الاعداد العقدية :

*العدد التخيلي (i): نتخيل أن جذر العدد 1− هو العدد i أي : $i^2 = -1$

قوى العدد i الطبيعية:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = i.i = -1$

$i^3 = i^2.i^1 = (-1)(i) = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i^1 = (1)(i) = i$

$i^6 = i^3.i^3 = (-i)(-i) = -1$

$i^7 = i^6.i^1 = (-1)(i) = -i$

$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$

$i^9 = i^5.i^4 = i.1 = i$

$i^{10} = i^4.i^6 = 1.-1 = -1$

نتيجة..~

قوى العدد i الطبيعية محصورة بالمجموعة $\{\mp 1, \pm i\}$

العدد العقدي

الشكل الجبري: $z = x + iy$

الشكل المثلثي: $z = r[\cos\theta + \sin\theta]$

الشكل الأسي: $z = re^{i\theta}$

قواعد هامة

1) مرافق $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - yi$

2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $z.\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

4) $z + \bar{z} = 2x$

5) $z - \bar{z} = 2yi$

مثال: ليكن لدينا : $z_1 = 3 + 2i \ , \ z_2 = 4 - 5i$

الحل: $z_1 + z_2 = (3 + 4) + (2 - 5)i$

$= 7 - 3i$

$z_1.z_2 = (3 + 2i)(4 - 5i)$

$= 12 - 15i + 8i - 10i^2$

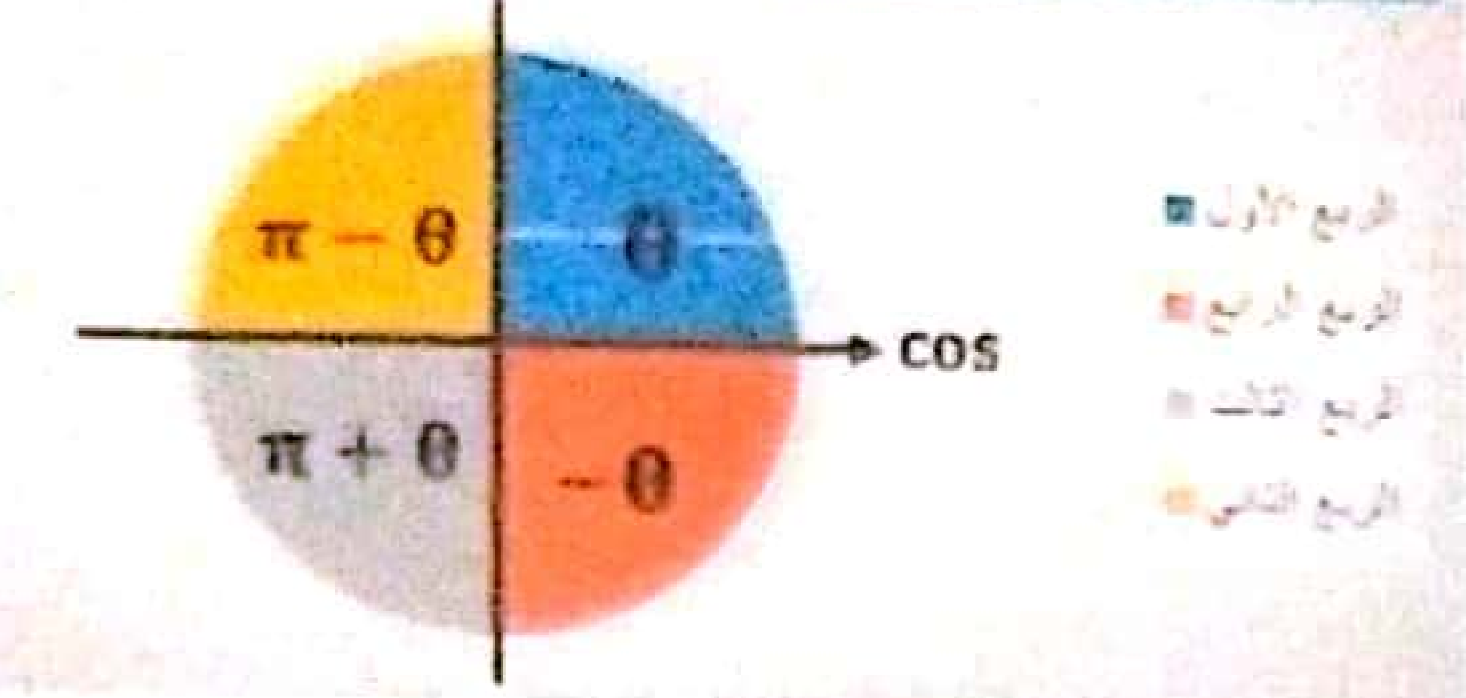
$= 22 - 7i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-5i}$ ⇐ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام:

$$= \frac{(3 + 2i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

التحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي:

طريقة اكتشاف الزاوية



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

مثال

حول العدد العقدي التالي إلى الشكل المثلثي ثم الأسي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 1\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

فالشكل الأسي: $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

دستورا أويلر:

سؤال دورة : ليكن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *

المطلوب: أوجد $e^{-i\theta}$ ثم استنتج دستورا أويلر.

الحل: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ **

بالجمع بين العلاقتين * و **:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح بين * و **

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تطبيق هام جدا : اكتب $\cos^3 x$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \quad dx$

دستور دوموافر :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال: احسب مايلي:

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{24}$$

الحل: نحوله إلى الشكل المثلثي :

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{24} = \left[\cos -\frac{\pi}{6} + i\sin -\frac{\pi}{6}\right]^{24}$$
$$= \cos(-24)\frac{\pi}{6} + i\sin 24\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos 4\pi - i\sin 4\pi$$
$$= 1 - i(0) = 1$$

تحليل ثلاثي الحدود :

$$az^2 + bz + c$$
$$= a(z - z_1)(z - z_2)$$

حلول المعادلة:
$$az^2 + bz + c = 0$$

مثال: حل المعادلة التالية في C : $z^2 + 4z + 29 = 0$

الحل: $\Delta = 16 - 4(1)(29) = 16 - 116 = -100$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -2 - 5i$$

هام : تابع النماذج النهائية لمركز أونلاين لعام 2021 على التلغرام

مثال

حلل ما يلي: $z^2 + 4z + 29$

القاعدة: $a(z - z_1)(z - z_2)$

نوجد جذور للمعادلة:

$$\boxed{z^2 + 4z + 29 = 0}$$

$z_1 = -2 + 5i \qquad z_2 = -2 - 5i$

$$\Rightarrow z^2 + 4z + 29$$
$$= 1[z - (-2 + 5i)][z - (-2 - 5i)]$$
$$= (z + 2 - 5i)(z + 2 + 5i)$$

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$\boxed{z = a + bi}$$

نتبع ما يلي:

نفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي لـ $z \Leftarrow$

① $x^2 - y^2 = a$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

③ $x\ y = \frac{b}{2}$

تطبيق هام

أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$z = 3 + 4i$$

الحل: بفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي للعدد z

① $x^2 - y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{19 + 6} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$

③ $x\ y = 2$

②.①$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Rightarrow x = \mp 2$

من اجل: $x_1 = 2 \Rightarrow$③ نعوض في $\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow \omega_1 = 2 + i$

$x_2 = -2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow \omega_2 = -2 - i$

مثال امتحاني هام

ليكن لدينا: $z = 1 + \sqrt{3}i$ أكتب العدد z بالشكل المثلثي ، وأثبت أن z^6 عدد حقيقي.

الحل: $r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

إثبات ان z^6 عدد حقيقي:

$$z^6 = \left[2\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^6$$

$$\Rightarrow 2^6[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$$

$$= 2^6[1+0] = 2^6 \in R.$$

(قواعد هامة)

$a = Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $b = Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$; $w \neq 0$, $\overline{(z^n)} = \overline{(z)}^n$

$|zz'| = |z| \times |z'|$, $arg(zz') = arg\ z + arg\ z'$ (2π)

$\arg(z^n) = n\arg z$ (2π) , $|z^n| = |z|^n$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ (2π) , $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$\arg\left(\dfrac{1}{w}\right) = -\arg w\ (2\pi)$; $w \neq 0$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta'(2\pi))$, $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $z\bar{z} = |z|^2$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\ Im(z)$

مثال

ليكن لدينا: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = 1 + i$

1) اكتب بالشكل المثلثي z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$

الحل : $z_1 \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

هام : تابعوا أهم الملاحظات الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك

فارس جقل

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الشعاع بعدد عقدي :

إذا كان A , B نقطتين فإن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

مثال: ليكن لدينا النقاط:

$A(2,3)$ ، $B(-1,4)$ مثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بعدد عقدي

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-1+4i) - (2+3i)$$

$$= -1 + 4i - 2 - 3i = -3 + i$$

العدد العقدي الممثل لمركز الأبعاد المتناسبة

لتكن النقاط) $(A,\propto)(C,\lambda)$ ، (B,β) الممثلة لاعداد عقدية z_A, z_B, z_C فإن مركزالأبعاد لهذه النقاط G والعدد العقدي الموافق له يعطى بالقانون:

$$z_G = \frac{\propto z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\propto + \beta + \lambda}$$

العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة $[AB]$:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

ملاحظة : لإثبات وقوع 3 نقاط على استقامة واحدة هندسياً دون استعمال الأعداد العقدية..نوجد شعاعين ونبرهن ارتباطهما خطياً.

مثال امتحاني هام

في مستو عقدي لدينا النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد:

$$a = 6 - i, \quad b = -6 + 3i, \quad C = -18 + 7i$$

بالترتيب و المطلوب : اثبت وقوع النقاط A , B ,C على استقامة واحدة.

الحل

ط1) $A(6, -1), B(-6, 3), C(-18, 7)$

$$\overline{AB} = (-12, 4) \quad \overline{AC} = (-24, 8)$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$$

فالشعاعين مرتبطين ⟸ النقاط على استقامة واحدة

ط2) $z_{\overline{AB}} = b - a = (-6 + 3i) - (6 - i)$

$$= -12 + 4i$$

$$z_{\overline{AC}} = c - a = (-18 + 7i) - (6 - i)$$

$$= -24 + 8i$$

$$z_{\overline{AC}} = 2z_{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$$

فالشعاعان مرتبطان ⟸ النقاط على استقامة واحدة

المسافة التي تمثلها بعلاقة بالشكل العقدي

لتكن النقطة A الممثلة للعدد العقدي z_A والنقطة B الممثلة للعدد العقدي z_B عندها يكون البعد (المسافة) بين A , B بالعلاقة :

$$AB = |z_B - z_A|$$

تطبيق : في المثال السابق احسب المسافة بين النقطتين A, B

$$AB = |b - a| = |-12 + 4i|$$

$$= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

زاوية شعاع مع محور الفواصل :

$$(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

قياس الزاوية الموجهة بين شعاعين $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

(قواعد هامة)

لإثبات أن Z حقيقي نبرهن :

$\bar{z} = z, Im\, z = 0$ أو $\arg z = \pi$ أو $\arg z = 0$

لإثبات أن Z تخيلي بحت نبرهن :

$Re z = 0$ أو $\bar{z} = -z$ أو $\arg z = \frac{\pi}{2}$ أو $\arg z = \frac{-\pi}{2}$

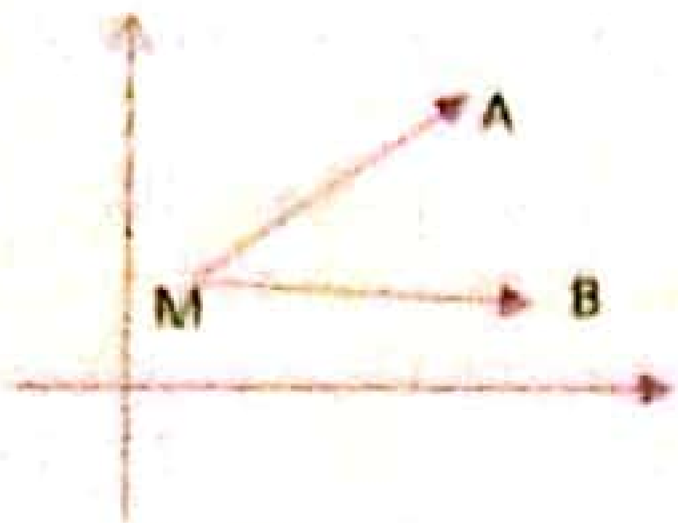
إذا كانت الأمثال غير حقيقية في معادلة الدرجة الثانية و Z_1 , Z_2 جذران نذكر القانونين :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$

حالة خاصة :

اذا كان الشعاعان لهما نفس البداية

$$(\overrightarrow{MA}\ ,\overrightarrow{MB}) = arg\left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\right)$$

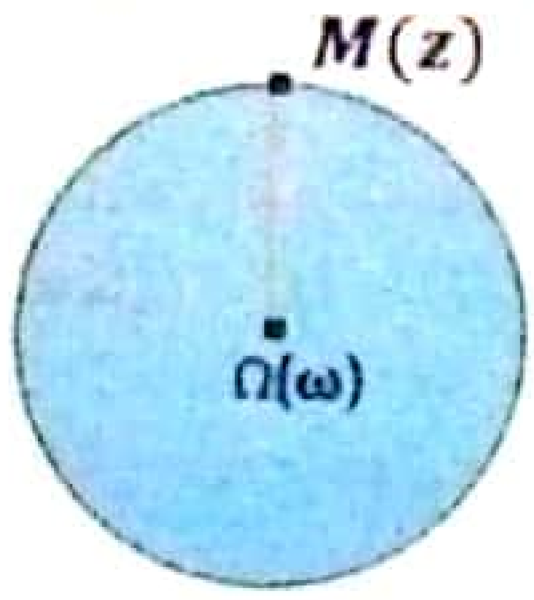


تمثيل مجموعات النقاط

الدائرة : نقول عن مجموعة النقاط (Γ) المكونة من النقاط $M(z)$ والتي تحقق الشرط :

$$|z - \omega| = r$$

أنها دائرة ومركزها $\Omega(\omega)$ونصف قطرها r



$$|z - \omega| = r$$

عدد عقدي ، عدد عقدي ، نصف قطر

مثال

ليكن لدينا: $|z - 2| = 4$

ماذا تمثل مجموعة النقاط ؟؟

تمثل دائرة مركزها $\Omega\ (2, 0)$ ونصف قطرها 4

مثال

ماذا تمثل مجموعة النقاط: $|z - 3 - 2i| = 3$

الحل:

$$|z - (3 + 2i)| = 3$$

مجموعة النقاط دائرة مركزها (3, 2)ونصف قطرها 3.

محور القطعة المستقيمة $[AB]$:

هي مجموعة النقاط M التي تحقق $MA = MB$

اي : $|z - a| = |z - b|$

*.كيف نثبت ارتباط شعاعين بالاستفادة من العدد العقدي؟

او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

الشرط:

$$z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \text{عدد حقيقي} \Rightarrow \arg(z) = 0\ , \pi$$

عندها نقول أن الشعاعان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ مرتبطين خطياً والنقاط الثلاثة على استقامة واحدة :

.كيف نثبت تعامد شعاعين $\overline{DC}$ و $\overline{BA}$

يجب ان يكون : $\Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ $z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \text{عدد تخيلي}$

إذا كان لدينا: $arg\dfrac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}=\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{3\pi}{2}$

⇐ الشعاعان $\overline{BA}$ و $\overline{DC}$ متعامدان.

هام جداً نستفيد من القاعدة الأخيرة في برهان مثلث قائم

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

هام :تابعوا شروحات المكثفة على قناة (مركز أونلاين التعليمي) على اليوتيوب

1ـ الصيغة العقدية للانسحاب T

الصيغة العقدية هو: $\acute{z}=z+b$

عدد عقدي شعاعه $\overline{W}$

و T هو انسحاب شعاعه $\overline{\omega}$

مثال

M نقطة يمثلها العدد العقدي:

$z=1+i$

أوجد $\acute{z}$ التي تمثل النقطة $\acute{M}$ صورة M وفق انسحاب T شعاعه $\overline{\omega}=-2\overline{u}+3\overline{v}$

الحل: $b=-2+3i$

$\acute{z}=z+b$

$\Rightarrow \acute{z}=1+i+(-2+3i)$

$\Rightarrow \acute{z}=-1+4i$

أي $\acute{M}(-1\ ,4)$ هي صورة $M(1\ ,1)$

مثال

عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A حيث B تمثل العدد العقدي b و A تمثل العدد العقدي a

$b=a-1+3i$

الحل: B هي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overline{\omega}=-1\overline{u}+3\overline{v}$ أي $B=T_{\overline{\omega}}(A)$

2ـ الصيغة العقدية للتحاكي ($\mathcal{H}$):

الصيغة العقدية لها هو:

$$\acute{z}-\omega=k(z-\omega)$$

المركز (نقطة)

نسبة التحاكي

مثال

أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (o) ونسبته 4 حيث $z=(1+i)$

الحل: $\acute{z}-(0+0i)=4(z-(0+0i)$

$\Rightarrow \acute{z}=4z$

$\acute{z}=4(1+i)=4+4i$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

الحل: $b-(0+0i)=2(a-(0+0i))$

نسبة التحاكي (2) المركز (0)

طبيعة التحويل الهندسي هو (تحاكي).

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة :

$$(b-1)=-(a-1)$$

طبيعة التحويل الهندسي هو تحاكي مركزه $(1,0)$ ونسبته $k=-1$

3- الصيغة العقدية للدوران (R):

$$\dot{z}-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$$

زاوية الدوران المركز

مثال

R دوران مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ حيث $1+iz=$ أوجد $\dot{z}$ صورة z

هام جداً :

الحل

$$\dot{z}-(2-i)=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-(2-i)$$

$$\Rightarrow \dot{z}-2+i=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ (1+i-2+i)$$

$$\Rightarrow \dot{z}-2+i=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ (-1+2i)$$

مثال

الحل

عين طبيعة التحويل الهندسي:

① $b-1=e^{\pi i}(a-1)$

دوران مركزه $(1,0)$ وزاويته π.

② $b+1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(a+1-i)$

$$b-(-1+i)=e^{i\frac{\pi}{4}}(a+1-i)$$

B صورة A وفق دوران مركزه $(-1,1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

4- الصيغة العقدية للتناظر المحوري:

لدينا حالتين:

1- حالة أولى : محور التناظر (ox) عندها يكون : $\acute{z} = \bar{z}$

2- حالة ثانية : محور التناظر (oy) عندها يكون :

$$\acute{z} = -Re(z) + img(z) = -\bar{z}$$

مثال

عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره ox حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر ox $\Leftarrow$ $\acute{z} = 1 - i$

مثال

عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره oy حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر oy $\Leftarrow$ $\acute{z} = -1 + i$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي:

$b = \bar{a}$

الحل: طبيعة التحويل الهندسي تناظر محوري.

B في صورة A وفق تناظر محوره (ox).

5- الصيغة العقدية للتناظر المركزي:

$$\acute{z} = 2\omega - z$$

مثال

عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$ حيث $z = 1 + i$.

الحل: $\acute{z} = 2(1 - 3i) - (1 + i)$

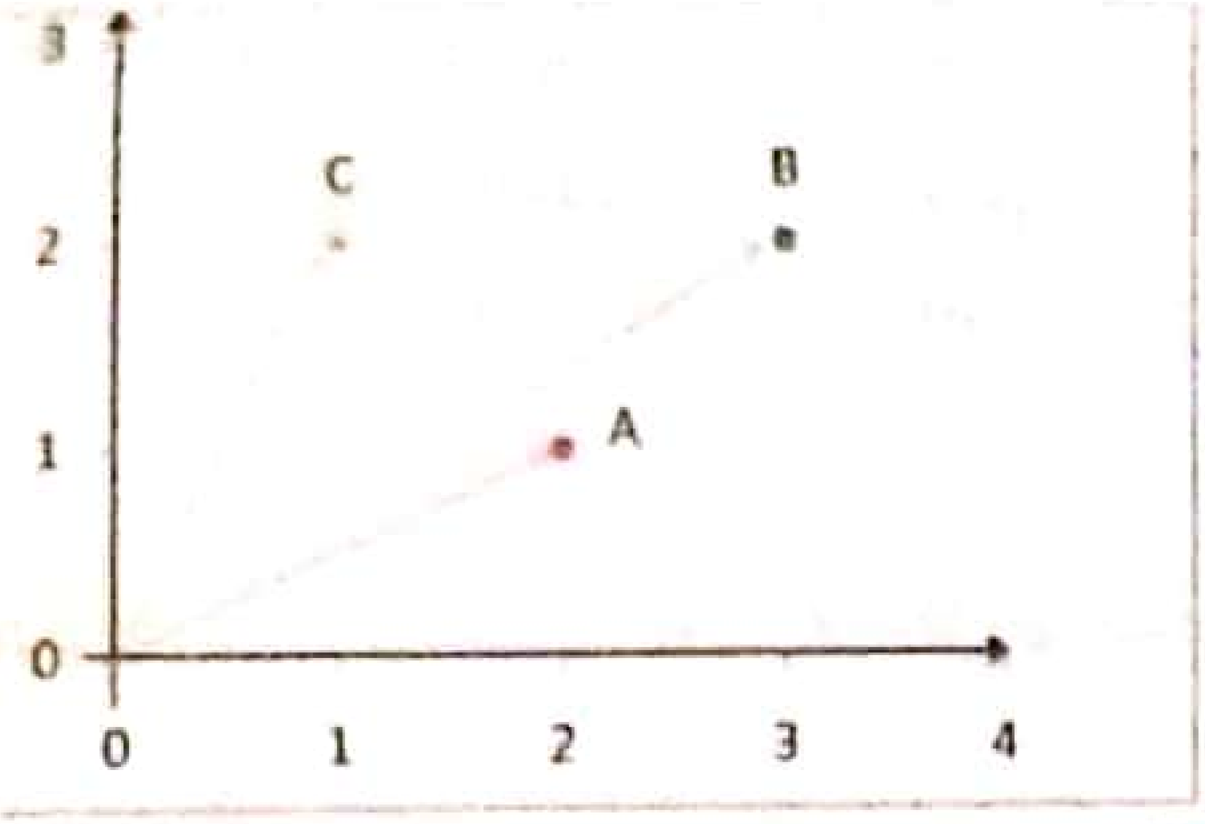
$= 2 - 6i - 1 - i$

$= 1 - 7i$

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

بنك الأسئلة الهامة

السؤال الأول : في مستو محدث بمعلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$



1. أوجد الأعداد المركبة الآتية : z_3, z_2, z_1 إذا علمت أنها ممثلة بالنقاط C, B, A بالترتيب .
2. أثبت أن المثلث ABC قائم في A .

السؤال الثاني : عيّن العددين العقديين z_1, z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_2 - z_1 + 3 = 0 \\ \bar{z}_2 + 2\bar{z}_1 + 3 = 2\sqrt{3}\, i \end{cases}$$

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : تحقق أنّ $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ جذر للمعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ ،ثم أوجد الجذر الآخر z_2

السؤال الخامس : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 4 - 2\sqrt{5} i$.

السؤال السادس : حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

أ $z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$

ب $z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$

السؤال السابع : اكتب العدد العقدي z بالشكل الأسي :

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{2} i)(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})$$

السؤال الثامن : اكتب العدد المركب $z = 1 + e^{2i\theta}$ بالشكل الأسي حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

السؤال التاسع : أوجد معادلة من الشكل : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية والعدد z_1 جذر لها حيث $z_1 = 2 + i$.

السؤال العاشر : إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z . عيّن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق :

$$|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$$

السؤال الحادي عشر : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = 3\sqrt{3} + i$.

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .
3. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

السؤال الثاني عشر : ليكن العددان المركبان : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$

1. اكتب كلاً من z_2 , z_1 بالشكل الأسي .
2. اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم أوجد $(z)^{48}$

السؤال الثالث عشر : تأمل النقاط D, C, B, A الممثلة للأعداد العقدية $a = -1$, $b = 2 + i\sqrt{3}$, $c = 2 - i\sqrt{3}$, $d = 3$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. ارسم النقاط D, C, B, A . ثم احسب AC, BC, AB واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.

السؤال الرابع عشر : لدينا في مجموعة الأعداد العقدية C كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي : $P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$

1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له ايضاً
2) تحقق أن $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ واستنتج جذراً اخر له ثم اكتب هذا الجذر بالشكل الجبري .
3) اكتب الجذرين السابقين بالشكل الأسي .
4) لتكن الأعداد العقدية التالية : $a = 1 + i$, $b = -1 + i$, $c = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$, $d = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

ولتكن النقاط الممثلة لها في معلم متجانس A, B, C, D حيث m عدد حقيقي .عين m حتى يكون الرباعي ABCD مربع

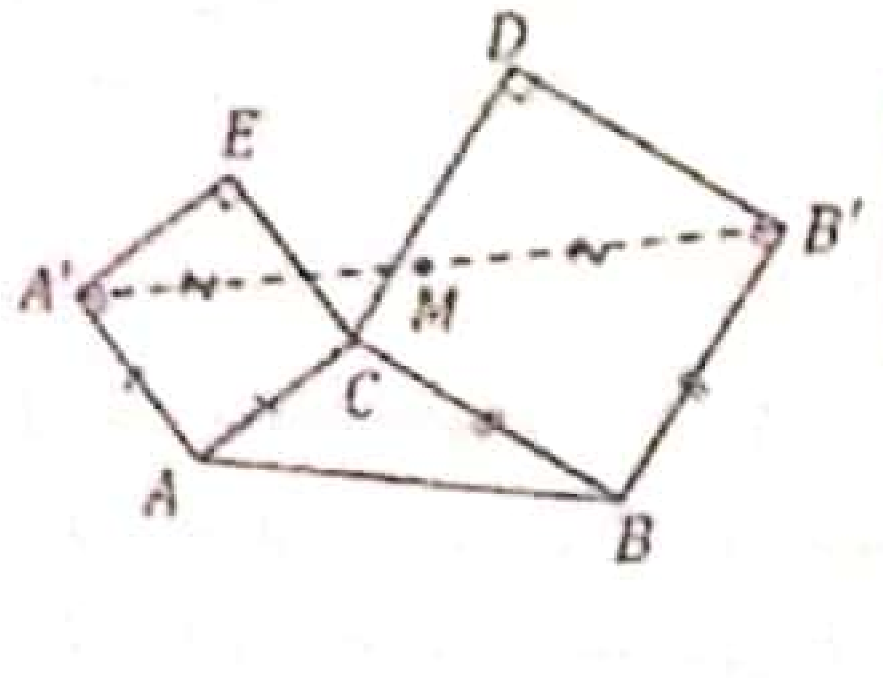
السؤال الخامس عشر : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1 + i$ والمطلوب :

1. أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً
2. جد العدد z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق تحاكي مركزه $A(1 + i)$ نسبته 3

السؤال السادس عشر : لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

1. اكتب بالشكل الأسي كل من z_1 , z_2 , z_3 , $z_1 . z_2 , \frac{z_1}{z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري , $z_1 . z_2 , \frac{z_1}{z_2}$ استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$ و $(z_3)^{24}$
3. أوجد الجذرين التربيعيين ل z_2 بالشكل الجبري
4. حل المعادلة التالية بالمجهول z في $\mathbb{C}$: $z^3 + 6z^2 = -29z + 2z^2$

السؤال السابع عشر : ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $CBB'D, ACEA'$ كما في الشكل المجاور .



لتكن الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

1. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه
و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b , c
2. أثبت أن $a' = i(c - a) + a$
3. عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$
4. كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي

السؤال الثامن عشر :

نتأمل النقاط A , B , C , D الممثلة للأعداد العقدية

$$d = 3 \ , c = 2 - i\sqrt{3} \ , \ b = 2 + i\sqrt{3} , \ a = -1$$

1. ارسم النقاط A , B , C , D ثم احسب AB' , BC , AC واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عين $arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$

السؤال التاسع عشر : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C الممثلة للأعداد العقدية : $a = \sqrt{3} + i$, $b = (1+i)a$, $c = ia$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب b بالشكل الجبري ثم احسب $|b|$ و $\arg b$ ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ ثم أكتب c بالشكل الجبري
2. برهن أن المثلث AOC قائم و متساوي الساقين ثم بين أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{OC}$
3. استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع

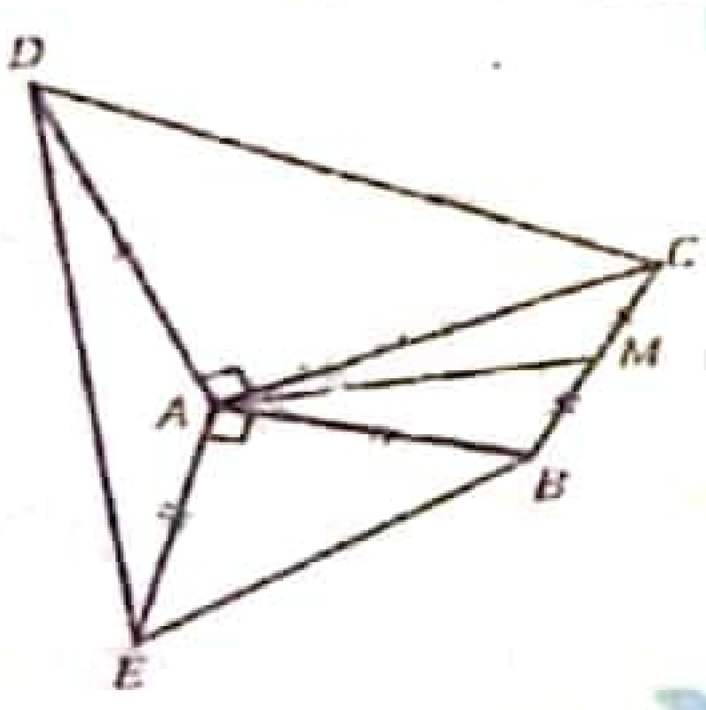
السؤال العشرون : لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية

$z_A = -1 + i$, $z_B = -3i$ وليكن $P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

1. أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة
2. جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3. اكتب z_A بالشكل الأسي

السؤال الواحد و العشرون : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[AC]$ وليكن AEB , ACD مثلثين قائمين في A متساوي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبداه النقطة A

و نرمز بالرمزين b , c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B , C



1. احسب بدلالة b , c الأعداد العقدية m , d , e الممثل للنقاط M , C , E بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$, $(E,3)$, $(C,1)$, $(B,1)$ ،
احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال الثاني و العشرون : ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و z عدد عقدي

و $f(z)$ كثير حدود معرف ب : $f(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1. تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(z)$
2. عين العددين العقديين a , b بحيث $f(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$
3. حل في C المعادلة $f(z) = 0$

السؤال الثالث و العشرون : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{6}i} \quad , c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , b = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , a = 1$$

بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب c بالشكل الأسي و اكتب d بالشكل الجبري
2. وضّع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس
3. أثبت أن الرباعي $OACB$ معين

السؤال الرابع و العشرون : ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .... والمطلوب :

1. أثبت أن $p(-1) = 0$
2. اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z) = (z+1)Q(z)$
3. حل المعادلة $p(z) = 0$
4. A , B , C ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

السؤال الخامس و العشرون :

ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ والمطلوب :

1. عين عددين حقيقيين a , b يحققان : $p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2. حل في C المعادلة $p(z) = 0$

السؤال السادس و العشرون : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$$Z_A = 3 \quad , \quad Z_B = 1 + 2i \quad , \quad Z_Q = -1 + 2i$$

1. مثل هذه الأعداد في مستو عقدي
2. جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع
4. أثبت تعامد المستقيمين OR , AB و أثبت أن $OR = \frac{1}{2} AB$

السؤال السابع و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 1 + \frac{3}{4} i \quad , \quad b = 2 - \frac{5}{4} i \, , c = 3 + \frac{7}{4} i$$

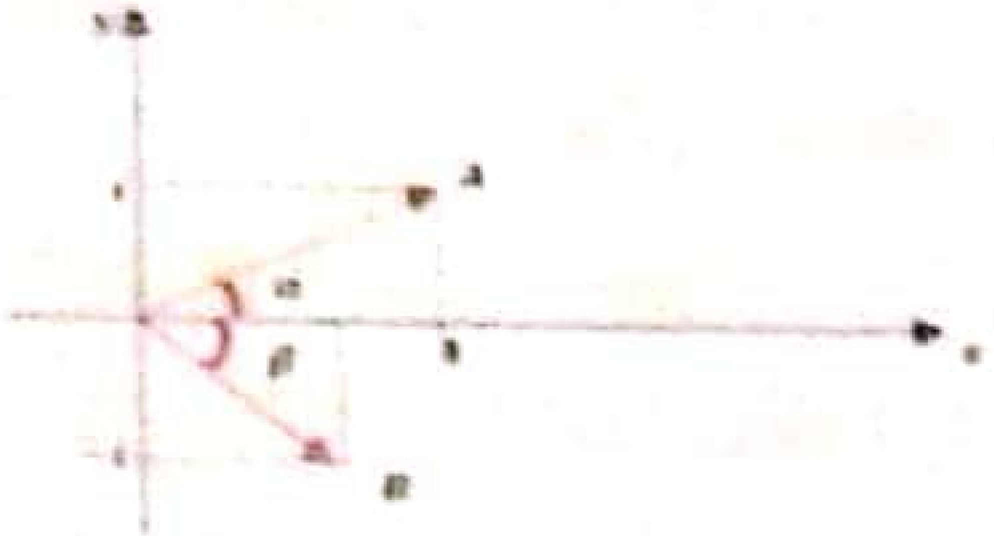
1. وضّع النقاط A , B , C في شكل وما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$
2. استنتج أن المثلث (ABC) قائم ومتساوي الساقين
3. احسب العدد العقدي Z_A, ليكون الشكل $ABA'C$ مربعا

السؤال الثامن و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$a = 2 - 2i , b = -1 + 7i , c = 4 + 2i \ , d = -4 - 2i \ \ , \omega = -1 + 2i$

أثبت وقوع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

السؤال التاسع و العشرون : ليكن العددان العقديان z_A ، z_B حيث $arg(z_A) = \alpha$ و $arg(z_B) = -\beta$ كما بالشكل :



1. اكتب z_A ، z_B بالشكل الجبري
2. اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي
3. استنتج قيمة $\alpha + \beta$

السؤال الثلاثون :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط C, B, A

التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 1 - i \ \ , b = -1 + i \ , c = \sqrt{3}(1 + i)$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب a ، b ، c بالشكل الأسي
2. احسب arg و طويلة العدد العقدي $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين نوع المثلث ABC
3. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معين
4. احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة النقطة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

السؤال الواحد و الثلاثون : ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب :

1. بين أن $|w| = 1$ ، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي
2. ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

جلسة امتحانية لمراجعة العقدية

السؤال الأول: لتكن العددان العقديان

$Z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ ، $Z_2 = 1+i$

والمطلوب:

1) اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد Z_1 ، Z_2 ، $\frac{Z_1}{Z_2}$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

السؤال الثاني: لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $Z = -1+i$ والمطلوب:

1) أثبت أن Z^8 عدداً حقيقياً

2) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي.

السؤال الثالث:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان: $Z_A = 4$ ، $Z_B = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$

ولتكن I منتصف $[AB]$ ، والمطلوب

1) مثل النقطتين A ، B في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ واكتب Z_B بالشكل الأسي.

2) بيّن طبيعة المثلث OAB ، وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

3) اكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

4) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي:

$Z = -8+8\sqrt{3}\,i$

السؤال الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A ، B ، C ، M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a=-i$ ، $b=1-i$ ، $d=2i$ ، $m=-1+i$ والمطلوب

1) مثّل الأعداد $a=-i$ ، $b=1-i$ ، $d=2i$ ، $m=-1+i$ في المستوي.

2) احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) أثبت أن النقاط M ، O ، B تقع على استقامة واحدة

4) احسب $\arg\frac{d-c}{m}$ واستنتج أن (OM) و (Oc) متعامدان.

5) حلل إلى C ما يلي إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى: Z^3+4Z^2+29Z

6) عيّن العددين العقديين W ، Z المحققان لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2Z - W = -\bar{3} \\ 2\bar{Z}+\bar{W} = -3+2\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

7) أوجد e صورة m وفق تحاكٍ مركزه b ونسبته -3

التحليل التوافقي والاحتمالات

المبدأ الأساسي في العد :تجربة تمر بمرحلتين أو (طريقتين) m و n فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة هي: $m \times n$

مثال حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة؟

الحل: عدد طرق الدخول : 4

عدد طرق الخروج :3

حسب المبدأ الأساسي في العد :

$$4 \times 3 = 12 \text{ طريقة}$$

قانون العاملي : $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

خواصه :

- $n! = n(n-1)!$

$$5! = 5 \times 4!$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3!$$

- $(n+1)! = (n+1)n!$

مثال اختصر: $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

- $0! = 1$
- $1! = 1$

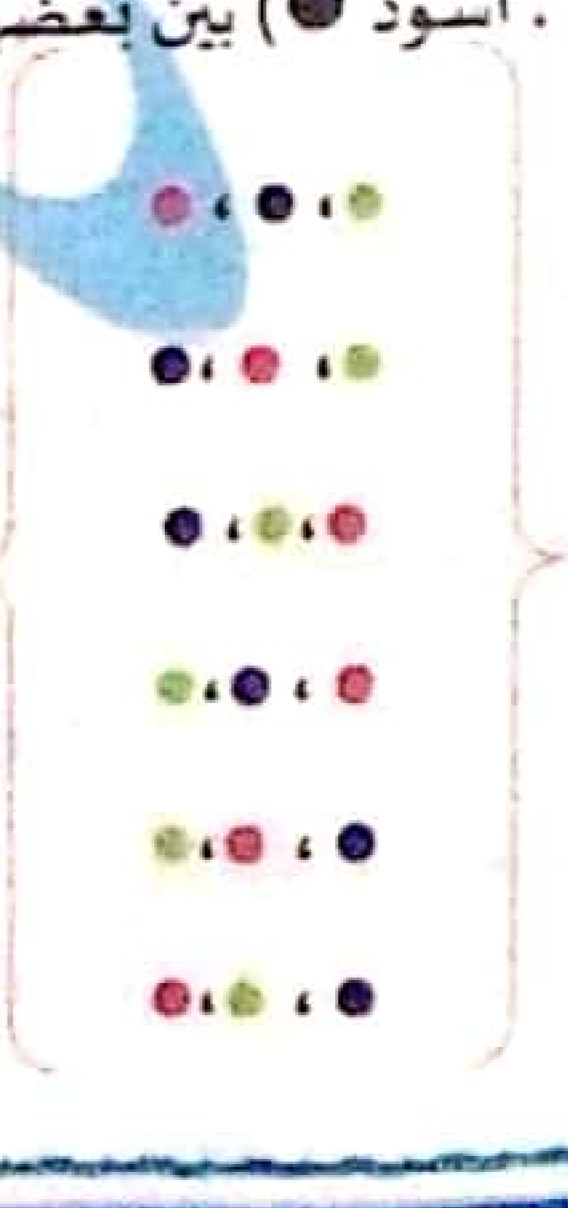
سؤال : متى نستخدم العاملي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض. (نبادل عناصر المجموعة في أماكن تساوي عددها)

مثال: نبادل ثلاث كرات مختلفة الألوان (اخضر ، احمر ، أسود) بين بعضها البعض. بكم طريقة يمكن ذلك ؟

الحل : $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ طرق

ماهي هذه الطرق؟



6 طرق

مثال
لدينا بطاقتان مرقمتان [1,2] بكم طريقة يمكن تبديلها

الحل : طريقة $2! = 1 \times 2 = 2$

الترتيب: (القوائم دون تكرار)

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء عندها نستخدم التراتيب.. أو هو ترتيب r عنصر من مجموعة فيها n عنصر.

القانون:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

مثال: $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار ثلاث أشخاص من أجل تشكيل لجنة مكونة من (مدير ، نائب مدير ، أمين سر) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: نلاحظ ان الجزء الذي سنختاره من المجموعة يساوي عدد الأماكن ، لذلك نستخدم قانون التراتيب.

$P_{10}^3 = 8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

طريقة اخرى : عدد طرق اختيار المدير 10

عدد طرق اختيار نائب المدير 9

عدد طرق اختيار أمين السر 8

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

التوافيق : هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية. أو التوفيق هو مجموعة جزئية من مجموعة منتهية.

سؤال: متى نستخدم قانون التوافيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة.

القانون: $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ أو $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: $10 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \frac{P_5^3}{3!} = \binom{5}{3}$ أو $10 = \frac{20}{2} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = \frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3}$

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ طريقة

② عدد طرق اختيار الكتاب الأول 1

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 6

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 5

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

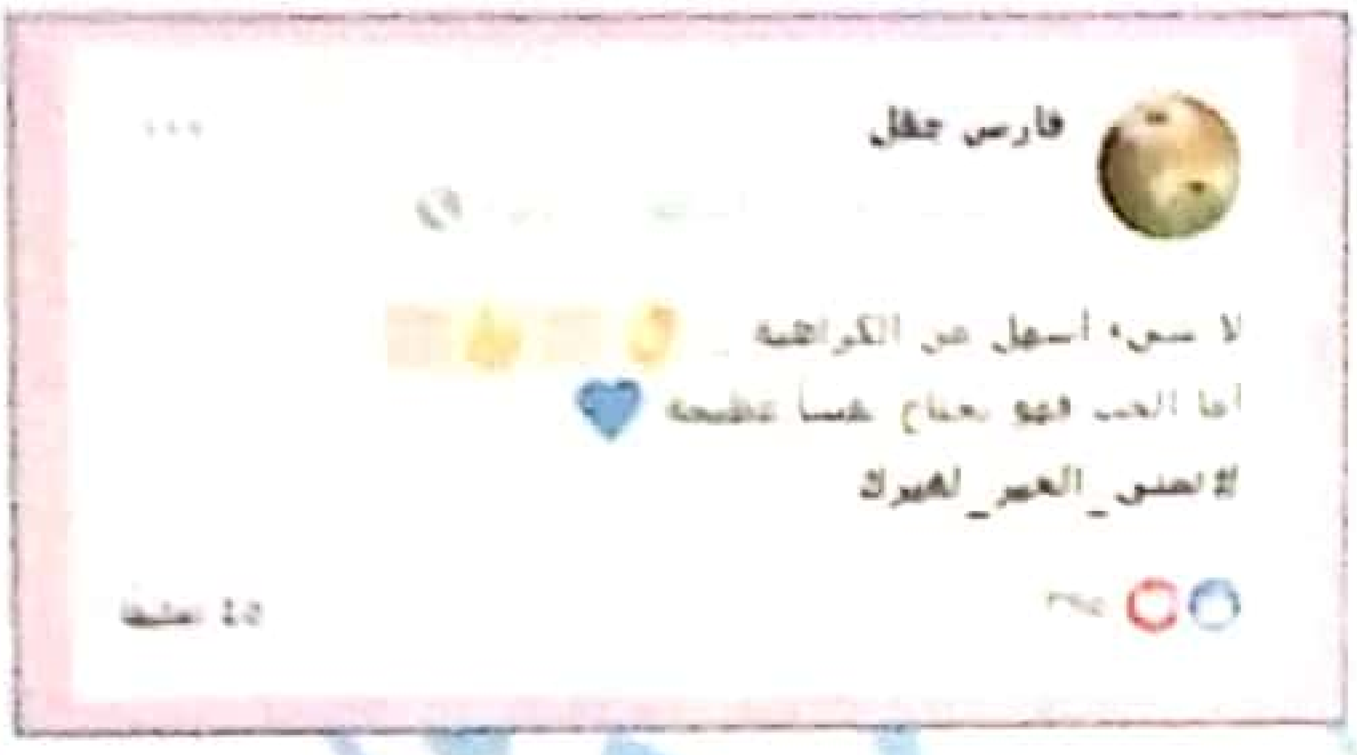
عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ طريقة

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة [نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل] على الفيس بوك

تجربة برنولي



نستخدم تجربة برنولية عندما نقوم باختبار ما:

يكون عدد مرات تكرار التجربة n مرة ((على نحو مستقل)).

ونهتم بوقوع حدث محدد احتمال وقوعه (p) واحتمال عدم وقوعه q

ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً k من المرات

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات ، احسب احتمال الحصول على الوجه H مرتين.

الحل:

$$n = 3 \,, \quad K = 2 \,, \quad P = \frac{1}{2} \,, \ q = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= 3\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

قانون برنولي: (القانون الحداني)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$q = 1 - p$

مثال دورة 2017 الأولى

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$، والمطلوب:

ما هي قيم المتغير العشوائي، نظم جدولاً بها، وأحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$$n = 3\ ,\quad k = 0\ ,\quad P = \frac{1}{3}\ ,\ q = \frac{2}{3}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = 1.1.\frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = 3.\frac{1}{3}.\frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = 3.\frac{1}{9}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \frac{1}{27}$$

$$E(X) = \sum_{1}^{n} r_i . P(X = r_i)$$

$$= 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

r_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$P(x = r_i)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

أو طريقة ثانية حسب برنولي:

$$E(X) = n.P = 3.\frac{1}{3} = 1 \qquad v(X) = n.p.q = 3.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

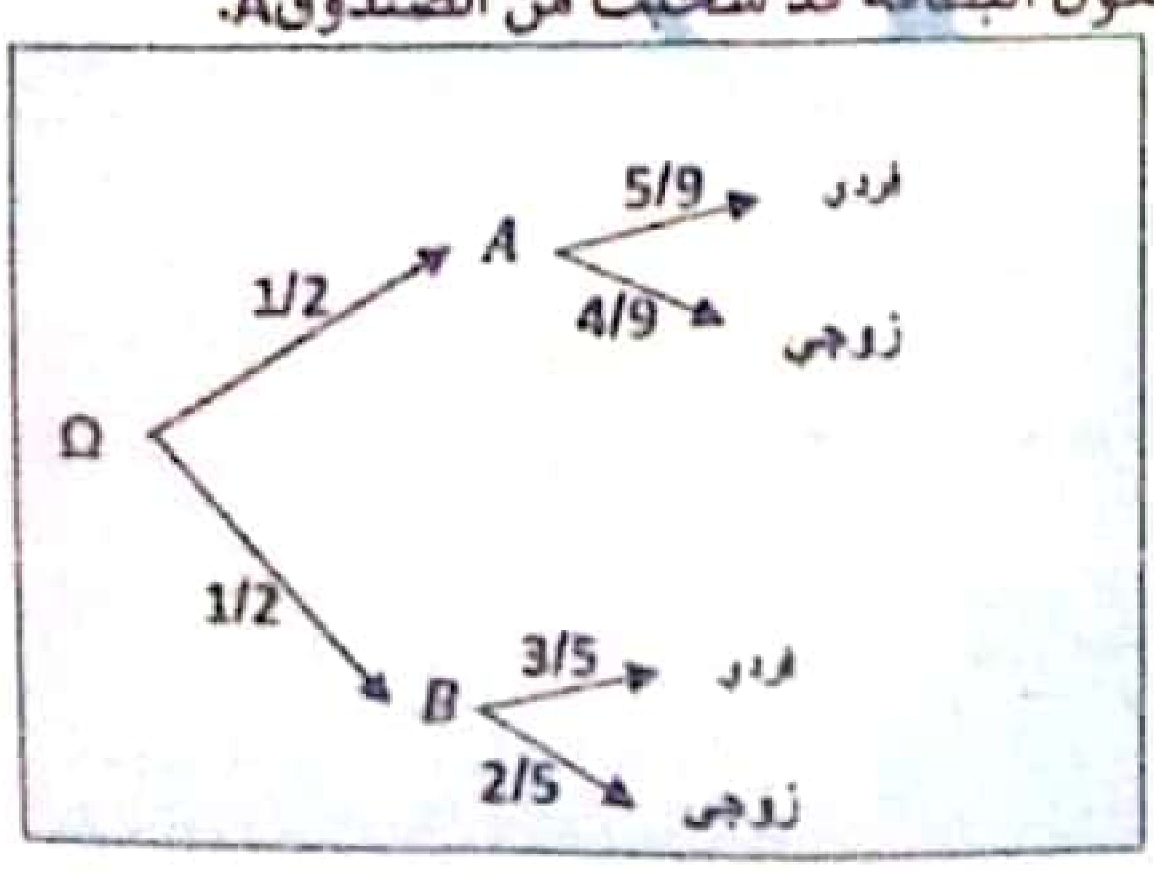
ملاحظة هامة:

عندما يكون في التجربة صندوقين متماثلين ونختار احدهما فإننا نعطي لكل صندوق احتمال $\frac{1}{2}$ وننظم مخطط...

مثال امتحاني

لدينا صندوقان A, B :

يحوي الصندوق A بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 و يحوي الصندوق B بطاقات مرقمة من 1 إلى 5 ..نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه بطاقة فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجي ، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من الصندوق A.



بفرض C حدث البطاقة المسحوبة زوجي.

بفرض A حدث البطاقة من A.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(c)} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}.\frac{4}{9} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}} = \cdots$$

أحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة فردية.

بفرض E حدث ظهور بطاقات فردية.

$$P(E) = \frac{1}{2}.\frac{5}{9} + \frac{1}{2}.\frac{3}{5} =$$

ما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من B علماً أنها تحمل رقم فردي.

بفرض B حدث البطاقة المسحوبة من B.

بفرض E حدث البطاقة تحمل رقم فردي.

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}} = \dots$$

قانون الاحتمال الشرطي :

$$P((A|B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مسألة امتحانية متوقعة

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية والمطلوب:

1. ما عدد الاختبارات في هذه التجربة.
2. أكمل الجدول المجاور.
3. أحسب التوقع والتباين و الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X.

K	0	1	2	3	4
$P(x = k)$					$\frac{16}{81}$

n

الحـــل:

1. عدد الاختبارات : $n = 4$
2. نحتاج P: $P(X = 4) = \binom{4}{4} P^4 (1 - P)^0$

$$\frac{16}{81} = 1 . P^4 \Rightarrow P^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 1 . 1 . \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= 4 . \frac{2}{3} . \frac{1}{27} = \frac{8}{81}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= 4 . \frac{8}{27} . \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

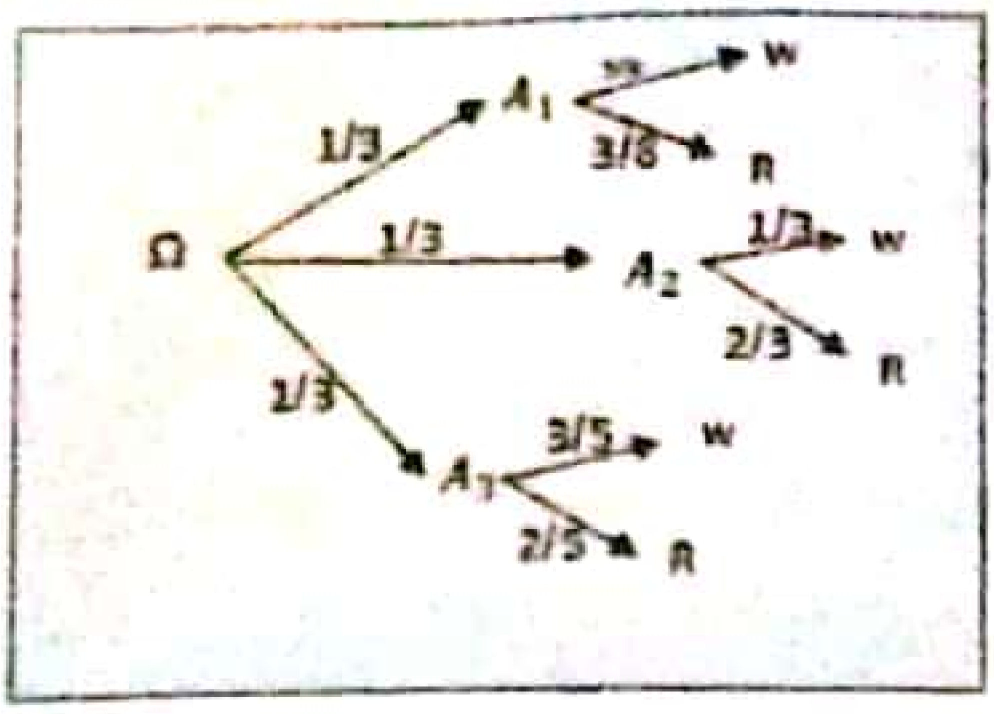
$$E(X) = n . p = 4 . \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$v(X) = n . p . q = 4 . \frac{2}{3} . \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

مثال

في المخطط الشجري المرسوم جانباً:



الرمز w يدل على عدد الكرات البيضاء.

والرمز R يدل على عدد الكرات الحمراء.

نختار عشوائياً كرة واحدة ، والمطلوب:

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل :

① $P(R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$

$= \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15}$

② $P(A_1|R) = \frac{P(A_1 \cap R)}{P(R)}$

منشور ذي الحدين

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}(a)^n(b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots\cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

مثال: تطبيق امتحاني. انشر $(x+2)^5$

$$= \binom{5}{0}(x)^5(2)^0 + \binom{5}{1}(x)^4(2)^1 + \binom{5}{2}(x)^3(2)^2 + \binom{5}{3}(x)^2(2)^3$$
$$+ \binom{5}{4}(x)^1(2)^4 + \binom{5}{5}(x)^0(2)^5$$
$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

مثال هام

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$

$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}(x)^{-r}$$

قانون الحد العام

$$T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$= \binom{6}{r} (x)^{12-3r}$$

من اجل أكد المستقل عن x يكون:

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{6}{4} (x^2)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 15$$

الحد الخامس

الاستقلال الاحتمالي

شرط الاستقلال الاحتمالي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

مثال: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود متوازنة معاً . إذا كان الحدث **A** ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث **B** ظهور كتابتين فقط هل الحدثان **A** ، **B** مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H) \\ (T,T,T) \end{matrix} \right\}$$

$$A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

نعوض في الشرط : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$\frac{3}{8} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \neq \frac{3}{16}$$

المساواة خاطئة فالحدثان غير مستقلان احتمالياً

تمرين دورة 2017

تلقى قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$.

نعرف X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار.

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(T,T,T)

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) . 3 = \frac{12}{27}$$

$(H,T,T)(T,H,T),(T,T,H)$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) . 3 = \frac{6}{27}$$

$(H,T,H) \times 3$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(H,H,H)

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
r_i^2	0	1	4	9

التوقع:

$$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r_i \, . P(X = r_i)$$

$$= 0 . \frac{8}{27} + 1 . \frac{12}{27} + 2 . \frac{6}{27} + 3 . \frac{1}{27}$$

$$= \frac{27}{27} = 1$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مسألة امتحانية

يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة ، اكتب قيم المتغير العشوائي X ثم احسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$(0.0.0)$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$$

$(0.0.1)$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{1}.\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84}$$

$(0.1.1)$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84}$$

$(1.1.1)$

التوقع الرياضي:

r_i	0	1	2	3
$P(X = r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X) = \sum_{r=1}^{r} r_i \; P(X = r_i)$$

$$E(X) = 0.\frac{10}{84} + 1.\frac{40}{84} + 2.\frac{30}{84} + 3.\frac{4}{84}$$

$$= \frac{40 + 60 + 12}{84} = \frac{112}{84}$$

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون اعادة. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}$$

$(0,0,0)$

$$P(X = 1) = \left(\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7}\right) \times 3$$

$(0,0,1) \times 3$

$$P(X = 2) = \left(\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{5}{7}\right) \times 3$$

$(1, 1, 0) \times 3$

$$P(X = 3) = \frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}$$

$(1, 1, 1)$

تمرين هام يحوي فخ امتحاني : يحوي مغلف اربع بطاقات مرقمة بالأرقام $0, 1, 1, 1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموعهما. أكتب قيم المتغير العشوائي X ثم احسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$(0,0)$

$$P(X = 1) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{6}{16}$$

$(1,0) \times 2$

$$P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$(1,1)$

وننظم جدول....

مثـــال: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يلي: $3, 3, 3, 3, 2, 2, 0, 0$ نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة.

1- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟

الحل :

بفرض A حدث البطاقتان تحملان الرقم ذاته

بفرض B حدث أن يكون هذا الرقم هو 3

$$P((B|A)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$A = \{(0,0), (2,2), (3,3)\}$$

$$= \frac{\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}} = \dots\dots$$

2- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان مختلفتان فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجي؟

بفرض C حدث البطاقتان المسحوبتان مختلفتان

بفرض D حدث أن يكون مجموعهما زوجي

الحل:

$$P((D|C)) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$C = \{(0,2), (0,3), (2,3)\}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7}\right)}{2\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{8}\right) + 2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right)}$$

بنك المسائل الهامة

السؤال الأول : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. احسب احتمال ظهور الوجه H مرتين على الأقل .

السؤال الثاني : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً ..وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع و التباين . .

السؤال الثالث : ليكن X متغيرعشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، أكمل الجدول التالي :

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

1) ما عدد النجاحات ؟
2) ما التوقع الرياضي للمتحول ؟
3) أوجد التباين و الانحراف .

السؤال الرابع : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	

أكمل الجدول المجاور و احسب التوقع و التباين .

السؤال الخامس : صندوق يحوي 4 كرات زرقاء و 3 خضراء و 1 صفراء ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً على التتالي دون إعادة ..وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء بين الكرات المسحوبة .

أعد المسألة السابقة في حال السحب معاً و على التتالي مع إعادة .

السؤال السادس : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء و 1 سوداء ، نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه .

أعد المسألة السابقة في حال السحب دون إعادة و في حال السحب معاً .

السؤال السابع : لدينا 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين ؟؟

السؤال الثامن : لدينا الأعداد (0,2,3,4,5,6) بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من ثلاث أرقام على أن يكون من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500؟؟

السؤال التاسع : يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفي الكرات البيضاء

1. نسحب عشوائياً كرة ..ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟
2. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة .. ونعرف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . عيّن قيم X و اكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال العاشر : يشتري أحد المحلات 80% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A و يشتري الباقي منها من المصنع B ..نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% .. نختار عشوائياً قطعة غيار من المحل

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة .
2. إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون من انتاج المصنع B .

السؤال الحادي عشر : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة 1,2,3 و الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة 1,2 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين من الصندوقين ..

اكتب مجموعة قيم X وعين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال الثاني عشر : X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول غير المكتمل المجاور ل X.

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$		

1. ماعدد الاختبارات في التجربة ؟ واكمل الجدول .
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟ وما تباين المتحول العشوائي X

السؤال الثالث عشر : أوجد الحد الذي يحوي x^3 في منشور ذي الحدين $(x^2+\frac{1}{x})^9$

و الحد المستقل عن x في منشور $(x-\frac{1}{x^2})^{12}$

السؤال الرابع عشر : ماهي أمثال الحد x^2y في منشور $(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y})^8$

السؤال الخامس عشر : نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 1, 2, 3 و يحوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 2, 3, 4, 5 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار
2. ليكن A الحدث : (إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3)
   وليكن B الحدث : (مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من 5)
   هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا ؟ علل اجابتك
3. نعرف متحولا عشوائيا X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
   اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي و تباينه

السؤال السادس عشر : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

1. ماعدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2. ماعدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 50

السؤال السابع عشر : يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء ، إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 و ليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)

1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A'_1)$
2. استنتج أن $P(A_2) = 0.74$
3. نعرف $P_n = P(A_2)$:
   1) برهن أن $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$
   2) لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بالصيغة $u_n = P_n - 0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية أساسها 0.2
   واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n$

السؤال الثامن عشر : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون أعادة ..ما احتمال ان يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط

السؤال التاسع عشر : لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \ldots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء . نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n نرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1. احسب $P(R_1)$
2. أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$
3. أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$
4. نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$
   1) أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k\geq1}$ هندسية . عيّن أساسها و حدها الأول
   2) أكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k

السؤال العشرون : يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام 2 ,1 ,0 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 1 ,0 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق

1. الحدث A : " الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $P(A)$
2. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الواحد و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء احتمال تسجيل الأولى $\frac{8}{10}$ إذا سجل الأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$. بفرض A التسجيل ، B الإخفاق ..المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال تسجيل الركلة الثانية
3. إذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال التسجيل في الأولى

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ و إذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب :

1. ارسم مخططا شجريا
2. احسب احتمال نجاحها في الحلقة الثانية
3. اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون : I صندوق أول يحوي 3 كرات حمراء R و واحدة زرقاء B و II صندوق ثاني يحوي كرتين حمراء R وواحدة زرقاء B ، نسحب كرة من الصندوق الأول و نضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء

السؤال الرابع و العشرون : نلقي قطعة نقود C_1 متوازنة ثم نلقي قطعة نقود C_2 غير متوازنة . احتمال ظهور الشعار $\frac{2}{3}$ و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب $E(X), V(X)$

السؤال الخامس و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء على هدف . احتمال تسجيل الهدف في الضربة الأولى A يساوي $\frac{3}{5}$ و في الثانية B يساوي $\frac{4}{5}$ والمطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف . احسب $E(X)$

السؤال السادس و العشرون : يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من خمس أدوار يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال $\frac{2}{3}$ و يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال فوز B

السؤال السابع و العشرون : صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معا .X متحول عشوائي يأخذ القيمة 5 عند ظهور ثلاث كرات حمراء و يأخذ القيمة 3 عند ظهور كرتين حمراء و كرة خضراء و يأخذ القيمة 0 فيما عدا ذلك .احسب $E(X)$

السؤال الثامن و العشرون : في مدرستنا يمارس %30 لعبة التنس نسبة الذكور %60 و %55 لايمارسون التنس . ما احتمال اختيار طالبة لاتمارس التنس

السؤال التاسع و العشرون : يحوي صندوق كرتين حمراء R وكرتين بيضاء W نسحب كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات منها ثم نسحب كرة ثانية و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. اذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى حمراء

السؤال الثلاثون : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال الواحد و الثلاثون : يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة و التي تشمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثاني و الثلاثون : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أيا من القيم : 0, 1, 2, 3, 4, 5

1. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

مخطط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\binom{\ }{\ }$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) هي نفسها(3 ،2)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدا الأساسي $\frac{\ }{5} \times \frac{\ }{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفةعن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{\ }{5} \times \frac{\ }{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

جلسة مراجعة [تحليل توافقي + احتمالات]

السؤال الأول: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال ، بكم طريقة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لصيانة أعمال الخدمة

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة : [1] بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟!
[2] بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟!

السؤال الثالث: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال ، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر؟!

السؤال الرابع: في الشكل المجاور نتأمل شبكة مؤلفة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشكل

السؤال الخامس: صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء، و(5) كرات حمراء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة الصفر فيما عدا ذلك والمطلوب :

[1] نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه والانحراف المعياري

[2] أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة .

[3] أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي دون إعادة .

السؤال السادس: عين في منشور $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x

السؤال السابع: نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$ ، نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .
اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

السؤال الثامن: صندوق يحوي 11 كرة متماثلة فيها 7 كرات خضراء وواحدة بيضاء و3 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة ونتأمل المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة والمطلوب عين قيم المتحول العشوائي X ثم نظم جدول قانون الاحتمال واحسب توقعه الرياضي

السؤال التاسع: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين والمطلوب :

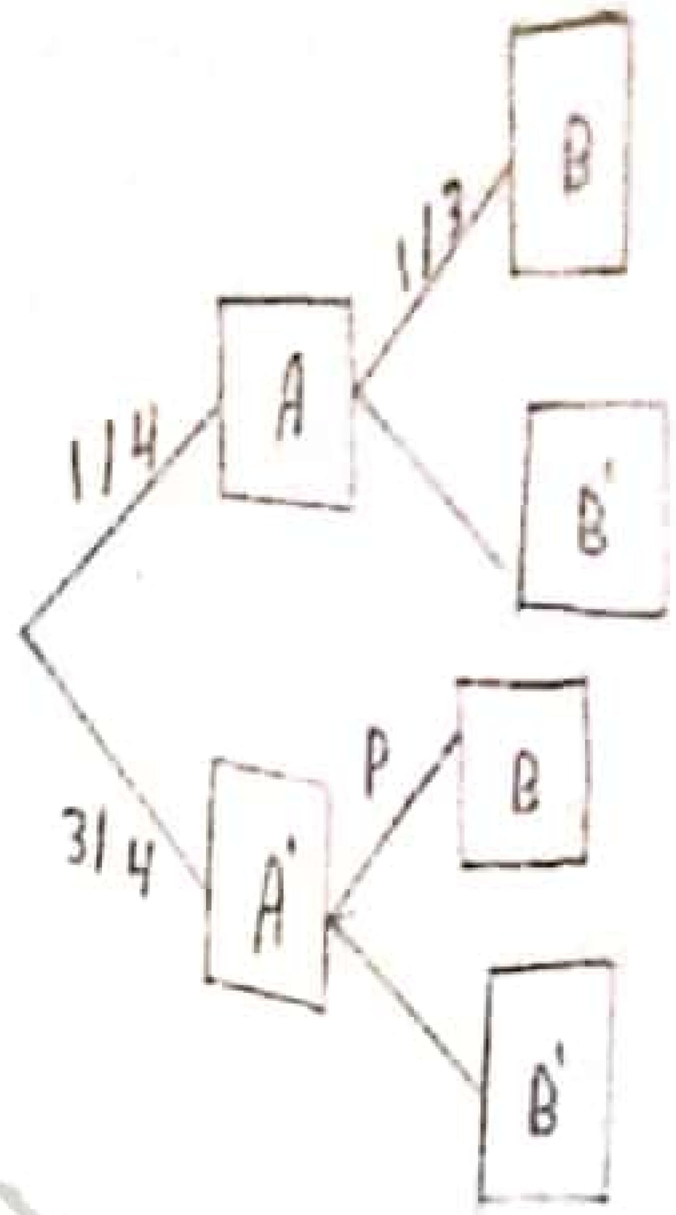
[1] عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي

[2] احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ ..

السؤال العاشر: أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X , Y) علماً أن المتحولين العشوائيين X , Y مستقلان احتمالياً .

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.9
1			0.04	
2				
قانون Y	0.3			

السؤال السادس عشر: ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور. كم تختار قيمة P حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتماليًا



السؤال الثاني عشر: يشتري أحد المحلات 70 % من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A ويشتري الباقي من المصنع B. نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5 % وفي المصنع B هي 8 %
نختار عشوائيًا قطعة غيار من المحل والمطلوب:

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة
2. إذا كانت القطعة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B.

السؤال الثالث عشر: نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربع وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر نلقي الحجر خمس مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يقرن بنتيجة التجربة عدد الوجوه السوداء
والمطلوب: 1. اكتب مجموعة قيم المتغير X
2. احسب قانون X الاحتمالي ونظم جدولًا به

السؤال الرابع عشر: ينتج مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام. عندما ورد طلب عدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنعت الورشة A منها 600 قلمًا وصنعت البقية الورشة B. هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال. نسحب عشوائيًا قلمًا من الطلب. نرمز بالرمز A إلى الحدث «القلم مصنوع في الورشة A» وبالرمز B إلى الحدث «القلم مصنوع في الورشة B» وبالرمز D إلى الحدث «القلم غير صالح للاستعمال»، والمطلوب:

1. أعط تمثيلًا شجريًا للتجربة
2. احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال
3. إذا كان القلم صالحًا للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعًا في الورشة A
4. نسحب عشوائيًا من الورشة A قلمين معًا وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال، احسب $P(X=0)$

السؤال الخامس عشر: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الحدوث غير المكتملة المجاور وهو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات وإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ و
$P(X=0)=\frac{1}{27}$ $P(X=1)=\frac{6}{27}$

1. أوجد $P(X=2)$ و $P(X=3)$.
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟
3. ما تباين المتحول العشوائي X؟

K	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	...

نوع السحب	الترتيب	القانون	التمام	العكس
السحب معًا	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3.2) فقط (2.3)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	العدد الأساسي $\frac{\ }{\ }$ ، $\frac{\ }{\ }$ الكسور حسب عدد الأشياء المسحوبة	تبديلات [illegible]	يوجد عكس (2.3) والمسحوبة (3.2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	العدد الأساسي $\frac{\ }{\ }$ ، $\frac{\ }{\ }$ الكسور حسب عدد الأشياء المسحوبة	لا تبديلات [illegible]	يوجد عكس (2.3) والمسحوبة (3.2)

ملحق تدريبي .. الجزء الثاني

المسألة الأولى :

ليكن العدد المركب $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$. اكتب z بالشكل الأسي ثم أوجد كلا من جذريه التربيعيين بالشكل الأسي

المسألة الثانية :

لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) اكتب بالشكل الأسي كل من z_3 , z_2 , z_1 , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$

2) اكتب بالشكل الجبري , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$

المسألة الثالثة :

مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام $1\ ,1\ ,0\ ,0\ ,-1\ ,-1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع الإعادة :

1) إذا كان الحدث A الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما 0 والحدث B الحصول على بطاقتين جداء رقميهما (0)
هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا؟

2) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0 فما احتمال أن يكون جداء رقميهما 0

3) نعتبر X متغيرا عشوائيا يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين . أوجد مجموعة قيم X واكتب جدول التوزيع الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

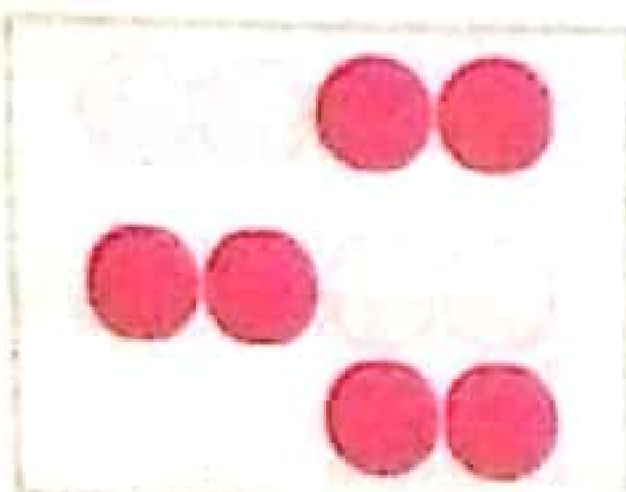
المسألة الرابعة :

ليكن n عددا طبيعيا $2 \le n \le 8$

1) يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة و لنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء و الحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد بحيث $P(A|B) = \frac{2}{3}$ والمطلوب احسب قيمة n

2) بفرض أن $n = 4$ ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

المسألة الخامسة :



يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 بيضاء و 6 حمراء

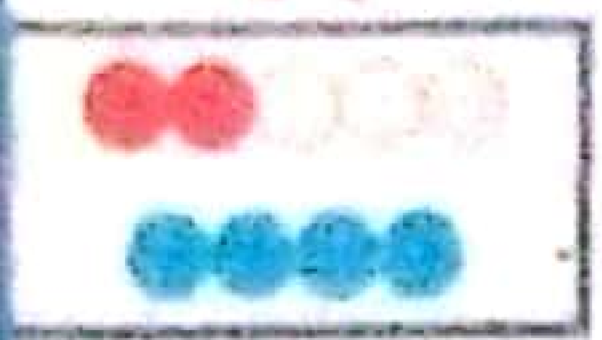
1) نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كرات في آن واحد
   أ. احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء
   ب. احسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، نظم جدول القانون الاحتمالي لـ X، واحسب توقعه الرياضي

3) نسحب من الصندوق في آن واحد 3 كرات خمس مرات على التتالي مع الإعادة ، أحسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط.

المسألة السادسة :

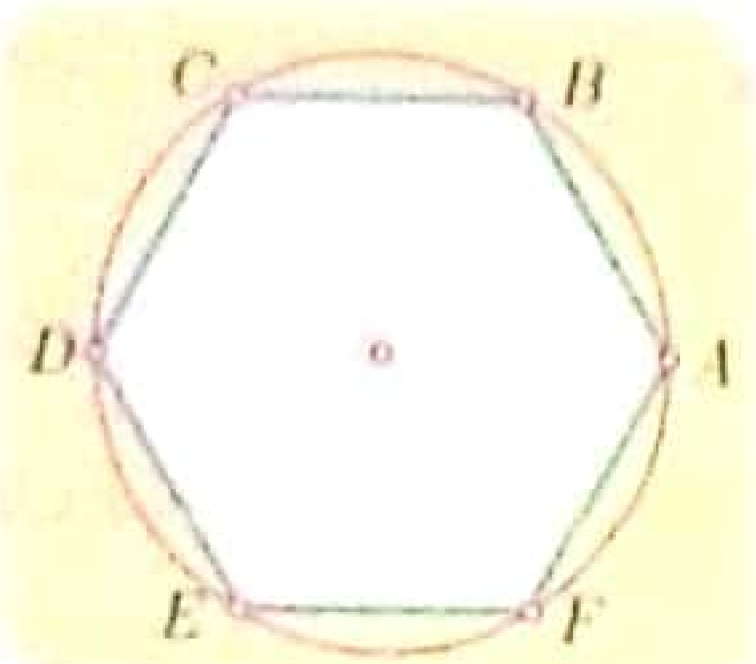
يحوي صندوق (9) كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة :



1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
2) نسحب كرة واحدة ..نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) و الكرة الزرقاء القيمة (2).
نعرف متغيرا عشوائيا X يدل على رقم الكرة المسحوبة..اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي .

المسألة السابعة :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a, b عددان طبيعيان فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟



المسألة الثامنة :

في الشكل المرسوم جانبا لدينا ست نقاط A, B, C, D, E, F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية :
نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :
1) ماعدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

المسألة التاسعة :

$ABCDE$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ و (EA) يعامد القاعدة ..نفرض المعلم $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$
أوجد $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}$ ، ثم استنتج $\cos(BED)$ ،ثم عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A,1), (B,1), (C,1), (D,1), (E,4)$.

النجاح يأتي بقولك أستطيع
الفشل يأتي بقولك لا أستطيع

I Can

المسألة العاشرة :

$ABCDEFGH$ مكعب . I, J, K, L هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$

ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

جد إحداثيات جميع النقاط ثم أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{LM}$ مرتبطة خطياً .

المسألة الحادية عشر :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[FH]$

1) جد إحداثيات الرؤوس وأثبت أن المثلث ABG قائم واحسب مساحة المثلث ABG
2) جد معادلة المستوي (ABG) واحسب بعد F عن (ABG) واستنتج حجم $ABGF$
3) أعط تمثيلا وسيطيا لكل من (IK) و (FJ) وهل تقع النقاط I, J, K, F في مستو واحد .

المسألة الثانية عشر :

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم و P و Q و R و S وفق :

$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

1) أثبت أن P هو مركز الأبعاد للنقطتين $(B,4)$ ، $(C,1)$ و أن Q هو مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ ، $(D,3)$
2) ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,4)$ ، $(C,1)$ ، $(D,3)$ بين أن G تقع على (PQ)
3) أثبت أن G تقع أيضا على (RS) ثم استنتج كون المستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعين
4) إذا كان طول حرف رباعي الوجوه (2) ..احسب $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ واستنتج تعامد المستقيمين (AB) و (CD)

المسألة الثالثة عشر :

لتكن النقاط : $A(2,1,3)$ ، $B(1,0,-1)$ ، $C(4,0,0)$ ، $D(0,4,0)$ ، $E(1,-1,1)$

1) هل C, D, E تقع على استقامة واحدة..أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (CD) و المستقيم المار من E و يعامد (CD) ثم جد نقطة التقاطع
2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على (CDE) ثم جد معادلة (CDE) و استنتج المسقط القائم ل A على (CDE)
3) أوجد عددين a ، b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ..هل A ، B ، C ، D تقع في مستو واحد
4) جد معادلة المستوي العمودي على (CDE) ويمر من A و B و جد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$
5) عين إحداثيات S منتصف $[AB]$ و S' نظيرة S بالنسبة إلى C

المسألة الرابعة عشر :

لدينا الشعاعان $\overrightarrow{u}(2,1,-1)$ ، $\overrightarrow{v}(1,3,2)$ والنقطة $A(1,-1,3)$ ، $B(1,0,-1)$

1) بين أن $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المار من A و الموجه بالشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$
2) أوجد معادلة المستوي Q المار من B الموازي للمستوي P ثم أوجد البعد بين P و Q و اوجد مجموعة النقاط التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

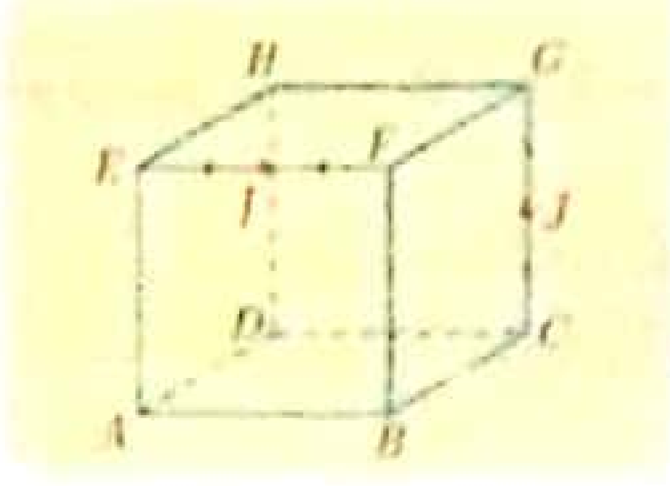
المسألة الخامسة عشر :

① نتأمل هرماً $S - ABCD$ قاعدته مربع و رأسه S و طول كل حرف من حروفه و أضلاع قاعدته يساوي a

احسب $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$

② $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$ احسب

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$



المسألة السادسة عشر :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(-1,2,1)$ ، $B(2,1,3)$ ، $C(0,-1,2)$ ولتكن (P) مجموعة النقاط M من الفضاء بحيث $AM = BM$

1) بين أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$
2) عين معادلة المستوي (Q) الذي يمر من A و يوازي (P)
3) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر من C و يعامد (P)
   ب- عين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)
   ج- احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)
4) عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

المسألة السابعة عشر :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات : $\begin{cases} P: 2x-y+2z-2=0 \\ Q: x+y+z-1=0 \\ R: x-z-1=0 \end{cases}$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ اكتب تمثيلا وسيطيا له
2. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
3. أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

المسألة الثامنة عشر :

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ، تكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X
واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X و احسب توقعه الرياضي

المسألة التاسعة عشر :

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط C , B , A التي تمثلها الأعداد العقدية : $c = -18+7i$, $b=-6+3i$, $a=6-i$ بالترتيب و المطلوب :

1. أحسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و استنتج أن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة
2. بفرض $d = 1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته ☐ أحسب ☐
3. جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

المسألة العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$

و المستوي $P: 3x-y-3z-8=0$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

المسألة الواحدة والعشرون :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1), B(0,1,1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A و يقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.
2. أثبت أن المستقيمين d , (AB) متعامدان .

المسألة الثانية و العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D
2. اكتب معادلة للمستوي (ACH)
3. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: \ -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)
4. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة
5. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسألة الثالثة والعشرون :

جد مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق :

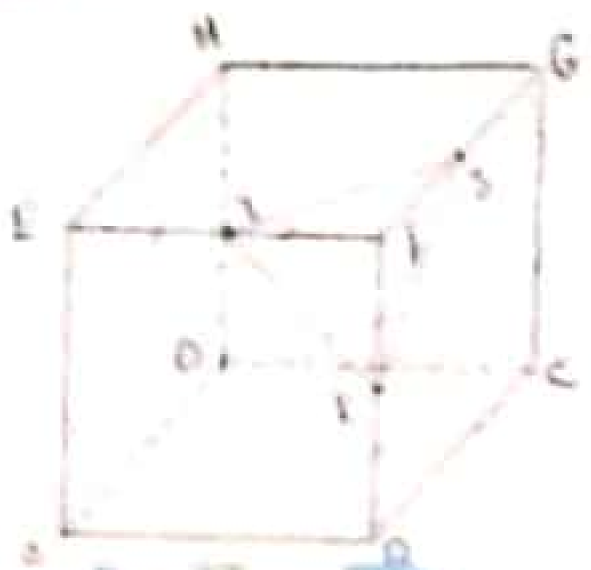
$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

المسألة الرابعة و العشرون :

عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

المسألة الخامسة و العشرون : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K

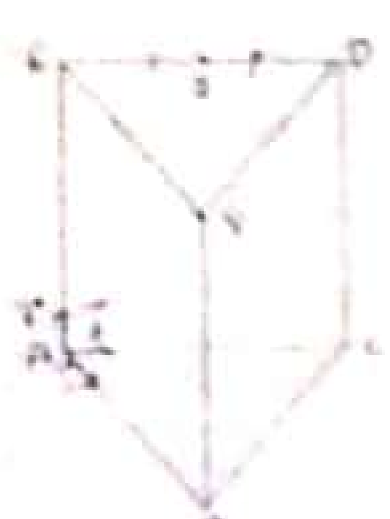


منتصفات الأحرف $[FE], [FG], [FB]$ على الترتيب

نختار معلماً متجانساً $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ والمطلوب :

1. أوجد احداثيات رؤوس المكعب و النقاط I, J, K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عموديا على (IJK)
4. استنتج احداثيات N المسقط القائم ل F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}$

المسألة السادسة و العشرون : $ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A . النقطة J



منتصف $[ED]$ نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حيث : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath}$ ، $\overrightarrow{Ac} = 4\vec{\jmath}$ ، $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$

1. جد احداثيات النقاط J, E, D, C, B
2. جد معادلة المستوي (JBC)
3. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (JC)
4. احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)
5. عيّن احداثيات النقطة K (م.ا.م)للنقاط المثقلة $(J, 2), (B, 1), (C, 2)$

المسألة السابعة و العشرون :

في معلم متجانس لدينا النقاط $A(1, 2, 4), B(1, 0, 2), C(2, 2, 5), M(2, 2, -1)$

1. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ و النقطة D نظيرة I بالنسبة ل C
2. عيّن α, β إذا علمت أن $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$
3. تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستويا P أوجد معادلته
4. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من M و يعامد المستوي P
5. عيّن احداثيات النقطة M' المسقط القائم ل M على المستوي P

المسألة الثامنة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(0,-1,-2)$, $B(1,2,-1)$, $C(1,1,-2)$

1. اثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن $\vec{n}(2,-1,1)$ ناظم على المستوي (ABC) و اكتب معادلة المستوي (ABC)
3. لتكن G (م.ا.م) للنقاط $(A,1)$,$(B,-1)$, $(C,2)$ اكتب احداثيات النقطة G
4. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CG)
5. جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = 12$

المسألة التاسعة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة : $A(6,1,1)$ و المستويان : $P_2: y+z=4$, $P_1: x-2y=5$

1. أثبت أن المستويين متقاطعين
2. جد تمثيلا وسيطيا للفصل المشترك لهما Δ
3. اكتب معادلة المستوي Q المار من A و يعامد الفصل المشترك
4. أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ
5. احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

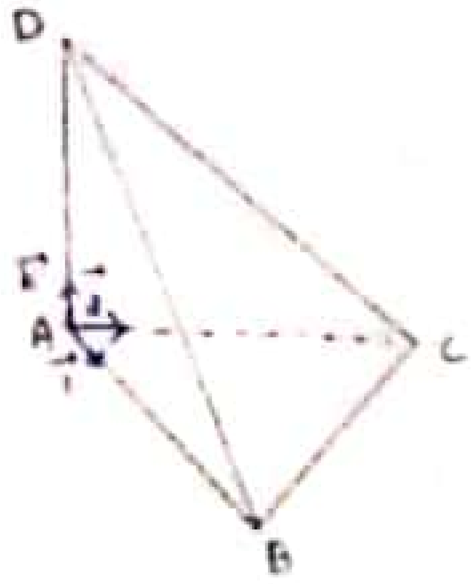
المسألة الثلاثون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$

1. اكتب معادلة المستوي (ABC)
2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من (O) و يعامد المستوي (ABC)
3. عيّن احداثيات النقطة H نقطة تقاطع Δ مع (ABC)
4. احسب الجداءات السلمية $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC

المسألة الواحدة و الثلاثون :

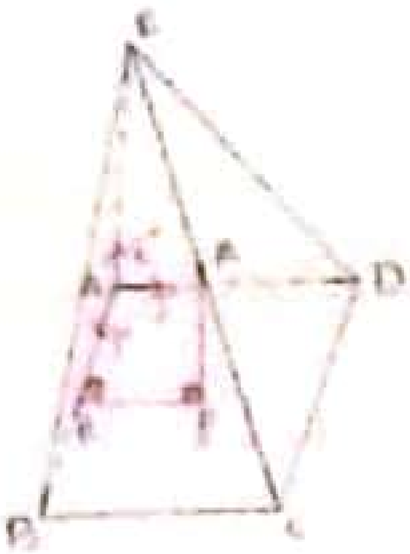
ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين و $DA \perp (ABC)$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$
بفرض لدينا معلم متجانس مبدأه A



1. عيّن احداثيات الرؤوس $ABCD$
2. اكتب معادلة المستوي (BCD)
3. اثبت ان مسقط A على المستوي (BCD) و ليكن J هو مركز ثقل المثلث BCD
4. عيّن احداثيات G (م.ا.م) للنقاط $(A,1)$,$(B,2)$, $(C,1)$
5. اوجد معادلة لكرة التي مركزها J وتمر D
6. احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. استنتج مساحة المثلث BCD
8. عيّن احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع

المسالة الثانية و الثلاثون :

$E - ABCD$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ فيه EA عمودي على مستو القاعدة $ABCD$
و فيه $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}\ ,\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}\ \ \overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$



1. اوجد احداثيات رؤوس الهرم
2. اوجد احداثيات مركز ثقل BDE
3. احسب $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}$ و ماذا تستنتج ؟
4. اوجد معادلة المستوي EBD
5. اوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم EC
6. لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ ولتكن P المسقط القائم ل M على مستوي القاعدة $ABCD$ و لتكن H المسقط القائم ل P على AB ..احسب $[MH]$

المسالة الثالثة والثلاثون : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا مجموعة النقاط :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$ والمطلوب :

1) عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ من الفراغ
2) ليكن لدينا المستقيم d المار بالنقطة $A(2, 0, 1)$ والذي يقبل $\vec{u}(2, 0, -2)$ شعاع موجه له . ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الكرة S
3) أثبت أن المستوي $P: 3x + 2y = 7$ يقطع الكرة S وأوجد مركز الدائرة الناتجة ونصف قطرها

المسالة الرابعة و الثلاثون : عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{n+3} = \binom{15}{2n}$

المسالة الخامسة والثلاثون : المستقيمان d , d' معرفان وسيطيا وفق :

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} ;t \in R \quad , \quad d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} ;s \in R$$

1. أثبت أن d , d' متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d, d'

المسالة السادسة و الثلاثون : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

المستوي $P: 2x + y - 3z + 2 = 0$ و النقطة $A(1, 1, -2)$. المطلوب :

1. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي
2. اكتب معادلة للمستوي Q المار من A و الموازي للمستوي P

تم بعون الله ... أتمنى لكم التوفيق
... دعواتكم لمن ساهم بنجاح
هذه النوطة ..

جلسة امتحانية لمراجعة الهندسة

السؤال الأول:

1) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

2) تحقق أن المستوي P الذي معادلته:

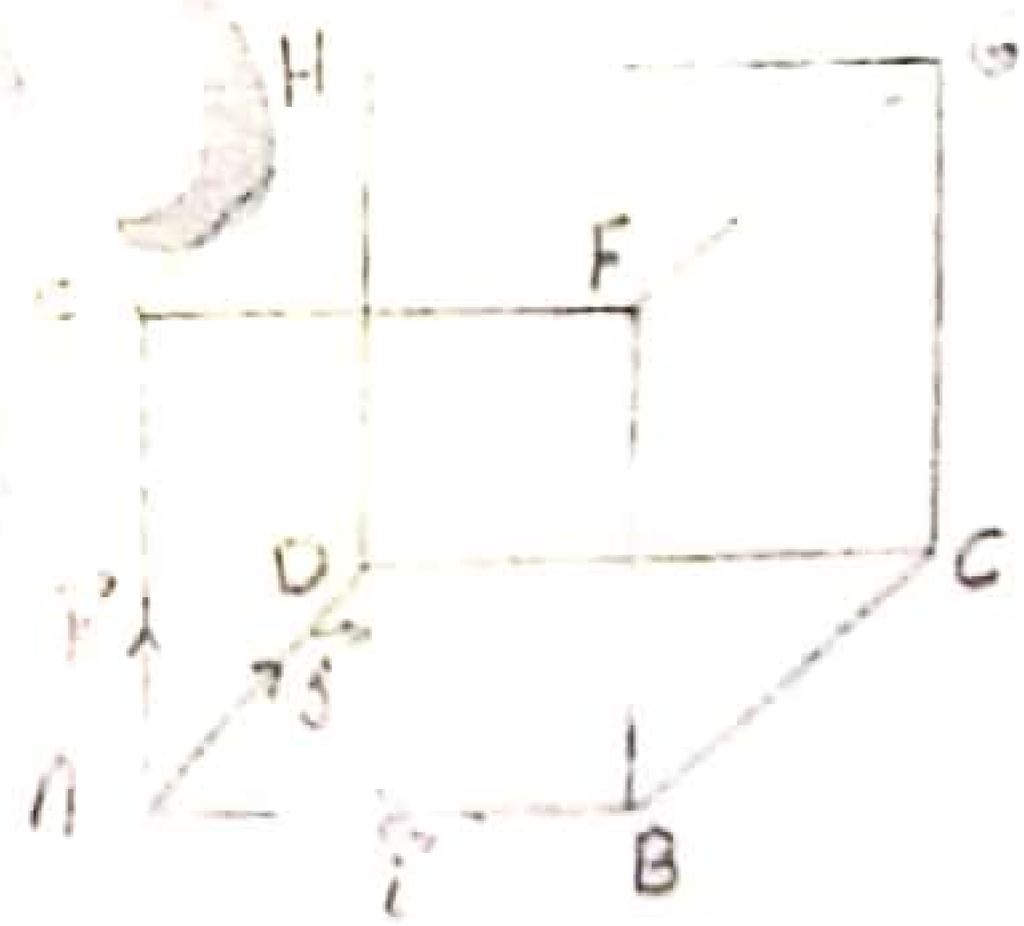
$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S

السؤال الثاني: في الشكل المجاور:

ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2 نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ،

$\vec{AE}=2\vec{k}$. $\vec{AD}=2\vec{j}$. $\vec{AB}=2\vec{i}$



1) اكتب معادلة المستوي (GBD).

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

3) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4) جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EC}$$

5) أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

السؤال الثالث: اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d':

$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} t\in R \quad و \quad d': \begin{cases} x = s \\ y = 3s-3 \\ z = -s+1 \end{cases} s\in R$$

وهل المستقيمان d و d' يقعان في مستوٍ واحد؟ علل إجابتك.

السؤال الرابع: نتأمل في المعلم المتجانس

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

والمطلوب:

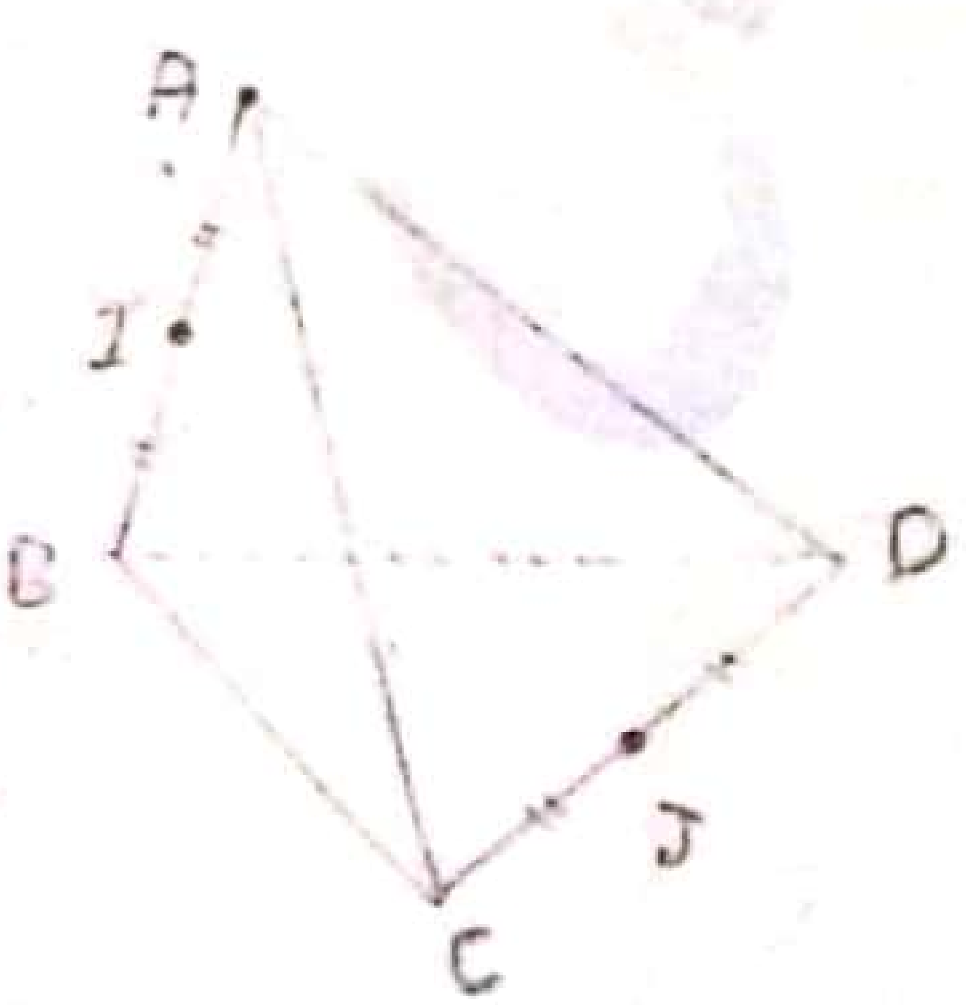
اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]

السؤال الخامس:

ABCD رباعي وجوه و a عدد حقيقي. I و J على الترتيب منتصفا [AB] و [CD] و E و F نقطتان تحققان العلاقتين

$\vec{AE}=a\vec{AD}$, $\vec{BF}=a\vec{BC}$

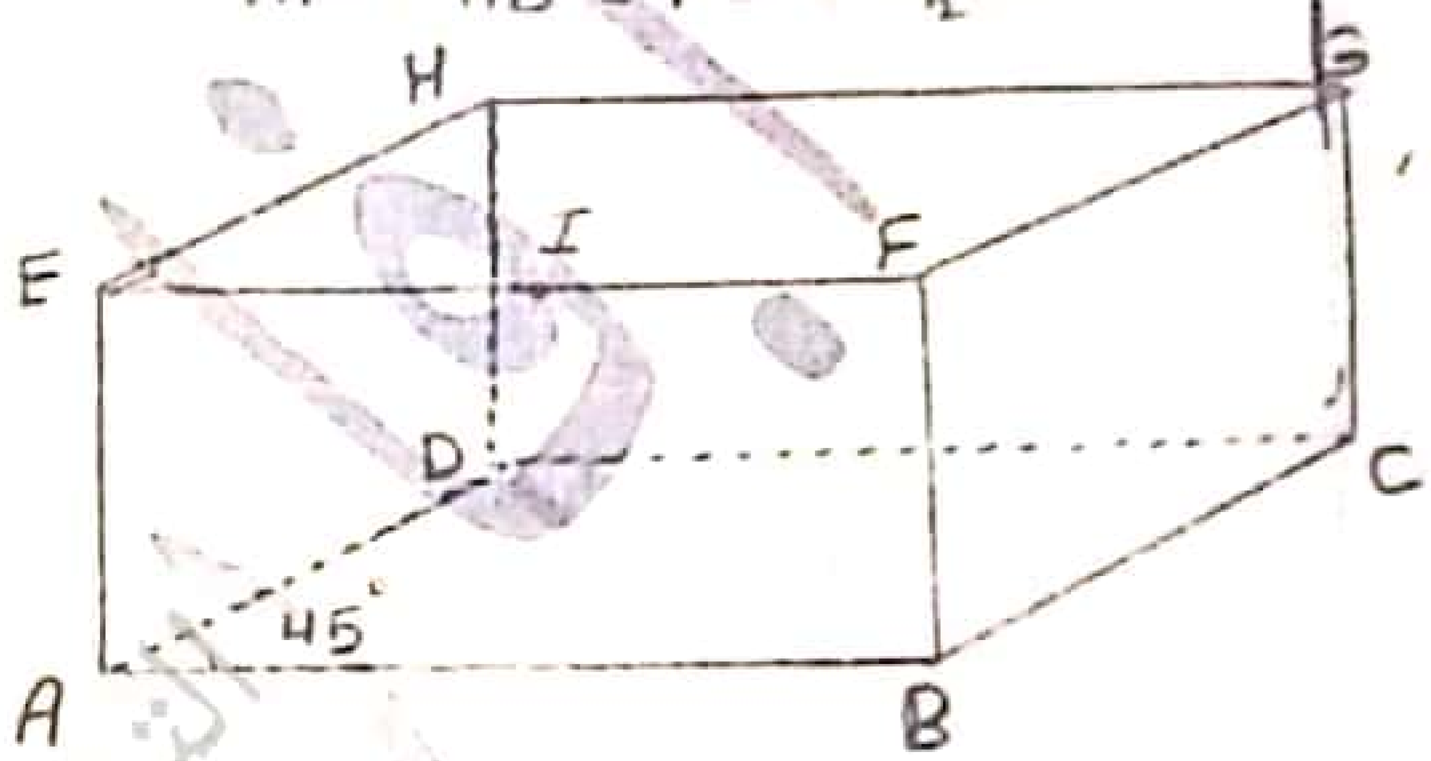
وأخيراً H هي منتصف [EF] أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة.



السؤال السادس: متوازي $ABCDEFGH$ مستطيلات فيه $BC = GC = 1$ ، $AB = 2$ وقياس الزاوية $D\hat{A}B$ يساوي 45° والنقطة I منتصف $[EF]$ المطلوب:

1. احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
2. عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$



السؤال السابع: في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2, 1, 3)$ ، $B(1, 0, -1)$

$C(4, 0, 0)$ ، $D(0, 4, 0)$ ، $E(1, -1, 1)$

1. احسب $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AB}$
2. أثبت أن النقاط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة.
3. أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)
4. اكتب معادلة المستوي (CDE).
5. احسب بعد B عن المستوي (CDE)
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

السؤال الثامن: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(0, 2, -2)$ ، $B(-1, 2, -1)$

$C(-2, 1, 1)$ ، $D(0, 3, -3)$

1. أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوي واحد.
2. أثبت أن النقاط B, C, D تقع على استقامة واحدة.

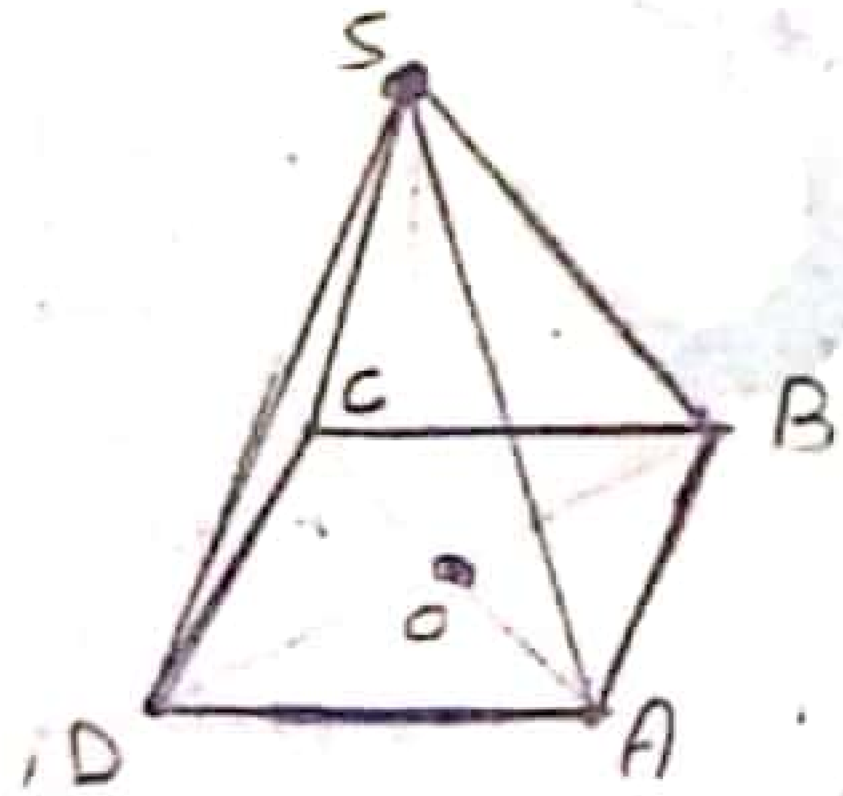
السؤال التاسع:

عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

السؤال العاشر: ليكن $S-ABCD$ هرم قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 5 وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 5 ولتكن O مرتسم S القائم على القاعدة، والمطلوب:

1. احسب $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{SC}$
2. احسب طول القطر BD ثم احسب $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DS}$
3. عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(S, 1)$ ، $(C, 3)$ ، $(D, 2)$



السؤال الحادي عشر: في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $B(7, -2, 0)$ ، $A(2, 1, -2)$ والشعاعان $\vec{u}(2, -1, 0)$ ، $\vec{v}(-3, 1, 2)$

والمطلوب: 1. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ مرتبطة خطياً.

2. اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{v}$ ، $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه له ويمر بـ A.

السؤال الحادي عشر:

لتكن النقاط: $A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$

$C(3,1,-2)$ ، $D(-4,2,1)$

بيّن مع التعليل صحة أو خطأ العبارات الآتية:

1) المثلث ABC قائم.

2) النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

3) المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

السؤال الثاني عشر:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و $BC = 2$ ، $CG = 2$ والنقطة I هي منتصف AB والنقطة J منتصف CG ولدينا المعلم المتجانس:

$$\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

المطلوب:

1) اكتب معادلة المستوي (IFH)

2) هل المستقيمان (IJ) و (DJ) متعامدان ...

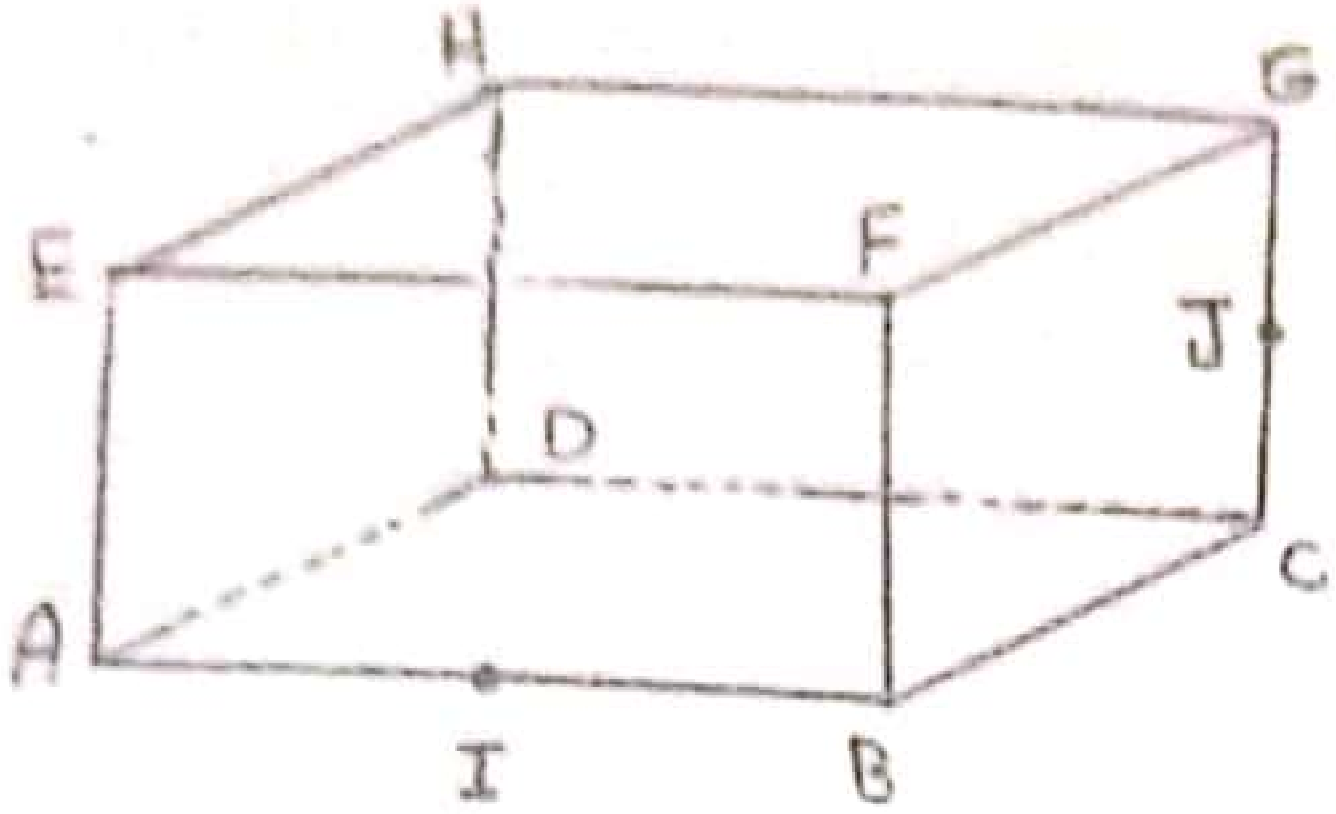
احسب $\cos I\hat{J}D$

3) برهن أن الأشعة $\overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{AH}$ ، $\overrightarrow{AF}$ مرتبطة خطياً.

4) جد احداثيات M التي تحقق:

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5) احسب بعد G عن المستوي (IFH) ثم أوجد مسقطه القائم على المستوي (IFH)



التمرين الثالث عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$

$C(3,1,-2)$ ، $D(-4,2,1)$

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم للمستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

التمرين الرابع عشر:

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,1,0)$ ، $B(1,2,1)$ ، $C(4,0,0)$ المطلوب:

1) أثبت أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

2) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3) ليكن المستويان P ، Q معادلتاهما:

$P: x + 2y - z - 4 = 0$

$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d ذو التمثيلات الوسيطة التالية:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

4) ماهي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC)

5) احسب بعد A عن المستقيم d.