## التابع اللوغاريتمي

$\sqrt{\ }$ التابع الجذري

$(\ )^n$ قوة

• اللوغاريتم: هو تحويل الجداء إلى مجموع، ونرمز له بـ $\log_a$ ونقرأ لوغاريتم ذو الأساس $a$.

$\sqrt[2]{\ }$ جذر تربيعي

$\sqrt[3]{\ }$ " تكعيبي

$\log_a$

$\log_{10} = \log$ اللوغاريتم العشري

$\ln = \log_a$ اللوغاريتم النيبري

• $\log(100) = 2$ $(10^2)$

• $\log(1000) = 3$ $(10^3)$

$e \simeq 2{,}718 \in \mathbb{Q}'$

العدد النيبري

$\pi \simeq 3{,}14 \in \mathbb{Q}$

## اللوغاريتم النيبري

$f: ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \ ; f(x) = \ln(x)$

مجموعة التعريف: قيم $x$

المستقر الفعلي: الأجوبة

ليس للعدد السالب لوغاريتم

$\ln(-2) =$ كفر

$\ln(0{,}5) = -0{,}7$

### قواعد:

1) $\ln(e) = 1$ $\qquad \ln(1) = 0$

$\ln(0) = -\infty$ $\qquad \ln(+\infty) = +\infty$

$\ln(2) \simeq 0{,}7$ $\qquad \ln(3) \simeq 1{,}1$

$\ln(5) \simeq 1{,}6$

2) • $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(6) = \ln(3 \times 2)$

$= \ln(3) + \ln(2)$

$= 1{,}1 + 0{,}7 = 1{,}8$

• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = -0{,}7$

Date : / / Subject:

5) مجموعة تعريف

$f(x) = \ln(g(x))$

$g(x) > 0$ معرفة لأجل

• $f(x) = \ln(x-1)$

$x-1 > 0$ معرفة لأجل

$x > 1$

$D_f : ]1, +\infty[$

• $f(x) = \ln(4 - x^2)$

$4 - x^2 > 0$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$x = \mp 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| | | | | م | | | |

$D_f = ]-2, +2[$

$f(x) = \ln(x-2)$

$D_f = ]2, +\infty[$

$f(x) = \ln(3-x)$

$D_f = ]-\infty, 3[$

الخاصة

• $\ln(a)^r = r\ln(a)$

$\ln(9) = \ln 3^2$

$= 2\ln 3 = 2(1,1)$

$= 2,2$

$\ln^2 x = (\ln x)^2$ ✗

$\ln x^2 = \ln(x)^2$ ✓

$\ln^2(2) = (\ln(2))^2$

$= (0.7)^2 = 4,9$

3) $\ln(x_1) = \ln(x_2) \iff x_1 = x_2$

$\ln(x_1) \gtrless \ln(x_2) \iff x_1 \gtrless x_2$

$x_1, x_2 > 0$

مثال: $\ln(x-1) = \ln 2$

$x-1 > 0$

$x > 1$

$x \in ]1, +\infty[$

$x - 1 = 2$

$x = 3$

4) $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$

$\ln(3) = 1,1 > 0$

$\ln(\frac{1}{3}) = -1,1 < 0$

6) المشتقة

$f(x) = \ln(g(x))$

$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$

$f'(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 3x + 1}$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

7) النهايات

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(x+1)} = 1$

8) تغيرات

$f(x) = \ln x$

ادرس تغيرات دالة اللوغاريتم وارسم خطها البياني.

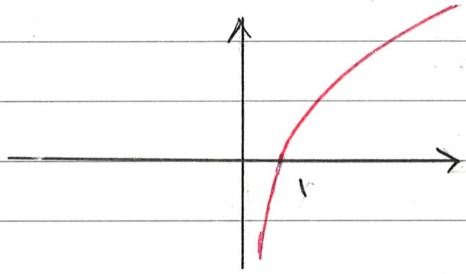
. معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |




تمرين:

1] في الحالات الآتية عين قيم $x$ التي تجعل العبارة معرفة:

1) $\ln(x^2)$

$x^2 > 0$ معرف من أجل

$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

2) $\ln(1 - x)$

$1 - x > 0$ معرف من أجل

$x > 1$

$D_f = ]-\infty, 1[$

3) $\ln(x - 3)$

$x^2-3x+2=0 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الجزء المحبة | | ✓ | | ////// | | ✓ | |

$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

8) $\ln|x+1| - \ln|x-1|$

$|x+1| > 0 \qquad D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$|x-1| > 0 \qquad D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D = D_1 \cap D_2$

$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

9) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

$\dfrac{x-3}{x-2} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| كسر | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الجزء المحبة | | ////// | | ✓ | | ////// | |

$x \in ]2, 3[$

خارجي

10) $f = \dfrac{1}{\ln(x-2)}$

$x-3>0$ مرفوض أصل

$x>3$

$D_f = ]3, +\infty[$

4) $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$1+x>0$

$x>-1$

$D_f = ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$

$= ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

5) $\dfrac{1}{\ln x}$

$x>0$

$D = ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$

$= ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

6) $\ln(x^2+4x)$

$x^2+4x>0$

$x^2+4x=0 \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+4x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الجزء المحبة | | ✓ | | ////// | | ✓ | |

$D_f = ]-\infty, 4[ \cup ]0, +\infty[$

7) $\ln(x^2-3x+2)$

$x^2-3x+2>0$

$R^*$  $R\setminus\{0\}$
$R_+^*$  $]0,+\infty[$
$R_-^*$  $]-\infty,0[$
$R_+$  $[0;+\infty[$

$x-2>0$

$x>2$

$D_f = ]2,+\infty[ \setminus \{3\}$

$= ]2,3[ \cup ]3,+\infty[$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$]-\infty,-1[ \cup ]0,+\infty[$

2 $f$ هو التابع المعرف على المجال $I = R_+^*$ وفق $f(x) = 2+\ln x$. بين أن $f$ اشتقاقي على $I$ واحسب $f'(x)$، واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع $f$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

$f(x) = 2 + \ln x$

اشتقاقي على $R$ ، اشتقاقي على $]0,+\infty[$

ومنه $f$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(1) = 2+0 = 2$

$(1,2)$ نقطة تماس

$m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

ومنه معادلة المماس:

$y-2 = 1(x-1)$

$y = x+1$

3 $f$ هو التابع المعرف على المجال $I = R_+^*$ وفق:

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1) أثبت أن $f$ اشتقاقي على $I$ واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

2) نظم جدولاً يبين جهة اطراد $f$.

3) استنتج من الجدول السابق أن $f(x) \geq 1$ أياً كان $x \in I$

الحل:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

اشتقاقي على $R^*$ ، اشتقاقي على $R_+^*$

إذن $f$ اشتقاقي على $R_+^*$

2) $f' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | \|\| | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

3) على ضوء الجدول السابق نجد أن: $f(x) \geq 1$

3 حل المعادلات الآتية:

1) $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$2x>0 \Rightarrow x>0$  $D_1 = ]0,+\infty[$

$x^2-1>0$  $D_2 = ]-\infty,1[ \cup ]1,+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 = ]1,+\infty[$

$* \; 2x = x^2-1$

$x^2-2x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 4+4 = 8$   $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

5 حل المتراجحات الآتية:

1) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

- $x-2>0 \quad x>2 \quad D_1 = ]2,+\infty[$
- $2x-1>0 \quad x>\frac{1}{2} \quad D_2 = ]2,+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 = ]2,+\infty[$

- $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

$x-2 \leqslant 2x-1$

$2x-1-x+2 \geqslant 0$

$x+1 \geqslant 0$

$x \geqslant -1$

$D' = [-1,+\infty[$

لحل المتراجحة الجبرية

حل المتراجحة اللوغاريتمية $= D \cap D'$

$= ]2,+\infty[ \cap ]-1,+\infty[$

$= ]2,+\infty[$

2) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$

- $2x>0 \quad x>0 \quad D_1 = ]0,+\infty[$
- $x^2-1>0 \quad D_2 = ]-\infty,-1[ \cup ]1,+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2$

$= ]1,+\infty[$

$\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$

$2x \geqslant x^2-1$

$x^2-2x-1 \leqslant 0$

$x^2-2x-1=0$

$x_1 = 1-\sqrt{2} \qquad x_2 = 1+\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

مرفوض

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

مقبول

2) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

- $-3x>0 \quad x<0 \quad D_1 = ]-\infty,0[$
- $x^2-4>0 \quad D_2 = ]-\infty,-2[ \cup ]2,+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 = ]2,+\infty[$

* $-3x = x^2-4$

$x^2+3x-4=0$ — $1$ مرفوض ; $-4$ مقبول

مستحيلة الحل

3) $\ln(x-2) = \ln 2$

- $x-2>0 \quad D = ]2,+\infty[$

$x-2=2$

$x=4$ مقبول

4) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

- $x-2>0 \quad x>2 \quad D_1 = ]2,+\infty[$
- $x^2-2>0 \quad D_2 = ]-\infty,-\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2},+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 = ]2,+\infty[$

$x-2 = x^2-2$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ — $0$ مرفوض ; $1$ مرفوض

المعادلة مستحيلة الحل.

$D = ]2, +\infty[$

$x \leq x^2 - 2x$

$x^2 - 3x \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | م | | | | م | |

$D' = ]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

الحل $= [3, +\infty[$

تمرين 157:

1 بسط كتابة الأعداد الآتية:

1) $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$= \ln(3 \times \frac{1}{3})$

$= \ln(1) = 0$

2) $b = \ln \frac{1}{16}$

$= -\ln 16$

3) $c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2} \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \ln 2$

2 اكتب كلا من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ , $\ln 5$:

1) $a = \ln 50$

$= \ln(2 \times 25) = \ln(2) + \ln(25)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | | | م | | | |

$D' = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

الحل $= D' \cap D = ]1, 1+\sqrt{2}[$

3) $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln x$

$D_1 = ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$

$D_2 = ]0, +\infty[$

$D = ]0, +\infty[$

$\frac{x+2}{x} \geq x$

$x + 2 \geq x^2$

$x^2 - x - 2 \leq 0$

$(x+1)(x-2) \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | | | م | | | |

$D' = [-1, 2]$

$D \cap D' = ]0, 2]$

4) $\ln x \leq \ln(x^2 - 2x)$

$D_1 = ]0, +\infty[$

$D_2 = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$

2) $x = 2\ln 3$ $\quad y = 3\ln 2$

$x = \ln 3^2$ $\quad y = \ln 2^3$

$= \ln 9$ $\quad = \ln 8$

$x > y$

5 فيما يأتي بسّط كتابة كل من a ، b.

1) $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27}$

$= \ln 567 - \ln 72 - \ln 7 + \ln 8 - \ln 27$

$= \ln 567 + \ln 8 - (\ln 72 + \ln 7 + \ln 27)$

$= \ln(567 \times 8) - \ln(72 \times 7 \times 27)$

$=$

$= \ln \dfrac{\overset{21}{\cancel{567}} \times \cancel{8}}{{}_9\cancel{72} \times 7 \times \cancel{27}}$

$= \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$

2) $b = \ln(\sqrt{216}) + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$

$= \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - (\ln 15 + \ln\sqrt{27})$

$= \ln(\sqrt{216} \times \sqrt{75}) - \ln(15 \times \sqrt{27})$

$= \ln \dfrac{\sqrt{216} \times \sqrt{75}}{15 \times \sqrt{27}}$

$= \ln \dfrac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{6} \times \cancel{5}\sqrt{3}}{{}_3\cancel{15} \times \cancel{3}\sqrt{3}}$

$= \ln \dfrac{2\sqrt{18}}{3\sqrt{3}}$

$= \ln \dfrac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \ln 2$

$= \ln 2 + \ln 5^2$

$= \ln 2 + 2\ln 5$

2) $b = \ln \frac{16}{25}$

$= \ln 16 - \ln 25$

$= \ln 2^4 - \ln 5^2$

$= 4\ln 2 - 2\ln 5$

3) $c = \ln 250$

$= \ln(125 \times 2)$

$= \ln(125) + \ln 2$

$= \ln(5)^3 + \ln 2$

$= 3\ln 5 + \ln 2$

3 أثبت أن $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$

$P_1 = \ln[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]$

$= \ln(4-3)$

$= \ln(1) = 0$

4 في كل من الحالات الآتية قارن بين العددين $x, y$
دون استعمال آلة حاسبة.

1) $x = \ln 5$ $\quad y = \ln 2 + \ln 3$

$x = \ln 5$ $\quad y = \ln(2 \times 3)$

$= \ln 6$

$y > x$

لإيجاد قيمة مجهول موجود بالأس نأخذ لوغاريتم الطرفين.

Date : / / Subject:

6 أثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين وذلك لكل $x>0$

1) $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f_2 = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$= \ln(x+1) = f_2$

$f_1 = \ln(1+x)$

$= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$= \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = f_2$

2) $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$f_2 = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$= \ln(x^2+1) = f_1$

7 في كل من الحالتين الآتيتين أوجد مجموعة قيم $x$ التي تحقق المساواة.

1) $\underbrace{\ln(x^2-x)}_{]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[} = \underbrace{\ln x + \ln(x-1)}_{]0,+\infty[\,\cap\,]1,+\infty[}$

$]1,+\infty[$

$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

$[1,+\infty[\,\setminus\{2\}$

$]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[$

2) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

$]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$

$]1,+\infty[\,\cap\,]-2,+\infty[$

$]1,+\infty[$

8 في كل حالة مما يأتي أوجد مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق المتراجحة المعطاة:

1) $2^n \leq 100$

$\ln 2^n \leq \ln(100)$

$n\ln 2 \leq \ln(100)$

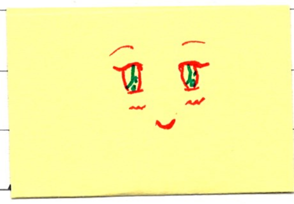
$n \leq \frac{\ln(100)}{\ln(2)}$

$n \in \left]-\infty, \frac{\ln(100)}{\ln 2}\right]$

$n \in \left[0, \frac{\ln(100)}{\ln 2}\right]$

$n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ وعن طريق التجريب

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$



$-\ln 10 = -\ln(2\times 5)$
$= -\ln + \ln 5$

Date : / /    Subject:

9] حل كل متراجحة او معادلة فيما يأتي :

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$x>0 \qquad x>-4 \qquad x>0$

مجال الحل $x>0 \qquad x \in ]0,+\infty[$

$\cancel{\ln} x^2 = \cancel{\ln}[(x+4)(2x)]$

$x^2 = 2x^2 + 8x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

إما $x = 0$ مرفوض

أو $x = -8$ مرفوض

فالمعادلة مستحيلة الحل

2) $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

نفس السابق.

3) $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

$x>-11 \qquad x>-3 \qquad x>-2$

مجال الحل $]-2,+\infty[$

3) $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

4) $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

$D = ]0,3[$

$\ln 2x^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(3-x)}{\sqrt{x+1}}$

$\ln \sqrt{2x} = \ln \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{2x}\sqrt{x+1} = 3-x$

$\sqrt{2x(x+1)} = 3-x$ نربع

$2x^2+2x = (3-x)^2$

$2x^2+2x = 9-6x+x^2$

$x^2+8x-9=0$

$(x+9)(x+1)=0$

$x=-9$ مرفوض

$x=+1$ مقبول

7) $\ln 3 \leq \ln(5-x)+\ln(x-1)$

$]-\infty,5[ \quad ]1,+\infty[$

شرط الحل $= ]1,5[$

$\ln 3 \leq \ln(5-x)(x-1)$

$3 \leq (5-x)(x-1)$

$3 \leq 5x-5-x^2+x$

$x^2-6x+8 \leq 0$

$\ln(x+11) = \ln(x+3)+\ln(x+2)$

$\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$

$x+11 = (x+3)(x+2)$

$x+11 = x^2+5x+6$

$x^2+4x-5=0$

إما $x=1$ مقبول

أو $x=-5$ مرفوض

4) $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

نفس السابق

5) $\ln 4+\ln 2 = \ln(x-6)+\ln(x+1)$

$D_1=]6,+\infty[$

$D_2=]-1,+\infty[$ $\Rightarrow D=]6,+\infty[$

$\ln(4\times 2) = \ln(x-6)(x+1)$

$8 = (x-6)(x+1)$

$8 = x^2-5x-6$

$x^2-5x-14=0$

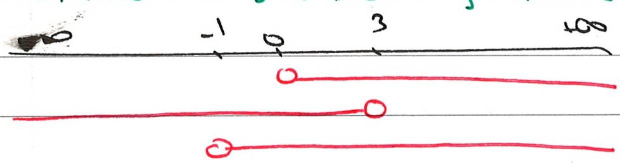
$(x-7)(x+2)=0$

إما $x=7$ مقبول

أو $x=-2$ مرفوض

6) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

$]0,+\infty[ \quad ]-\infty,3[ \quad ]-1,+\infty[$



9) $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2-x-2)$

$]-\frac{2}{3},+\infty[$ $\quad$ $]-\infty,-\frac{2}{3}[\cup]1,+\infty[$

$D=]1,+\infty[$

$6x+4 \leq 3x^2-x+2$

$3x^2-7x-6 \geq 0$

$3x^2-7x-6=0$

$\Delta = 49-4(3)(-6)$

$= 49+72=121$

$\sqrt{\Delta}=11$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-11}{2(3)} = \frac{-2}{3}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18}{6} = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$D'=]-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[3,+\infty[$

حل $= D\cap D' = [3,+\infty[$

10) $3\ln x > \ln(3x-2)$

$]0,+\infty[$ $\quad$ $]\frac{2}{3},+\infty[$

$D=]\frac{2}{3},+\infty[$

$\ln x^3 > \ln(3x-2)$

$x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0$ → $4$, $2$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$D'=[2,4]$

حل $= D\cap D'$

$= ]1,5[\cap[2,4]$

$= [2,4]$

8) $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

$]-\infty,0[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$ $\quad$ $]0,+\infty[$

$D=]\frac{1}{3},+\infty[$

$3x^2-x \leq 2x$

$3x^2-3x \leq 0$

$3x^2-3x=0$

$3x(x-1)=0$ → $x=0$, $x=1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$D'=[0,1]$

حل $D\cap D' = ]\frac{1}{3},+\infty[\cap[0,1]$

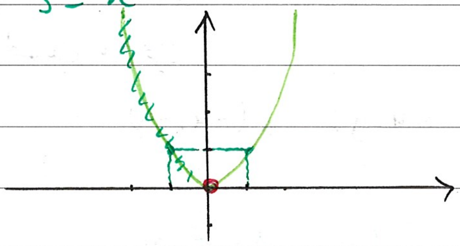
$= ]\frac{1}{3},1]$

2) $\ln y = 2\ln x$

$y>0 \qquad x>0$

$\ln y = \ln x^2$

$y = x^2$



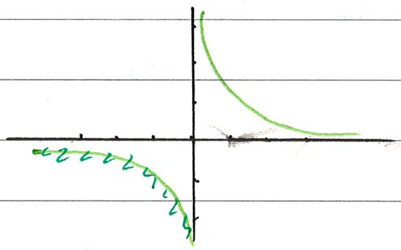
3) $\ln x + \ln y = 0$

$x>0 \qquad y>0$

$\ln(x.y) = \ln 1 \qquad$ ثانيا: $\ln y = -\ln x$

$x.y = 1 \qquad \ln y = \ln x^{-1}$

$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^{-1} = \frac{1}{x}$



- استنتاج رسم خط بياني من خط بياني آخر

$f_1(x) = -f(x)$

$C_1$ نظير $C$ بالنسبة لـ $x'x$

أو نجري التحويل الآتي:

$(x,y) \rightarrow (x,-y)$

$f_2(x) = f(-x)$

$C_2$ نظير $C$ بالنسبة لـ $y'y$

أو نجري التحويل

$x^3 > 3x-2$

$x^3 - 3x + 2 > 0$

$x^3 - x - 2x + 2 > 0$

$x(x^2-1) - 2(x-1) > 0$

$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) > 0$

$(x-1)\big(x(x+1) - 2\big) > 0$

$(x-1)(x^2+x-2) > 0$

$(x-1)(x-1)(x+2) > 0$

$(x-1)^2(x+2) > 0 \iff$

$x+2 > 0$

$x > -2 \Rightarrow D' = ]-2,+\infty[ \setminus \{1\}$

$D' = ]-2,1[ \cup ]1,+\infty[$

الحل $= D \cap D'$

$= ]\frac{2}{3},1[ \cup ]1,+\infty[$

15 في كل حالة آتية ارسم في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط المشار إليه:

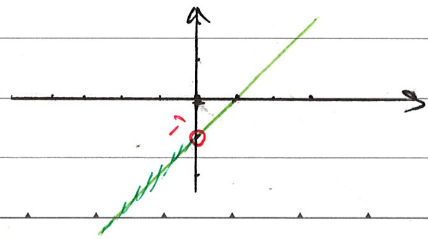
1) $\ln x = \ln(y+1)$

$x>0 \qquad y+1>0$

$y>-1$

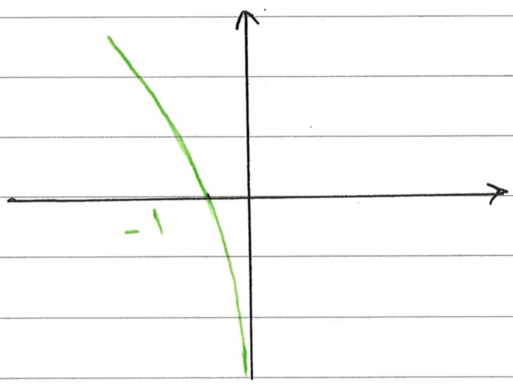
$x = y+1$

2) $y = x-1$ وهي معادلة مستقيم



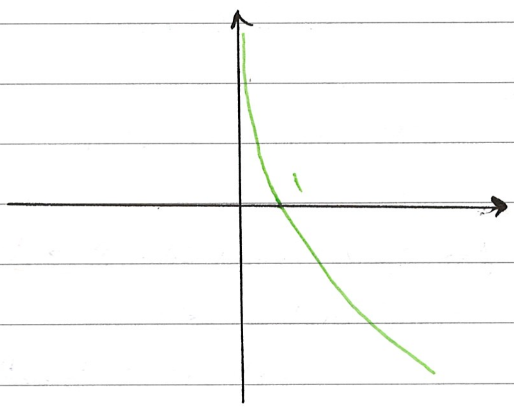
• $x \mapsto \ln(-x)$

$f_1(x) = \ln(-x) = f(-x)$



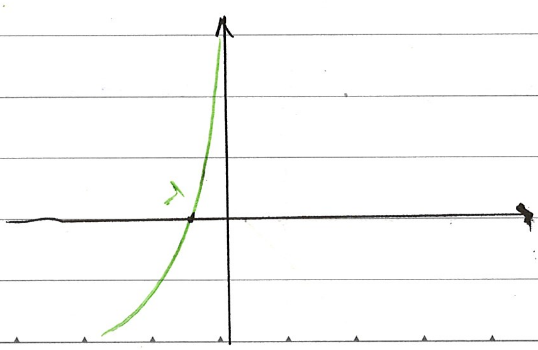

• $x \mapsto -\ln x$

$f_2(x) = -\ln(x) = -f(x)$




• $x \mapsto -\ln(-x)$

$f_3(x) = -\ln(-x) = -f(-x)$




$(x, y) \to (-x, y)$

$f_3(x) = -f(-x)$

$C_3$ نظير بالنسبة للمبدأ

نجري التحويل الآتي:

$(x, y) \to (-x, -y)$

$f_4(x) = a + f(x)$

$(x, y) \to (x, y+a)$

$f_5(x) = f(a+x)$

$(x, y) \to (x-a, y)$

$f_6(x) = |f(x)|$

نأخذ التراتيب موجبة.

تدريب 162:

$\boxed{1}$ انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$

ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:

$\ln \frac{1}{e} = -1$

$\ln e = 1$

Date : / /  Subject:

**2** أثبت أنّ $\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1)$

أيا كانت $x > 0$، استنتج أنّ $2 < e < 4$

باختيار قيم مناسبة للعدد $x$

الحل:

$\ln x - 2(\sqrt{x} - 1) \le 0$

$f(x) = \ln x - 2(\sqrt{x} - 1)$   $]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$ ،  $f'(x) = 0$

$1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | ‖ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

نلاحظ من جدول التغيرات أن:

$f(x) \le 0 \Rightarrow \ln x - 2(\sqrt{x} - 1) \le 0$

$\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1)$

**3** في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، قارن بين $x$ و $y$

دون استعمال الآلة الحاسبة.

1) $x = \ln e^3 - 2$ ،  $y = \ln(e\sqrt{e})$

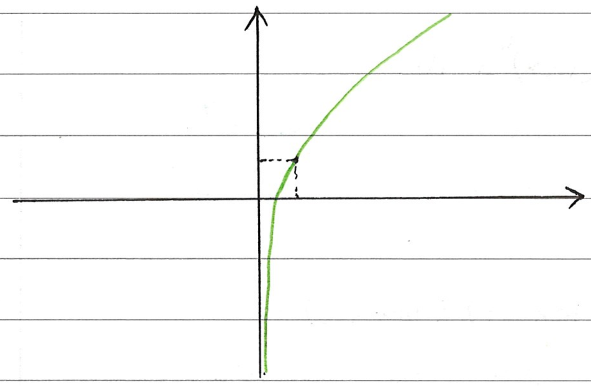
$= 3 - 2$   $= \ln e \cdot e^{\frac{1}{2}} = \ln e^{\frac{3}{2}}$

$= 1$   $= \frac{3}{2}$

$y > x$

• $x \mapsto 1 + \ln(x)$

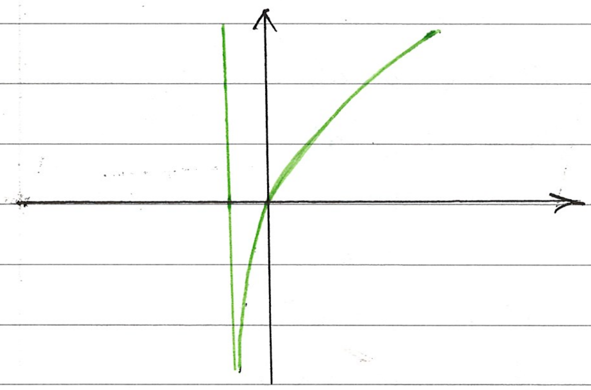
$f_4(x) = 1 + \ln x = 1 + f(x)$



• $x \mapsto \ln(x+1)$

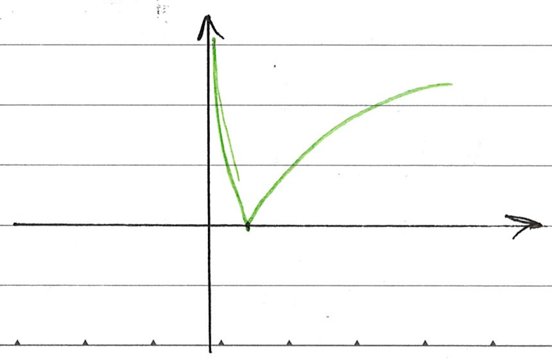
$f_5(x) = \ln(x+1) = f(x+1)$

$(x, y) \to (x-1, y)$



• $x \mapsto |\ln(x)|$

$f_6(x) = |\ln(x)| = |f(x)|$



$x - e^2 x = 2 + e^2$

$x = \dfrac{2+e^2}{1-e^2}$ مرفوض

③ $(\ln x)^2 = 16$

إما $\ln x = 4$ $\quad x = e^4$

أو $\ln x = -4$ $\quad x = e^{-4}$

④ $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

$x > x$ $\quad x \in ]0, +\infty[$

$\ln x = 1$ $\quad x = e$ مقبول

$\ln x = -2$ $\quad x = e^{-2}$ مقبول

⑤ $\ln(2-x) \geq 1$

$2x > 0$

$D = ]-\infty, 2[$

$\cancel{\ln}(2-x) \geq \cancel{\ln} e$

$2 - x \geq e$

$2 - e \geq x$

$D' = ]-\infty, 2-e]$

الحل $= ]-\infty, 2-e]$

⑥ $\ln \frac{1}{x} \geq 2$

$\frac{1}{x} > 0$

$D = ]0, +\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq \ln e^2$

$\frac{1}{x} \geq e^2$

$x \leq \frac{1}{e^2}$

2) $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3$ , $y = \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2$

$= 3 \ln \frac{1}{e}$ $\quad = (-1)^2$

$= 3(-1)$ $\quad = 1$

$= -3$

$y > x$

$\boxed{4}$ حل كل متراجحة او معادلة مما يأتي:

① $\ln(1-x) = -2$

$D = ]-\infty, 1[$

$1 - x = e^{-2}$

$1 - e^{-2} = x$

$1 - \frac{1}{e^2} = x$ $\quad x = \dfrac{e^2 - 1}{e^2}$

$\ln x = y \Rightarrow x = e^y$ $\quad e^2 \simeq 7$

$\ln e^x = x$

② $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

$D_1 = ]2, +\infty[$ $\quad D_2 = ]-1, +\infty[$

$D = ]2, +\infty[$

$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$

$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \ln e^2$

$\frac{x-2}{x+1} = e^2 \Rightarrow x - 2 = e^2(x+1)$

$x - 2 = e^2 x + e^2$

استنتاج $e>0$

Date : / / Subject:

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

② $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-(-\infty)}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\infty - \infty}{\infty}$

$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

③ $f(x) = x - \ln x$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$

④ $f(x) = x + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$f(x) = x + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\mathbb{R}$ $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$D_f = ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$x < e^{-2}$

$D' = ]-\infty, e^{-2}[$

الحل $= ]0, e^{-2}[$

$a = e^{\ln a}$

$a = \ln e^{a}$

تدرب 165 :

1 جد كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}\right) = 0(0) = 0$

② $\lim_{x\to 0} \left((x^2 - x)\ln x\right)$

$= \lim_{x\to 0} \left((x-1)x\ln x\right)$

$= (0-1)(0) = 0$

③ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\,\frac{1}{2}\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

2 فيما يأتي جد نهاية التابع $f$ عند أطراف مجالات تعريفه.

Sabbagh

Date : / / Subject:

⑥ $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

$]0,+\infty[ \setminus \{-1\} = ]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{\infty}{1+0} = +\infty$

⑦ $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$]0,1[ \cup ]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$

⑧ $f(x) = x(1-\ln x)$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0(+\infty)$ عدم تعيين

$\lim_{x\to 0} (x - x\ln x) = 0 - 0 = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty - \infty\ln(1)$ عدم تعيين

$f(x) = x\left(1 + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty(1+\ln(1))$

$= -\infty(1+0) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1+0) = +\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1 - 1.\ln(0)$

$= -1 - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 0\ln(\infty)$ عدم تعيين

$f(x) = x + x(\ln(x+1) - \ln x)$

$= x + x\ln(x+1) - x\ln x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 0\ln(1) - 0 = 0$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - \ln(0)$

$= +\infty - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - \infty$

$= -\infty$

⑫ $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$\mathbb{R}$ $\quad ]-1,+\infty[ \quad ]0,+\infty[$

$D = ]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \ln(1) - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left( x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = +\infty + \ln(1)$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I = ]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

① لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x+1$ مقارب لـ C

② ادرس الوضع النسبي للخطين d , C.

<u>الحل</u>

① $f(x) - y = \frac{-\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = -1(0) = 0$

$y = x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

② $f(x) - y = \frac{-\ln x}{x}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\ln x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $+$ | | $+$ | |
| الكسر | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | Δ فوق C | | Δ تحت C | |

⑨ $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$]-\infty,-1[ \cup ]4,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \ln\left(\frac{5}{0}\right) = +\infty$

⑩ $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0(\infty)$ عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0$

⑪ $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

$]0,+\infty[ \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

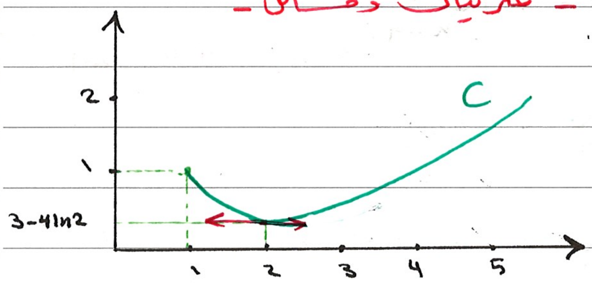
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

Date : / / Subject:

## - تمرينات ومسائل -

$\boxed{1}$




f معرف على $I=[1,4]$

$f(x)=ax+b+c\ln x$

عيّن a و b و c

الحل:

$C\ni(1,1)$ فهي تحقق معادلته

$1=a+b$ ---- ①

$C\ni(2,3-4\ln2)$ فهي تحقق معادلته

$3-4\ln2=2a+b+c\ln2$ .... ②

ولدينا في النقطة $(2,3-4\ln2)$ مماس أفقي

أي $f'(2)=0 \Leftrightarrow m=0$

$f'(x)=a+\frac{c}{x}$

$0=a+\frac{c}{2}$

$0=2a+c$ .... ③

من ①: $b=1-a$ ... ④

من ③: $c=-2a$ ... ⑤

نعوض ④ و ⑤ في ②:

$3-4\ln2=2a+1-a-2a\ln2$

$2-4\ln2=a-2a\ln2$

$2(\cancel{1-2\ln2})=a(\cancel{1-2\ln2})$

$a=2$

نعوض في ④: $b=-1$

$\boxed{4}$ في كل مما يأتي، أثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب $f'$:

① $f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)$

$I=]2,+\infty[$

$\ln(x-2)$ اشتقاقي على $]2,+\infty[$

$\ln(x+2)$ " " $]-2,+\infty[$

⇐ f اشتقاقي على $]2,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$

② $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $I=]1,+\infty[$

اشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

⇐ f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)$

$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

③ $f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$I=]0,+\infty[$

$\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

⇐ f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}$

④ $f(x)=\ln(1+x^2)$ $I=\mathbb{R}$

اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

نعوض في ⑤: $c=-4$

$\Rightarrow f(x)=2x-1-4\ln x$

② $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$

$A(1,0)\in C$ المماس $y=3x+?$ //

عيّن $a$ و $b$

الحل:

$A(1,0)$ نقطة تماس فهي تحقق معادلة التابع:

$0=a+b \dots ①$

لدينا $m=3$

أي $f'(1)=3$

$f'(x)=a+\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$3=a+1 \Rightarrow a=2 \dots ②$

نعوض ② في ①، $b=-2$

$f(x)=2x-2+\frac{1}{x}\ln x$

④ $x^2-2x+\ln(m+1)=0$

عيّن $m$ لتكون للمعادلة جذران.

الحل:

كي يكون للمعادلة جذران يجب أن يكون $\Delta>0$

$b^2-4ac>0$

$4-4\ln(m+1)>0$

$1-\ln(m+1)>0$

$m\in]-1,+\infty[$

$1>\ln(m+1)$

$\cancel{\ln} e>\cancel{\ln}(m+1)$

$e>m+1$

$e-1>m$

$\Rightarrow m\in]-\infty,e-1[$

إذن: $]-\infty,e-1[\cap]-1,+\infty[$

$]-1,e-1[$

⑧ ادرس تغيرات التوابع الآتية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$

① $f: x\longmapsto \frac{\ln x}{x}$ $\quad x-x\ln x$

$f$ معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=0-0=0$

$f'(x)=1-(\ln x+1)$

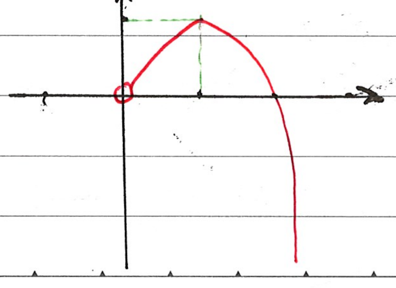
$=1-\ln x-1=-\ln x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln x=0$

$x=1$

$f(1)=1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

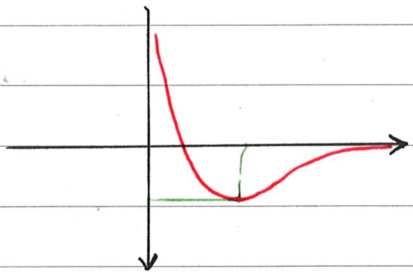


$$= \frac{-1-1+\ln x}{x^2} = \frac{-2+\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x = 2$

$x = e^2 \qquad f(e^2) = \frac{-1}{e^2}$

| $x$ | $0$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | | $0$ | | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e^2}$ | $\nearrow$ | $0$ |



④ $f: x \mapsto x - \ln x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

② $f: x \mapsto x . \ln x$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

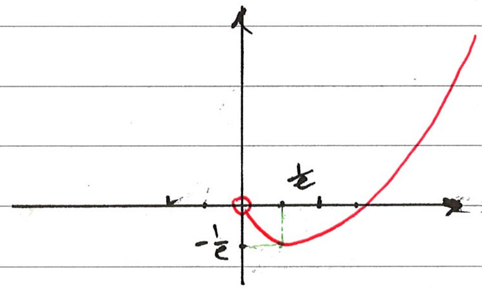
$f'(x) = \ln x + 1 \qquad f'(x) = 0$

$\Rightarrow \ln x = 1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(e^{-1}) = \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




③ $f: x \mapsto \frac{1-\ln x}{x}$

$f$ معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0 - 0 = 0$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(x) - (1-\ln x)}{x^2}$$

① $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ $I = ]e, +\infty[$ $\boxed{9}$

$\ln x$ : اشتقاقي من أجل $x > 0$

$f$ : اشتقاقي من أجل $\ln(\ln x) > 0$

$\cancel{\ln}(\ln x) > \cancel{\ln}(1)$

$\ln x > 1 \Leftrightarrow \cancel{\ln} x > \cancel{\ln} e$

$x > e$

ومنه $f$ اشتقاقي على $]e, +\infty[$

$f(x) = \ln(\ln(u))$ $u = \ln x$

$f(x) = \ln(v)$ $v = \ln(u)$

$$f'(x) = \frac{v'}{v} = \frac{\frac{u'}{u}}{v}$$

$$= \frac{u'}{u.v} = \frac{\frac{1}{x}}{u.v} = \frac{1}{x u.v}$$

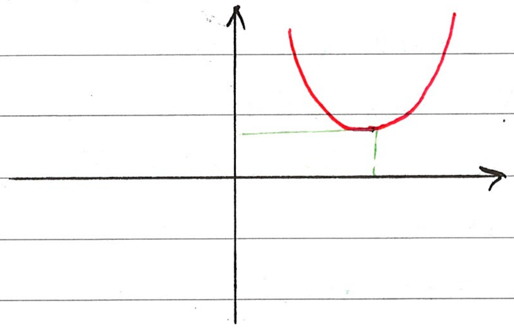
$$= \frac{1}{x \ln(x) \ln(u)} = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln x)}$$

② $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$ $I = ]1, +\infty[$

$f$ : اشتقاقي على $\frac{x+1}{\ln x} > 0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الكسر | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

ومنه $f$ اشتقاقي على $]1, +\infty[$



⑤ $f : x \mapsto x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 - 0 + 8 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x}$$

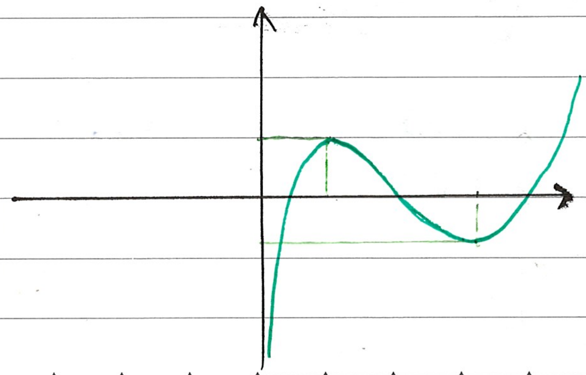
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1$ $f(1) = 1$

$x = 3$ $f(3) = -7 + 6\ln 3$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | | $0$ | | $0$ | | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-7+6\ln 3$ | ↗ | $+\infty$ |



Date : / / Subject:

$2X^2 - 4AX + \frac{3}{2}A^2 = 0$

$4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$

$a = 4 \quad b = -8A \quad c = 3A^2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 64A^2 - 4(4)(3A^2)$

$= 64A^2 - 48A^2 = 16A^2$

$\sqrt{\Delta} = 4A$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8A-4A}{2(4)}$

$X = \frac{4A}{8} = \frac{1}{2}A$ ---- *

$\ln x = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln x = \ln\sqrt{a} \Rightarrow x = \sqrt{a}$

نعوض $X = \frac{1}{2}A$ في ③

$Y = 2A - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A$

$\ln y = \frac{3}{2}\ln a = \ln a^{\frac{3}{2}}$

$y = \sqrt{a^3}$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8A+4A}{2(4)}$

$= \frac{12A}{8} = \frac{3}{2}A$

ومنه

$x = \sqrt{a^3}$

$y = \sqrt{a}$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)}$

$= \frac{\frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2}}{\frac{x+1}{(\ln x)}}$

$= \frac{\ln x - 1 - \frac{1}{x}}{(x+1)(\ln x)}$

II) a حقيقي موجب، حل في $R^2$ المعادلتين:

$x \cdot y = a^2$

$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$

الحل:

$\ln(x \cdot y) = \ln a^2$

$\ln x + \ln y = 2\ln a$ ①

$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$ ②

$x > 0 \quad y > 0 \quad a > 0$

نفرض،

$\ln x = X$

$\ln y = Y$

$\ln a = A$

$X + Y = 2A$ ①

$X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}A^2$ ②

من ①،

$Y = 2A - X$ ③

نعوض ③ في ②،

$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2}A^2$

$X^2 + 4A^2 - 4AX + X^2 = \frac{5}{2}A^2$

$2X^2 - 4AX + 4A^2 - \frac{5}{2}A^2 = 0$

نعوض في ① :

$6+y=7$

$y=1$

$\ln y=1 \Rightarrow y=e$

③ $(\ln x)(\ln y)=-12$

$\ln(xy)=1$

$\ln x+\ln y=1$

$x>0 \quad y>0$

نفرض

$\ln x=X$

$\ln y=Y$

$X\cdot Y=-12$ ①

$X+Y=1$ ②

إما $X=4 \Rightarrow \ln x=4$

$x=e^{4}$

$Y=-3 \Rightarrow y=e^{-3}$

أو $X=-3 \Rightarrow x=e^{-3}$

$Y=4 \Rightarrow y=e^{4}$

$\boxed{14}$ حل المعادلات

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

$\mathbb{R}\setminus\{-2\} \quad \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$\ln(|x+2||x-2|)=0$

$\ln(|x+2||x-2|)=\ln(1)$

$|x+2||x-2|=1$

$|(x+2)(x-2)|=1$

$\boxed{15}$ حل المعادلتين :

① $x^2+y^2=10$ ①

$\ln x+\ln y=\ln 3$ ②

$x>0 \quad y>0$

$\ln(x\cdot y)=\ln 3$ من ②

$x\cdot y=3$ ②

③ $x=\frac{3}{y}$ من ②

نعوض ③ في ① :

$\frac{9}{y^2}+y^2=10 \Rightarrow 9+y^4=10y^2$

$y^4-10y^2+9=0$

- $y^2=1 \rightarrow y=1 \xrightarrow{③} x=3$
  - $y=-1$ مرفوض
- $y^2=9 \rightarrow y=3 \xrightarrow{③} x=1$
  - $y=-3$ مرفوض

② $2\ln(x)+\ln y=7$

$3\ln x-5\ln y=4$

$x>0 \quad y>0$

$\ln x=X \quad \ln y=Y$

$2X+Y=7$ ①

$3X-5Y=4$ ②

$10X+5Y=35$ +

$13X=39$

$X=3$

$\ln x=3 \Rightarrow x=e^{3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{3}{2}, 1\}$

$\ln(|2x+3|\cdot|x-1|) = \ln|x|^2$

$|2x+3|\cdot|x-1| = x^2$

$|(2x+3)(x-1)| = x^2$

إما $(2x+3)(x-1) = x^2$

$2x^2-2x+3x-3=x^2$

$x^2+x-3=0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

أو $(2x+3)(x-1) = -x^2$

$2x^2+x-3=-x^2$

$3x^2+x-3=0$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}$

16) حل كلاً من المعادلة والمتراجحة:

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$

الحل:

$x > 0$

نفرض $\ln x = X$

$X^2 - 2X - 3 = 0$

$X = -1$

$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$X = 3$

$|x^2-4| = 1$

إما $x^2-4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5$

$x = \mp\sqrt{5}$

أو $x^2-4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3$

$x = \mp\sqrt{3}$

$S = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad ]-4,+\infty[$

$D = ]-4,2[ \cup ]2,+\infty[$

$\ln(|x-2|(x+4)) = \ln 2^3$

$|x-2|(x+4) = 8$

إما $(x-2)(x+4) = 8$

$x^2+2x-8 = 8$

$x^2+2x-16=0$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{68}}{2}$ مرفوض

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{68}}{2}$

أو $-(x-2)(x+4) = 8$

$(x-2)(x+4) = -8$

$x^2+2x-8=-8$

$x^2+2x=0$ $\quad 0 \quad -2$

③ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$|x-a|=b$

$x-a=b$ $\quad$ $x-a=b$

$x-a=-b$ $\quad$ $-(x-a)=b$

Date : / /

$P(x)=(x+1)\underbrace{(2x^2+3x-2)}_{Q(x)}$

$P(x)\leq 0 \Rightarrow$

$(x+1)(2x^2+3x-2)\leq 0$

$(x+1)(2x^2+3x-2)=0$

إما $x+1=0 \quad x=-1$

أو $2x^2+3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$=9-4(2)(-2)=25$

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-5}{2(2)}=-2$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+5}{2(2)}=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $2x^2+3x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| إشارة | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الحل | م | | | | م | | |

$x\in\,]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

$2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$

$]0,+\infty[ \quad ]-\frac{5}{2},+\infty[ \quad ]-\infty,2[$

$]0,+\infty[\,\cap\,]-\infty,2[$

$D=]0,2[$

$\ln x^2+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$

$\ln(x^2(2x+5))\leq\ln(2-x)$

$\ln x=3 \Rightarrow x=e^3$

$(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

$x=\frac{1}{e} \qquad x=e^3$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{e}$ | | $e^3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | م | | | | م |

$D'=]-\infty,\frac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$

الحل $=D\cap D'$

$=]0,\frac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$

$P(x)=2x^3+5x^2+x-2$ تمرين $\boxed{17}$

1) a) $P(-1)=0$

b) $P(x)=Q(x)(x+1)$

ج) حل $P\leq 0$

$2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$

الحل:

a) $P(-1)=2(-1)^3+5(-1)^2+(-1)-2$

$=-2+5-1-2=0$

b)
$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+3x-2 \\ x+1 & 2x^3+5x^2+x-2 \\ & -2x^3+2x^2 \\ \hline & 3x^2+x-2 \\ & +3x^2+3x \\ \hline & -2x-2 \\ & -2x-2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Date :     /  /        Subject:

$$x^2(2x+5) \le 2-x$$

$$2x^3+5x^2+x-2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$P(x) \le 0$$

$$D' = ]-\infty,-2] \cup [-1,\tfrac{1}{2}]$$

الحل $= D \cap D'$

$$= ]0,\tfrac{1}{2}]$$

18. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ $\quad ]-1,1[$

الحل

$\forall x \in I \Rightarrow -x \in I$

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1}$$

$$=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$=-f(x)$$

إذن f تابع فردي، وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

• $f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$

$]-1,+\infty[$ اشتقاقي على $\qquad ]-\infty,1[$ اشتقاقي على

ومنه f اشتقاقي على $I=]-1,1[$

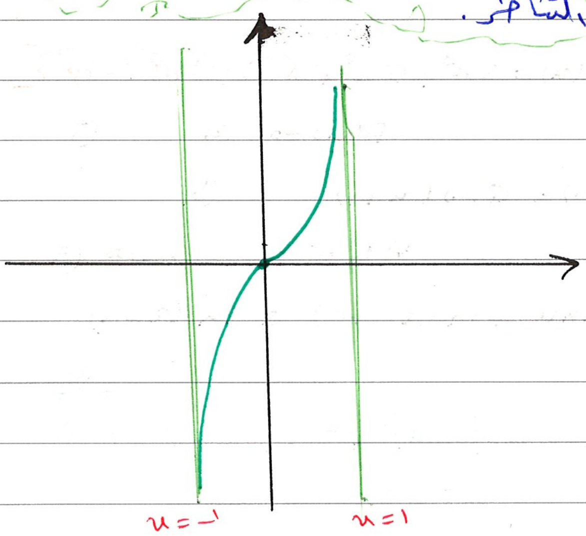
• $f(0)=\ln(1)=0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}>0$$

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ملاحظة: إذا كان التابع f فردي أو زوجي وتمت دراسة تغيراته على نصف مجاله وعند الرسم يجب أن نكمل النصف الآخر وفق صفة التناظر.



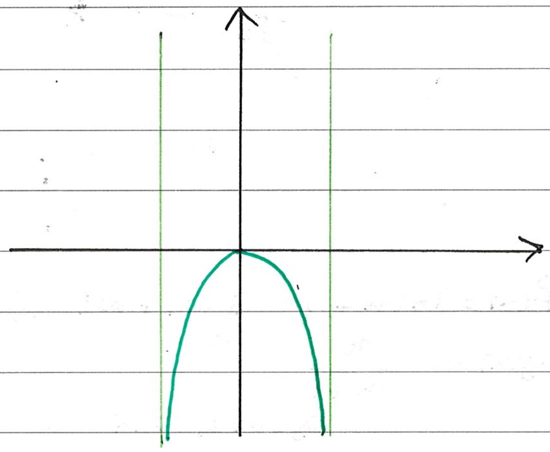

19. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $\quad I=]1,+\infty[$

الحل

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |



• $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$f = \ln(x) - \ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

$= \frac{1}{x(x+1)} > 0$

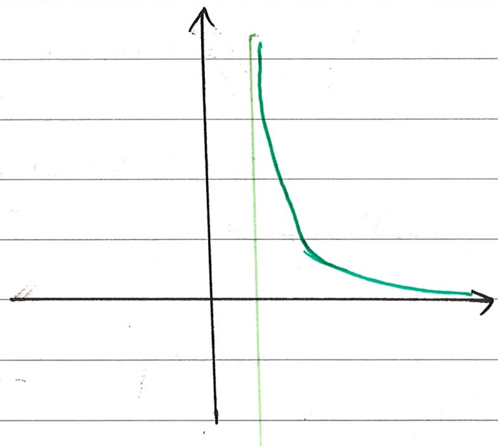
| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

$f' = \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$

$f' = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \notin ]1,+\infty[$

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |



• $f(x) = \ln(1-x^2)$ $]-1,1[$

أكمل

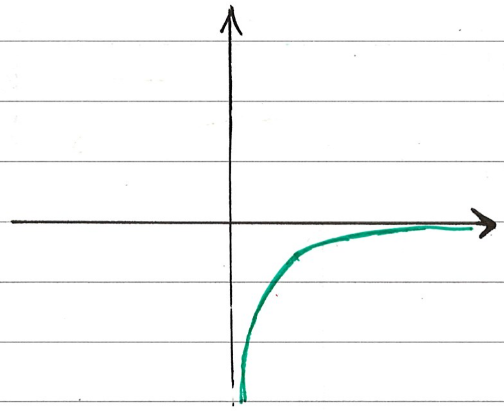
$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = \ln(1) = 0$



$f(x)=\ln(x+1)$ $]-1,+\infty[$ $\boxed{20}$

$g(x)=\frac{x}{x+1}$

① $g(x)\le f(x)$

② $C_g, C_f$ متماسان في o

③ تغيرات f و g ارسم

**الحل:**

نضع التابع

$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

ولندرس اطراده

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$

$=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$

$h'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$h(0)=\ln(1)-0=0$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

ومنه الأول ان

$h(x)\geq 0$

$f(x)-g(x)\geq 0 \Rightarrow g(x)\leq f(x)$

• $f(0)=0$

$g(0)=0$ $\Rightarrow$ الشرط الأول محقق

• $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ - $f'(0)=1$

$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ $g'(0)=1$

والشرط الثاني محقق

إذن $C_f, C_g$ متماسان بالنقطة $(0,0)$

③ $f(x)=\ln(x+1)$ $]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

• $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

• $g(x)=\frac{x}{x+1}$

$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x)=1$

$f' = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2}{x(x-1)}$

$x(x-1) = 2$

$x^2 - x - 2 = 0$ — $x = -1 \notin ]1, +\infty[$ ; $x = 2 \quad f(2) = 3 + \ln 4$

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $3 + \ln 4$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(x) - y = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - y) = 2\ln(1) = 0$

$y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$f(x) - y = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\frac{x}{x-1} > 1$

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$f - y > 0$

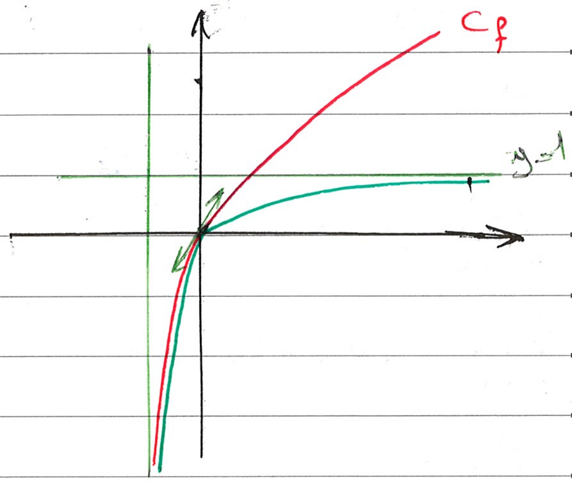
$C$ فوق $\Delta$

$y = x + 1$

| $x$ | $0$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $0$ |

$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ $1$ |




معادلة المماس المشترك

$y - 0 = 1(x - 0)$

$y = x$

$\boxed{21}$

$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$I = ]1, +\infty[$

الحل

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 + 2\ln\left(\frac{1}{0}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 2\ln(1) = +\infty$

$f'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 2\frac{-1}{x(x-1)}$

$= 1 + \frac{-2}{x(x-1)}$

$f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\frac{x}{x+1} < 1$

$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1)$

$f - y < 0$

$\Delta$ تحت $C$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 - 4 + \ln(0)$
$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$

$f'(x) \geq 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ | $-\infty \nearrow$ | $+\infty$ |

$\boxed{123}$

$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

$I = ]0, +\infty[$

① تغيرات ② $y = x - \ln 2$

② وضع ④ $f = 0$ , $]1, 2[$

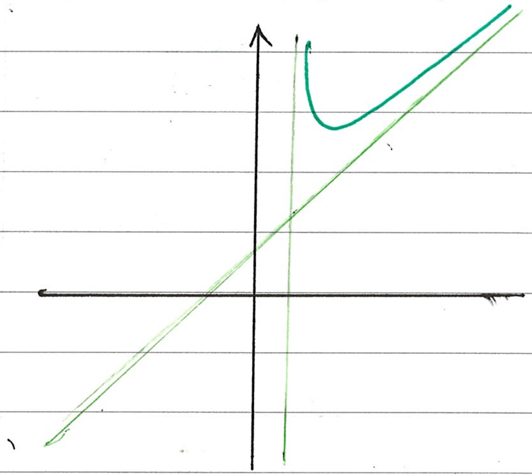
⑤ الرسم.

الحل:

$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

$f$: معرف ومستمر و اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \ln(\infty) = -\infty$



$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $\boxed{22}$

$]0, +\infty[$ ② $y = x - 4$ ① متغيرات

③ وضع ④ الرسم

الحل:

① $f(x) = x - 4 + \ln(x) - \ln(x+1)$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

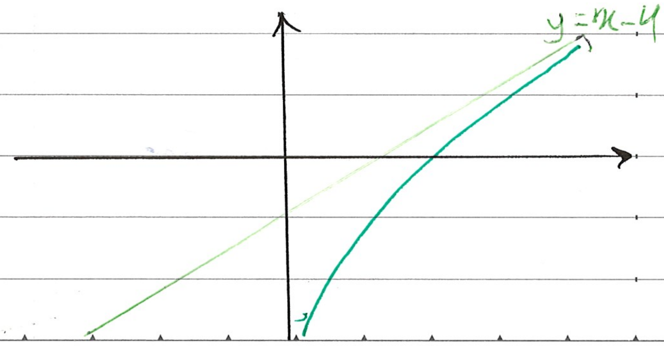
$= \frac{x(x+1) + x + 1 - x}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} > 0$

$f$ متزايدة تماما

② $f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - y) = \ln(1) = 0$

$y = x - 4$ مقارب مائل في جوار $+\infty$




Sabbagh

$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < \ln(1)$

$f - y < 0$

C تحت Δ

④ $f$: مستمر ومطرد تماما على $]1,2[$

$f(1) = 1 - \ln(3) = -0,1 < 0$

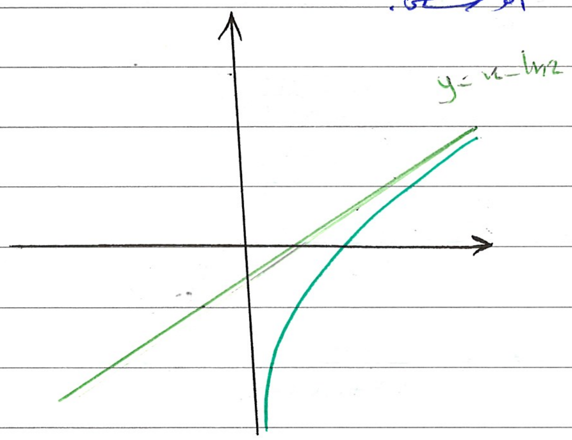
$f(2) = 2 - \ln(\frac{5}{2}) > 0$

ومنه $f(1) \times f(2) < 0$

إذن يوجد للمعادلة $f = 0$ حل وحيد

$\alpha \in ]1,2[$ حسب مبرهنة القيم

الوسطى.




$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ $\boxed{24}$

$I = ]4, +\infty[$

① $y = 5 - 2x$ ② وضع

③ تغيرات ④ $f = 0$ α, حصره.

الحل:

$f(x) - y = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} (f - y) = 3\ln(1) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \ln(2)$
$= +\infty$

$f(x) = x - \ln(2x+1) + \ln(x)$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x}$

$= \frac{x(2x+1) - 2x + 2x + 1}{x(2x+1)}$

$= \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)} > 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | \|\| | $+$ | |
| $f$ | \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

② $f - y = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x + \ln 2$

$= \ln 2 - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

$= \ln\left(\frac{\frac{2}{1}}{\frac{2x+1}{x}}\right)$

$= \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} (f - y) = \ln(1) = 0$

إذن

$y = x - \ln 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$\cdot\ f - y = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$\frac{2x}{2x+1} < 1$

ندخل $x$ بشرط أن تكون موجبة .

$x(\ln(x))^2$

$= (\sqrt{x}\ln(x))$ $= (2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x)$

$(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})$

$(2)(0)=0$

Date : / / Subject:

$y = 5 - 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

$f(x) - y = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$\frac{x+1}{x-4} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$

$3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0 \Rightarrow f - y > 0$

$C$ فوق $\Delta$

③ $f$ معرف ومستمر ، اشتقاقي على $]4,+\infty[$

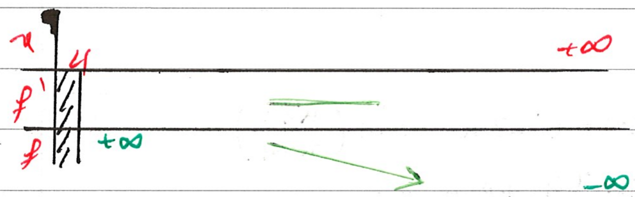
$\lim_{x\to 4} f(x) = -3 + 3\ln +\infty = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$

$f' = -2 + 3 \dfrac{\frac{x-4-x-1}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}$

$= -2 + 3\dfrac{-5}{(x+1)(x-4)}$

$= -2 + \dfrac{-15}{(x+1)(x-4)} < 0$




$f$ : مستمر ومتناقص تماماً على $]4,+\infty[$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty > 0$

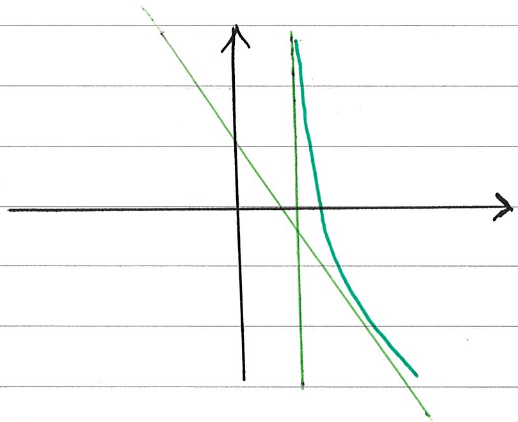
$f(5) = -5 + 3\ln(6) > 0$

$f(6) = -7 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) < 0$

$f(5) \times f(6) < 0$

إذاً يوجد حل وحيد للمعادلة $f=0$

$\alpha \in ]5,6[$



$f(x) = x + \ln(x^2-1) \quad ]1,+\infty[$ $\boxed{25}$

① $f$ متزايد ② $f = 0$

③ $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

الحل

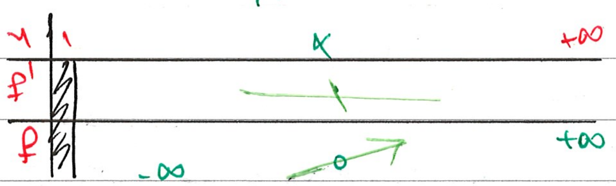
$f' = 1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0$ ①

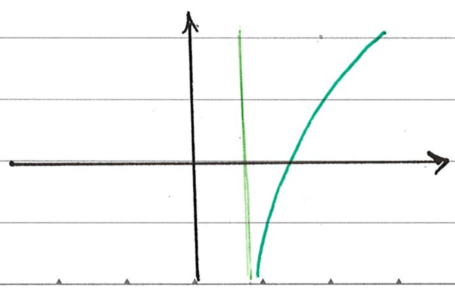
ومنه $f$ متزايد تماما

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$ ②

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$f' > 0$



Date : / /

Subject:

• أفهم من جدول التغيرات أن $f$ مستمر ومطرد تماماً على $]1,+\infty[$ كما أن الـ (0) تنتمي لصورة هذا المجال

إذن يوجد $\alpha \in ]1,+\infty[$ يكون حلاً للمعادلة

$f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty < 0$

$f(\sqrt{1+\frac{1}{e}}) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln(1+\frac{1}{e}-1)$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0$

ومنه

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \times f(\sqrt{1+\frac{1}{e}}) < 0$

إذن للمعادلة $f=0$ حل وحيد

$\alpha \in ]1, \sqrt{1+\frac{1}{e}}[$

$\boxed{27}$ $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ $]1,3[$

① $]1,3[$

② $4-x \in D_f$

③ a) احسب $f(4-x)+f(x)$

b) استنتج $A(2,0)$

④ نهايات

⑤ تغيرات

⑥ الـ ...

**الحل:**

معرف من أجل: $\frac{x-1}{3-x} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الكسر | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | |
| المتراجحة | | ////// | | ( | | ////// | |

$D_f = ]1,3[$

$x \in ]1,3[ \quad -x \in ]-3,-1[$

$4-x \in ]1,3[$

$4-x \in D_f$

$f(4-x) + f(x) = \ln\left(\frac{4-x+1}{3-4+x}\right) + f(x)$

$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + f(x)$

$= \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + f(x)$

$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{-1} + f(x) = -\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + f$

$-f(x) + f(x) = 0$ ✓

$x_0 = 2 \qquad 2x_0 - x = 4-x$

$y_0 = 0$

$\forall x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$

$4-x \in D_f$

الشرط الأول محقق

$f(2x_0-x) = 2y_0 - f(x)$

$f(2x_0-x) - f(x) = 2y_0$

$f(4-x) + f(x) = 0$ الشرط الثاني محقق

Sabbagh

$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ $\boxed{26}$

① $D_f$ ③ f متناظر

② نهايات ④ الرسم

معرف من أجل: $\frac{2x}{x-1} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الكل | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | |
| الإشارة | | ( | | ////// | | ( | |

$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ln(2)$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}}{\frac{2x}{x-1}} = \frac{-2}{2x(x-1)}$$

$f'(x) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | ////// | ////// | ////// | $-$ | |
| $f$ | $\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | ////// | $+\infty$ | $\searrow$ | $\ln 2$ |

إذن $A(2,0)$ هي مركز تناظر له

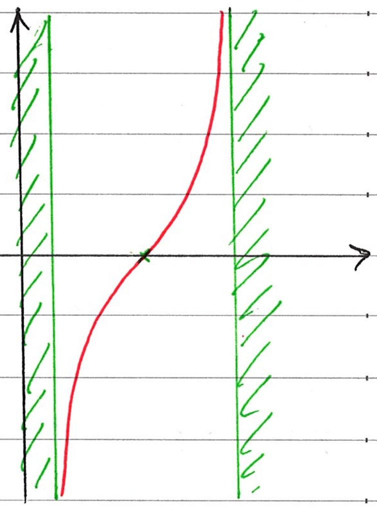
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln(0) = -\infty$

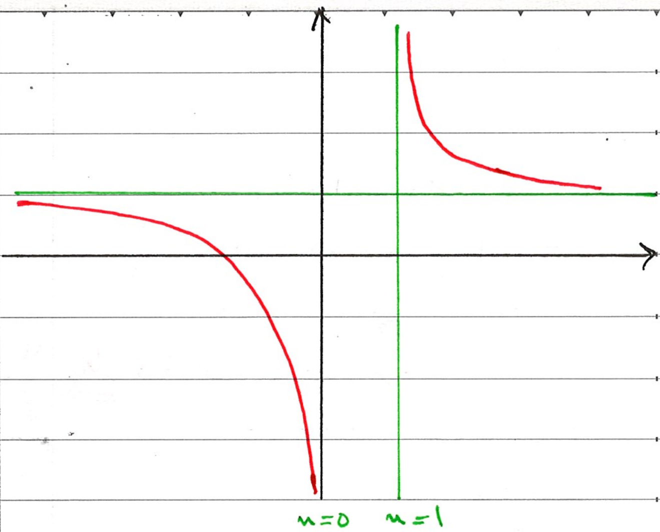
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{3-x+x-1}{(3-x)^2}}{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$= \frac{2}{(3-x)(x-1)} > 0$$

| $x$ | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | ////// | $+$ | ////// |
| $f$ | ////// $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ////// |






$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$ 28

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على $y'y$

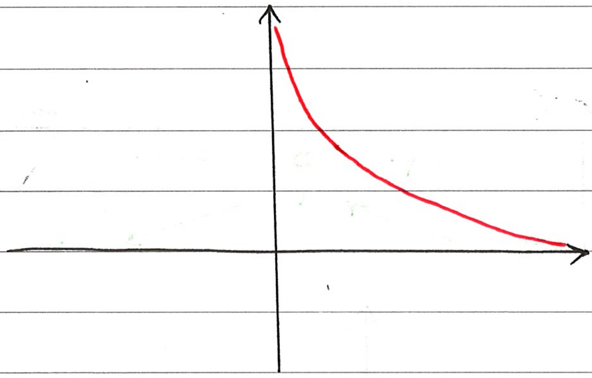
$y=0$ " أفقي " " $x'x$

$$f'(x)=\frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}-\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |



$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$ $]0,+\infty[$ 30

① نهاية $0$ $+\infty$ مقاربات

② تغيرات مع رسم

③ $M_1$ تقاطع $C$ مع $x'x$.

$M_2$ مماس عبر بالمبدأ

$M_3$ مماس $//\, ox$

$M_4$ تعدم $f''$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على $y'y$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x)-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-1-\ln x}{x^2}$$

$-\frac{1+\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2}$

$-1-\ln x_2 = \ln x_2$

$2\ln x_2 = -1 \Rightarrow \ln x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$M_3$ : مماس $\parallel ox \Leftrightarrow$

$m=0 \Rightarrow f'(x_3)=0$

$\frac{-\ln x_3}{x_3^2} = 0$

$-\ln x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$

$M_4$ : $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(-\ln x)}{x^4}$

$= \frac{-x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-1+2\ln x}{x^3}$

$f''=0 \Rightarrow -1+2\ln x=0$

$\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = \sqrt{e}$

$\frac{1}{e} \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \quad 1 \quad \sqrt{e}$

هي متتالية هندسية

أساسها $\sqrt{e}$

$\boxed{32}$ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\mathbb{R}_+^*$

① تغيرات ② $x_A = 1$

a) مماس في $A$ ③ $B \leftarrow U$

b) امماس

$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow -\ln x = 0$

$x=1 \Rightarrow f(1)=1$

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | + | 0 | − | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 |


$M_1$ : تقاطع C مع $x'x$ $\Leftarrow$

$f(x)=0 \Rightarrow 1+\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = e^{-1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{e}$

$M_2$ : $M_2(x_2, f(x_2))$

$m = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}$

$y - f(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}(x - x_2)$

يمر بالمبدأ

$-f(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}(-x_2)$

$u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

موازياً $y = x$

④ حل: $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

$f$: معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = 0$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4}$

$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $\quad f' = 0$

$\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$

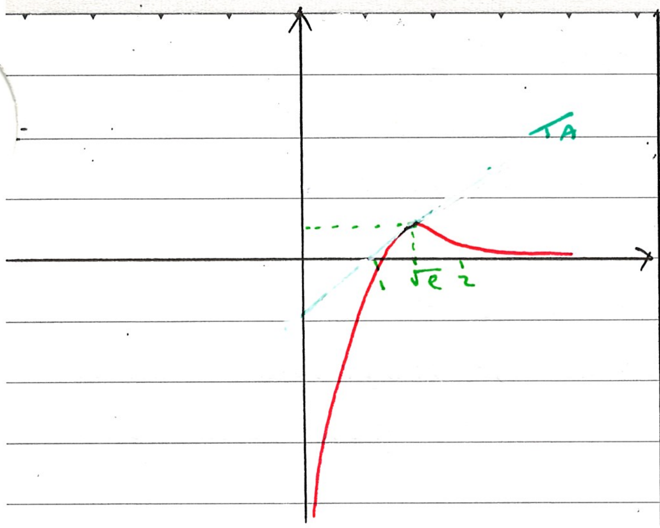
$f(\sqrt{e}) = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2e}$ | ↘ | $0$ |

②a) $f(1) = \frac{0}{1} = 0$

$m = 1$ $\quad A(1, 0)$

$T_A : y = x - 1$




③ $B(u, f(u))$

عاس في $B$ // مستقيم

$m_B = m_{\text{مستقيم}}$

$m_B = 1 \Rightarrow f'(u) = 1$

$\frac{1 - 2\ln u}{u^3} = 1$

$1 - 2\ln u = u^3$

$u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

④ $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

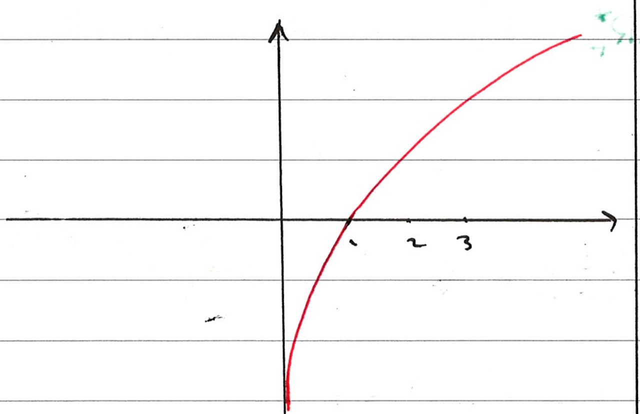
$h(u) = u^3 - 1 + 2\ln u$

$h'(u) = 3u^2 + \frac{2}{u} = \frac{3u^3 + 2}{u}$

| $u$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'$ | | | |
| $h$ | $-\infty$ | ↗ $0$ | $+\infty$ |

Date : / / Subject:

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




$f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$

f: مستمر ومعرف على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + \frac{1}{x}\cdot x$

$= -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$

لدراسة إشارة $f'$ نعتبره تابعاً وندرس تغيراته

$g(x) = \frac{-1}{x^2} + \ln x + 1$

$g'(x) = -\frac{0-2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $0$ | $+\infty$ |

نفرض $U=1 \Rightarrow 1-1+2\ln(1)=0$

ومنه $U=1$ حل للمعادلة:

$U^3 - 1 + 2\ln U = 0$

$f(1)=0$

$B(1,0) = A$

أي هناك نقطة وحيدة A يكون فيها المشتق

موازياً للمستقيم $y=x$

$\boxed{29}$ $f(x) = (x+1)\ln x$

f: معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x+1)$

$= \ln x + \frac{1}{x} + 1$

$h(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

$h'=0 \Rightarrow x=1 \qquad h(1)=2$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'$ | ‖ | $-$ | $+$ |
| $h$ | ‖ | $\searrow$ $2$ | $\nearrow$ |

$h>0 \Rightarrow f'>0$

$$= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| \times \left|\frac{x}{x-1}\right|\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x} \times \frac{x}{x-1}\right|\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(1-x) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x) + f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$$

$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}$

$2x_0 - x = 1 - x$ $\quad y_0 = -\frac{1}{4}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$-x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$

$1-x \in \mathbb{R} \setminus \{1,0\}$

والشرط الأول محقق.

$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$

$f(1-x) = -\frac{1}{2} - f(x)$

$f(1-x) - f(x) = -\frac{1}{2}$

$\frac{f(1-x) - f(x)}{2} = -\frac{1}{4}$

وهو محقق سابقاً.

إذن $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر

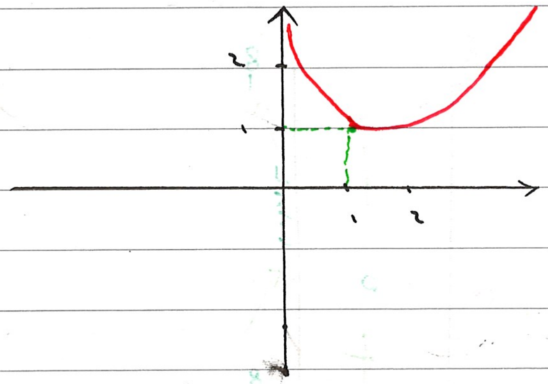
② $f$: معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty + \ln(1) = -\infty$$

$g > 0 \quad ]1, +\infty[$

$g < 0 \quad ]-\infty, 1[$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |



$\boxed{34}$

$$f(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

① a)

$$\frac{f(x) + f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$$

b) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

② تغيرات $\quad y = -\frac{1}{2}x$ ③

$$f(x) - f(1-x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{-1+x}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$

$$= \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| - \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| \cdot \left|\frac{-x}{1-x}\right|\right) - \frac{1}{2}$$

Date : / / Subject:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow x(x-1) = 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$x = -1 \qquad f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$

$x = 2 \qquad f(2) = -1 + \ln\frac{1}{2}$

$= -1 - \ln 2$

| $x$ | $f'$ | $f$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | | $+\infty$ |
| | $-$ | |
| $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}+\ln 2$ |
| | $+$ | |
| $0$ | ‖ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ |
| | $-$ | |
| $1$ | ‖ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ |
| | $+$ | |
| $2$ | $0$ | $-1-\ln 2$ |
| | $-$ | |
| $+\infty$ | | $-\infty$ |

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \ln\left|\frac{1}{0}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

للتخلص من إشارة القيمة المطلقة

ندرس إشارة ما داخل القيمة المطلقة.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| الحاصل | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| المطلقة | | | ‖ | | ‖ | | |

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[ \\ -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ]0,1[ \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{x-x+1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} \\ -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{-x+x-1}{x^2}}{\frac{-x+1}{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} \\ \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{سالب}} + \underbrace{\frac{-1}{x(-x+1)}}_{\text{سالب}} < 0 \end{cases}$$

$$f' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = 0$$

Sabbagh

Date :        /     /                                        Subject:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f-y$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | C فوق D | ‖ | C فوق D | $-\frac{1}{4}$ نقطة تقاطع | C تحت D | ‖ | C تحت D | |