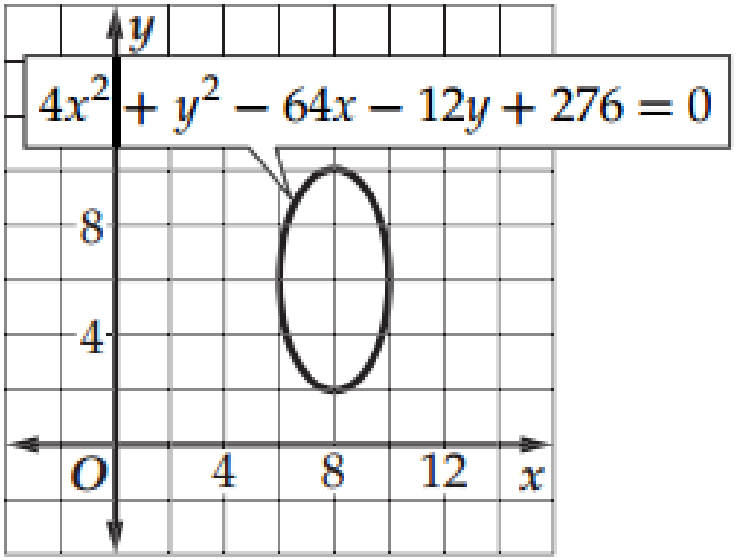
الرأسان المرافقان:

$(7, 0)$، $(7, -4)$

المحور الأكبر: $y = -2$

المحور الأصغر: $x = 7$

(4 $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$



الاتجاه: رأسي

المركز: $(8, 6)$

البؤرتان: $(8, 6 \mp 2\sqrt{3})$

الرأسان: $(8, 10)$، $(8, 2)$

الرأسان المرافقان:

$(10, 6)$، $(6, 6)$

المحور الأكبر: $x = 8$

المحور الأصغر: $y = 6$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

5) الرأسان $(13, -3), (-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3), (-5, -3)$

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

6) الرأسان $(4, -9), (4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2), (-13, 2)$ ،
وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$$

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

$$\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي:

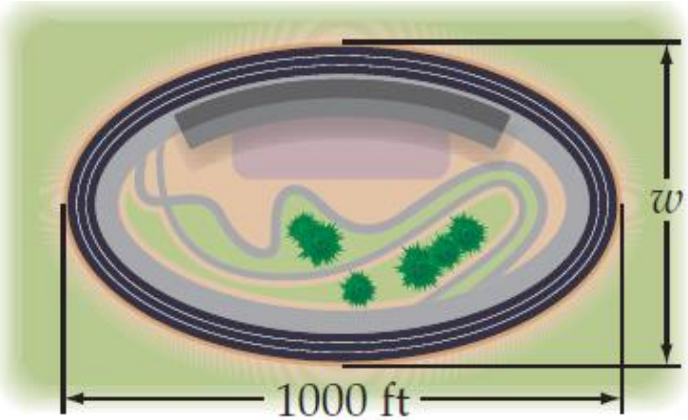
(10 $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$ 0.5

(11 $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ 0.837

(12 $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$ 0.869

(13 $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$ 0.426

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (**مثال 4**)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

العرض $= 661.44$ ft

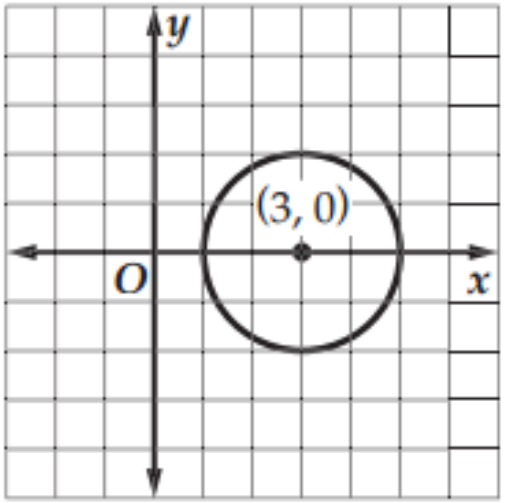
b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

$$\frac{x^2}{250000} + \frac{y^2}{109375} = 1$$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

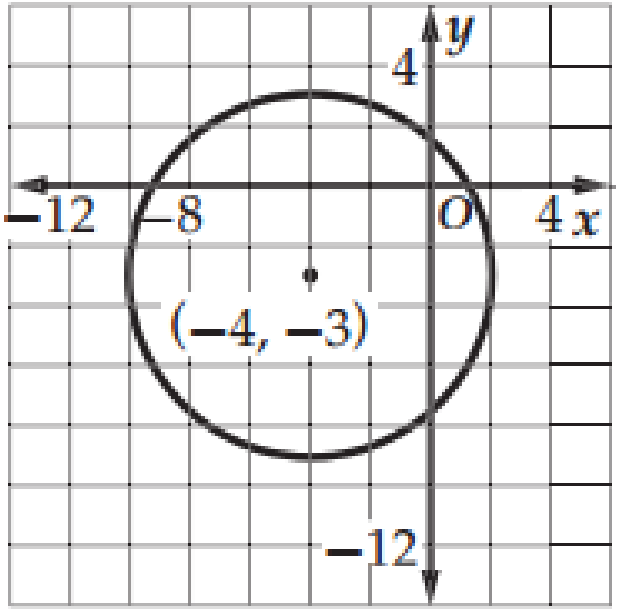
15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

$$(x-3)^2+y^2=4$$



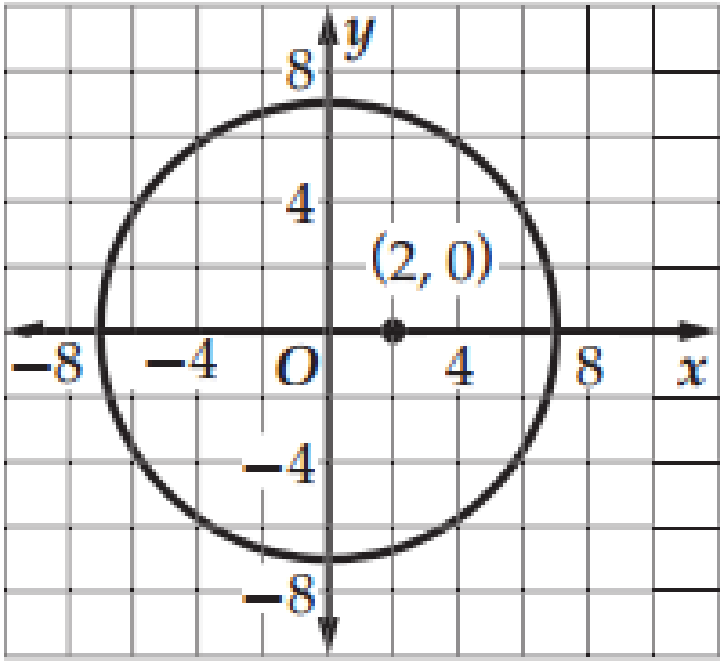
16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 36$$



17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

$$x^2 + y^2 = 49$$



اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي:

18 $(2, 1)\ ,\ (2, -4)$ $(x-2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$

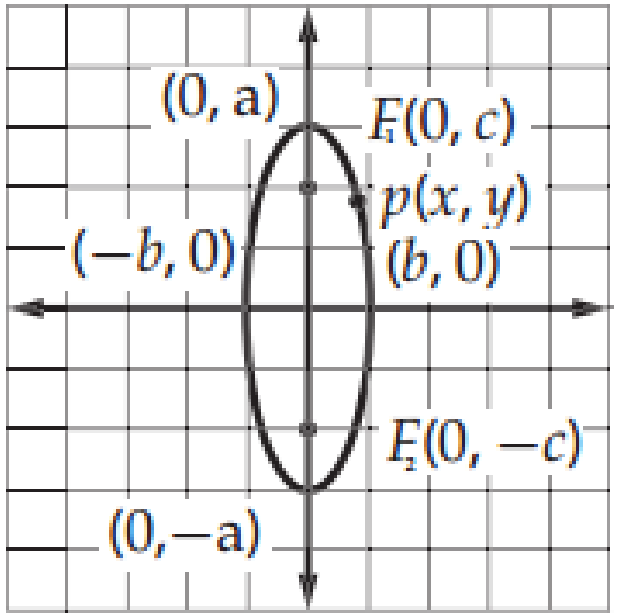
19 $(-4, -10)\ ,\ (4, -10)$ $x^2+(y+10)^2=16$

20 $(5, -7)\ ,\ (-2, -9)$ $(x-\frac{3}{2})^2+(y+8)^2=\frac{53}{4}$

21 $(-6, 4)\ ,\ (4, 8)$ $(x+1)^2+(y-6)^2=29$

22) معادلات: استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

افترض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $c(0, 0)$ ، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور باستعمال تعريف القطع الناقص فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن:



تعريف القطع $pF_1 + pF_2 = 2a$

صيغة المسافة $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a$

بالطرح $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$

$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y + c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2$

بتربيع الطرفين

$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = 4a^2+4cy$ بالقسمة على 4

$a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = a^2+cy$ بتربيع الطرفين

$a^2(x^2+y^2+2cy+c^2) = a^4+2a^2cy+c^2y^2$ بالتبسيط

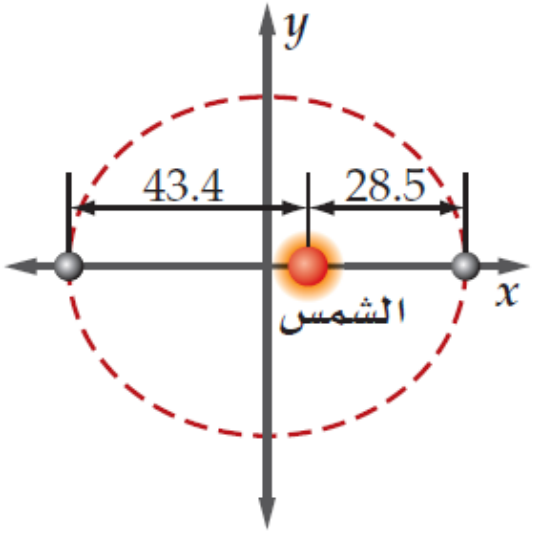
$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2 = a^4+2a^2cy+c^2y^2$
خاصية التوزيع

$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2 = a^4+c^2y^2$ بالتبسيط

$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2 = a^4-a^2c^2$ بطرح $c^2y^2+a^2c^2$
من الطرفين

$a^2x^2+b^2y^2 = a^2b^2$ $\qquad$ $a^2-c^2 = b^2$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$ بقسمة الطرفين على a^2b^2



23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، إذا كان قطر الشمس 870000 ميل تقريبًا، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد. 71.35 مليون ميل تقريبًا

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار. 0.203

أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

(24 $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ $(-5,0);(-8,0),(-2,0);(-9,0),(-1,0)$

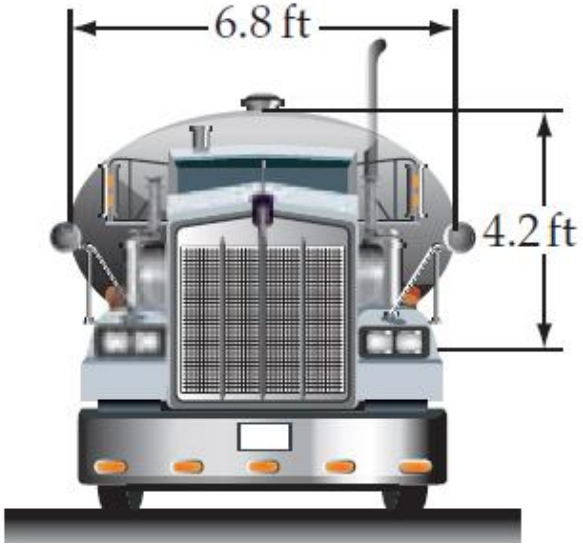
(25 $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

$(-2,1);(-2,5),(-2,-3);(-2,6),(-2,-4)$

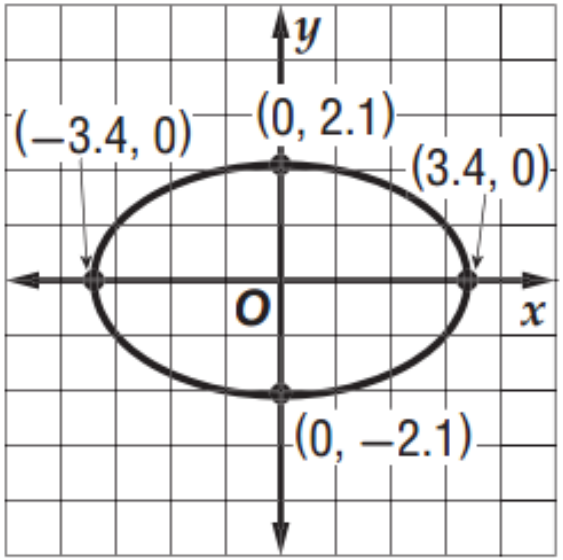
(26 $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

$(-1,0);(-1,\mp 7);(-1,\pm\sqrt{65})$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.



b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

$$\frac{x^2}{11.56} + \frac{y^2}{4.41} = 1$$

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي للخزان.

0.79

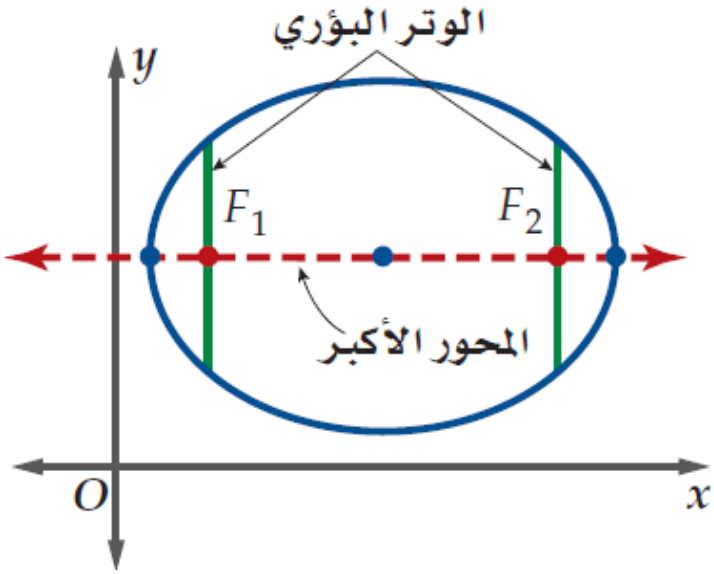
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0), (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1), (0, 1)$، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

30) المركز $(-4, 2)$ وإحدى البؤرتين $(-4 + 2\sqrt{5}, 2)$، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

31 الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه (3, 2) ، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

$$\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$$

32) هندسة : تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكل مثلثًا.
اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

$$(x - 6.5)^2 + (y - 4.5)^2 = 32.5$$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33 $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

34 $(1,-11),(-3,-7),(5,-7)$ $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

35 $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ $x^2+(y-6)^2=9$

36 $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$ $(x+1)^2+(y-4)^2=64$