البحث الرابع:
الأعداد العقدية: (الأعداد المركبة)

مجموعة الأعداد المركبة هي أكبر المجموعات العددية

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

تكرورية:

كل عدد حقيقي هو عدد مركب (عقدي)

لكن العكس ليس صحيح.

الشكل الجبري لعدد عقدي:

$z = a + bi$

نسمي z عدد عقدي ويقسم إلى قسمين:

- قسم حقيقي: $Re(z) = a$
- قسم تخيلي: $Im(z) = b$

مثال:

عين القسم الحقيقي والقسم التخيلي لـ z:

$z = 2 + 3i$

$Re(z) = 2$

$Im(z) = 3$

$z = 2i$

$Re(z) = 0$

$Im(z) = 2$

مرافق عدد عقدي $\bar{z}$:

$\boxed{z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi}$

نغير إشارة القسم التخيلي فقط.

مثال:

أوجد مرافق العدد z:

$z = 3 - i$

$\bar{z} = 3 + i$

$z = 2$

$\bar{z} = 2$

$z = 3i$

$\bar{z} = -3i$

العمليات على الأعداد العقدية:

الجمع والطرح:

نجمع ونطرح حقيقي مع حقيقي وتخيلي مع تخيلي.

تدريب:

ليكن العددان العقديان :

$z_1 = 2 + 3i \quad , \quad z_2 = 1 + i$

أوجد بالشكل الجبري:

$z_1 + z_2 \ , \ z_1 - z_2 \ , \ z_2 - z_1$

$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 + i = 3 + 4i$

$z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - i = 1 + 2i$

$z_2 - z_1 = 1 + i - 2 - 3i = -1 - 4i$

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

العمليات على i:

ندعو i هو عدد تخيلي قيمته: لا نعوض

$i = \sqrt{-1}$

(لا يوجد جذر سالب)

نعوض: $i^2 = -1$ دائماً.

$i^a . i^b = i^{a+b}$

$\frac{i^a}{i^b} = i^{a-b}$

$(i^a)^b = i^{a.b}$

مثال: أوجد ناتج ما يلي:

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = 1$

$i^8 = (i^4)^2 = 1$

$i^9 = i^8 . i^1 = i$

$i^{2018} = (i^2)^{1009} = -1$

$i^{2001} = i^{2000} . i^1 = (i^2)^{1000} . i = i$

تكرورية هامة:

$(-1)^{\text{فردي}} = -1, \ (-1)^{\text{زوجي}} = 1$

ضرب الأعداد العقدية:

نضرب وننشر كما في الأعداد الحقيقية مع الانتباه أن $i^2 = -1$

تدريب: ليكن العددان العقديان

$z_1 = 3 + 2i \quad , \quad z_2 = 1 - i$

اكتب بالشكل الجبري $(a + bi)$

$z_1 . z_2 \quad , \quad z_1^2 \quad , \quad z_2^2$

$z_1 . z_2 = (3 + 2i)(1 - i)$

$= 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 5 - i$

$z_1^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2$

$= 5 + 12i$

$z_2^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

تكرورية أهم من حياتي:

$z = a$ حقيقي بحت (مرافقه نفسه)

$z = bi$ تخيلي بحت (مرافقه عكس الاشارة)

$(a.z)^n = a^n . z^n$

$(iy)^2 = i^2 . y^2$

تدريب:

ليكن العدد العقدي $z = -1 + i$

اثبت أن z^8 عدد حقيقي.

$z^8 = (-1 + i)^8 = ((-1 + i)^2)^4$

$= (1 - 2i - 1)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$

099 444 60 57 | احمد تكروري | @Ahmad_Tkrory | احمد تكروري رياضيات

قسمة الأعداد العقدية:

عند القسمة على عدد عقدي نضرب البسط والمقام بمرافق المقام؛ لإزالة i من المقام.

(لايجوز وجود i في المقام)

تكرورية هامة

$$(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$$

تدريب: ليكن العددان العقديان

$z_1=3+2i \qquad ,z_2=2-i$

اكتب بالشكل الجبري:

$$\frac{1}{z_1}\ ,\ \frac{1}{z_2}\ ,\ \frac{z_1}{z_2}\ ,\ \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{3+2i}=\frac{1}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}$$

$$=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

$$\frac{1}{z_2}=\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{4+1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$=\frac{6+7i-2}{4+1}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2-i}{3+2i}=\frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$=\frac{6-4i-3i-2}{9+4}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$$

تكروريات من الماضي:

- المثلث القائم يحوي على زاوية قائمة.
- الزوايا القائمة قياسها $90°$.
- الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر.
- مجموع زوايا أي مثلث $180°$

النسب المثلثية:

$$\sin C=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}=\frac{AB}{CB}$$

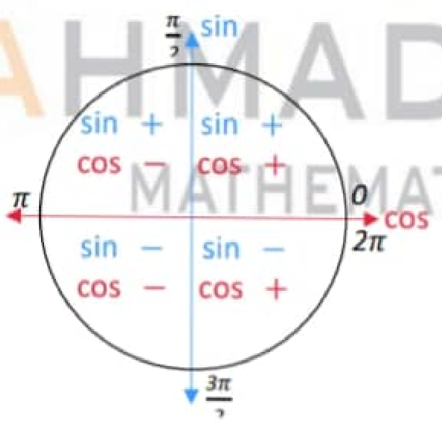
$$\cos C=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}=\frac{CA}{CB}$$

$$\tan C=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{AB}{CA}$$

زوايا شهيرة:

θ	$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\pi}{3}=60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

الدائرة المثلثية:



احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

θ	0	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$
sin	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0

الإرجاع إلى الربع الأول:

إذا وقعت الزاوية في الربع الثاني:

$90° \to 180°$

نعطيها حتى تصبح $180°$ مع الانتباه إلى الإشارات

$cos(-)\ sin(+)$

مثال:

$$sin(120) = +sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(150) = -cos(30) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذا وقعت الزاوية في الربع الثالث:

$180° \to 270°$

نأخذ منها 180 ثم نناقش الحالات:

$sin(-)\ cos(-)$

مثال:

$$sin(210) = 2\,sin(30) = -\frac{1}{2}$$

$$cos(240) = -cos(60) = -\frac{1}{2}$$

إذا وقعت الزاوية في الربع الرابع:

$270° \to 360°$

نعطيها حتى تصبح 360 ثم نناقش

$sin(-)\ cos(+)$

مثال:

$$cos(315) = cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin(300) = -sin(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الزاوية تقاس ب:

$\overbrace{\text{الدرجة °} \qquad \text{الراديان rad}}$

العلاقة بين الدرجة والراديان:

$\boxed{\pi\, rad = 180°}$

كيف نحول من راديان إلى درجة:

نبدل كل π ب $180°$.

مثال:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$$

$$\frac{2\pi}{3} = 2 \times \frac{180}{3} = 120°$$

كيف نحول من درجة إلى راديان:

نضرب ب $\frac{\pi}{180}$

مثال:

$$30° = 30° \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$150° = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

الشكل المثلثي لعدد عقدي:

$$\boxed{z = r[\cos\theta + i\sin\theta]}$$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

r عدد موجب دوما

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

① نحدد الربع

② نحدد الزاوية θ

كيف نوجد θ:

❶ نحدد في أي ربع:

① $\sin+ , \cos+ \Leftarrow$ الربع الأول $\Leftarrow \theta$

② $\sin+ , \cos- \Leftarrow$ الربع الثاني $\Leftarrow \pi - \theta$

③ $\sin- , \cos- \Leftarrow$ الربع الثالث $\Leftarrow \pi + \theta$

④ $\sin- , \cos+ \Leftarrow$ الربع الرابع $\Leftarrow -\theta$

❷ نحدد الزاوية حسب الزاوية الشهيرة

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$$

تدريب: حول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي:

❶ $z = -\sqrt{3} + i$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$r = |z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ربع ثاني}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$$

❷ $z = -1 - i$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$$

❸ $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$r = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

❹ $z = 1 - i\sqrt{3}$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$z = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

❺ $z = \sqrt{3} - i$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

تدريب: حول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي:

❶ $z = 2 + i(0)$

$r = \sqrt{4+0} = 2$

$\cos\theta = \frac{2}{2} = 1 \ , \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 2\pi$

$z = 2[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$

❷ $z = 3i + 0$

$r = 3$

$\cos\theta = 0 \, , \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$z = r\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

❸ $z = 5$

$r = \sqrt{25} = 5$

$\cos\theta = -i \ , \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi$

$z = 5[\cos\pi + i\sin\pi]$

❹ $z = -4i$

$r = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = 0 \ \ , \sin\theta = -1$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$z = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

تكرورية:

$\sin(-) = -\sin(\ )$

$\cos(-) = \cos(\ )$

$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

❻ $z = 4 - 4i$

$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$r = \sqrt{16+16} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$z = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

❼ $z = 2\sqrt{3} - 6i$

$r = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = 4\sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$z = 4\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

تكرورية:

عندما نجد $\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 0$

لإيجاد θ نستخدم الدائرة المثلثية:

$z = bi \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$z = a \rightarrow \begin{cases} \theta = 0, \ 2\pi \\ \theta = \pi \end{cases}$

تدريب: حول من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري:

❶ $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

❷ $z = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$z = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

❸ $z = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2(180)}{3} = 120$

$z = 2[\cos 120 + i\sin 120]$

$z = 2[-\cos 60 + i\sin 60]$

$z = 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + i\sqrt{3}$

❹ $z = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$

$\frac{7\pi}{6} = \frac{7(180)}{6} = 210$

$z = 2[\cos(210) + i\sin(210)]$

$z = 2[-\cos(30) - i\sin(30)]$

$z = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = -\sqrt{3} - i$

❺ $z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

$z = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

$\frac{5\pi}{3} = \frac{5(180)}{3} = 300$

$z = 4[\cos(300) - i\sin(300)]$

$z = 4[\cos(60) + i\sin(60)]$

$z = 4\left[\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$

$z = 2 + 2\sqrt{3}i$

العمليات على الشكل المثلثي:

ليكن العددان العقديان:

$z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$

$z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

الضرب:

نضرب الطويلة بالطويلة ثم نجمع الزاوية.

$z_1.z_2 =$

$r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

القسمة:

نقسم الطويلة على الطويلة ثم نطرح الزاوية:

$\frac{z_1}{z_2} =$

$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

الأس:

$z^n = r^n[\cos n.\theta + i\sin n.\theta]$

عندما يكون $r = 1$ ندعو دستور دموافر

تدريب: ليكن العددان العقديان:

$$z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

اكتب بالشكل المثلثي: z_1^3 ، $\frac{z_1}{z_2}$ ، $z_1 . z_2$

$$z_1 . z_2 =$$

$$2 \times 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1^3 = 2^3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 8[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$$

تدريب: اكتب بالشكل المثلثي:

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

نفرض البسط $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$$r_1 = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{2}, \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

نفرض المقام $z_2 = 1 + i$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

$$z = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

تدريب: ليكن العدد العقدي

$$z = -1 + i$$

أثبت أن z^8 عدد حقيقي.

$$z^8 = (-1+i)^8 = ((-1+i)^2)^4$$

$$= (1 - 2i - 1)^4 = (-2i)^4 = 16$$

تدريب: اكتب بالشكل المثلثي

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$$

نفرض البسط z_1 ثم نفرض المقام z_2

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5$$

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$r_1 = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2 = i$$

$$r_2 = 1$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5 = 2^5\left[\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 32\left[\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

تدريب: ليكن العددان العقديان

$1 + i\sqrt{3}\,, 1 - i\sqrt{3}$

أثبت أن $z = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$

عدد حقيقي.

$$z = z_1^5 + z_2^5$$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$r_1 = \sqrt{4} = 2$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\,, \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1^5 = 32\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

$r_2 = 2$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\,, \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_2^5 = 32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = z_1^5 + z_2^5$$

$$= 32\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 32\left[2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 64\cos(300)$$

$$= 64\cos(60) = 64\left(\frac{1}{2}\right) = 32$$

عدد $z = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$

تخيلي بحت.

تدريب: اكتب بالشكل المثلثي:

$$(1+i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$z_1 = 1 + i$

$r_1 = \sqrt{2}$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$z = z_1 . z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right]$$

تكرورية:

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

تدريب: اكتب بالشكل المثلثي:

$$z=\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$$

$$z=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5$$

حسب دموافر:

$$z=\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

تدريب:

ليكن العددان

$$z_2=1-i\ ,z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$$

① اكتب بالشكل المثلثي $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$

② اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$

③ استنتج أن $\cos\frac{\pi}{12}\ ,\sin\frac{\pi}{12}$

① $z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$

$$r_1=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta_1=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta_1=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_1=-\frac{\pi}{6}$$

$$z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2=1-i$$

$$r_2=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$,\sin\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta_2=-\frac{\pi}{4}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

②

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}}{\frac{1-i}{1}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2-2i}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)}{4+4}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}i-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

③ مثلثي $\frac{z_1}{z_2}$ = جبري $\frac{z_1}{z_2}$

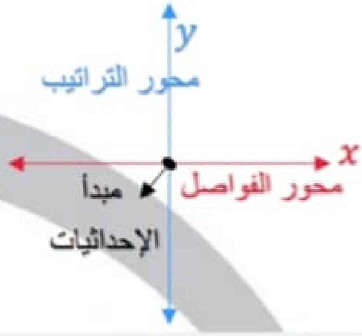
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

تمثيل العدد العقدي بالمستوي:

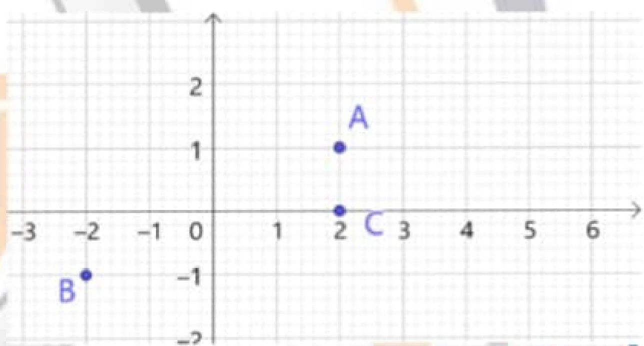
المستوي



النقطة (x,y)

تدريب: مثل النقاط التالية على المستوي

$A(2,1)$ $B(-2,-1)$ $C(2,0)$



صورة العدد العقدي:

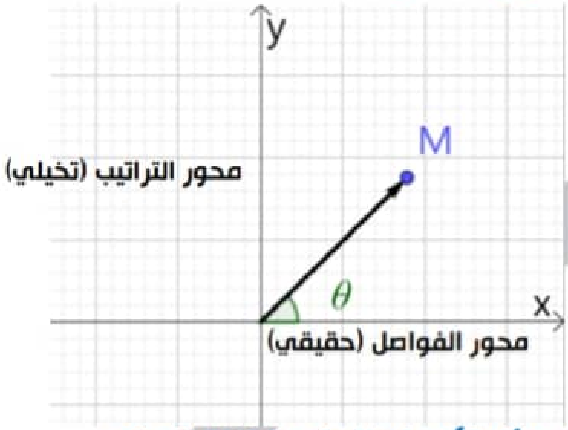
يمكن أن نربط كل عدد عقدي بنقطة

$$z = a + bi \Rightarrow M(a,b)$$

هذه النقطة لها شعاع $\overrightarrow{OM}$ هذا الشعاع له زاوية θ حيث θ هي الزاوية بين محور ox ومنحى الشعاع.

ندعو هذا الشعاع وهذه الزاوية صورة العدد العقدي.

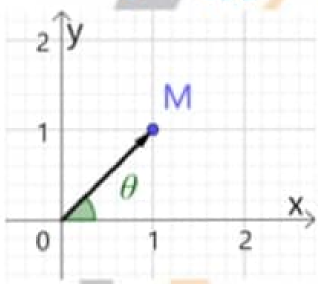
المستوي العقدي:



تدريب: مثل الأعداد العقدية التالية على المستوي العقدي ثم أعط زاوية لكل عدد

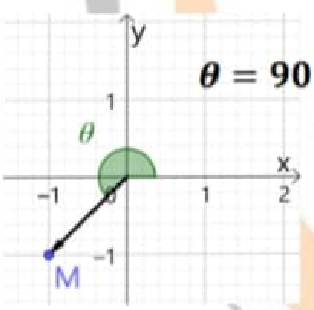
① $z = 1 + i$

$\theta = 45°$

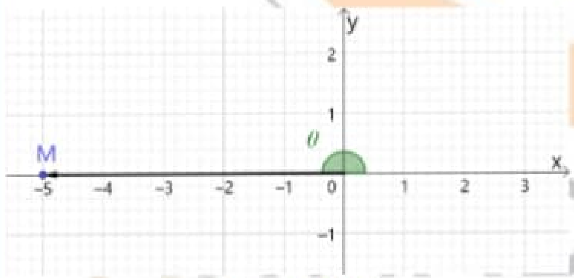


② $z = -1 - i$

$\theta = 90 + 90 + 45 = 225°$

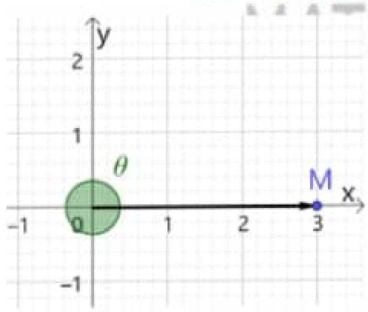


③ $z = -5$



$\theta = 180°$

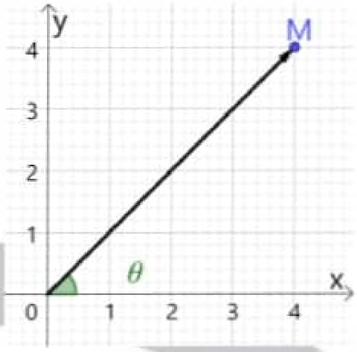
④ $z = 3$



$\theta = 2\pi$

$z = 4 + 4i$ ⑤

$\theta = 45°$



الشكل الأسي لعدد عقدي:

$$\boxed{z = r.e^{i\theta}}$$

حيث $e^{i\theta} = [\cos\theta + i\sin\theta]$

تدريب: حول من الشكل الجبري إلى الشكل الأسي:

① $z = 1 + i$

$r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} , \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

② $z = \sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} , \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$

العمليات على الشكل الأسي:

$z_1 = r_1.e^{i\theta_1} \quad , \quad z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$

الضرب:

نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزاوية.

$$z_1.z_2 = r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

القسمة:

نقسم الطويلة على الطويلة ثم نطرح الزاوية.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

الأس:

$$z^n = r^n.e^{n\theta i}$$

المرافق:

$$z = r.e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = r.e^{-\theta i}$$

تدريب: لتكن الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i} , z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{4}i} , z_3 = \sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

اكتب بالشكل الأسي:

$z_1.z_2 , \frac{z_1}{z_2} , z_1.z_2.z_3 , z_3^4 , \frac{z_2}{z_3}$

$z_1.z_2 = 3.e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_1.z_2.z_3 = 3\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 3\sqrt{3}.e^{i\frac{9\pi}{12}}$

$= 3\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_3^4 = 9.e^{i\frac{8\pi}{3}}$

$$\frac{z_2}{z_3}=\frac{3}{\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}.e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}-\frac{8\pi}{12}\right)}$$

$$=\sqrt{3}.e^{-\frac{11\pi}{12}i}$$

علاقتا أويلر:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

تدريب: حول من الشكل الأسي إلى الشكل الجبري:

❶ $z=2.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$z=2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

❷ $z=\frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$=\frac{3}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]=\frac{3}{2}[0+i]$$

$$=\frac{3}{2}i$$

❸ $z=\sqrt{3}.e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$z=\sqrt{3}\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\frac{2\pi}{3}=120°$$

$$z=\sqrt{3}[\cos 120+i\sin 120]$$

$$=\sqrt{3}[-\cos 60+i\sin 60]$$

$$=\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

تدريب: حول من الشكل الجبري إلى الأسي:

❶ $z=2\sqrt{3}-6i$

$$r=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}$$

$$r=4\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=-\frac{6}{4\sqrt{3}}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$$

$$z=4\sqrt{3}.e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

❷ $z=(1+i)\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$z_1=1+i$$

$$r_1=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\sin\theta=1\Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$z_1=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z=z_1.z_2=\sqrt{6}.e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{6}.e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

❸ $z=(1+\sqrt{3}i)^5.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$$z_1=1+\sqrt{3}i$$

$$r_1=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta_1=\frac{1}{2},\sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$z_1=2.e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$z_1^5=32.e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

$$z=32.e^{\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)i}\Rightarrow z=32.e^{3\pi i}$$

تكرورية عالسريع:

$z=-1 \Rightarrow$ أسي $\Rightarrow z=e^{i\pi}$

$z=i \Rightarrow$ أسي $\Rightarrow z=e^{\frac{\pi}{2}i}$

$z=1 \Rightarrow$ أسي $\Rightarrow z=e^{2\pi i}$

$z=-i \Rightarrow$ أسي $\Rightarrow z=e^{\frac{3\pi}{2}i}$

تدريب: اكتب بالشكل الأسي:

1. $z=-12.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=(-1)(12).e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=e^{i\pi}.12.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=12.e^{\frac{5\pi}{4}i}$

2. $z=3i.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z=3.e^{\frac{\pi}{2}i}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z=3.e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)i}$

$z=3.e^{\frac{5\pi}{6}i}$

3. $z=(1-\sqrt{2}).e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\sqrt{2}\approx 1.4 \quad , \quad (a-b)=-(b-a)$

$z=-1(\sqrt{2}-1).e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=(\sqrt{2}-1).e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=(\sqrt{2}-1).e^{\frac{5\pi}{4}i}$

4. $z=\frac{6}{1+i}$

$z_1=6$

$\cos\theta=\frac{6}{6}=1 , \sin\theta \Rightarrow \theta=2\pi$

$z_1=6.e^{2\pi i}$

$z_2=1+i \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$z_2=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z=\frac{z_1}{z_2}$

$z=\frac{6}{\sqrt{2}}.e^{\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)i}$

$z=3\times\frac{2}{\sqrt{2}}.e^{\frac{7\pi}{4}i}$

$\Rightarrow z=3\sqrt{2}.e^{\frac{7\pi}{4}i}$

5. $z=\frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

$z=\frac{z_1^5}{z_2^4}$

$z_1=2\sqrt{3}+2i$

$r_1=\sqrt{12+4}=4$

$\cos\theta_1=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} , \sin\theta_1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$

$z_1=4.e^{\frac{\pi}{6}i}$

$z_1^5=4^5.e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$z_2=1-i$

$r_2=\sqrt{2}$

$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}} , \sin\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \theta_2=-\frac{\pi}{4}$

$z_2=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$z_2^4=4e^{-\pi i}$

$z=\frac{z_1^5}{z_2^4}=\frac{4^5}{4}e^{\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)i}$

$\Rightarrow z=256e^{\frac{11\pi}{6}i}$

تكرورية:

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta . \cos\theta$

6. $z = 1 + e^{2\theta i}$

$z = 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

$z = 2\cos^2\theta + i[2\sin\theta . \cos\theta]$

$z = 2\cos\theta\,[\cos\theta + i \sin\theta]$

$r = 2\cos\theta$

$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

جذر عدد عقدي:

يوجد حالتين:

شكل جبري — **شكل أسي**

الحالة الأولى: شكل جبري

إذا أعطى z بالشكل الجبري $z = a + bi$

وطلب جذري z ماذا نفعل؟

1. نفرض $w = x + iy$ جذراً لـ z.
2. كونه جذر يجب أن يتحقق $w^2 = z$
3. نبحث عن x, y من خلال:

① $x^2 - y^2 = a$

② $x^2 + y^2 = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

③ $x.y = \frac{b}{2}$

$x.y > 0 \Leftarrow x, y$ من نفس الإشارة

$x.y < 0 \Leftarrow x, y$ مختلفين بالإشارة

تدريب: أوجد جذري العدد العقدي:

$z = 3 + 4i$

نفرض $w = x + iy$ جذراً لـ z.

كونه جذراً يجب أن يتحقق $w^2 = z$

نبحث عن x, y من خلال:

$x^2 - y^2 = 3 \;...(1)$
$x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \;...(2)$
$x.y = 2 \;...(3)$

لـ x, y نفس الإشارة

نجمع (2) و(1) نجد:

$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$4 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$
$w_1 = 2 + i$
$w_2 = -2 - i$

تدريب: أوجد جذري العدد العقدي

$z = 4 - 2\sqrt{5}i$

نفرض $w = x + iy$ جذراً لـ z

كونه جذراً لـ z يجب أن يتحقق: $w^2 = z$

نبحث عن x, y من خلال:

$x^2 - y^2 = 4$
$x^2 + y^2 = \sqrt{16+20} = \sqrt{36} = 6$
$x.y = -\frac{2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$

x, y مختلفين بالإشارة.

$2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$5+y^2=6 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$w_1=\sqrt{5}-i$

$w_2=-\sqrt{5}+i$

الحالة الثانية:

إذا أعطى z بالشكل الأسي $z=re^{i\theta}$

1. نوجد صيغة الجذر العامة.

$$w=\sqrt{r}.e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi k\right)i}$$

2. عندما $k=0$ جذر أول:

$$w_1=\sqrt{r}.e^{\frac{\theta}{2}i}$$

3. عندما $k=1$ جذر ثاني:

$$w_2=\sqrt{r}.e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)i}$$

تدريب: أوجد جذر العدد العقدي:

1. $z=4.e^{\pi i}$

$$w=\sqrt{r}.e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi k\right)i}$$

$$w=\sqrt{2}.e^{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i}$$

عندما $k=0$:

$$w_1=2.e^{\frac{\pi}{2}i}$$

عندما $k=1$:

$$w_2=2.e^{\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)i}=2.e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

1. $z=8.e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$w=2\sqrt{2}.e^{\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)i}$$

عندما $k=0$:

$$w_1=2\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

عندما $k=1$:

$$w_2=2\sqrt{2}.e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

حل المعادلات في $\mathbb{C}$

حل معادلة من الدرجة الأولى:

شكل أول: يحوي على z, z'

بالحذف بالتعويض.

شكل ثاني: يحوي على $\bar{z}, z$

نبدل بدل كل z بـ $x+iy$

ونبدل كل $\bar{z}$ بـ $x-iy$

حل معادلة من الدرجة الثانية:

الشكل العام:

$$az^2+bz+c=0$$

وتحل بـ $\Delta=b^2-4ac$ ونميز أربع حالات:

① $\Delta>0$ لها حلان:

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\quad z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

② $\Delta=0$ جذر مضاعف

$$z=-\frac{b}{2a}$$

③ $\Delta<0$ لها حلان:

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ ,\quad z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

حيث أحدهما مرافق الثاني.

④ عدد عقدي $= \Delta$ للمعادلة حلان

لإيجادهما نتبع:

❶ نوجد جذري Δ

❷ نختار أحد الجذرين : أحد الجذرين $= \sqrt{\Delta}$

❸ الحلان هنا:

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} , z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

وهما مترافقان

حل معادلة من الدرجة الثالثة:

شكلها العام:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

تحل المعادلة من الدرجة الثالثة بالتجريب.

تدريب: حل في $\mathbb{C}$ كلاً من المعادلات الآتية بالمجهولين z, z'

❶ $3z + z' = 2 - 5i$
$z - z' = -2 + i$

بالجمع

$4z = -4i \Rightarrow \boxed{z = -i}$

نعوض في المعادلة الأولى

$-3i + z' = 2 - 5i \Rightarrow \boxed{z' = 2 - 2i}$

❷ $3z + z' = 5 + 2i$
$-z + z' = 1 - 2i$

$z' = 5 + 2i - 3z$

$-z + 5 + 2i - 3z = 1 - 2i$

$-4z = -4 - 4i \Rightarrow \boxed{z = 1 + i}$

$z' = 5 + 2i - 3(1 + i)$

$\Rightarrow z' = 5 + 2i - 3 - 3i$

$\Rightarrow \boxed{z' = 2 - i}$

❸ $2iz + z' = 2i$
$3z - iz' = 1$

$z' = 2i - 2iz$

$3z - i(2i - 2iz) = 1$

$3z + 2 + 2z = 1$

$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{5}}$

$z' = 2i + \frac{2}{5}i \Rightarrow \boxed{z' = \frac{12}{5}i}$

تدريب: حل المعادلات في $\mathbb{C}$:

❶ $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(5)$
$= 16 - 20 = -4 < 0$

$\Rightarrow -\Delta = 4 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$$

$$z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$$

تكرورية: في حل المعادلة في $\mathbb{C}$:

$az^2 + bz + c = 0$

- نحل المعادلة ونوجد z_1, z_2
- نكتب بالشكل $a(z - z_1)(z - z_2) = 0$

$(z - 2 - i)(z - 2 + i) = 0$

❷ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4 < 0$

للمعادلة حلين

$\sqrt{-\Delta} = 2$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6+2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$2\left(z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0$$

تدريب: حل المعادلات في $\mathbb{C}$

❶ $z^2 - (2+2\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (2+2\sqrt{2})^2 - 4(1)(2\sqrt{2}+4)$

$\Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 16 = -4$

$\Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$

$$z_1 = \frac{2+2\sqrt{2}+2i}{2} = 1 + \sqrt{2} + i$$

$z_2 = 1 + \sqrt{2} - i$

تكرورية:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

❷ $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4$

$= 4[\cos^2\theta - 1] = -4\sin^2\theta < 0$

$-\Delta = 4\sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2\sin\theta$

$$z_1 = \frac{+2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2}$$

$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

تدريب: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$

$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$

$\Delta = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$

$\Rightarrow \Delta = 5 + 12i$

نعوض $w = x + iy$ جذراً لـ Δ

كونه جذراً $w^2 = \Delta$ نبحث عن x, y من خلال

$x^2 - y^2 = 5$

$x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$x.y = 6$

x, y لهما نفس الإشارة.

$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$9 + y^2 = 13 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$w_1 = 3 + 2i$

$w_2 = -3 - 2i$

$\sqrt{\Delta} = w_1 , \quad \sqrt{\Delta} = w_2$

$$z_1 = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2} = \frac{-4-6i}{2} = -2 - 3i$$

تدريب : احسب جداء الضرب:

$(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5) = 0$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

$z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 2z^3 + 4z^2 + 10z - 3z^2 - 6z - 15 = 0$

$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

إما $z^2 + 2z - 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$z_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \,,\, z_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

أو $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 4$$

$$z_3 = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i$$

$$z_4 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$$

تدريب: جد عددين عقديين p, q كي تقبل المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ العددين $3 - 5i \,,\, 1 + 2i$ جذرين فيها.

شكل المعادلة من الدرجة الثانية

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = 1, b = p, c = q$$

تذكرة:

- مجموع جذرين $= -\frac{b}{a}$
- جداء جذرين $= \frac{c}{a}$

المجموع:

$$3 - 5i + 1 + 2i = -\frac{p}{1} \Rightarrow -p$$
$$= 4 - 3i \Rightarrow p = -4 + 3i$$

الجداء:

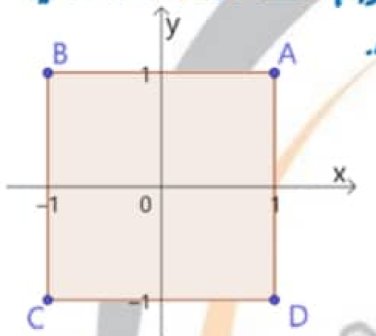
$$(3 - 5i)(1 + 2i) = q$$
$$\Rightarrow q = 3 + 6i - 5i + 10 \Rightarrow q$$
$$= 13 + i$$

تكرورية هامة:

إذا طلب الأعداد العقدية لرؤوس مضلع يوجد حالتين:

- زواياه قائمة: نوجد z بالشكل الجبري.
- زواياه ليست قائمة: نوجد z بالشكل المثلثي ثم نحوله إلى الشكل الجبري.

تدريب: $ABCD$ مربع، أعط الأعداد العقدية المعبرة عن رؤوسه.

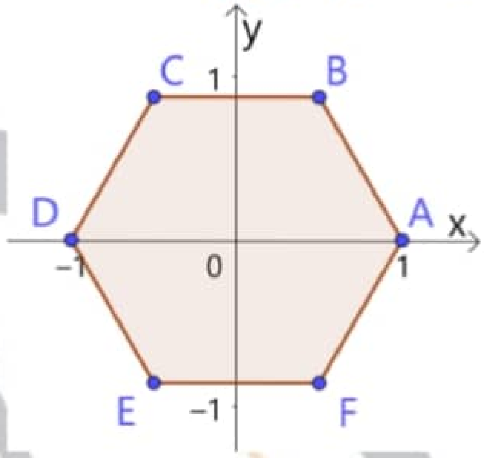


$$A(1,1) \Rightarrow z_A = 1 + i$$
$$B(-1,1) \Rightarrow z_B = -1 + i$$
$$C(-1,-1) \Rightarrow z_C = -1 - i$$
$$D(1,-1) \Rightarrow z_D = 1 - i$$

تكرورية:

- المثلث متساوي الأضلاع أضلاعه متساوية وزواياه متساوية $= 60°$
- المسدس: له 6 أضلاع متساوي الطول وزواياه متساوية، وقياس كل منها $120°$ وأقطاره متساوية وتقسمه إلى 6 مثلثات متساوية الأضلاع.

تدريب: مسدس أعط الأعداد $ABCDEF$ العقدية المعبرة عن رؤوسه:



B:

$r = OB = 1, \qquad \theta = 60°$

$\Rightarrow z_B = [\cos 60° + i \sin 60°]$

$\Rightarrow z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

C:

$r = OC = 1, \qquad \theta = 120°$

$\Rightarrow z_C = [\cos 120 + i \sin 120]$

$\Rightarrow z_C = [-\cos 60 + i \sin 60]$

$\Rightarrow z_C = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

D:

$r = OD = 1, \qquad \theta = 180°$

$\Rightarrow z_D = \cos 180 + i \sin 180$

$\Rightarrow z_D = -1$

E:

$r = OE = 1, \qquad \theta = 240°$

$z_E = \cos 240 + i \sin 240$

$\Rightarrow z_E = -\cos 60 - i \sin 60$

$\Rightarrow z_E = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

F:

$r = OF = 1, \qquad \theta = 300°$

$\Rightarrow z_F = \cos 300 + i \sin 300$

$\Rightarrow z_F = \cos 60 - i \sin 60$

$\Rightarrow z_F = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

A:

$r = OA = 1, \qquad \theta = 360°$

$\Rightarrow z_A = \cos 360 + i \sin 360$

$\Rightarrow z_A = 1$