في كلٍّ حالة من الحالات الآتية، احسب التكامل المحدّد I :

شي ضروري

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{(x+1)^3}\,dx \quad ①$$

$$I = \int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos^2 x\,dx \quad ②$$

مهم

بشي راسو

$$I = \int_{0}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx \quad ③$$

$$I = \int_{0}^{2} \frac{2}{x-3}\,dx \quad ④$$

$1 - \sin^2(x)\,dx$

الحل

① نلاحظ أنّ التابع المُكامَل f يُكتب بالصيغة $f(x) = \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^{3/2}$ فله تابعٌ أص

$F : x \mapsto \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}$ ، ومن ثَمّ

$$I = \int_{-1}^{1} (x+1)^{3/2}\,dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}2^{5/2} - 0 = \frac{8}{5}\sqrt{2}$$

② نلاحظ أنّ التابع المُكامَل f يُكتَب بالصيغة $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ فله تابعٌ أصلي

$F : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ ، ومن ثَمّ تكامل

$$I = \int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_{\pi/12}^{\pi/6}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sin(\pi/3)}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\sin(\pi/6)}{4}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}$$

③ هذه هي المرّة الأولى التي نصادف فيها تكامل تابع يتضمّن قيمة مطلقة. نلاحظ أنّ $x^2 - 1 \leq 0$ على المجال $[0,1]$ وأنّ $x^2 - 1 \geq 0$ على المجال $[1,2]$ إذن

$$I = \int_0^2 \left|x^2 - 1\right| dx = \int_0^1 \left|x^2 - 1\right| dx + \int_1^2 \left|x^2 - 1\right| dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = 2$$

④ التابع المُكامَل f هو $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ و $x - 3 < 0$ على المجال $[0,2]$. إذن هو يقبل تابعاً أصلياً $F : x \mapsto 2\ln(3 - x)$ على المجال $[0,2]$، وعليه

$$I = \int_0^2 \frac{2}{x-3} dx = \left[2\ln(3 - x)\right]_0^2 = -2\ln 3$$

② احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

❶ $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

❷ $J = \int_0^\pi (x-1)\cos x \, dx$

❸ $K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

❹ $L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx$

❺ $M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$

❻ $N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

6 ليكن f التابع المعرّف على $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ وفق $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقّق $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$ ، أيّاً يكن x من D .

② احسب $J = \int_2^0 f(x)\,dx$.

7 ليكن f التابع المعرّف على $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقّق $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ ، أيّاً يكن x من D .

② احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\,dx$.

18 نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$. احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ، ثمّ $I + J$ ، واستنتج I .

19 نريد حساب $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$. احسب $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ ، ثم $+J$

واستنتج I .