



الباب الرابع

متتاليات (متواليات) الأعداد



الدرس الأول المتناليات

المتتالية هي تتالي أعداد بترتيب معين، كل عدد يسمى حد للمتتالية.

مثلا متتالية الأعداد:

1, 3, 5, 7, ...

حدها الأول هو 1 وحدها الثاني 3 وهكذا،

لاحظ: هذه المتتالية غير منتهية،

نرمز للحد الأول بـ a_1 والحد الثاني بـ a_2 وهكذا ...

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7$$

نرمز للحد العام بـ a_n

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟

تم تكوين المتتالية السابقة بإضافة 2 لحدها الأول للحصول على حدها الثاني، وهكذا في كل مرة يضاف 2 للحد السابق للحصول على الحد التالي.

مثال

معطى المتتالية: $5, 9, 13, \dots$

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟ أوجد حدها الرابع.

الحل

القاعدة: إضافة 4 للحد السابق. بالتالي حدها الرابع هو:

$$a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17$$

المتتالية الحسابية:

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي قاعدة إنشائها هي: إضافة (طرح) عدد معين للحد السابق، للحصول على الحد التالي. نسمي هذا العدد الثابت بأساس المتتالية ونرمز له بـ d .

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

وهكذا، ...

كيف نوجد أساس المتتالية الحسابية؟

أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$d = a_2 - a_1$$

أو $d = a_3 - a_2$ وهكذا، ...

بصورة عامة فإن الأساس هو:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

1. أساس المتتالية : $1, 3, 5, 7, \dots$ هو

1 (d)	4 (c)	2 (b)	3 (a)
-------	-------	-------	-------

2. أساس المتتالية : $8, 3, -2, -7, \dots$ هو

-3 (d)	-5 (c)	5 (b)	3 (a)
--------	--------	-------	-------

3. الحد المفقود في المتتالية : $4, \square, 10, 13, \dots$ هو

-3 (d)	5 (c)	16 (b)	7 (a)
--------	-------	--------	-------

4. متتالية حسابية حدها الأول 5 وأساسها 4 يكون حدها الثالث هو

20 (d)	13 (c)	1 (b)	9 (a)
--------	--------	-------	-------

الحد العام للمتتالية الحسابية:

الحد a_n يسمى الحد العام أو الحد النوني وهو القاعدة المتبعة في تكوين المتتالية، لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية:

عرفنا أن:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

...

بالتالي فإن الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

تمكنا هذه الصيغة من إيجاد الحد الذي نريد.

مثلا لنوجد الحد السابع للمتتالية 1, 3, 5, 7, ...

في هذه المتتالية: $d = 2$ و $a_1 = 1$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = 1 + 6(2) = 1 + 12 = 13$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

الحد الحادي عشر في المتتالية : $3, 6, 9, 12, \dots$ هو

30 (d)	21 (c)	23 (b)	33 (a)
--------	--------	--------	--------

مجموع المتتالية الحسابية

ما هو مجموع الأعداد من 1 إلى 5؟

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

لاحظ للمتتالية:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وعدد حدودها 5 (أي حدها الأخير 5).

مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول a_1 وحدها الأخير L وعدد حدودها n يساوي

$$\frac{n(a_1 + L)}{2}$$

مجموع المتتالية:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

هو

$$\frac{n(a_1 + L)}{2} = \frac{5(1 + 5)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مجموع حدود المتتالية : 1,3,5,7,9,11 هو

36 (d)	30 (c)	23 (b)	72 (a)
--------	--------	--------	--------

لاحظ: لحساب مجموع متتالية نحتاج لمعرفة قيمة الحد الأخير، فمثلا لحساب مجموع العشرة حدود الأولى، من المتتالية:

1,5,9,...

نحتاج أولا لإيجاد الحد العاشر:

$$a_{10} = a_1 + 9d = 1+9(4)=37$$

الآن أصبح لدينا الحد الأخير (العاشر) 37 ولدينا الحد الأول وهو 1 نستطيع حساب المجموع:

$$\frac{n(a_1 + L)}{2} = \frac{10(1+37)}{2} = 5(38) = 190$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مجموع العشرة حدود الأولى من المتتالية : $2, 4, 6, \dots$ هو

120 (d)	110 (c)	100 (b)	90 (a)
---------	---------	---------	--------



الدرس الثاني

المتتالية الهندسية

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي قاعدة إنشائها هي: ضرب الحد السابق بعدد معين، للحصول على الحد التالي. نسمي هذا العدد المعين بأساس المتتالية ونرمز له بـ r .

$$a_2 = a_1(r)$$

$$a_3 = a_2(r)$$

وهكذا،

أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

أو

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

بصورة عامة:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

1. أساس المتتالية : $1, 3, 9, 27, \dots$ هو

2 (d)	12 (c)	9 (b)	3 (a)
-------	--------	-------	-------

2. أساس المتتالية : $2, 10, 50, 250, \dots$ هو

20 (d)	10 (c)	5 (b)	2 (a)
--------	--------	-------	-------

3. الحد المفقود في المتتالية : $4, 8, \square, 32, \dots$ هو

14 (d)	20 (c)	16 (b)	12 (a)
--------	--------	--------	--------

4. متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 4 يكون حدها الثالث هو

6 (d)	5 (c)	16 (b)	8 (a)
-------	-------	--------	-------

الحد العام للمتتالية الهندسية:

لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية.

عرفنا أن:

$$a_2 = a_1(r)$$

$$a_3 = a_2(r) = a_1(r)(r) = a_1(r^2)$$

$$a_4 = a_3(r) = a_1(r^2)(r) = a_1(r^3)$$

...

$$a_n = a_1(r^{n-1})$$

بالتالي فإن الحد العام هو:

وهذه الصيغة تمكنا من إيجاد الحد الذي نريد.

مثلا لنوجد الحد السادس للمتتالية :

3, 6, 12, ...

الحد السادس هو:

$$a_6 = a_1(r^5)$$

في هذه المتتالية: $r = 2$ و $a_1 = 3$ ، بالتعويض نجد:

$$a_6 = 3(2^{6-1}) = 3(2^5) = 3(32) = 96$$

بالتالي الحد السادس يساوي 96.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

الحد الخامس في المتتالية : $1, 3, 9, \dots$ هو

3^4 (d)	2^4 (c)	2^5 (b)	3^5 (a)
-----------	-----------	-----------	-----------