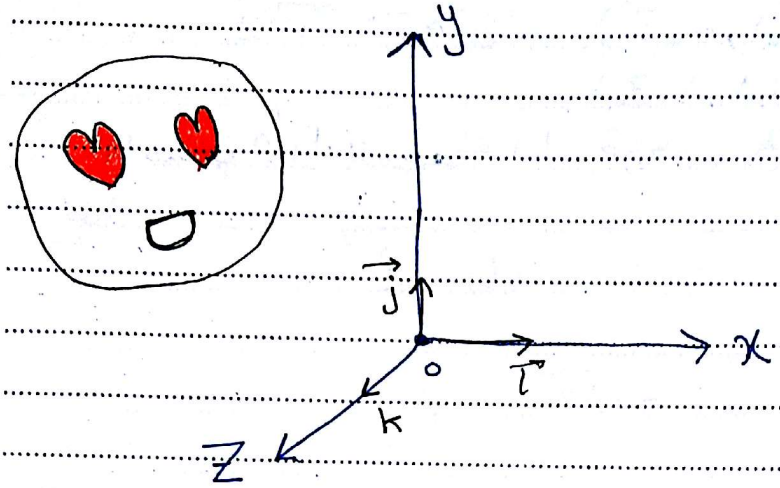
الأشعة في الفراغ :



1. المستوي :

نرمز بـ :

o : مبدأ الإحداثيات

ox : محور الفواصل

oy : محور الترتيب

oz : محور الراقم

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: أشعة وحدية بحيث طول كل منها = 1

2. النقطة :

لها { x فاصلة, y ترتيب, z راقم أو علو } ← إحداثيات النقطة

(x, y, z) رمزها

الأستاذ : أحمد عبيد تكروري

سر النجاح

العمليات على النقاط :

① دستور البعد بين نقطتين أو دستور طول قطعة مستقيمة

تكن النقطتان $A(x_A, y_A, z_A)$ ، $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

حفظ

AB ← البعد بين A و B

سر النجاح

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

Scanned by CamScanner

تدريب : لتكن النقطتين $A(1,0,2)$
$B(1,1,3)$
احسب طول القطعة المستقيمة AB

الحل :

$$AB = \sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}$$

$$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

② إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

$$x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \quad y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \quad z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$$

تدريب : لتكن النقطتان $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,3)$

أوجد إحداثيات منتصف القطعة AB

الحل : لنفرض I منتصف القطعة المستقيمة AB

$$x_I = \frac{1+1}{2} = 1 \quad , \quad y_I = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad z_I = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

الأستاذ : أحمد عبيد تكروري

أهم ما قيل ويقال :

الشعاع :
- يتشكل من نقطتان
- رمزه $\overrightarrow{\square}$
- صيغته العامة (قليلة الاستخدام) :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B-x_A)\vec{i} + (y_B-y_A)\vec{j} + (z_B-z_A)\vec{k}$$

- صيغته المختصرة (الأكثر استخداماً) :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B-x_A \; ; \; y_B-y_A \; ; \; z_B-z_A)$$

Scanned by CamScanner

تدريب: ليكن النقطتان $A(1,0,2)$ $B(1,1,3)$

جـ $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$

دورة 2018: ليكن النقط $A(2,1,3)$ $B(1,0,-1)$ $C(4,0,0)$ $D(0,4,0)$ $E(1,-1,1)$

جـ $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$

$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

$AB(-1,-1,-4)$

نظيم

طويلة الشعاع: $\vec{V}(a,b,c)$

← يعني طول الشعاع

← رمزه $\|\vec{V}\|$

← خانونه $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

تدريب: ليكن الشعاعان $\vec{U}(0,4,3)$ $\vec{V}(1,-1,2)$

احسب نظيم كلّ من الشعاعان

$\|\vec{U}\| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

أنواع الأشعة:

1) الشعاع الصفري:

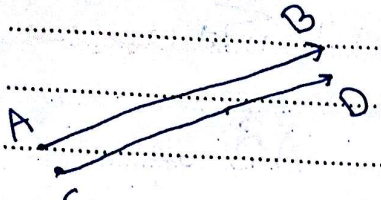
← رمزه $\vec{0}$

← هو شعاع انطبق بدايته على نهايته

الأستاذ: أحمد تكروري

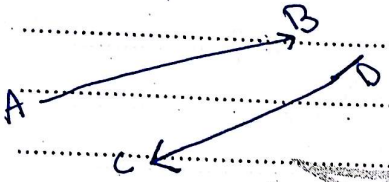
Scanned by CamScanner

2) - الشعاعان المتساويان :



هما شعاعان لهما ذات 1) - الحامل
2) - الجهة
3) - الطويلة

3) - الشعاعان المتعاكسان :

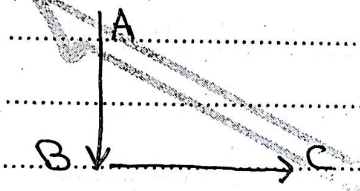


هما شعاعان لهما ذات 1) - الحامل
2) - الطويلة
و بجهتين متعاكستين

$\vec{O}$ = مجموعهما

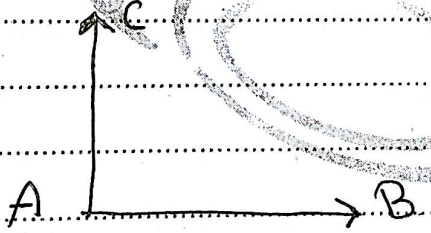
لأخذ العلم : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

4) - الشعاعان المتعاقبان :



هما شعاعان نهاية الأول هي بداية الثاني

5) - الشعاعان المشتركان بالطبيعة :



هما شعاعان لهما البداية ذاتها

Scanned by CamScanner

العمليات على الأشعة :

ليكن الشعاعان $\vec{V}(x_v, y_v, z_v)$ و $\vec{U}(x_u, y_u, z_u)$

جبرياً : بالأرقام

① جمع وطرح الأشعة :

$$\vec{U} \pm \vec{V} = (x_u \pm x_v, y_u \pm y_v, z_u \pm z_v)$$

② ضرب الشعاع بعدد $a \neq 0$:

$$a\vec{U} = (ax_u, ay_u, az_u)$$

تدريب : ليكن الشعاعان $\vec{V}(1,2,0)$ و $\vec{U}(2,0,1)$

أوجد بالتحليل :

1- $\vec{U} + \vec{V}$

2- $3\vec{U} + 2\vec{V}$

3- $2\vec{V} - 3\vec{U}$

الحل :

1- $\vec{U} + \vec{V} = (3,2,1)$

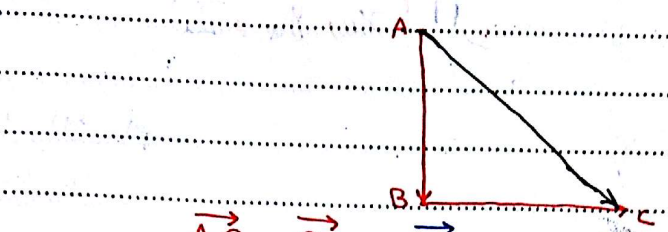
2- $3\vec{U} + 2\vec{V} = 3(2,0,1) + 2(1,2,0)$
$= (6,0,3) + (2,4,0)$
$= (8,4,3)$

3- $2\vec{V} - 3\vec{U} = 2(1,2,0) - 3(2,0,1)$
$= (2,4,0) + (-6,0,-3)$
$= (-4,4,-3)$

Scanned by CamScanner

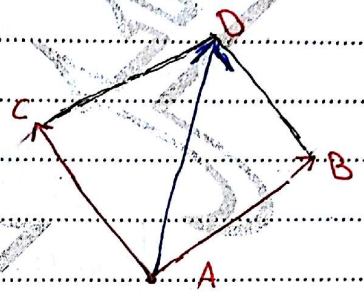
بيانياً : بالرسم

جمع الأشعة : الأشعة المتتابعة مثل جمع الأشعة



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2- الأشعة المشتركة في البداية



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

حيث (د) هي الرأس المقابل للبداية

التطبيقات على الأشعة :

ليكن الشعاعان $\vec{V}(x_v, y_v, z_v)$ و $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$

1- تعامد الأشعة :

$\vec{u} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{V} = 0$

$(x_u, y_u, z_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) = 0$

$x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v = 0$

Scanned by CamScanner

تدريب: أثبت أن الشعاعان متعامدان

$\vec{V}(1,1,-1)$ $\vec{u}(1,1,2)$

الحل:

$\vec{V}\cdot\vec{u} = (1,1,-1)\cdot(1,1,2)$

$= 1+1-2$

$= 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{V}$

2) الارتباط الخطي لشعاعان:

يعني توازيهما

لإثبات أنهما مرتبطان خطيا"

إذا: واحد منهما ينتج عن الآخر وفق عدد $a \neq 0$

$\vec{u} = a\vec{V}$

أو: تناسب مركباتهما

$\frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} = \frac{z_u}{z_v}$

تدريب: لتكن النقاط $A(-4,1,3)$ $B(-2,0,5)$

$C(0,-1,7)$

① جد الاستقامة $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

② أثبت أنهما مرتبطان خطيا"

الحل ① -

$\vec{AB}(2,-1,2)$ $\vec{AC}(4,-2,4)$

② بطريقة ما

$\vec{AC} = 2\vec{AB}$

$\vec{AB}, \vec{AC}$ مرتبطان خطيا"

بطريقة أو:

$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2}$ محقق

Scanned by CamScanner

3) وقوع 3 نقاط على استقامة واحدة :

لإثبات أن A, B, C على استقامة واحدة نتبع :

① - نشكل شعاعين من منطلق واحد $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

② نثبت أنهما مرتبطان خطياً "

تدريب : أثبت أن النقاط $A(-4,1,3)$ $B(-2,0,5)$

$C(0,-1,7)$ تقع على استقامة واحدة

① $\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$ $\overrightarrow{AC}(4,-2,4)$

② واضح أن الشعاعان مرتبطان خطياً "

لأن $\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2}$

$\Rightarrow$ A, B, C على استقامة واحدة

دورة : لتكن النقاط $A(2,1,3)$ $B(1,0,-1)$

2018 $C(4,0,0)$ $D(0,4,0)$ $E(1,-1,1)$

① - جد الأشعة $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}$

② أثبت أن E, D, C ليست على استقامة واحدة

الحل : ① $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$ $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

② واضح أن $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ مستقلان خطياً "

$\frac{-3}{-4} \neq \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ مستقلان خطياً " (أي مرتبطين خطياً ")

$\Rightarrow$ E, D, C ليست على استقامة واحدة

الأستاذ : أحمد عبيد تكروري

دائماً " كونوا مع سر النجاح لتحصلوا على الـ 600

Scanned by CamScanner

الارتباط الخطي لثلاث أشعة :

لإثبات أن $\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}$ مرتبطة خطيا" يجب أن نبرهن كلا الشرطين :

① توجد شعاعين $\vec{U}, \vec{V}$ ليسا مرتبطين خطيا"

② نكتب الشعاع الثالث بدلالتهما يعني

$$\vec{W} = a\vec{U} + b\vec{V}$$

تدريب : لتكن النقاط $A(-1,1,3)$ $B(1,1,-1)$

$C(2,-1,1)$ $D(2,a,-1)$

① أوجد الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

② أثبت أن هذه الأشعة مرتبطة خطيا"

الحل : ① $\vec{AB}(2,0,-4)$ $\vec{AC}(3,-2,-2)$ $\vec{AD}(3,-1,-4)$

② واضح أن $\vec{AB}, \vec{AC}$ مستقلان خطيا" (غير مرتبطين)

لأن $\frac{2}{3} \neq \frac{0}{-2}$

$$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

$$(3,-1,-4) = (2a,0,-4a) + (3b,-2b,-2b)$$

$$(3,-1,-4) = (2a+3b,-2b,-4a-2b)$$

بالمطابقة

$$3 = 2a + 3b \quad \cdots\cdots 1"$$

$$-1 = -2b \quad \cdots\cdots 2"$$

$$-4 = -4a - 2b \quad \cdots\cdots 3"$$

نختار "1" و "2"

$$3 = 2a + 3b$$

$$-1 = -2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = 2a + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{3}{2} = 2a \Rightarrow \frac{3}{2} = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

الأستاذ : أحمد تكروري موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

Scanned by CamScanner

تكرمية

عملة 3 معادلات نحلها كيف نحلها ؟

① نختار معادلتين فقط

② نوجد منهما قيمة a,b

③ نعوض قيمة a,b في المعادلة الثالثة

تحقق	لم تحقق
الأسئمة مرتبطة خطيا"	الأسئمة غير مرتبطة خطيا"

نعوض قيمة a,b في المعادلة الثالثة

$-4 = -4 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2}$

$-4 = -3 - 1$

$-4 = -4$ تحققت

↓

الأسئمة مرتبطة خطيا"

أودُّ لو أنني ألقي رأسي بين ذراعيك
وأنني أستريح ممك من أذى هذا العالم
ومن كل شيء

دائما" كن مع سر النجاح لتحصل على الـ 600

Scanned by CamScanner