المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الملك خالد
كلية العلوم والآداب للبنين بمحايل عسير
قسم الفيزياء

الاختبار الاول- الفصل الثاني
١٤٣٦-١٤٣٧

التاريخ ٢٦: 1437\05\ هـ

الدرجة: 12/20

اسم الطالب:
الرقم الجامعي:
رقم التسلسل:

المعطيات:

باستخدام المعادلة التفاضلية التالية من الدرجة الأولى

$$y` + 2y = 0$$

الأسئلة:

1/ أكتب الدوال y و $y`$ على شكل تسلسلات القوى

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n$

2

2/ أكتب المعادلة $y` + 2y = 0$ على شكل تسلسلات القوى

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y' = \sum_{n=\cancel{1}}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n-\cancel{1}+\cancel{1}}$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n+1\, a_{n+1} x^n$

$y' + 2y = 0$

$\sum_{n=0} n+1\, a_{n+1} x^n + 2a_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} = -$

$a_{n+1} = \frac{-2}{n}$

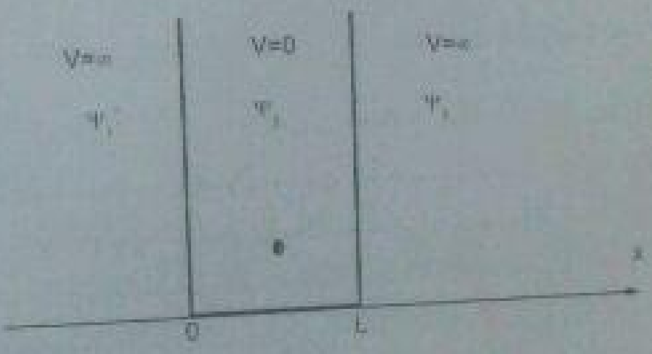
2

3/ أوجد العلاقة بين a_{n+1} و a_n

تتميز حركة جسيم بمجال الجهد التالي:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{في } 0 \le x \le L \\ \infty & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

حسب الشكل:



أ/ في أي منطقة يوجد الجسيم

2

يتواجد الجسيم في المنطقة التي بين L و 0 ~~...~~ بحيث $L = x = 0$

$\psi_2(x=L)=0$ & $\psi_2(x=0)=0$ ~~...~~ ψ_2

ب/ اكتب معادلة شرودنجر في المنطقة التي يوجد فيها الجسيم

تكتب معادلة شرودنجر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + V\psi_{(x)} = E\,\psi_{(x)}$$

$\underline{\underline{V = 0}}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = E\,\psi_{(x)}$$

$$\int \frac{y'}{y} \int -2$$

6/باستخدام نتيجة السؤال عدد 5 أكتب الحل y على شكله النهائي

$$\int \frac{y'}{y} \int -2$$

7/ أوجد حل هذه المعادلة التفاضلية باستخدام الطريقة البسيطة

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$y' = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$y' + 2y = 0$$

$$\int \frac{y'}{y} \int = 2$$

8/ أثبت أن لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!} = e^{-2x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!} = e^{-2x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)x}{1+1} = e^{-2x}$$

$-2x$

2

$$= \frac{-2x}{\dots} = e$$

$y' + 2y = 0$

[illegible]

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 a_n x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} = 2 a_n \right] x^n$

$a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_n$ 2

4/ أحسب قيمة a_n في حالة استخدام القيم التالية للمتغير n

$n = 0$ …… $a_0 = \frac{-2}{0+1} a_0 = \frac{-2}{1!} a_0$

$n = 1$ …… $a_1 = \frac{-2}{2} a_0 = \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{1} a_0$

$= \frac{-2^2}{2!} a_0$ 2

$n = 2$ …… $a_2 = \frac{-2}{3} a_2 = \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{1} a_0$

$= \frac{-2^3}{3!} a_0$

$n = 3$ …… $a_3 = \frac{-2}{4} a_3 = \frac{-2}{4} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{1} a_0$

$a_3 = \frac{-2^4}{4!} a_0$

$n = 4$ …… $a_4 = \frac{-2}{5} a_4 = \frac{-2}{5} \cdot \frac{-2}{4} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{1} a_0$

$= \frac{-2^5}{5!} a_0$

$n = 5$ …… $a_5 = \frac{-2}{5} a_5 = \frac{-2}{6} \cdot \frac{-2}{5} \cdot \frac{-2}{4} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{1} a_0$

$= \frac{-2^6}{6!} a_0$ 2

5/ بين أن العلاقة التكرارية بين a_n, n و a_0 تكتب على الشكل التالي

$$a_n = \frac{(-2)^n}{n!} a_0$$

$\cancel{\int \frac{(-2)^n}{n!}}$

$\int \frac{y'}{y} + \frac{2y}{y}$

$\int \frac{y'}{y} \int -2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{(x)_2}}{\partial x^2}=E\psi_{(x)_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_{(x)_2}}{\partial x^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_{(x)_2}$$

2

3/ أوجد حل معادلة شرودنجر (الدالة الموجية) في المنطقة التي يوجد فيها الجسيم ثم بين المعنى الفيزيائي كل جزء منها

$$\frac{\partial^2\psi_{(x)_2}}{\partial x^2}=-k^2\psi_{(x)_2} \qquad k=\frac{2m}{\hbar^2}E$$

$$\frac{\partial^2\psi_{(x)_2}}{\partial x^2}+k^2\psi_{(x)_2}=0$$ الحل العام ويتكون من جزئين

$$\psi_{(x)}=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$ الجزء المنعكس

الجزء الساقط

1 1

4/ المنطقة (1) و(3) غير مسموح للجسيم بالانتقال أو التواجد فيها لماذا

لأن: $V=\infty$ وبالتالي فإن الدالة الموجية ψ تساوي صفر اي بمعنى

$\psi(x=0)=\psi_2(x=L)=0$ 2

5/ بالاعتماد على الشروط الحدودية $\psi_2(x=L)=0$ و $\psi_2(x=0)=\psi_3(x=L)=0$

أ. احسب الثابت $\mathbf{k}$ و بين أن هذه القيمة مكممة

$$\psi_{(x)}=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

$x=0 \Rightarrow$ $$=Ae^{(ik\cdot 0)}+Be^{-ik\cdot 0}\Rightarrow Ae^{0}+Be^{0}\Rightarrow \boxed{A+B=0}\Rightarrow B=-A$$

2

$$\psi_1=Ae^{ikx}-Ae^{-ikx}=0$$

$$A(e^{ikx}-e^{-ikx})=0\Rightarrow e^{ikx}-e^{-ikx}=0$$ نستخدم صيغة اويلر

$A\neq 0$ 2

$$2i\frac{(e^{ikx}-e^{-ikx})}{2i}\Rightarrow \sin kL=0$$ 1 ينتج

$$kL=n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{L}$$

$2i\neq 0$

ب- احسب الثابت $\mathbf{A}$ بالاعتماد على شرط المعايرة $\int_0^L|\psi_2|^2dx=1$

أجب على الأسئلة التالية

السؤال الأول:

1/ ماهي الخصائص الفيزيائية للموجة المستوية

سعة ثابتة (A) ويمثل $(\omega t - kx)$ طور الموجة

والتي تعبر عن طول موجي واحد ويمكن [illegible] الحركة لطور انطلاقاً من العقد

$d(\omega t - kx) = 0$

$\omega dt - k dx = 0$

$\omega dt = k dx \longrightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt} = v_{ph}$

2

2/ ماهو الفرق بين الموجة المستوية والحزمة الموجية واي منهما يمكنها مرافقة الجسيم المادي

تعتبر الحزمة الموجية عبارة عن مجموعة من الموجات المستوية متقاربة وتستطيع الدالة الموجية [illegible] لان الجسيم لا يرافقه في موجة واحدة بل [illegible] موجات متراكبة مع بعضها لتعطي الشكل النهائي للدالة الموجية [illegible] الموجات الناتجة عن [illegible] الجسيم في كل [illegible] تتطلب [illegible] موجة في [illegible] ~~متراكبة~~ تتطابق [illegible] تداخلاً بناءً لتعطي الشكل النهائي.

3/ لماذا نستخدم الدالة الموجية لمرافقة الجسيم المادي في ميكانيكا الكم

لان الجسيم لا يرافقه [illegible] ~~موجة~~ موجة واحدة بل بمجموعة موجات متراكبة مع بعضها [illegible]

... الموجة ψ

... موجية

$|\psi(x,t)|^2$

4- إذا كانت الدالة $\psi(x,t)$ تعطى بالعلاقة ادناه فاوجد

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{a+iBt}}\; i(\omega t - kx)$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi t}{a+iB}}\; e^{i(\omega t - kn)}$$

$$\psi^*(x,t) = \sqrt{\frac{\pi t}{a+iB}}\; e^{-i(\omega t - kn)}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\cdot\psi(x,t)$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\pi t}{a+iB}}\right]^2 \underbrace{e^{+i(\omega t - kn)}\, e^{-i(\omega t - kn)}}_{e^0}$$

$$= \frac{\pi t}{a+iB}$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

لدينا موجتين مستويتين Ψ_1 و Ψ_2 ونريد جمعهما ،موجة بعدد موجي k وتردد ω والأخرى بعدد موجي k+Δk وتردد ω+Δω.

$$\Psi_1(t,x) = A\, e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\Psi_2(t,x) = A\, e^{i[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x]}$$

1/ بين نوع الموجتين Ψ_1 و Ψ_2

$\Psi_1(t,x) = A e^{i(\omega t - kx)}$

موجة مستوية

$\Psi_2(t,x) = A e^{i[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x]}$ موجة مستوية

2

2/ أحسب قيمة الموجة Ψ : $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$

$\Psi_1(\omega, k)$

$\Psi_1 = A e^{i(\omega t - kx)}$

$\Psi_2 = (k+\Delta k, \omega+\Delta\omega)$

$\Psi_2 = A e^{i(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x)}$

$\Psi_3 = \Psi_1 + \Psi_2$

$= A e^{i(\omega t - kx)} + A e^{i(\omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta k x)}$

$= A e^{i(\omega t - kx)} + A e^{i(\omega t - kx)} e^{i(\Delta\omega - k - \Delta k x)}$

$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega}{2}$

$$\psi_g = A e^{i(wt-kx)} e^{i\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)} + e^{-i\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)}$$

$$\psi_g = 2A e^{i(wt-kx)} e^{i\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)}$$

$$\frac{e^{i\left(\frac{\Delta w t}{2} - \frac{\Delta k}{2}x\right)} + e^{-i\left(\frac{\Delta w t}{2} - \frac{\Delta k}{2}x\right)}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$$

3/ حدد نوع الموجة ψ

حزمة موجية

4/ اذا كانت الدالة $\psi(x,t)$ تعطى بالعلاقة ادناه فأوجد $|\psi(x,t)|^2$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}}\, e^{i(wt-kx)}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}}\, e^{i(wt-kx)}$$